**Master 1 - Mathématiques**
**MM046 « Équations aux dérivées partielles »**
**Corrigé de l'épreuve du 04/05/2015**

**Exercice 1.**

1. On veut donc résoudre le système d'équations différentielles $\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = -tx \end{cases}$. On obtient comme solutions $t = t$ et $x = x(0)e^{-t^2/2}$.

2. Soit $u$ une solution $\mathcal{C}^1$ de l'équation aux dérivées partielles donnée dans la question 2. Pour $x_0$ fixé, considérons la fonction $t \mapsto v(t) = u\left(t, x_0 e^{-t^2/2}\right)$. On calcule
$$\frac{dv}{dt} = \partial_t u\left(t, x_0 e^{-t^2/2}\right) - t\left(x_0 e^{-t^2/2}\right)\partial_x u\left(t, x_0 e^{-t^2/2}\right) = 0.$$
Donc $u\left(t, x_0 e^{-t^2/2}\right) = v(t) = v(0) = u(0, x_0)$. Ainsi on obtient que $u(t,x) = u\left(0, xe^{t^2/2}\right) = f\left(xe^{t^2/2}\right)$ si on pose $f(x) = u(0,x)$.

3. La question précédente donne immédiatement que la solution de ce problème de Cauchy est unique donnée par $u(t,x) = \left(xe^{t^2/2}\right)^2 = x^2 e^{t^2}$.

4. Par la question 2., on sait qu'une solution de ce problème de Cauchy a la forme $u(t,x) = f\left(xe^{t^2/2}\right)$ ; ainsi $t \mapsto u(t,0)$ est constante. Le problème de Cauchy considéré n'a donc pas de solutions.

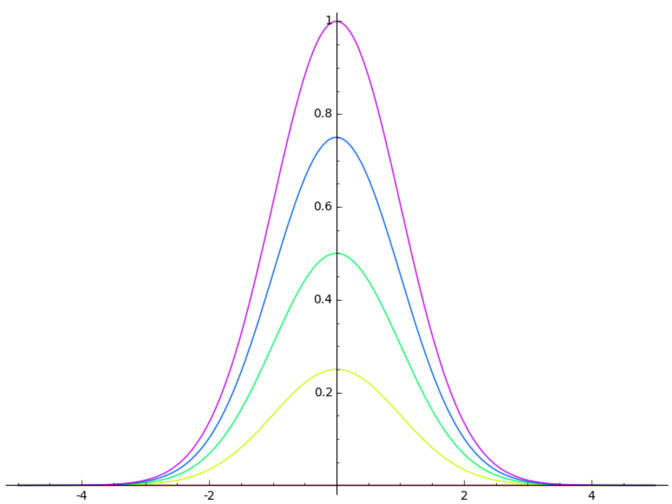


Figure 1 – Tracé de différentes courbes intégrales

**Exercice 2.**

1. On estime
$$(1)\qquad |\langle T_N, u\rangle| \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{n}} \left|u\left(\frac{1}{n}, y\right)\right| dy \le \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |u(x,y)| \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \le \frac{\pi^2}{6} \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |u(x,y)|.$$
Donc $T_N$ est bien une distribution sur $\mathbb{R}^2$ ; de plus elle est d'ordre 0 et de support compact contenu dans $[0,1]^2$ ; elle est donc dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$. Soit $\mathcal{S}_N := \bigcup_{n=1}^{N}\left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Si $\operatorname{supp} u \cap \mathcal{S}_N = \emptyset$ alors, clairement, $\langle T_N, u\rangle = 0$. D'autre part, si $(x,y) \in \mathcal{S}_N$, alors il existe $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ positive ou nulle

telle que $u \equiv 1$ au voisinage de $(x,y)$. Donc $\langle T_N, u\rangle > 0$ (car tous les termes de la somme sont positifs ou nuls et l'un au moins est strictement positif). Ainsi $\operatorname{supp} T_N = \mathcal{S}_N$.

