Master 1 - Mathématiques
MM046 « Équations aux dérivées partielles »
Corrigé de l'épreuve du 16/06/2015

Exercice 1.

1. La tangente à Σ en $(x,y) \in \Sigma$ est dirigée par le vecteur (y,x). Le champ de vecteur $\mathcal{L}$ est orthogonal à la tangente, donc, co-linéaire à la normale à Σ ; il est donc transverse à Σ.
2. Le flot de $\mathcal{L}$ est donné par $(x(t), y(t)) = (e^t x(0), e^{-t} y(0))$. Les courbes intégrales sont donc des branches d'hyperboles si $x(0)y(0) \neq 0$ et des demi-droites sinon (voir la figure ci-dessous).
3. La fonction $\varphi : (x,y) \mapsto yx$ est constante le long des courbes intégrales de $\mathcal{L}$; elle définit bien une intégrale première (non constante) de $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. On résout ce problème de Cauchy par la méthode des caractéristiques. Si u est une solution du problème de Cauchy et $(x(t), y(t))$ est le flot de $\mathcal{L}$ avec $(x(0), y(0)) \in \Sigma$, alors $v(t) := u(x(t), y(t))$ vérifie $\dot{v}(t) = 2v(t) + 4y^2(t)$. Par la variation de la constante et la formule obtenue pour $y(t)$ à la question 2 (on suppose $y(0)x(0) \neq 0$), on obtient $v(t) = ax^2(t) + by^2(t)$. La condition initiale donne $a = 1$ et $b = -1$. On obtient donc $u(x,y) = x^2 - y^2$ le long des courbes intégrales passant par les points de Σ hors des axes de coordonnées. On vérifie que $u(x,y) = x^2 - y^2$ est solution partout.

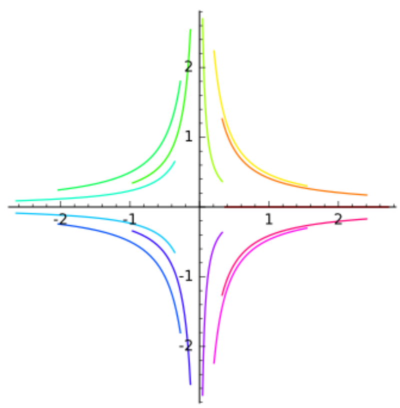

Figure 1 – Tracé de différentes courbes intégrales

Exercice 2. Il s'agit de la question 3 de l'exercice 9 de la feuille de TD 1 ; on se reportera à son corrigé.

Exercice 3.

1. D'une part, la fonction $u \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto h_\varphi(u) := e^{1/u}\left[\varphi(u\,\mathrm{th}\,(1/u), u/\mathrm{sh}\,(1/u)) - \varphi(u,0)\right]$ est à support compact pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Plus précisément, comme $\inf_{t\in]0,1]} \dfrac{\mathrm{sh}\,u}{u} = 1$, si $R > 1$ et $\mathrm{supp}\,\varphi \in [-R,R]^2$ alors $\mathrm{supp}\,h_\varphi \subset [0, \sqrt{R}]$.
D'autre part, par la formule de Taylor, on calcule

$$\begin{aligned} &e^{1/u}\left[\varphi(u\,\mathrm{th}\,(1/u), u/\mathrm{sh}\,(1/u)) - \varphi(u,0)\right] \\ &\qquad = \int_0^1 \Big(e^{1/u}(\mathrm{th}\,(1/u) - 1)\partial_x\varphi(u(1 + t(\mathrm{th}\,(1/u) - 1)), tu/\mathrm{sh}\,(1/u)) \\ &\qquad\qquad + \frac{ue^{1/u}}{\mathrm{sh}\,(1/u)}\partial_y\varphi(u(1 + t(\mathrm{th}\,(1/u) - 1)), tu/\mathrm{sh}\,(1/u))\Big)\,dt. \end{aligned}$$

Or

$$\sup_{u\in]0,1]}\left|e^{1/u}(\mathrm{th}\,(1/u) - 1)\right| + \sup_{u\in]0,1]}\left|\frac{ue^{1/u}}{\mathrm{sh}\,(1/u)}\right| \leq 2\sup_{u\in]0,1]}\left|\frac{e^{1/u}}{\mathrm{sh}\,(1/u)}\right| \leq \frac{2e^2}{e^2-1}.$$

