Master 1 - Mathématiques
MM046 ≪ Équations aux dérivées partielles ≫
Corrigé de l'épreuve du 04/05/2015

Exercice 1. Cet exercice est l'exercice 3 de la feuille de travaux dirigés 2.

Exercice 2.

1. On calcule $\varphi\left(x, e^{-1/x^2}\right) - \varphi(x,0) = e^{-1/x^2}\int_0^1 \partial_y\varphi\left(x, e^{-1/x^2}t\right)dt$. Donc, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R]^2$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left|\left[\varphi\left(x, e^{-1/x^2}\right) - \varphi(x,0)\right]\right| e^{1/x}dx &\leq \int_0^{+\infty} e^{-1/x^2+1/x}\int_0^1\left|\partial_y\varphi\left(x, e^{-1/x^2}t\right)\right|dtdx \\ &= \int_0^{R} e^{-1/x^2+1/x}\int_0^1\left|\partial_y\varphi\left(x, e^{-1/x^2}t\right)\right|dtdx \\ &\leq \left(\int_0^R e^{-1/x^2+1/x}dx\right)\sup_{(x,y)\in[0,R]^2}\left|\partial_y\varphi(x,y)\right|.\end{aligned}$$

Donc l'intégrale (3) de l'énoncé est bien convergente et on a

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leq \left(\int_0^R e^{-1/x^2+1/x}dx\right)\sup_{(x,y)\in[0,R]^2}\left|\partial_y\varphi(x,y)\right|.$$

et, ainsi, T est une distribution d'ordre au plus 1.

2. Montrons que le support de T est $\mathcal{S} := \{(x, e^{-1/x^2}); x>0\} \cup \{(x,0); x\geq 0\}$, la réunion de deux courbes. Soit $z=(x,y)\notin\mathcal{S}$. Alors, il existe $r>0$ tel que $\overline{B(z,r)}\cap\mathcal{S}=\emptyset$: en effet, si $x<0$, on peut prendre $r=|x|/2$ et, si $x\geq 0$, on peut prendre $r=\min\left(|y|/2, \left|e^{-1/x^2}-y\right|/2\right)$ (on a prolongé $x\mapsto e^{-1/x^2}$ par continuité en 0). Donc, si $\operatorname{supp}\varphi\subset\overline{B(z,r)}$, on a

$$\varphi\left(x, e^{-1/x^2}\right) - \varphi(x,0) = 0, \quad \forall x>0.$$

Ainsi $\langle T,\varphi\rangle = 0$. Donc $\operatorname{supp}T\subset\mathcal{S}$.
Soit $x_0>0$ et $y_0=0$ ou $y_0=e^{-1/x_0^2}$. Soit $\tilde\varphi\geq 0$ infiniment dérivable à support dans $\overline{B(z_0,r)}$ telle que $\tilde\varphi = 1$ sur $\overline{B(z_0,r/2)}$ où $z_0=(x_0,y_0)\in\mathcal{S}$ et $r=e^{-1/x_0^2}/3$. On pose $\varphi=\sigma\tilde\varphi$ où $\sigma=-1$ si $y_0=0$ et $\sigma=1$ si $y_0=e^{-1/x_0^2}$. Donc $x\mapsto\varphi\left(x,e^{-1/x^2}\right)-\varphi(x,0)$ est positive et égale à 1 au voisinage de x_0. Donc $\langle T,\varphi\rangle>0$. Ainsi $(x_0,y_0)\in\operatorname{supp}T$ et, donc, $\{(x,e^{-1/x^2});x>0\}\cup\{(x,0);x>0\}\subset\operatorname{supp}T$. Comme $\operatorname{supp}T$ est fermé, on a $\mathcal{S}\subset\operatorname{supp}T$.

