Master 1 - Mathématiques
MM046 « Équations aux dérivées partielles »
Corrigé de l'épreuve du 04/05/2015

Exercice 1.

1. La tangente à Σ en $(x, y) \in \Sigma$ est dirigée par le vecteur $(2y, -x)$. Le champ de vecteur $\mathcal{L}$ est orthogonal à la tangente, donc, co-linéaire à la normale à Σ ; il est donc transverse à Σ.
2. Le flot de $\mathcal{L}$ est donné par $(x(t), y(t)) = (e^t x(0), e^{2t} y(0))$. Les courbes intégrales sont donc des demi-paraboles si $x(0)y(0) \neq 0$ et des demi-droites sinon (voir la figure ci-dessous).
3. La fonction $\varphi : (x, y) \mapsto yx^{-2}$ est constante le long des courbes intégrales de $\mathcal{L}$; elle définit bien une intégrale première (non constante) de $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \neq 0\}$. Donc si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, $f \circ \varphi$ définit aussi une intégrale première sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \neq 0\}$. On choisit alors f de façon à ce que $f \circ \varphi$ se prolonge en une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On peut par exemple prendre $f(t) = \dfrac{t}{1 + t^2}$. Ainsi, la fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ est constante le long des courbes intégrales de $\mathcal{L}$; elle définit bien une intégrale première (non constante) de $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
4. On résout ce problème de Cauchy par la méthode des caractéristiques. Si u est une solution du problème de Cauchy et $(x(t), y(t))$ est le flot de $\mathcal{L}$ avec $(x(0), y(0)) \in \Sigma$, alors $v(t) := u(x(t), y(t))$ vérifie $\dot{v}(t) = 2v(t) + 4y^2(t)$. Par la variation de la constante et la formule obtenue pour $y(t)$ à la question 2 (on suppose $y(0)x(0) \neq 0$), on obtient $v(t) = cx^2(t) + 2y^2(t)$. La condition initiale donne $c = 1$. On obtient donc $u(x, y) = x^2 + 2y^2$ le long des courbes intégrales passant par les points de Σ hors des axes de coordonnées. On vérifie que $u(x, y) = x^2 + 2y^2$ est solution partout.

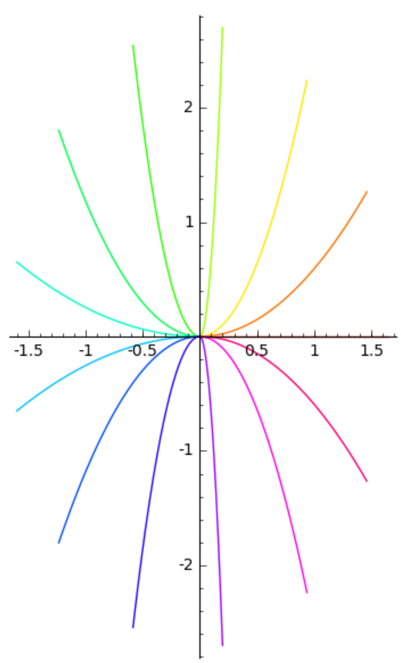

Figure 1 – Tracé de différentes courbes intégrales

Exercice 2. Il s'agit de la question 4 de l'exercice 9 de la feuille de TD 1 ; on se reportera à son corrigé.

Exercice 3.

1. D'une part, si $u > 0$, on a

$$\left| \frac{1}{u^2} \left[\varphi(u^2 \sin(1/u), u^2 \cos(1/u)) - \varphi(0, 0) \right] \right| \leq \frac{2}{u^2} \|\varphi\|_\infty.$$

D'autre part, par la formule de Taylor, on calcule

$$\begin{aligned}&\frac{1}{u^2}\left[\varphi(u^2\sin(1/u),u^2\cos(1/u))-\varphi(0,0)\right]\\&\quad=\int_0^1\big(\sin(1/u)\partial_x\varphi(tu^2\sin(1/u),tu^2\cos(1/u))+\cos(1/u)\partial_y\varphi(tu^2\sin(1/u),tu^2\cos(1/u))\big)\,dt.\end{aligned}$$

Donc, l'intégrale définissant T converge et on obtient

$$(1)\qquad |\langle T,\varphi\rangle|\leq\sqrt{2}\int_0^1\|\nabla\varphi\|_\infty du+\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2}\|\varphi\|_\infty du=\sqrt{2}\|\nabla\varphi\|_\infty+\|\varphi\|_\infty.$$

Donc T définit bien une distribution d'ordre au plus 1.

2. Soit $\mathcal{S}$ la spirale $\{u^2(\sin(1/u),\cos(1/u));u\geq 0\}$. Notons que $(0,0)\in\mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}$ est fermée. Si $(x,y)\notin\mathcal{S}$ alors $d((x,y),\mathcal{S})=\delta>0$. Si $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(B((x,y),\delta/2)$, on a $\langle T,\varphi\rangle=0$. Ainsi $\operatorname{supp}T\subset\mathcal{S}$. D'autre part, si $(x,y)\in\mathcal{S}\setminus\{(0,0)\}$, on peut trouver $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varphi\geq 0$, $\varphi((x,y))>0$ et tel que $(0,0)\notin\operatorname{supp}\varphi$. Alors
$$\langle T,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2}\varphi(u^2\sin(1/u),u^2\cos(1/u))du>0.$$
Donc $\mathcal{S}\setminus\{(0,0)\}\subset\operatorname{supp}T$.
Ainsi $\operatorname{supp}T=\mathcal{S}$ car $\operatorname{supp}T$ est fermé.

