Master 1 - Mathématiques
4M046 « ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES »
Épreuve du 02/03/2015

Ni les documents, ni les calculatrices ne sont autorisés.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. Dans $(\mathbb{R}^3)^*$, pour $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ tels que $i < j$, on considère le champ de vecteur $X_k = x_i \partial_{x_j} - x_j \partial x_i$.

1. Déterminer le flot de X_k.
2. Déterminer et dessiner les courbes intégrales de X_k.
3. Montrer que les intégrales premières de X_k sont de la forme $f(x_i^2 + x_j^2, x_k)$ où f est une fonction différentiable de $(\mathbb{R}^2)^*$ à valeurs réelles.
4. Pour $\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$, $i < j$, trouver les fonctions qui sont intégrales premières à la fois de X_i et X_j.

Exercice 2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $f : \ \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{R}$ continue (où $\mathbb{S}^{d-1}$ est la sphère unité de $\mathbb{R}^d$).

1. Supposons que la fonction g ne s'annule pas.
   En utilisant la méthode des caractéristiques, résoudre l'équation suivante

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{d} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = g(u) \text{ dans } (\mathbb{R}^d)^* \\ u(\sigma) = f(\sigma) \text{ pour } \sigma \in \mathbb{S}^{d-1} \end{cases} .$$

2. Étudier la même équation dans le cas où g peut s'annuler mais $g \circ f$ ne s'annule pas ?

Exercice 3. Soit $(a_p)_{p\geq 1}$ une suite de réels.

1. Trouver l'ensemble $\mathcal{S}_*$ des suites $(a_p)_{p\geq 1}$ pour lesquelles l'expression suivante, calculée pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^*)$,

$$(2) \qquad \langle T, \varphi \rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} a_p \cdot \varphi\left(\frac{1}{p}\right)$$

   définit une distribution sur $\mathbb{R}^*$.
2. Trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites $(a_p)_{p\geq 1}$ pour lesquelles l'expression (2) calculée pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que s'il existe $k \geq 0$ tel que $\sup\limits_{p\geq 1} |a_p|\, p^{-k} < +\infty$ alors, la distribution T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ définie par (2) peut être prolongée à $\mathbb{R}$ i.e. il existe $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $U_{|\mathbb{R}^*} = T$.
4. Montrer enfin que si, pour tout $k \geq 0$, on a $\sup\limits_{p\geq 1} |a_p|\, p^{-k} = +\infty$ alors, la distribution T de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$ définie par (2) ne peut pas être prolongée à $\mathbb{R}$ i.e. il n'existe pas de distribution U dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $U_{|\mathbb{R}^*} = T$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(3) \qquad x^2 T' + T = \mathbf{1}_{]1,+\infty[} + \delta_1.$$

1. Trouver toutes les solutions de (3) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$.
2. Trouver toutes les solutions de (3) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.