3. On sait déjà que T est d'ordre au plus 1. Montrons que T est d'ordre 1 par la contraposée. Si T était d'ordre 0, il existerait $C>0$ telle que, si $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(B(0,1))$, alors $|\langle T,\varphi\rangle|\leq C\|\varphi\|$. Soit alors, pour $n\geq 2$, $\varphi_n\in\mathcal{C}_0^\infty(B(0,2/n))$ vérifiant $0\leq\varphi\leq 1$ telle que $\varphi_n\equiv 1$ sur $[1/(2n)-1/(100n), 1/(2n)+1/(100n)]\times[-e^{-16n^2}, e^{-16n^2}]$ et $\varphi_n\equiv 0$ hors de $[1/(2n)-1/(100n), 1/(2n)+1/(100n)]\times[-e^{-9n^2}, e^{-9n^2}]$. Alors

$$C\geq|\langle T,\varphi_n\rangle|\geq\int_{1/(2n)-1/(100n)}^{1/(2n)+1/(100n)} e^{1/x}dx \geq \frac{e^{100n/49}}{50n}\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$$

Ce qui est absurde.

4. Montrons que T est tempérée. Soit $\chi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\chi\equiv 1$ dans $B(0,1)$ et $0\leq\chi\leq 1$. Il suffit de

montrer que $(1-\chi)T$ est tempérée (car χT l'est étant à support compact). On calcule

$$\begin{aligned}
|\langle(1-\chi)T,\varphi\rangle| &\le \left|\int_1^{+\infty}\varphi\left(x,e^{-1/x^2}\right)e^{1/x}dx\right| + \left|\int_1^{+\infty}\varphi\left(x,0\right)e^{1/x}dx\right| \\
&\le e\left|\int_1^{+\infty}\varphi\left(x,e^{-1/x^2}\right)dx\right| + e\left|\int_1^{+\infty}\varphi\left(x,0\right)dx\right| \\
&\le e\int_1^{+\infty}\frac{1+x^2+e^{-2/x^2}}{1+x^2}\left|\varphi\left(x,e^{-1/x^2}\right)\right|dx + e\int_1^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^2}|\varphi\left(x,0\right)|dx \\
&\le 2e\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\right)\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left|(1+x^2+y^2)\varphi(x,y)\right|
\end{aligned}$$

Ainsi $(1-\chi)T$ est tempérée.

Exercice 3.

1. Pour $z\in\overline{\mathbb{C}}_+^*$, la fonction localement intégrable $x\mapsto e^{i\pi z x^2}$ définit une distribution tempérée car elle est bornée. On calcule $T_z' = 2iz\pi x T_z$.
2. Donc $2i\pi\xi\hat{T}_z = -\dfrac{2i\pi z}{2i\pi}(\hat{T}_z)'$, c'est-à-dire $(\hat{T}_z)' = -2i\pi\xi z^{-1}\hat{T}_z$. Ainsi $\hat{T}_z = C(z)e^{-i\pi z^{-1}\xi^2} = C(z)\,T_{-z^{-1}}$. Remarquons que l'application $z\to -z^{-1}$ est une bijection analytique de $\overline{\mathbb{C}}_+^*$ dans lui même.
