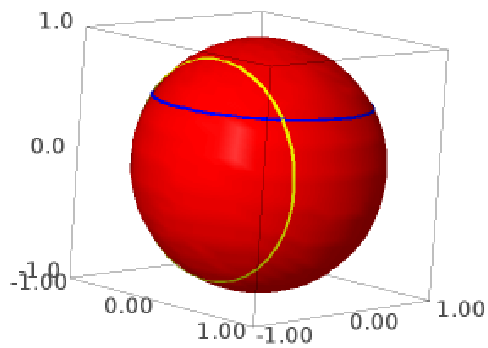
Master 1 - Mathématiques
4M046 « Équations aux dérivées partielles »
Corrigé de l'épreuve du 02/03/2015

Exercice 1. 1. Pour déterminer le flot de X_k, on résout le système différentiel $\dot{x}_j = x_i$, $\dot{x}_i = -x_j$ et $\dot{x}_k = 0$. On obtient $x_i = x_i(t_0)\cos(t-t_0) - x_j(t_0)\sin(t-t_0)$, $x_j = x_j(t_0)\cos(t-t_0) + x_i(t_0)\sin(t-t_0)$, $x_k(t) = x_k(t_0)$ (voir le polycopié section 2.2.1).
2. La courbe intégrale de X_k passant par le point de coordonnées x_i^0,x_j^0 et x_k^0 est donc un cercle dans le plan $\{x_k = x_k^0\}$ centré au point de coordonnées $c_i = c_j = 0$ et $c_k = x_k^0$ et de rayon $\sqrt{(x_i^0)^2 + (x_j^0)^2}$. Deux exemples sont représentés sur la figure ci-dessous.

3. Les intégrales premières de X_k sont les fonctions qui sont constantes sur les courbes intégrales de X_k. Or celles-ci sont paramétrées par le centre du cercle soit le point x_k et le rayon du cercle ou son carré soit $(x_i)^2+(x_j)^2$; elle est donc de la forme $f(x_i^2 + x_j^2, x_k)$ où f est une fonction de $(\mathbb{R}^2)^*$ à valeurs réelles. On veut de plus qu'une intégrale première soit différentiable sur $(\mathbb{R}^3)^*$.
4. Si F est une intégrale première à la fois de X_i et X_j, alors par la question précédente, il existe f_i et f_j différentiable sur $(\mathbb{R}^2)^*$ telles que



$$\begin{aligned} F(x_i, x_j, x_k) &= f_i(x_k^2 + x_j^2, x_i) = f_j(x_k^2 + x_i^2, x_j) \\ &= f_i(r^2 - x_i^2, x_i) = f_j(r^2 - x_j^2, x_j) \end{aligned}$$

où $r^2 = x_i^2 + x_j^2 + x_k^2$.
Donc F ne dépend pas de x_k. La dernière équation nous dit de plus que F est constante sur les intersections de la sphère centrée en l'origine de rayon r et un plan quelconque parallèle à $x_i = 0$ ainsi que sur les intersections de la sphère centrée en l'origine de rayon r et un plan quelconque parallèle à $x_j = 0$. Or deux points quelconques de la sphère centrée en l'origine de rayon r peuvent être joints par la réunion d'un arc de cercle inscrit dans cette sphère et dans un plan parallèle à $x_i = 0$ (par exemple, dans le cercle bleu représenté sur la figure ci-dessus) et d'un arc de cercle inscrit dans la sphère et dans un plan parallèle à $x_j = 0$ (par exemple, dans le cercle jaune représenté sur la figure ci-dessus). On en déduit que F est constante sur toute sphère centrée en l'origine i.e. F est à symétrie sphérique : $F(x_i, x_j, x_k) = g(r)$ où $r = \sqrt{x_i^2 + x_j^2 + x_k^2}$.

