Master 1 - Mathématiques
MM046 « Équations aux dérivées partielles »
Examen du 04/05/2015

Ni les documents, ni les calculatrices ne sont autorisés.
Tout téléphone portable trouvé allumé pendant l'épreuve sera saisi.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le champ de vecteurs $X(t,x) = (1, -t\,x)$.

1. Déterminer et tracer les courbes intégrales de X.
2. Montrer que les solutions (de classe $\mathcal{C}^1$) de l'équation
$$\partial_t u(t,x) - tx\partial_x u(t,x) = 0$$
s'écrivent nécessairement sous la forme $u(t,x) = f\left(xe^{t^2/2}\right)$ où f est une fonction $\mathcal{C}^1$.
3. Trouver toutes les solutions du problème de Cauchy
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - tx\partial_x u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = x^2. \end{cases}$$
4. Le problème de Cauchy
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - tx\partial_x u(t,x) = 0, \\ u(t,0) = t^2. \end{cases}$$
a-t-il des solutions ?

Exercice 2. Pour $N > 0$, on définit, pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,
$$\langle T_N, u\rangle = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \int_0^{\frac{1}{n}} u\left(\frac{1}{n}, y\right) dy \quad \text{et} \quad \langle S_N, u\rangle = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{n}} u\left(\frac{1}{n}, y\right) dy.$$

1. Montrer que, pour $N > 0$, $S_N \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ et $T_N \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$.
Donner leurs supports et leurs ordres.
2. Montrer que $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ quand $N \to +\infty$.
On notera T et S, leurs limites respectives.
3. Quels sont les supports respectifs de T et S ?
4. Quels sont les ordres respectifs de T et S ?

Exercice 3. Approximation de distributions par des polynômes.

1. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que, si P est un polynôme sur $\mathbb{R}^d$, il en est de même pour le produit de convolution $T * P$ dont on justifiera l'existence.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}^d$ par
$$P_k(x) = \frac{k^d}{\pi^{d/2}} \left(1 - \frac{|\, x\,|^2}{k}\right)^{k^3}.$$
Dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, calculer la limite de la suite P_k.
3. En déduire que toute distribution sur $\mathbb{R}^d$ à support compact est limite au sens des distributions d'une suite de polynômes.

Exercice 4. On fixe $\alpha \in \mathbb{C}$ et on s'intéresse aux solutions T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$(E_\alpha) \qquad xT'' + 2T' + (\alpha - x)T = 0.$$

1. Soit T une solution de (E_α) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
   Écrire l'équation satisfaite par sa transformée de Fourier, et la résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, si α est un entier relatif pair, pour T une solution de (E_α) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, il existe a et b, des constantes, telles que si χ est une fonction dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0 alors
   $$(1-\chi)\left[\hat{T} - a - b \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{\xi}\right)\right] \in L^1(\mathbb{R}).$$
3. En déduire que, lorsque α est un entier relatif pair, toute solution tempérée de (E_α) est définie sur $\mathbb{R}^*$ par une fonction continue, qui admet des limites à droite et à gauche en 0.

Exercice 5. Principe de prolongement unique pour les fonctions harmoniques.

1. Soit u une fonction harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Soit $x_0 \in \Omega$ et $c_0 > 0$ tels que $B(x_0, c_0) \subset \Omega$.
   (a) Soient $0 < a \leq b \leq c < c_0$ tels que $b^2 = ac$. Montrer que
   $$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u^2(x_0 + by)\, d\sigma(y) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u(x_0 + ay)\, u(x_0 + cy)\, d\sigma(y).$$
   À b fixé et $a = b^2/c$, on pourra dériver la deuxième intégrale par rapport à c (en justifiant le raisonnement) et se servir de la formule de Gauss-Green.
   (b) On suppose qu'il existe $\varepsilon \in]0, c_0[$ tel que u est constante dans $B(x_0, \varepsilon)$.
   Montrer que u est constante dans la boule $B(x_0, \sqrt{c_0 \varepsilon})$.
   (c) En déduire que si Ω est un ouvert connexe et si u est constante dans un ouvert non vide de Ω, alors u est constante sur tout Ω.
2. Démontrer le principe de prolongement unique suivant : si u et v sont harmoniques dans Ω, un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$, et que u et v coincident sur un ouvert non vide de Ω, alors u et v coincident sur tout Ω.