3. Pour $z\in\mathbb{C}_+^*$, on a $T_z\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc, dans ce cas,
$$C(z)=\int_{\mathbb{R}}e^{i\pi z x^2}dx.$$
Soit $z_0\in\mathbb{C}_+^*$ et $z\in D(z_0,\mathrm{Im}\,z_0/2)$. Alors
$$e^{i\pi z x^2}=\lim_{N\to+\infty}e^{i\pi z_0 x^2}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{(i\pi)^n x^{2n}}{n!}(z-z_0)^n\right)$$
Or
$$\left|e^{i\pi z_0 x^2}\sum_{n=0}^{N}\frac{(i\pi)^n x^{2n}}{n!}(z-z_0)^n\right|\le e^{-\pi(\mathrm{Im}\,z_0-|z-z_0|)x^2}$$
Et la fonction $x\mapsto e^{-\pi(\mathrm{Im}\,z_0-|z-z_0|)x^2}$ est intégrable car $|z-z_0|<\mathrm{Im}\,z_0/2$. Donc par convergence dominée, pour $z\in D(z_0,\mathrm{Im}\,z_0/2)$, on a
$$C(z)=\sum_{n\ge 0}\frac{(i\pi)^n}{n!}(z-z_0)^n\int_{\mathbb{R}}e^{i\pi z_0 x^2}x^{2n}dx.$$
Ainsi C est analytique sur $\mathbb{C}_+^*$.
4. Soit $z\in\overline{\mathbb{C}}_+^*$ et $z'\in\overline{\mathbb{C}}_+^*$. Pour $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on calcule
$$\begin{aligned}
|\langle T_z,\varphi\rangle-\langle T_{z'},\varphi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}}e^{i\pi z x^2}(1-e^{-\pi(z'-z)x^2})\varphi(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\pi x^2}(1-e^{-\pi(z'-z)x^2})}{1+x^2}(1+x^2)\varphi(x)dx\right| \\
&\le 2\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1-e^{-\pi(z'-z)x^2}}{1+x^2}dx\right)\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|\varphi(x)|
\end{aligned}$$
Or, quand $z'\to z$ dans $\overline{\mathbb{C}}_+^*$, l'intégrale entre parenthèse tend vers 0 par convergence dominée. D'où la continuité de $z\mapsto T_z$.
5. Soit $z_0\in\overline{\mathbb{C}}_+^*$. Comme $T_{-z_0^{-1}}\neq 0$, il existe $\varphi_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\langle T_{-z_0^{-1}},\varphi_0\rangle\neq 0$. Par continuité de $z\mapsto T_z$ et $z\to z^{-1}$, il existe $r_0>0$ tel que, pour $z\in\overline{\mathbb{C}}_+\cap D(z_0,r_0)$, $\langle T_{-z^{-1}},\varphi_0\rangle\neq 0$. Donc, pour $z\in D(z_0,r_0)$, on a $C(z)=\dfrac{\langle T_z,\varphi_0\rangle}{\langle T_{-z^{-1}},\varphi_0\rangle}$. Mais par continuité de $z\mapsto T_z$ et $z\to z^{-1}$, le numérateur et le dénominateur de ce quotient sont continus sur $\overline{\mathbb{C}}_+\cap D(z_0,r_0)$; ainsi C l'est aussi.