3. On sait que T est d'ordre au plus 1. Montrons qu'elle est d'ordre 1. Si elle était d'ordre 0, il existerait $K>0$ tel que
$$(2)\qquad \forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(B(0,3)),\quad |\langle T,\varphi\rangle|\leq K\|\varphi\|_\infty.$$
Soit $\chi\in\mathcal{C}_0^\infty(]-2,2[)$, $\chi\geq 0$ telle que $\chi\equiv 1$ sur $[-1,1]$. Soit $(r,\theta)=(\sqrt{x^2+y^2},\arctan(y/x))$ les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$. En coordonnées polaires, $\mathcal{S}=\{\theta=r^{-1/2};r\geq 0\}$. Pour $n\geq 1$, on pose $\chi_n(x,y)=\chi(2n^{1/2}(r-n^{-1/2}))\chi(n^3(\theta-r^{-1/2}))$. Cette fonction est dans $\mathcal{C}_0^\infty(B(0,3))$. D'autre part,
$$\langle T,\chi_n\rangle\geq\int_{n^{-1/2}/2}^{3n^{-1/2}/2}\frac{1}{u^2}du\geq\frac{4}{9}n^{1/2}.$$
Comme $\|\chi_n\|_\infty\leq\|\chi\|_\infty^2$, ceci contredit (2) quand on laisse n tendre vers $+\infty$.
Ceci nous dit que T est d'ordre exactement 1.

Pour $\delta>0$ et $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\{|x|>\delta^2\})$, on a
$$|\langle T,\varphi\rangle|\leq\int_\delta^{+\infty}\frac{1}{u^2}|\varphi(u^2\sin(1/u),u^2\cos(1/u))|du\leq\|\varphi\|_\infty\int_\delta^{+\infty}\frac{1}{u^2}du=\frac{1}{\delta}\|\varphi\|_\infty.$$
Ainsi, $T_{|\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est d'ordre 0.

4. L'estimée (1) montre que $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 4. 1. La distribution considérée est une fonction indéfiniment dérivable bornée ; elle définit donc une distribution tempérée.
Par la section 4.6.2 du polycopié « Real Analysis » de N. Lerner, on a
$$\widehat{e^{i(x^2-y^2-z^2)}}=e^{-i\pi/4}\pi^{3/2}e^{-i\pi^2(\xi^2-\eta^2-\tau^2)}.$$

2. La distribution considérée est à support compact (son support est la sphère unité de $\mathbb{R}^3$) ; elle est donc tempérée.
   Comme $\delta_{\mathbb{S}^2}$ est à support compact, sa transformée de Fourier est la fonction $\mathcal{C}^\infty$ définie par

$$\widehat{\delta_{\mathbb{S}^2}}(\xi) = \langle \delta_{\mathbb{S}^2}, e^{-2i\pi x\xi} \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-2i\pi\omega\xi} d\sigma(\omega) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-2i\pi\omega_1|\xi|} d\sigma(\omega)$$

   où $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et dans la dernière étape, on a utilisé l'invariance par rotation de la mesure de Lebesgue restreinte à la sphère unité.
   Par changement de variables en coordonnées sphériques, on obtient

$$\widehat{\delta_{\mathbb{S}^2}}(\xi) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2i\pi|\xi|\sin\theta} \cos\theta d\theta = -\frac{1}{i|\xi|} \left[e^{-2i\pi|\xi|\sin\theta} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\sin(2\pi|\xi|)}{|\xi|}.$$

Exercice 5.

1. On procède comme dans la preuve de la Proposition 5.1.3 du polycopié ≪ Partial Differential Equations ≫ de N. Lerner.
2. La démonstration se fait comme celle du Théorème 5.1.7 du polycopié ≪ Partial Differential Equations ≫ de N. Lerner.
3. La fonction v est clairement $\mathcal{C}^2$. Le calcul du Laplacien donne

$$\Delta v = \sum_{j=1}^d \partial_j(\phi' \circ u \cdot \partial_j u) = \sum_{j=1}^d \phi'' \circ u \cdot (\partial_j u)^2 + \phi' \circ u \cdot \Delta u = \phi'' \circ u \cdot \sum_{j=1}^d (\partial_j u)^2 \geq 0$$

   car ϕ est convexe.
   Donc v est sous-harmonique.
4. Comme u est harmonique, elle est $\mathcal{C}^\infty$ ainsi $v \in \mathcal{C}^2$. Le calcul du Laplacien donne

$$\begin{aligned}\Delta v &= \sum_{j=1}^d \partial_j^2 \left(\sum_{k=1}^d (\partial_k u)^2 \right) = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d 2\partial_j \left((\partial_{jk} u)(\partial_k u) \right) = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d 2(\partial_{jk} u)^2 + \sum_{k=1}^d 2\partial_k(\Delta u)(\partial_k u) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d 2(\partial_{jk} u)^2 \geq 0\end{aligned}$$

   comme u est harmonique.