Donc, l'intégrale définissant T converge et, si $\operatorname{supp}\varphi \in [-R,R]^2$ $(R>1)$, on obtient

$$(1)\qquad |\langle T,\varphi\rangle| \le \frac{e^2}{e^2-1}\int_0^1 \|\nabla\varphi\|_\infty du + 2e\int_1^{\sqrt{R}} \|\varphi\|_\infty du = \frac{2e^2}{e^2-1}\|\nabla\varphi\|_\infty + 2e(\sqrt{R}-1)\|\varphi\|_\infty.$$

Donc T définit bien une distribution d'ordre au plus 1.

2. Soit $\mathcal{S}$ la réunion de la courbe $\mathcal{C} := \{(u\,\mathrm{th}\,(1/u), u/\mathrm{sh}\,(1/u)); u>0\}$ et de la demi droite $\mathbb{R}^+\times\{0\}$. Notons que $(0,0)\in\mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}$ est fermée.
Si $(x,y)\notin\mathcal{S}$ alors $d((x,y),\mathcal{S})=\delta>0$. Si $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(B((x,y),\delta/2)$, on a $\langle T,\varphi\rangle=0$. Ainsi $\operatorname{supp}T\subset\mathcal{S}$.
D'autre part, si $(x,y)\in\mathcal{C}$, on peut trouver $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varphi\ge 0$, $\varphi((x,y))>0$ et tel que $\operatorname{supp}\varphi\cap(\mathcal{S}\setminus\mathcal{C})=\emptyset$ (remarquons que $\mathcal{S}\setminus\mathcal{C}$ est fermé). Alors

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_0^{+\infty} e^{1/u}\varphi(u\,\mathrm{th}\,(1/u), u/\mathrm{sh}\,(1/u))du > 0.$$

Ainsi $\mathcal{C}\subset\operatorname{supp}T$.
De même, si $(x,y)\in\mathbb{R}^{+*}\times\{0\}$, on peut trouver $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varphi\ge 0$, $\varphi((x,y))>0$ et tel que $\operatorname{supp}\varphi\cap\overline{\mathcal{C}}=\emptyset$.

$$\langle T,\varphi\rangle = -\int_0^{+\infty}\varphi(u,0)du < 0.$$

Ainsi $\mathbb{R}^{+*}\times\{0\}\subset\operatorname{supp}T$ et donc $\mathcal{S}\setminus\{(0,0)\}\subset\operatorname{supp}T$.
Ainsi $\operatorname{supp}T=\mathcal{S}$ car $\operatorname{supp}T$ est fermé.

3. On sait que T est d'ordre au plus 1. Montrons qu'elle est d'ordre 1. Si elle était d'ordre 0, il existerait $K>0$ tel que

$$(2)\qquad \forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(B(0,1)),\quad |\langle T,\varphi\rangle|\le K\|\varphi\|_\infty.$$

Soit $\chi\in\mathcal{C}_0^\infty(]-1/2,1/2[)$, $0\le\chi\le 1$ telle que $\chi\equiv 1$ sur $[-1/4,1/4]$. Pour $\alpha>0$, posons $\varphi_\alpha(x,y)=\chi(x)\chi\left(\frac{y\,\mathrm{sh}\,(1/\alpha)}{\alpha}-1\right)$. Par construction de φ_α, pour $\alpha>0$ suffisamment petit, on a

$$\langle T,\varphi_\alpha\rangle = \int_0^{+\infty} e^{1/u}\chi\left(u\,\mathrm{th}\,(1/u)\right)\chi\left(\frac{u\,\mathrm{sh}\,(1/\alpha)}{\alpha\,\mathrm{sh}\,(1/u)}-1\right)du \ge \int_0^{+\infty} e^{1/u}\chi\left(\frac{u\,\mathrm{sh}\,(1/\alpha)}{\alpha\,\mathrm{sh}\,(1/u)}-1\right)du.$$