6. Pour $y > 0$,
$$C(iy) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{y}}$$
où $\sqrt{\cdot}$ est la détermination principale de la racine i.e. celle positive sur le demi-axe positif. Donc sur $i\mathbb{R}$, $C(z) = \dfrac{1}{\sqrt{-iz}}$. Par analyticité sur $\mathbb{C}_+^*$ et continuité sur $\overline{\mathbb{C}}_+^*$, on a que $C(z) = \dfrac{1}{\sqrt{-iz}} = \dfrac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{z}}$ pour $z \in \overline{\mathbb{C}}_+^*$; ici, $\sqrt{\cdot}$ est toujours la détermination principale de la racine.
7. Dans $\mathbb{R}^d$, on a $e^{i|x|^2} = T_{1/\pi} \otimes \cdots \otimes T_{1/\pi}$ où il y a d facteurs dans le produit tensoriel. Ainsi, par les questions précédentes,
$$\widehat{e^{i|x|^2}} = \hat{T}_{1/\pi} \otimes \cdots \otimes \hat{T}_{1/\pi} = \left(e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}T_{-\pi}\right) \otimes \cdots \otimes \left(e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}T_{-\pi}\right) = e^{id\pi/4}\pi^{d/2}e^{-i\pi^2|\xi|^2}.$$
8. De même, on calcule
$$\begin{aligned}\widehat{e^{i(x^2+y^2-z^2)}} &= \hat{T}_{1/\pi} \otimes \hat{T}_{1/\pi} \otimes \hat{T}_{-1/\pi} = \left(e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}T_{-\pi}\right) \otimes \left(e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}T_{-\pi}\right) \otimes \left(e^{-i\pi/4}\sqrt{\pi}T_{\pi}\right) \\ &= e^{i\pi/4}\pi^{3/2}e^{-i\pi^2(\xi^2+\eta^2-\tau^2)}.\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. La fonction N est localement intégrable sur $\mathbb{R}^3$; elle définit donc une distribution. D'autre part, on reconnaît en N la solution fondamentale du Laplacien, i.e., $\Delta N = \delta_0$ (voir le cours).
2. Calculons $\partial_i N = \dfrac{\partial}{\partial x_i} N$ (on écrit $x = (x_1, x_2, x_3)$) si $x \neq 0$:
$$\partial_i N = \frac{-x_i}{4\pi|x|^3}.$$
Cette fonction est encore localement intégrable. Ainsi $\partial_i\sigma$ est intégrable (comme $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$).
Ainsi, si $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^3$ t.q. $1 \leq |\alpha| \leq p+1$, on écrit $\alpha = \beta + e_i$ où $0 \leq |\beta| \leq p$ et e_i est l'un des vecteurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ou $(0,0,1)$, et on calcule $\partial^\alpha(f * \sigma) = (\partial^\beta f) * \partial_i\sigma$. Or par hypothèse $\partial^\beta f$ est continue et $\partial_i\sigma$ est intégrable ; ainsi $(\partial^\beta f) * \partial_i\sigma$ est continue. I.e., $\partial^\alpha(f * \sigma)$ est encore continue.
3. Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathcal{C}_0^p(\mathbb{R}^3)$ qui converge vers f dans $\mathcal{C}_0^p(\mathbb{R}^3)$, i.e., les $(f_n)_n$ ont leurs supports dans un compact fixé et toutes les dérivées d'ordre inférieur à p des $(f_n)_n$ converge vers la dérivée correspondante de f en norme uniforme sur $\mathbb{R}^3$. Si $\forall n$, $\operatorname{supp} f_n \subset K$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset K'$ alors $\forall n$, $\operatorname{supp} f_n * \sigma \subset K + K'$. D'autre part, si $\alpha \in \mathbb{N}^3$ t.q. $1 \leq |\alpha| \leq p+1$, on écrit $\alpha = \beta + e_i$ où $0 \leq |\beta| \leq p$, alors, quand $n \to +\infty$, $\partial^\alpha(f_n * \sigma) = (\partial^\beta f_n) * \partial_i\sigma \to (\partial^\beta f) * \partial_i\sigma = \partial^\alpha(f * \sigma)$ en norme uniforme car si $a \in L^1(\mathbb{R}^3)$ et $b \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a $\|a * b\|_\infty \leq \|b\|_\infty\|a\|_1$. Ce qui démontre la continuité cherchée.
4. D'abord si T est d'ordre infini, l'inégalité recherchée est clairement vraie. Supposons maintenant T d'ordre fini.
Comme, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ et $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a $\langle T, U * \varphi\rangle = \langle U * T, \varphi\rangle$ et que les distributions d'ordre au plus p sont les formes linéaires continues sur $\mathcal{C}_0^p(\mathbb{R}^3)$, de la question précédente, on tire que si T est d'ordre au plus p, alors $T * \sigma$ est d'ordre au plus $p - 1$.
D'une part, comme $\varphi \equiv 1$ au voisinage de 0, on calcule
$$\Delta\sigma = \varphi\Delta N + 2\nabla\varphi \cdot \nabla + N\Delta\varphi = \delta_0 + \psi$$
où $\psi = 2\nabla\varphi \cdot \nabla + N\Delta\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$: en effet, N est $\mathcal{C}^\infty$ hors de 0 et $\nabla\varphi$ et $\Delta\varphi$ sont dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et à support hors d'un voisinage de 0.
D'autre part, on calcule
$$(\Delta T) * \sigma = \Delta(T * \sigma) = T * (\Delta\sigma) = T + T * \psi.$$
Donc, comme $T * \psi$ est $\mathcal{C}^\infty$, l'ordre de T est majoré par celui de $(\Delta T) * \sigma$, i.e., celui de ΔT moins 1. Ceci démontre l'inégalité.

