Master 1 - Mathématiques
MM046 « Équations aux dérivées partielles »
Examen du 02/05/2016 de 9h à 12h en salle 54-55-201

Aucun document n'est autorisé.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le champ de vecteurs $\mathcal{L} = x\partial_x + 2y\partial_y$ et l'ellipse $\Sigma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 2y^2 = 1\}$.

1. Montrer que $\mathcal{L}$ est transverse à Σ.
2. Déterminer le flot et les courbes intégrales de $\mathcal{L}$.
3. Déterminer une intégrale première de $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui n'est pas constante.
4. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (\mathcal{L}u)(x, y) = 2u(x, y) + 4y^2, \\ u_{|\Sigma} = 1. \end{cases}$$

Exercice 2. En utilisant la méthode des caractéristiques, résoudre l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u + u\,\partial_x u = 1, \\ u(x, x) = x/2. \end{cases}$$

Exercice 3. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, on considère l'expression

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} \left[\varphi(u^2 \sin(1/u), u^2 \cos(1/u)) - \varphi(0, 0)\right] du.$$

1. Montrer que l'intégrale ci-dessus converge et définit une distribution T sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le support de T.
3. Quel est l'ordre de T ? Quel est l'ordre de $T_{|\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$?
4. La distribution T est-elle tempérée ?

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$ montrer que les distributions suivantes sont tempérées et calculer leur transformées de Fourier :

1. $(x, y, z) \mapsto e^{i(x^2-y^2-z^2)}$,
2. $\delta_{\mathbb{S}^2}$ définie par $\langle \delta_{\mathbb{S}^2}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(\omega)d\sigma(\omega)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 5. Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une fonction $v :\ U \to \mathbb{R}$ est *sous-harmonique* si $v \in \mathcal{C}^2(U)$ et $\Delta v \geq 0$ dans U.

1. Montrer que si v est sous-harmonique sur U alors, pour $\overline{B(x, r)} \subset U$, on a

$$v(x) \leq \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} v(y)dy \quad \text{et} \quad v(x) \leq \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x,r)} v(y)dy.$$

2. En déduire que, si v est de plus continue sur $\overline{U}$, alors $\max_{\overline{U}} v = \max_{\partial U} v$.
3. Soit $\phi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et indéfiniment dérivable. Supposons que u est harmonique sur U et posons $v = \phi \circ u$. Montrer que v est sous-harmonique.
4. Supposons que u est harmonique sur U et posons $v = |\nabla u|^2$. Montrer que v est sous-harmonique.