Master 1 - Mathématiques
MM046 « ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES »
Examen du 16/06/2016 de 9h à 12h en salle 45-55-204

Aucun document n'est autorisé.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^2$, On considère le champ de vecteurs $\mathcal{L} = x\partial_x - y\partial_y$ et l'hyperbole $\Sigma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 = 1\}$.

1. Montrer que $\mathcal{L}$ est transverse à Σ.
2. Déterminer le flot et les courbes intégrales de $\mathcal{L}$.
3. Déterminer une intégrale première de $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas constante.
4. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (\mathcal{L}u)(x,y) = 2u(x,y) + 4y^2, \\ u_{|\Sigma} = 1. \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment différentiable. En utilisant la méthode des caractéristiques, pour $(t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, résoudre l'équation

$$\begin{cases} t\,\partial_t u + x\,\partial_x u = 2u, \\ u(1,x) = g(x). \end{cases}$$

Exercice 3. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, on considère l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} e^{1/u} \left[\varphi(u\,\mathrm{th}\,(1/u), u/\mathrm{sh}\,(1/u)) - \varphi(u,0)\right] du.$$

1. Montrer que l'intégrale ci-dessus converge et définit une distribution T sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le support de T.
3. Quel est l'ordre de T ? Quel est l'ordre de $T_{|\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$?
4. La distribution T est-elle tempérée ?

Exercice 4. Après avoir montré qu'elles sont tempérées, calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

1. $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$,
2. $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$,
3. $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto e^{i(x^2+y^2-z^2)}$.

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{B}^d := \{x \in \mathbb{R}^d;\ |x| < 1\}$ et $y \in \mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d;\ |x| = 1\}$, on pose

$$K(x,y) := \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{d-1})} \frac{1 - |x|^2}{|x-y|^d}.$$

1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{S}^{d-1}$, $x \mapsto K(x,y)$ est harmonique sur $\mathbb{B}^d$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{B}^d$, $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^{d-1}} K(x,y)d\sigma(y) = 1$.
3. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{S}^{d-1}$, alors $x \in \mathbb{B}^d \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{S}^{d-1}} K(x,y)f(y)d\sigma(y)$ définit une fonction harmonique dans $\mathbb{B}^d$ qui se prolonge continûment à $\overline{\mathbb{B}^d}$ de façon que la restriction de ce prolongement à $\mathbb{S}^{d-1}$ vaut f.