De même, on estime $|\langle S_N, u\rangle| \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_0^{\frac{1}{n}} \left| u\left(\frac{1}{n}, y\right)\right| dy \leq \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |u(x,y)| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Donc $S_N$ est une distribution sur $\mathbb{R}^2$ d'ordre 0 et de support compact contenu dans $[0,1]^2$ ; elle est donc dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$. On voit comme ci-dessus que $\operatorname{supp} S_N \subset .\mathcal{S}_N$. D'autre part, si $(x,y) \in \mathcal{S}_N$, alors il existe $1 \leq n \leq N$ tel que $(x,y) \in \left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Comme les compacts $\left(\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \times \left[0, \dfrac{1}{n}\right]\right)_{1\leq n\leq N}$ sont deux à deux disjoints, il existe $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ positive ou nulle telle que $u \equiv 1$ au voisinage de $(x,y)$ et $\operatorname{supp} u \cap \left(\mathcal{S}_N \setminus \left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = \emptyset$. Donc $(-1)^n \langle T_N, u\rangle = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} u\left(\frac{1}{n}, y\right) dy > 0$. Ainsi $\operatorname{supp} S_N = \mathcal{S}_N$.

2. La convergence absolue de la somme dans l'avant-dernière inégalité de (1) nous dit immédiatement que $(T_N)_N$ converge dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ vers $T$ qui vérifie $|\langle T, u\rangle| \leq \dfrac{\pi^2}{6} \displaystyle\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |u(x,y)|$ i.e. qui est d'ordre 0

   Pour $S_N$, en utilisant la formule de Taylor à l'ordre avec reste intégral en 0 dans la variable $x$, on écrit

$$
\begin{aligned}
\langle S_N, u\rangle &= \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{n}} u(0,y)\, dy + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2} \int_{[0,1]^2} \partial_x u\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right) dx dy \\
&= -\sum_{n=1}^{m_M} \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n-1}} u(0,y)\, dy + r_N + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2} \int_{[0,1]^2} \partial_x u\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right) dx dy
\end{aligned}
\tag{2}
$$

   où $m_N = N/2$ et $r_N = 0$ si $N \in 2\mathbb{N}$ et $m_N = (N-1)/2$ et $r_N = (-1)^N \displaystyle\int_0^{\frac{1}{N}} u(0,y)\, dy$ si $N \in 2\mathbb{N}+1$. On voit ainsi que

$$
\langle S, u\rangle := \lim_{N\to+\infty} \langle S_N, u\rangle = -\int_{\cup_{n\geq 1}\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]} u(0,y)\, dy + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \int_{[0,1]^2} \partial_x u\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\right) dx dy.
$$

   et que $|\langle S, u\rangle| \leq \displaystyle\sup_{y\in[0,1]} |u(0,y)| + \frac{\pi^2}{6} \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |\partial_x u(x,y)|$.

   Donc $S$ définit une distribution d'ordre au plus 1 à support dans $[0,1]^2$ et $(S_N)_{N\geq 1}$ converge vers $S$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$.

3. On définit le compact $\mathcal{S}_\infty = \overline{\displaystyle\bigcup_{N\geq 1} \mathcal{S}_N} = \bigcup_{N\geq 1} \mathcal{S}_N \cup \{(0,0)\}$. Par la question 1, on a que $\operatorname{supp} T \subset \mathcal{S}_\infty$ et $\operatorname{supp} S \subset \mathcal{S}_\infty$. La preuve faite en question 1 montre que, pour tout $N$, $\mathcal{S}_N \subset \operatorname{supp} T$ et $\mathcal{S}_N \subset \operatorname{supp} S$. Donc $\bigcup_{N\geq 1} \mathcal{S}_N \subset \operatorname{supp} T$ et $\bigcup_{N\geq 1} \mathcal{S}_N \subset \operatorname{supp} S$. Comme le supports sont fermés, $\operatorname{supp} T = \operatorname{supp} S = \mathcal{S}_\infty$.