En effet comme $u\mapsto\dfrac{u}{\mathrm{sh}\,(1/u)}$ croît, pour $\alpha>0$ assez petit, $\chi\left(\dfrac{u\,\mathrm{sh}\,(1/\alpha)}{\alpha\,\mathrm{sh}\,(1/u)}-1\right)=0$ si $u\ge 2\alpha$ et $\chi\left(u\,\mathrm{th}\,(1/u)\right)=1$ si $0\le u\le 2\alpha$.
Donc, comme $\chi\equiv 1$ sur $[-1/4,1/4]$, si on définit $u_\pm(\alpha)$ comme les solutions de

$$(3)\qquad \frac{u\,\mathrm{sh}\,(1/\alpha)}{\alpha\,\mathrm{sh}\,(1/u)}-1=\pm\frac{1}{4},$$

on a

$$(4)\qquad \langle T,\varphi_\alpha\rangle \ge \int_{u_-(\alpha)}^{u_+(\alpha)} e^{1/u}du.$$

Pour $\alpha>0$, ces solutions existent et sont uniques par continuité et croissance de $u\mapsto\dfrac{u}{\mathrm{sh}\,(1/u)}$.
On calcule les asymptotiques des solutions de (3) quand $\alpha\to 0^+$. On réécrit (3) comme $\frac{u}{\mathrm{sh}\,(1/u)} = c_\pm\frac{\alpha}{\mathrm{sh}\,(1/\alpha)}$ où $c_+=\frac{5}{4}$ et $c_-=\frac{3}{4}$. Par la même propriété de croissance, on voir facilement que la solution cherchée appartient à $[\alpha/2,3\alpha/2]$ si $\alpha>0$ est suffisamment petit. En cherchant la solution sous la forme $u_\pm(\alpha)=\alpha(1+a_\pm\alpha+\alpha^2 g(\alpha))$ où $a_\pm$ et g sont à déterminer, l'équation devient

$$\frac{1+a_\pm\alpha+\alpha^2 g(\alpha)}{\mathrm{sh}\left(-\frac{a_\pm+\alpha g(\alpha)}{1+a_\pm\alpha+\alpha^2 g(\alpha)}\right)} = c_\pm$$

que l'on résout en g par le théorème d'inversion pour les fonction analytiques au voisinage de 0 en choisissant $c_\pm \mathrm{sh}\, a_\pm = -1$.
En remplaçant $u_\pm(\alpha) = \alpha(1 + a_\pm\alpha + \alpha^2 g(\alpha))$ dans (4), pour $\alpha > 0$ assez petit, on obtient que

$$\langle T, \varphi_\alpha\rangle \geq \frac{(a_+ - a_-)}{2}\,\alpha^2 e^{1/(2\alpha)}$$

Comme $\|\varphi_\alpha\|_\infty = 1$ pour tout $\alpha > 0$, ceci contredit (2) quand on laisse α tendre vers 0^+.
Ceci nous dit que T est d'ordre exactement 1.

Pour $\delta > 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\{|x| > \delta\})$, on a

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq 2R^2 e^{1/\delta}\|\varphi\|_\infty.$$

Ainsi, $T_{|\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est d'ordre 0.

4. L'estimée (1) montre que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 4. 1. la fonction considérée est analytique et bornée et donc définit bien une distribution de Schwartz.
En multipliant par x, on voit qu'on obtient la transformée de Fourier de $(2i)^{-1}(\delta_{(2\pi)^{-1}} - \delta_{(-2\pi)^{-1}})$.
En primitivant ceci, on voit que la transformée de Fourier cherchée est $\pi\mathbf{1}_{[-1/(2\pi),1/(2\pi)]}$.

2. On a $|x| = x(H(x) - H(-x))$ où $H(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. Comme $H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par x, $|x|$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Le calcul de la transformée de Fourier est fait dans l'exercice 2 de la feuille de TD 5.

3. La distribution considérée est une fonction indéfiniment dérivable bornée ; elle définit donc une distribution tempérée.
Par la section 4.6.2 du polycopié « Real Analysis » de N. Lerner, on a

$$\widehat{e^{i(x^2+y^2-z^2)}} = e^{i\pi/4}\pi^{3/2}e^{-i\pi^2(\xi^2+\eta^2-\tau^2)}.$$

Exercice 5. Il s'agit ici de la construction du noyau de Poisson de la boule unité faite dans le chapitre 5 du polycopié « Lecture Notes on Partial Differential Equations » de N. Lerner.