Master 1 - Mathématiques
MM046 « Équations aux dérivées partielles »
Épreuve du 05/03/2014

Ni les documents, ni les calculatrices ne sont autorisés.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment différentiable.
En utilisant la méthode des caractéristiques, résoudre l'équation suivante

$$\begin{cases} x\,\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - t\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = f(u) \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \quad , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$$

Exercice 2. On rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k} - \log n\right)$ existe et est finie ; on l'appelle γ.

1. Montrer que l'expression
$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{p}\right) - n\varphi(0) - \log n \cdot \varphi'(0)\right)$$
définit une distribution dont on déterminera le support S.
2. Calculer l'ordre de T.

Exercice 3. 1. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, trouver $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que
$$\langle \delta_0^{(\alpha)}, \varphi_\alpha\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^d \setminus \{\alpha\}, \quad \langle \delta_0^{(\beta)}, \varphi_\alpha\rangle = 0.$$

2. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'})$. On suppose que le support de T est inclus dans $\mathbb{R}^d \times \{0\}$.
   (a) Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on définit $\langle T_\varphi, \psi\rangle := \langle T, \varphi \otimes \psi\rangle$ pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d'})$. Montrer que T_φ est une distribution.
   (b) Montrer qu'il existe $n \ge 0$ et des coefficients complexes $(S_a(\varphi))_{|a|\le n}$ indexés par des multi-indices $a = (a_1, \ldots, a_{d'})$ tels que $T_\varphi = \displaystyle\sum_{|a|\le n} S_a(\varphi)\partial^a\delta_0$ où δ_0 est la masse de Dirac en 0 dans $\mathbb{R}^{d'}$.
   (c) En déduire que T se décompose de façon unique en une somme finie de la forme $T = \displaystyle\sum_{|a|\le n} S_a \otimes \partial^a\delta_0$ où $S_a \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.
3. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$. On suppose que le support de T est contenu dans $D_X \cup D_Y$, la réunion des deux droites de coordonnées $D_X = \{(x,0);\ x \in \mathbb{R}\}$ et $D_Y = \{(0,y);\ y \in \mathbb{R}\}$.
   (a) On considère $T_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*}$ (resp. $T_{|\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}}$), la distribution T restreinte à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ (resp. $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$). Montrer qu'il existe des distributions $(S_a)_{0\le a\le n}$ (resp. $(U_a)_{0\le a\le m}$) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ telles que $T_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*} = \sum_{a=0}^n \delta_0^{(a)} \otimes S_a$ (resp. $T_{|\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}} = \sum_{a=0}^m U_a \otimes \delta_0^{(a)}$).
   (b) Montrer que les distributions pour $(S_a)_a$ et $(U_a)_a$ se prolongent toutes en des distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.
   (c) En déduire qu'il existe S_X et S_Y dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ à support respectivement dans D_X et D_Y telles que $T = S_X + S_Y$.
   (d) A-t-on unicité de la décomposition de la question 2.c ?