Équation de Schrödinger et théorie spectrale

Frédéric Klopp

25 janvier 2017

Chapitre 0

Introduction

0.1 Formalisme mathématique de la mécanique quantique

0.2 L'équation de Schrödinger

Table des matières

Chapitre 1

Compléments d'analyse fonctionnelle et sur les opérateurs bornés

1.1 Quelques compléments d'analyse fonctionelle

— $\mathcal{B}$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'une norme $\|\cdot\|$ est un espace de Banach s'il est complet.

— Soient E et F des espaces vectoriels normés. On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme
$$\|u\|_{E\to F} = \sup_{e\in E\setminus\{0\}} \frac{\|u(e)\|_F}{\|e\|_E}.$$
Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est également un espace de Banach.

1.1.1 Le principe de la borne uniforme

Théorème 1.1 (Théorème de Banach-Steinhaus)**.** *Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_j)_{j\in J}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F vérifiant*

$$\forall e \in E,\ \sup_{j\in J} \|T_j e\|_F < +\infty. \tag{1.1}$$

Alors, (1.1) a lieu uniformément dans la boule unité de E i.e.

$$\sup_{j\in J} \|T_j\|_{E\to F} < +\infty. \tag{1.2}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$A_n = \left\{ u \in E,\ \sup_{j \in J} \|T_j u\|_F \leq n \right\}.$$

L'ensemble A_n est fermé dans E en tant qu'intersection de fermés, et l'hypothèse (1.1) assure que

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = E.$$

Comme E est complet, la propriété de Baire garantit qu'au moins l'un des A_n n'est pas d'intérieur vide. T étant linéaire, $A_n = nA_1$ donc l'intérieur de A_1 n'est pas vide. De plus, puisqu'il en est ainsi pour A_1, l'intérieur de A_1 est symétrique par rapport à 0 et convexe donc contient 0. Soit $r > 0$ tel que la boule fermée de centre 0 et de rayon r soit contenue dans A_1. Pour tout $u \in E$ tel que $\|u\|_E \leq 1$, on a $ru \in A_1$, c'est-à-dire $\forall j \in J$, $r\|T_j u\|_F \leq 1$ ce qui équivaut à

$$\sup_{j \in J} \|T_j\|_{E \to F} \leq \frac{1}{r}$$

□

Corollaire 1.1. *Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $u \in E$, $T_n u$ ait une limite. Alors*

$$\sup_{n \geq 0} \|T_n\|_{E \to F} < +\infty.$$

En particulier, une limite simple d'applications linéaires continues de E vers F est continue.

1.1.2 Les théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé

Théorème 1.2 (Banach)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Supposons que T est surjective. Alors T est ouverte c'est-à-dire que l'image de tout ouvert de E par T est ouverte dans F.*

Démonstration. Soient B_E et B_F les boules unités fermées de E et F. Comme T est linéaire, il suffit de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$rB_F \subset T(B_E). \tag{1.3}$$

Pour n entier naturel, on pose

$$A_n = \overline{T(nB_E)}.$$

Par définition, A_n est un fermé de F et $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} A_n = F$ puisque T est surjective. Comme F est complet, la propriété de Baire garantit qu'au moins l'un des A_n n'est pas d'intérieur vide. T étant linéaire, $A_n = nA_1$ donc l'intérieur de A_1 n'est pas vide. De plus, l'intérieur de A_1 symétrique par rapport à 0 et convexe donc contient 0. Il existe donc $R > 0$ tel que

$$RB_F \subset \overline{T(B_E)} \tag{1.4}$$

On veut maintenant passer de (1.4) à (1.3) quitte à choisir $r < R$. Comme T est linéaire, (1.4) équivaut à dire que pour tout $v \in F$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in E$ tel que $\|v - Tu\|_F \leq \varepsilon$ et $\|u\|_E \leq R^{-1}\|v\|_F$.
En appliquant cette caractérisation de (1.4) à $v \in \dfrac{R}{2}B_F$, on trouve qu'il existe $u_1 \in E$ tel que $\|u_1\|_E \leq 1/2$ et $\|v - Tu_1\| \leq R/4$. Puis, en l'appliquant à $v_1 = v - Tu_1$, il existe $u_2 \in E$ tel que $\|u_2\|_E \leq 1/4$ et $\|v - T(u_1 + u_2)\| = \|v_1 - Tu_2\| \leq R/8$. On construit ainsi par récurrence une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E tels que

$$\|u_n\|_E \leq 2^{-n} \quad \text{et} \quad \left\| v - \sum_{k=1}^{n} Tu_k \right\| \leq 2^{-n-1}R.$$