Exercice 2. 1. Le champ de vecteur caractéristique de l'équation étudié est le champ radial. Ses courbes intégrales sont données par $x(t) = t\sigma$ pour $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $t \in \mathbb{R}^{+*}$. La méthode des caractéristiques nous dit alors de chercher les solutions u sous la forme $u\left(e^t\sigma\right) = U(t)$. Pour U ainsi définie, l'équation (1) devient $U' = g(U)$ et $U(1) = f(\sigma)$. La fonction g ne s'annulant pas, la fonction $t \mapsto 1/g(t)$ est continue et de signe fixe ; soit G_{s_0} sa primitive s'annulant en $s_0 \in \mathbb{R}$ i.e. $G_{s_0}(s) = \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{1}{g(t)}dt$. G_{s_0} est monotone et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle ouvert $G_{s_0}(\mathbb{R})$. La solution de $U' = g(U)$ et $U(0) = f(\sigma)$ vérifie donc $G_{f(\sigma)}(U(t)) = t$. Ainsi $U(t) = G_{f(\sigma)}^{-1}(t)$ pour $t \in G_{f(\sigma)}(\mathbb{R})$. On voit que si $\inf G_0(\mathbb{R}) > -\infty$ [resp. $\sup G_0(\mathbb{R}) < +\infty$] alors $u\left(e^t\sigma\right) = U(t)$ explose quand $t \to (\inf G_{f(\sigma)}(\mathbb{R}))^+$ [resp. quand $t \to (\sup G_{f(\sigma)}(\mathbb{R}))^-$].
Supposons que $\inf G_0(\mathbb{R}) = -\infty$ et $\sup G_0(\mathbb{R}) = +\infty$. Alors on peut définir $u(x) = G_{f(\sigma)}^{-1}(\log|x|)$ pour $x = |x|\sigma$. Comme $(s, s_0) \mapsto G_{s_0}(s)$ est continue (voir la formule explicite) et que f est continue sur $\mathbb{S}^{d-1}$, la fonction u ainsi obtenue est continue ; elle est donc localement intégrable et définit une distribution sur $\mathbb{R}^*$. Montrons qu'elle est solution de (1) dans $\mathcal{D}'((\mathbb{R}^d)^*)$. D'abord $u(\sigma) = f(\sigma) = G_{f(\sigma)}^{-1}(0)$ car $G_{f(\sigma)} = 0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty((\mathbb{R}^d)^*)$. On calcule

$$\left\langle \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \sum_{j=1}^d \frac{\partial (x_j\,\varphi)}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle u, \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle - d\langle u, \varphi\rangle$$

En faisant un changement de variables en polaire, utilisant Fubini puis en intégrant par parties, on calcule

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{S}^{d-1}} G^{-1}_{f(\sigma)}(\log r)\, r^d \,\frac{d}{dr}(\varphi(r\sigma))drd\sigma \\ &\qquad - d\int_{\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{S}^{d-1}} G^{-1}_{f(\sigma)}(\log r)\varphi(r\sigma)\, r^{d-1} drd\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left[\int_{\mathbb{R}^{+*}} \frac{d}{dr}\left(G^{-1}_{f(\sigma)}(\log r)\, r^d\right)\varphi(r\sigma)dr \right. \\ &\qquad \left. -d\int_{\mathbb{R}^{+*}} G^{-1}_{f(\sigma)}(\log r)\, r^{d-1}\,\varphi(r\sigma)dr\right] d\sigma.\end{aligned}$$

Or

$$\frac{d}{dr}\left(G^{-1}_{f(\sigma)}(\log r)\, r^d\right) = d\, G^{-1}_{f(\sigma)}(\log r)\, r^{d-1} + \frac{r^{d-1}}{G'_{f(\sigma)}[G^{-1}_{f(\sigma)}(\log r)]} = d\, G^{-1}_{f(\sigma)}(\log r)\, r^{d-1} + g(u(r\sigma))r^{d-1}.$$

On obtient donc

$$\left\langle \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{S}^{d-1}} g(u(r\sigma))\,\varphi(r\sigma)\, r^{d-1}drd\sigma = \langle g(u), \varphi\rangle.$$

Donc, u est bien solution de (1) au sens des distributions.
Si on ne suppose plus $\inf G_0(\mathbb{R}) = -\infty$ ou $\sup G_0(\mathbb{R}) = +\infty$, le calcul ci-dessus reste vrai dans tout ouvert dans lequel u est défini.
Si on suppose que f est continûment dérivable sur $\mathbb{S}^{d-1}$, on démontre que u est continûment dérivable et solution de (1) au sens classique i.e. au sens des fonctions.
2. Si $g\circ f$ ne s'annule pas, on sait que g garde un signe fixe sur un voisinage du compact $f(\mathbb{S}^{d-1})$. On peut donc intégrer l'équation (1) comme dans la première question pour $t\sigma$ dans ce voisinage. On obtient ainsi à nouveau une solution de (1) au voisinage de $\mathbb{S}^{d-1}$.