4. Par l'estimée obtenue en question 2., on sait que $T$ est d'ordre 0.

   Montrons que $S$ est d'ordre 1. Il suffit de montrer qu'elle n'est pas d'ordre 0. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(]-2,2[)$, $0 \leq \chi \leq 1$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $]-1,1[$. Pour $N \geq 2$, on pose

$$
u_N(x,y) = \left[\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \chi\left(8N^2\left(x - \frac{1}{n}\right)\right)\right] \chi(y).
$$

   Clairement $u_N \in \mathcal{C}_0^\infty(]-2,2[^2)$ et $\displaystyle\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |u_N(x,y)| \leq 1$ (car pour $N \geq 2$, comme $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(]-2,2[)$, les fonctions $\left(x \mapsto \chi\left(8N^2\left(x - \frac{1}{n}\right)\right)\right)_{1\leq n\leq N}$ sont de supports deux à deux disjoints). Ainsi si $S$

était d'ordre 0, la suite $\langle S, u_N\rangle$ serait bornée. Or, en utilisant la formule de Taylor et $\chi(0)=1$, on calcule

$$\langle S, u_N\rangle = \lim_{M\to+\infty}\langle S_M, u_N\rangle = \langle S_N, u_N\rangle = \sum_{n=1}^{N}\int_0^{\frac{1}{n}}\chi(y)dy = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\int_{[0,1]^2} y\chi'\left(\frac{uy}{n}\right)dudy$$
$$= \log n + O(1).$$

Ainsi $S$ ne peut être d'ordre 0 et elle d'ordre au plus 1 ; elle est donc d'ordre 1.

**Exercice 3.** 1. Comme $T$ est a support compact et que $P$ est un polynôme donc $\mathcal{C}^\infty$, on sait que $T*P$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $(T*P)(x) = \langle T, P(x-\cdot)\rangle$. $P$ étant un polynôme de degré $N$, on a $P(x-y) = \sum_{|\alpha|\le N} x^\alpha P_\alpha(y)$ où $(P_\alpha)_{|\alpha|\le N}$ sont des polynômes. On en déduit que $(T*P)(x) = \sum_{|\alpha|\le N}\langle T, P_\alpha\rangle x^\alpha$. Ainsi, $T*P$ est un polynôme.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Supposons que $\varphi$ est à support dans $B(0,R)$. On calcule

$$(3)\quad \langle P_k, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\frac{k^d}{\pi^{d/2}}\left(1-\frac{|\,kx\,|^2}{k^3}\right)^{k^3}dx = \frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x/k)\mathbf{1}_{B(0,kR)}(x)\left(1-\frac{|\,x\,|^2}{k^3}\right)^{k^3}dx.$$

D'autre part, pour $|x| < kR$ et $k > R^2$, on a

$$\left(1-\frac{|\,x\,|^2}{k^3}\right)^{k^3} = e^{k^3\log\left(1-\frac{|x|^2}{k^3}\right)} \le e^{-k^3\frac{|x|^2}{2k^3}} = e^{-\frac{|x|^2}{2}}.$$

car $\log(1-u)\le -u/2$ pour $u\in[0,1[$ ; pour voir cela, on étudie la fonction $u\mapsto -\log(1-u)-u/2$ sur $[0,1[$ : elle s'annule en 0 et elle croît sur $[0,1[$ car sa dérivée est $u\mapsto \dfrac{1}{1-u} - 1/2 \ge 1/2 > 0$.