5. Supposons que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ vérifie $\Delta T + gT = f$ où g est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ et f est d'ordre 0. Montrons qu'alors f est d'ordre 0. En effet, ΔT est d'ordre au plus l'ordre de T i.e.

$$\text{ordre}(\Delta T) \leq \text{ordre}(T) \leq \max(0, \text{ordre}(\Delta T) - 1).$$

Ainsi ΔT est d'ordre 0 et donc T est d'ordre 0.
Si maintenant $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ vérifie $\Delta T + gT = f$ où g et f sont dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Alors, par récurrence, on voit que $\partial^\alpha f$ vérifie

$$\Delta(\partial^\alpha T) + g\partial^\alpha T + \sum_{\substack{|\beta| \leq |\alpha|-1 \\ |\gamma| \leq |\alpha|}} C_{\alpha,\beta,\gamma} \partial^\beta g\, \partial^\gamma T = \partial^\alpha f$$

Supposons $(\partial^\gamma T)_{|\gamma| \leq n}$ sont d'ordre 0. Alors, si $|\alpha| = n+1$, la distribution $\partial^\alpha f - \sum_{\substack{|\beta| \leq |\alpha|-1 \\ |\gamma| \leq |\alpha|}} C_{\alpha,\beta,\gamma} \partial^\beta g\, \partial^\gamma T$ est d'ordre 0. Donc, par le résultat précédent, $\partial^\alpha T$ est d'ordre 0.
Donc par récurrence, sous les hypothèses de la question 5., T et toutes ses dérivées sont d'ordre 0.

6. Montrons qu'alors T est $\mathcal{C}^\infty$. Pour cela il suffit de prouver que, pour tout $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, χT est dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.
Fixons $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. On sait que $U := \chi T$ est à support compact, d'ordre 0 ainsi que toutes ses dérivées. Donc, $\forall N \geq 0$, $\exists C_N > 0$ tel que, pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a

$$|\langle U, (1-\Delta)^N \varphi \rangle| = |\langle (1-\Delta)^N U, \varphi \rangle| \leq C_N \|\varphi\|_\infty$$

Si on applique ces inégalités aux fonctions $\varphi_\xi(x) = e^{-2i\pi x\xi}$ pour $\xi \in \mathbb{R}^3$, on obtient

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\hat{U}(\xi)|(1+\xi^2)^N \leq C_N.$$

Donc $\hat{U}$ est intégrable et la formule d'inversion de Fourier nous dit que

$$U(x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^3} e^{2i\pi x\xi} \hat{U}(\xi) d\xi.$$

Ainsi U est continue. Mais comme $|\hat{U}(\xi)|(1+\xi^2)^N$ est intégrable pour n'importe quelle valeur de N, on peut dériver cette formule sous le signe somme pour obtenir

$$\partial^\alpha U(x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^3} e^{2i\pi x\xi} (2i\pi\xi)^\alpha \hat{U}(\xi) d\xi.$$

et $\partial^\alpha U$ est aussi continue.
On voit ainsi que U est $\mathcal{C}^\infty$.

7. Pour obtenir l'inégalité dans un ouvert, on procède essentiellement de la même manière que dans la question 5. Il suffit de démontrer pour tout $x \in \Omega$, il existe r tel que $B(x,r) \subset \Omega$ et

$$\text{ordre}(T_{|B(x,r)}) \leq \max(0, \text{ordre}(\Delta T_{|\Omega}) - 1).$$

Soit $x \in \Omega$ et r tel que $B(x,4r) \subset \Omega$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(B(x,4r))$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $B(x,3r)$. Prenons φ utilisée pour définir σ à support dans $B(0,r)$; alors comme ci-dessus, on calcule alors

$$(\chi \Delta T) * \sigma + 2(\nabla\chi \nabla T) * \sigma + (T\Delta\chi) * \sigma = [\Delta(\chi T)] * \sigma = \Delta((\chi T) * \sigma) = (\chi T) * (\Delta\sigma) = \chi T + (\chi T) * \psi.$$

Comme $\chi \equiv 1$ sur $B(x,3r)$, on sait que $\nabla\chi \equiv 0$ et $\Delta\chi \equiv 0$ sur $B(x,3r)$; donc $\operatorname{supp} \sigma \subset B(0,r)$, on a $2(\nabla\chi\nabla T) * \sigma + (T\Delta\chi) * \sigma$ est nulle sur $B(x,2r)$. On a donc

$$[(\chi\Delta T) * \sigma]_{|B(x,2r)} = [\chi T]_{|B(x,2r)} + [(\chi T) * \psi]_{|B(x,2r)}.$$

Comme $\chi \equiv 1$ sur $B(0,r)$ et que $(\chi T) * \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que

$$\text{ordre}(T_{|B(x,r)}) \leq \text{ordre}((\chi T)_{|B(x,2r)}) \leq \text{ordre}(\chi \Delta T_{B(x,2r)}) - 1) \leq \text{ordre}(\chi\Delta T_{|\Omega}) - 1) \leq \text{ordre}(\Delta T_{|\Omega}) - 1).$$