Exercice 3. 1. Soit $(a_p)_{p\geq 1}$ une suite réelle. Si K est un compact de $\mathbb{R}^*$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K \subset]-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty[$. Donc pour φ à support dans K, on a

$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^n a_p \cdot \varphi\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{1\leq p\leq 1/\varepsilon} a_p \cdot \varphi\left(\frac{1}{p}\right).$$

Ainsi, pour φ à support dans K,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \left(\sum_{1\leq p\leq 1/\varepsilon} |a_p|\right) \sup_{x\in K} |\varphi(x)|.$$

Donc T définit une distribution sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi $\mathcal{S}_* = \{(a_p)_{p\geq 1};\ a_p \in \mathbb{R}\}$.
2. Si T définit une distribution sur $\mathbb{R}$, alors en appliquant T à φ une fonction test égale à 1 sur $[0,1]$, on voit que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^n a_p$ existe i.e. que la série $\sum_{p=1} a_p$ converge simplement.

Supposons réciproquement que cette série converge. On note $A_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$ si $n \geq 1$ et $A_0 = 0$. Alors, on calcule

$$\sum_{p=1}^{n} a_p \cdot \varphi\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{p=1}^{n} (A_p - A_{p-1}) \cdot \varphi\left(\frac{1}{p}\right) = \sum_{p=1}^{n-1} A_p \cdot \left(\varphi\left(\frac{1}{p}\right) - \varphi\left(\frac{1}{p+1}\right)\right) + A_n \cdot \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme $(A_n)_{n\geq 0}$ converge, elle est bornée. On a donc

$$\begin{aligned}|\langle T, \varphi\rangle| &\leq \sup_{n\geq 0} |A_n| \left(|\varphi(0)| + \sum_{p\geq 1} \left|\varphi\left(\frac{1}{p}\right) - \varphi\left(\frac{1}{p+1}\right)\right|\right) \leq \sup_{n\geq 0} |A_n| \left(|\varphi(0)| + \sum_{p\geq 1} \int_{\frac{1}{p+1}}^{\frac{1}{p}} \left|\varphi'(x)\right| dx\right) \\ &\leq \sup_{n\geq 0} |A_n| \left(|\varphi(0)| + \sup_{x\in[0,1]} \left|\varphi'(x)\right|\right)\end{aligned}$$

Donc, T définit bien une distribution sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\mathcal{S} = \left\{(a_p)_{p\geq 1};\ \sum_{p\geq 1} a_p \text{ converge}\right\}$.

3. Soit $(a_p)_{p\geq 1}$ telle que $\sup_{p\geq 1} p^{-k}|a_p| < +\infty$ pour un $k > 0$. Soit $n > k$ un entier. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle U, \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} a_p \cdot \left(\varphi\left(\frac{1}{p}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!\, p^k}\right)$$

Cette limite existe car la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n nous garantit que

$$\left|\varphi\left(\frac{1}{p}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!\, p^k}\right| \leq p^{-n-1} \sup_{x\in[0,1]} \left|\varphi^{(n+1)}(x)\right|$$

et comme $n > k$, par hypothèse sur $(a_p)_{p\geq 1}$,

$$\sum_{p\geq 1} |a_p|\, p^{-n-1} \leq \left(\sup_{p\geq 1} |a_p|\, p^{-k}\right) \sum_{p\geq 1} p^{-(n-k)-1} < +\infty.$$

Ceci démontre aussi qu'il existe $C > 0$ tel que pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$|\langle U, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in[0,1]} \left|\varphi^{(n+1)}(x)\right|$$

Donc U est une distribution sur $\mathbb{R}$ à support compact d'ordre au plus $n+1$.
Enfin, si $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^*)$, on a $\langle U, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$. U est donc un prolongement de T à $\mathbb{R}$.
4. Soit $(a_p)_{p\geq 1}$ telle que, pour tout k, $\sup_{p\geq 1} p^{-k}|a_p| = +\infty$. Supposons que U est un prolongement de T à $\mathbb{R}$. Pour $p \geq 1$, on définit $b_p = \frac{1}{\sqrt{\max_{1\leq q\leq p} |a_q|}}$. Par notre hypothèse sur $(a_p)_{p\geq 1}$, on voit que, pour tout $n > 0$, $b_p p^n \underset{p\to+\infty}{\to} 0$. En effet, on a

$$b_p p^n = \frac{1}{\sqrt{\max_{1\leq q\leq p} |a_q| p^{-2n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{\max_{1\leq q\leq p} |a_q| q^{-2n}}} \quad \text{et} \quad \max_{1\leq q\leq p} |a_q| q^{-2n} \underset{p\to+\infty}{\to} +\infty.$$