Donc l'intégrande dans la dernière intégrale de (3) est borné par la fonction $x\mapsto \|\varphi\|_\infty e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ qui est intégrable.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{k\to+\infty}\langle P_k,\varphi\rangle = \frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{k\to+\infty}\left(\varphi(x/k)\mathbf{1}_{B(0,kR)}(x)\left(1-\frac{|\,x\,|^2}{k^3}\right)^{k^3}\right)dx$$
$$= \frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{k\to+\infty}\varphi(x/k)\cdot\lim_{k\to+\infty}\mathbf{1}_{B(0,kR)}(x)\cdot\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{|\,x\,|^2}{k^3}\right)^{k^3}dx$$
$$= \frac{\varphi(0)}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^2}dx = \varphi(0).$$

Donc, $\lim_{k\to+\infty} P_k = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

3. Par les questions 1. et 2., si $T$ est une distribution à support compact, $(T*P_k)_k$ est une suite de polynôme et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, elle converge vers $T*\delta_0 = T$. Car, pour $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $U\mapsto T*U$ est continue de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

**Exercice 4.** 1. Si $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ alors $T'\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $xT\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\widehat{T'} = 2i\pi\xi\hat{T}$ et $\widehat{xT} = -\dfrac{1}{2i\pi}\partial_\xi\hat{T}$. Donc si $T$ est une solution de $(E_\alpha)$, $\hat{T}$ satisfait à l'équation

$$0 = \widehat{xT''} + 2\widehat{T'} + \alpha\hat{T} - \widehat{xT} = -\frac{1}{2i\pi}\partial_\xi(-4\pi^2\xi^2\hat{T}) + (4i\pi\xi+\alpha)\hat{T} + \frac{1}{2i\pi}\partial_\xi\hat{T}$$
$$= \frac{1}{2i\pi}\left(4\pi^2\xi^2+1\right)\partial_\xi\hat{T} + \alpha\hat{T}.$$

Donc comme $\xi \mapsto 1 + 4\pi^2\xi^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on obtient que $\hat{T}$ est solution de

$$\partial_\xi \hat{T} = \frac{-2i\alpha\pi}{1 + 4\pi^2\xi^2}\hat{T} \tag{4}$$

Commençons par résoudre cette équation dans les fonctions. Une primitive de $\xi \mapsto \dfrac{-2i\pi\alpha}{1 + 4\pi^2\xi^2}$ est donnée par $\xi \mapsto -i\alpha \arctan(2\pi\xi)$. La fonction $\xi \mapsto S(\xi) := e^{-i\alpha \arctan(2\pi\xi)}$ est solution de (4). Donc, $\xi \mapsto 1/S(\xi) = e^{i\alpha \arctan(2\pi\xi)}$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ; de plus, elle est bornée donc à croissance lente. Donc si $\hat{T}$ est solution de (4) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$), on sait que $U = (1/S)\hat{T}$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$). Donc par (4) pour $S$ et $\hat{T} = SU$, on obtient que

$$\partial_\xi U = S^{-1}\left(\partial_\xi \hat{T} - \frac{-2i\alpha\pi}{1 + 4\pi^2\xi^2}\hat{T}\right) = 0.$$

Donc $U$ est constante. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$\hat{T} = Ce^{-i\alpha \arctan(2\pi\xi)}.$$

Ceci vaut pour les solutions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ comme dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. On écrit

$$\hat{T} = Ce^{-i\alpha \arctan(2\pi\xi)} = C\left(e^{-i\alpha \arctan(2\pi\xi)} - e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}\right) + Ce^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}$$

Or on sait que, si on définit la fonction sign par $\operatorname{sign}(\xi) = 1$ quand $\xi > 0$ et $\operatorname{sign}(\xi) = -1$ quand $\xi < 0$, alors

$$\arctan(2\pi\xi) = \operatorname{sign}(\xi)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi\xi} + g(\xi) \text{ où } g(\xi) = O(\xi^{-3}) \text{ quand } |\xi| \to +\infty.$$

