Master 1 - Mathématiques
MM046 « Équations aux dérivées partielles »
Examen du 19/06/2015

Ni les documents, ni les calculatrices ne sont autorisés.
Tout téléphone portable trouvé allumé pendant l'épreuve sera saisi.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. Soient b et v_0 deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec v_0 de support compact. Le but de l'exercice est de démontrer que le problème de Cauchy non linéaire

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + b(v(t;x))\dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x) = 0, \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

admet une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\{(t;x) \in \mathbb{R}^2;\ t \geq 0\}$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$(2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad b'(v_0(x))v_0'(x) \geq 0.$$

1. On suppose que v est une solution $\mathcal{C}^1$ de (1), et soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
Montrer que la fonction $t \geq 0 \mapsto x + t\, b(v_0(x))$ est la seule solution de l'équation différentielle
$$\begin{cases} z'(t) = b(v(t,z(t))), \\ z(0) = x \end{cases}$$
2. Montrer que l'application G_t de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G_t\ :\ x \in \mathbb{R} \mapsto x + t\, b(v_0(x))$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$, si et seulement si (2) est satisfaite.
3. On suppose que la condition (2) est satisfaite, et on note H_t l'inverse de G_t. Montrer que la fonction v définie par $v(t,x) := v_0(H_t(x))$ est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ du problème (1) sur $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2;\ t \geq 0\}$.
4. On suppose maintenant que la condition (2) n'est pas satisfaite. Montrer alors que le plus grand temps T pour laquelle une solution $\mathcal{C}^1$ de (1) existe est donné par $T = \dfrac{-1}{\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} b'(v_0(x))v_0'(x)}$.

Exercice 2. On considère l'expression

$$(3) \qquad \langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \left[\varphi\left(x, e^{-1/x^2}\right) - \varphi(x,0)\right] e^{1/x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

1. Montrer que l'integrale dans (3) converge et que T ainsi définie est une distribution sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer le support de T.
3. Déterminer l'ordre de T.
4. Est-ce-que T est tempérée ?

Exercice 3. Soit $\mathbb{C}_+^* = \{z \in \mathbb{C}^*;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ et $\overline{\mathbb{C}}_+^* = \{z \in \mathbb{C}^*;\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

1. Montrer que, pour $z \in \overline{\mathbb{C}}_+^*$ la fonction T_z définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{i\pi z x^2}$ definit une distribution tempérée et écrire une équation différentielle du premier ordre dont T_z est solution.
2. Montrer que $\hat{T}_z = C(z)T_{-z^{-1}}$.

3. Montrer que $z \mapsto C(z)$ est analytique sur $\mathbb{C}_+^*$.
4. Montrer que $z \mapsto T_z \in \mathcal{S}'$ est continue sur $\overline{\mathbb{C}}_+^*$.
5. En déduire que $z \mapsto C(z)$ est continue sur $\overline{\mathbb{C}}_+^*$.
6. Calculer $C(iy)$ pour $y > 0$ et en déduire $C(z)$ pour $x \in \overline{\mathbb{C}}_+^*$.
7. Calculer dans $\mathbb{R}^d$ la transformée de Fourier de la distribution définie par $x \mapsto e^{i|x|^2}$.
8. Calculer dans $\mathbb{R}^3$ la transformée de Fourier de $(x, y, z) \mapsto e^{i(x^2+y^2-z^2)}$.

Exercice 4. On définit $N(x) = \dfrac{1}{4\pi|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et $N(0) = 12$. On fixe $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ avec $\varphi \equiv 1$ au voisinage de 0. On note $\sigma = \varphi \cdot N$.

1. Montrer que N définit bien une distribution sur $\mathbb{R}^3$ et calculer ΔN.
2. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^3)$. Montrer que $f * \sigma$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que l'application $f \in \mathcal{C}_0^p(\mathbb{R}^3) \mapsto f * \sigma \in \mathcal{C}_0^{p+1}(\mathbb{R}^3)$ est continue.
4. En déduire que, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$,
$$\mathrm{ordre}(T) \leq \max(0, \mathrm{ordre}(\Delta T) - 1).$$
5. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ vérifie $\Delta T + gT = f$ où g et f sont dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, montrer que T et toutes ses dérivées sont d'ordre 0.
6. Que peut-on en déduire pour T ?
7. Pour Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^3$, montrer de même que
$$\mathrm{ordre}(T_{|\Omega}) \leq \max(0, \mathrm{ordre}(\Delta T_{|\Omega}) - 1).$$