De plus, comme $\limsup_{p\to+\infty} |a_p| = +\infty$, la suite des entiers $\mathcal{P} := \{p \in \mathbb{N};\ \max_{1\le q\le p} |a_q| = |a_p|\}$ est infinie. Donc

$$\limsup_{p\to+\infty} |a_p| b_p = \limsup_{p\to+\infty} \frac{\sqrt{|a_p|}}{\sqrt{\max_{1\le q\le p} |a_q|/|a_p|}} \ge \limsup_{\substack{p\to+\infty\\ p\in\mathcal{P}}} \sqrt{|a_p|} = +\infty$$

Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ positive de support dans $[-1,1]$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[-1/2, 1/2]$. Alors la suite de fonctions $(\chi_p)_{p\ge1}$ définies par $\chi_p(x) = b_p\, \chi(4p^2(x-1/p))$ tend vers 0 dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$; en effet, elles sont à support dans $1/p + [-1/(4p^2), 1/(4p^2)] \subset [0,2]$ et leurs dérivées vérifient

$$\sup_{x\in[0,2]} |\chi_p^{(k)}(x)| \le p^{2k} b_p \sup_{x\in[-1,1]} |\chi^{(k)}(x)|$$

et donc tendent vers 0.
On en déduit que

$$|a_p| b_p = |a_p| \chi_p\left(\frac{1}{p}\right) = \langle U, \chi_p\rangle \underset{p\to+\infty}{\to} 0$$

or $\limsup_{p\to+\infty} |a_p| b_p = +\infty$. On obtient ainsi une contradiction et T ne se prolonge donc pas à $\mathbb{R}$.

Exercice 4. 1. Comme $x \mapsto e^{-1/x}$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$, on calcule $e^{-1/x}(x^2T' + T) = (e^{-1/x}T)'$. Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$, on résout l'équation différentielle homogène associée à (3) pour trouver comme solutions les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} C_+\, e^{1/x} \text{ si } x > 0, \\ C_-\, e^{1/x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

pour deux constantes $C_\pm$.
On remarque de plus que

$$x^2(\mathbf{1}_{]1,+\infty[})' + \mathbf{1}_{]1,+\infty[} = x^2\delta_1 + \mathbf{1}_{]1,+\infty[} = \delta_1 + \mathbf{1}_{]1,+\infty[}.$$

Donc, la solution de générale l'équation différentielle (3) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{1}_{]1,+\infty[} + C_+\, e^{1/x} \text{ si } x > 0, \\ C_-\, e^{1/x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

2. Comme $\mathbf{1}_{]1,+\infty[}$ est une solution de (3) sur $\mathbb{R}$, il ne reste qu'à résoudre l'équation homogène sur $\mathbb{R}$. La restriction d'une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^*$ est une solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$. On en déduit que dans $\mathbb{R}^*$, cette solution,disons U, prend la forme ci-dessus. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ positive de support dans $[-1,1]$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[-1/2, 1/2]$. Alors la suite de fonctions $(\chi_n)_{n\ge1}$ définies par $\chi_n(x) = \chi(n^2(x-1/n))e^{-\sqrt{n}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$; en effet, elles sont à support dans $1/n + [-1/n^2, 1/n^2] \subset [0,2]$ et leurs dérivées vérifient

$$\sup_{x\in[0,2]} |\chi_n^{(k)}(x)| \le n^{2k} e^{-\sqrt{n}} \sup_{x\in[-1,1]} |\chi^{(k)}(x)|$$

et donc tendent vers 0.
On en déduit que

$$C_+ e^{n/2-\sqrt{n}} n^{-2} \le \int \chi_n(x) e^{1/x} dx = \langle U, \chi_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Donc $C_+ = 0$. Ainsi, la solution de générale l'équation différentielle (3) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{1}_{]1,+\infty[} \text{ si } x > 0, \\ C_-\, e^{1/x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$