De plus la fonction $g$ est $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^*$.
Quand $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{-ia\frac{\pi}{2}} = e^{ia\frac{\pi}{2}}$. Donc, si $\chi$ est une fonction dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}(1-\chi)\left(\hat{T} - Ce^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}\right) &= C(1-\chi)e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}\left(e^{-i\alpha/(2\pi\xi) - iag(\xi)} - 1\right) \\ &= -C(1-\chi)e^{-ia\frac{\pi}{2}}\frac{i\alpha}{2\pi\xi} + h(\xi) = -C(1-\chi)\frac{iae^{-ia\frac{\pi}{2}}}{2\pi}\mathrm{vp}\frac{1}{\xi} + h(\xi)\end{aligned}$$

où $h$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$h(\xi) := C(1-\chi)(\xi)e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}\left(e^{-i\alpha/(2\pi\xi) - i\alpha g(\xi)} - 1 + \frac{i\alpha}{2\pi\xi}\right) = O(\xi^{-3}) \text{ quand } |\xi| \to +\infty.$$

Ainsi $h$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. On écrit alors, avec $h$ intégrable,

$$\hat{T} = (1-\chi)\hat{T} + \chi\hat{T} = a + b\,\mathrm{vp}\frac{1}{\xi} + \chi\left(\hat{T} - a - b\,\mathrm{vp}\frac{1}{\xi}\right) + h$$

Comme la distribution $\chi\left(\hat{T} - a - b\,\mathrm{vp}\frac{1}{\xi}\right)$ est à support compact, sa transformée de Fourier inverse est $\mathbb{C}^\infty$ ; comme $h$ est intégrable, sa transformée de Fourier inverse est continue. La transformée de Fourier inverse de la constante $a$ est un multiple de $\delta_0$ et celle de $\mathrm{vp}\frac{1}{\xi}$ est la somme d'une constante et d'un multiple de la fonction de Heaviside. On en déduit que $T$ s'écrit comme une combinaison linéaire d'une masse de Dirac en 0, d'une fonction de Heaviside et d'une fonction continue sur la droite réelle. Sa restriction à $\mathbb{R}^*$ est donc continue et admet des limites à droite et à gauche en 0.

**Exercice 5.** 1. Clairement si $u$ est harmonique dans $B(x_0, r)$, $u_{x_0}$, définie par $u_{x_0}(x) = u(x_0 + x)$, est harmonique dans $B(0, r)$. On peut donc supposer $x_0 = 0$ dans les deux premiers points de cette question.

(a) Comme $u$ est harmonique, $u$ est $C^\infty$ ; elle ainsi que ses dérivées sont bornées sur les compacts de $\Omega$. Les fonctions $(x, y) \mapsto \nabla u(xy)$ et $(x, y) \mapsto u(xy)$ sont bornées et continues sur $K_0 \times K_1$ quand $K_0 \subset [0, +\infty[$ et $K_1 \subset B(0, c_0)$ sont compacts tels $K_0 \cdot K_1 := \{xy; x \in K_0,\ y \in K_1\} \subset B(0, c_0)$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme pour calculer, pour $b \leq c < c_0$,

$$\frac{d}{dc}\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u\left(b^2c^{-1}y\right)\, u(cy)\, d\sigma(y)\right) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u\left(b^2c^{-1}y\right)\, \nabla u(cy)\cdot y - u(cy)\, \frac{b^2}{c^2}\nabla u\left(b^2c^{-1}y\right)\cdot y d\sigma(y).$$

Si on pose $v(x) := u(cx)$ et $w(x) := u\left(b^2c^{-1}x\right)$ alors $v$ et $w$ sont harmoniques dans $B(0, 1)$ et on a

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u\left(b^2c^{-1}y\right)\, \nabla u(cy)\cdot y d\sigma(y) = c^{-(d-1)} \int_{\partial B(0,c)} w\frac{\partial v}{\partial n} d\sigma,$$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(cy)\, \frac{b^2}{c^2}\nabla u\left(b^2c^{-1}y\right)\cdot y d\sigma(y) = c^{-(d-1)} \int_{\partial B(0,c)} v\frac{\partial w}{\partial n} d\sigma.$$

