Master 1 - Mathématiques
MM046 « Équations aux dérivées partielles »
Examen du 14/05/2014

Ni les documents, ni les calculatrices ne sont autorisés.
Tout téléphone portable trouvé allumé pendant l'épreuve sera saisi.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. Montrer que l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} \varphi\left(\frac{1}{p}\right)$$

définit une distribution dont on déterminera le support et l'ordre.

Exercice 2. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E_\lambda) \qquad\qquad x \cdot T' = \lambda \cdot T,$$

où l'inconnue T est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et λ est un paramètre réel.

1. On suppose $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer une base et la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (E_λ) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$.
   (b) Trouver toutes les solutions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de (E_λ) qui sont supportées en l'origine.
   (c) Montrer que, si T est une solution de (E_λ), alors T' est une solution de $(E_{\lambda-1})$.
2. On suppose dans cette question que $\lambda > -1$. Trouver toutes les solutions de (E_λ) (on pourra se servir des distributions $x_\pm^\lambda = (\pm x)^\lambda \cdot H(\pm x)$).
3. On suppose que $\lambda < -1$ et que ce n'est pas un entier négatif. On écrit alors $\lambda = \mu - n$ pour $0 < \mu < 1$ et $n \in \mathbb{N}$, et on définit les deux distributions $S_{\lambda,\pm} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ comme les dérivées n-ièmes de $x_\pm^\mu$ (où $x_\pm = \pm x \cdot H(\pm x)$), c'est-à-dire,
$$S_{\lambda,\pm} = \left(x_\pm^\mu\right)^{(n)}.$$
   (a) Montrer que $S_{\lambda,\pm}$ sont des solutions de (E_λ) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer les restrictions de $S_{\lambda,\pm}$ à $\mathbb{R}^*$.
   (c) En déduire la forme générale des solutions de (E_λ) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4. On suppose que $\lambda = -m$ où $m \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, solution de (E_{-m}). Calculer $(x^m \cdot T)'$.
   On définit
$$s_m = \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$
   (b) Vérifier que s_1 est solution de (E_{-1}).
   (c) Résoudre l'équation (E_{-m}) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Calculer dans $\mathbb{R}^3$, la transformée de Fourier de $(x, y, z) \mapsto e^{i(x^2+y^2-z^2)}$.

Exercice 4. Supposons $d \geq 2$. On rappelle que

— le noyau de Poisson de la boule ouverte $B(0,R)$ ($R>0$) est donné par $P_R(x,y) = \dfrac{R^2-|x|^2}{s_{d-1}\, R|x-y|^d}$ où s_d est le volume de la sphère unité de dimension d,

— le noyau de Poisson de la boule ouverte $B(0,R)$ est la dérivée le long de la normale extérieure au bord de la boule $B(0,R)$ de la fonction de Green de la boule $B(0,R)$.

1. Dans $\mathbb{R}^d$, on considère u une fonction harmonique positive ou nulle sur la boule ouverte $B(0,R)$ ($R>0$).
   Montrer l'inégalité de Harnack suivante : pour $|x|<R$, on a
   $$R^{d-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{d-1}}u(0) \le u(x) \le R^{d-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{d-1}}u(0)$$
   On pourra commencer par raisonner sur les boules $\overline{B(0,R')}$ pour $0<R'<R$.
   En déduire que
   $$\sup_{B(0,R/2)} u \le 3^d \inf_{B(0,R/2)} u.$$
2. Montrer que si $(u_n)_n$ est suite de fonctions harmoniques sur $B(0,R)$ telle que $u_n \to u$ localement uniformément (i.e. uniformément sur tout compact) sur $B(0,R)$, alors u est harmonique sur $B(0,R)$.
3. Déduire des question 1. et 2. le théorème de Harnack, à savoir,

   Théorème. *Soit $(u_n)_{n\ge 0}$ une suite croissante de fonctions harmoniques sur $B(0,R)$ (i.e. pour $x \in B(0,R)$ et $n \ge 0$, $u_n(x) \le u_{n+1}(x)$) telle que $(u_n(0))_n$ est de Cauchy. Alors, il existe u harmonique sur $B(0,R)$ telle que $u_n \to u$ localement uniformément sur $B(0,R)$.*