Ainsi, grâce à la formule de Gauss-Green, on calcule

$$\begin{aligned}\frac{d}{dc}\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u\left(b^2c^{-1}y\right)\, u(cy)\, d\sigma(y)\right) &= c^{-(d-1)} \int_{\partial B(0,c)} \left(w\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial w}{\partial n}\right) d\sigma \\ &= c^{-(d-1)} \int_{B(0,c)} (w\Delta v - v\Delta w)\, dx = 0\end{aligned}$$

comme $v$ et $w$ sont harmoniques.
On obtient ainsi l'égalité voulue :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u^2(by)\, d\sigma(y) &= \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u\left(b^2x^{-1}y\right)\, u(xy)\, d\sigma(y)\right)_{|x=b} \\ &= \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u\left(b^2x^{-1}y\right)\, u(xy)\, d\sigma(y)\right)_{|x=c} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(ay)\, u(cy)\, d\sigma(y).\end{aligned}$$

(b) Supposons que $u$ est constante égale à $U$ dans $B(0, \varepsilon)$ ; on peut alors appliquer l'égalité précédente à la fonction $u - U$, qui est aussi harmonique, pour $a \in [0, \varepsilon[$ et $b = \sqrt{c_0 a}$. Comme $u - U$ s'annule sur $a\mathbb{S}^{d-1}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (u - U)^2(x_0 + by)\, d\sigma(y) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (u - U)(x_0 + ay)\, (u - U)(x_0 + cy)\, d\sigma(y) = 0.$$

La fonction $(u - U)^2$ étant continue est positive, on sait qu'elle s'annule sur $\sqrt{c_0 a}\mathbb{S}^{d-1}$. Or $\bigcup_{a\in[0,\varepsilon[} \sqrt{c_0 a}\mathbb{S}^{d-1} = B(0, \sqrt{c_0\varepsilon})$. Ainsi $u$ est constante égale à $U$ sur $B(0, \sqrt{c_0\varepsilon})$.

(c) Soit $\Omega'$ l'ensemble des points de $x \in \Omega$ tels que $u$ est constante au voisinage de $x$. $\Omega'$ est non vide par hypothèse. Cet ensemble est par définition ouvert et par hypothèse non vide. Il est fermé par la question précédente. En effet, soit $(x_n)_n$ telle $x_n \in \Omega'$ et $x_n \to x_\infty \in \Omega$. Alors $B(x_\infty, c_\infty) \subset \Omega$ pour un certain $c_\infty > 0$. Il existe $x_n$ tel que $|x_n - x_\infty| < c_\infty/4$. Donc, $B(x_n, c_\infty/2) \subset \Omega$ et, comme $x_n \in \Omega'$, il existe $0 < \varepsilon_n < c_\infty/2$ tel que $u$ est constante sur $B(x_n, \varepsilon_n)$. Ainsi par la question précédente, par récurrence, $u$ est constante sur $B(x_n, r_k)$ pour tout $k \geq 0$ où $r_k$ est définie par $r_0 = \varepsilon_n$ et $r_{k+1} = \sqrt{r_k c_\infty/2}$. Par récurrence, on vérifie que pour tout $k$, on a $0 < r_k < c_\infty/2$ et que $r_k < r_{k+1}$. Donc $r_k$ converge vers $r_\infty$ qui vérifie $r_\infty = \sqrt{r_\infty c_\infty/2}$, soit encore $r_\infty = c_\infty/2$. On en déduit que $u$ est constante sur $B(x_n, c_\infty/2) \supseteq B(x_\infty, c_\infty/4)$ (car $|x_n - x_\infty| < c_\infty/4$). Ainsi $x_\infty \in \Omega'$.
Comme $\Omega$ est connexe, on sait que $\Omega' = \Omega$.

2. On applique le résultat de la question précédente à $u - v$.