Comme la série de terme général $\|u_n\|_E$ converge et que E est complet, la série de terme général u_n converge dans E. Soit u sa somme. Comme T est liéaire continue, on a

$$Tu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} Tu_k = v \quad \text{et} \quad \|u\|_E \leq \sum_{n\geq 1} \|u_n\|_E \leq 1.$$

On en conclut que (1.3) est vérifié pour $r = R/2$. $\square$

Corollaire 1.2 (Théorème de l'isomorphisme)**.** *Soient E et F des espaces de Banach. Toute bijection linéaire continue de E dans F a un inverse continu. En particulier, si deux normes rendant un même espace vectoriel complet sont comparables, elles sont équivalentes.*

Démonstration. Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective et $U \subset E$ est ouvert, $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ est ouvert. Ainsi T^{-1} est continue.
Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes sur un espace vectoriel E qui le rendent complet toutes les deux. S'il existe $C > 0$ tel que, pour $u \in E$, $\|u\|_1 \leq C\|u\|_2$. Alors l'identité est continue de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Son inverse, l'identité, est donc continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$ i.e. il existe $C' > 0$ tel que, pour $u \in E$, $\|u\|_2 \leq C'\|u\|_1$. □

Corollaire 1.3 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soient E et F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. T est continue si et seulement si le graphe de T, $\Gamma(T) = \{(u, v) \in E \times F;\ v = Tu\} \subset E \times F$, est fermé, c'est-à-dire, pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans E vérifiant $u_n \to u$ dans E et $Tu_n \to v$ dans F, on a $v = Tu$.*

Démonstration. Puisque $> T$ est linéaire, $\Gamma(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ qui est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$. Clairement, si T est continue, $\Gamma(T)$ est fermé. Supposons que $\Gamma(T)$ est fermé. C'est donc un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$. Soit p_1 et p_2 les projections de $E \times F$ sur E et F. Les applications p_1 et p_2 sont continues. La restriction de p_1 à $\Gamma(T)$ est une bijection linéaire continue de $\Gamma(T)$ dans E. Sa bijection reciproque q est continue par le Corollaire 1.2. Ainsi $T = p_2 \circ q$ est continue. □

1.2 Opérateurs bornés sur un espace de Hilbert

Soit $\mathcal{H}$, un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme définie par ce produit scalaire est noté $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Elle définit une topologie appelée topologie forte sur $\mathcal{H}$.
Dans la suite du cours, on supposera que les espaces de Hilbert considérés sont séparables i.e. qu'il existe un sous-ensemble dénombrable dense. Ceci garantit en particulier l'existence d'une base orthonormée ou hilbertienne au plus dénombrable.
On définit une topologie faible sur $\mathcal{H}$ de la façon suivante.

Définition 1.1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, une suite dans $\mathcal{H}$. u_n converge faiblement vers u dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $\forall v \in \mathcal{H}$, $\langle u_n, v \rangle \to \langle u, v \rangle$. On note alors $u_n \xrightarrow{w} u$.

Proposition 1.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{H}$.*

1. *Si $u_n \xrightarrow{w} u$ alors $(\|u_n\|)_{n\geq 0}$ est borné.*

2. *Si* $u_n \to u$ *alors* $u_n \xrightarrow{w} u$.
3. *Si* $u_n \xrightarrow{w} u$ *et* $\|u_n\| \to \|u\|$ *alors* $u_n \to u$.
4. *De toute suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *bornée, on peut extraire une sous suite convergent faiblement.*

Démonstration. Le point 1 est une conséquence du théoréme de Banach-Steinhaus, le théorème 1.1. En effet, soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{H}$ convergeant faiblement vers u. Pour $n \geq 0$, on définit la forme linéaire continu $l_n : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $l_n(v) = \langle u_n, v\rangle$. Donc, $\forall v \in \mathcal{H}$, $\sup_{n\geq 0} |l_n(v)| < +\infty$. Comme $\|l_n\|_{\mathcal{H}\to\mathbb{C}} = \|u_n\|$, le théorème 1.1 nous dit alors que $\sup\limits_{n\geq 0} \|u_n\| < +\infty$.

Le point 2 est clair.
Démontrons le point 3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{H}$ telle que $u_n \xrightarrow{w} u$ et $\|u_n\| \to \|u\|$. Alors

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle u_n, u\rangle \to_{n\to+\infty} 2\|u\|^2 - 2\|u\|^2 = 0.$$

Enfin, soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathcal{H}$ telle que $C := \sup_{n\geq 0} \|u_n\| < +\infty$. Soit $(e_m)_{m\geq 0}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Alors $(\langle u_n, e_k\rangle)_{n\geq 0}$ est une suite bornée de $\mathbb{C}$. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge. On peux ainsi en extrayant successivement des sous-suites pour les valeurs $k = 0$, 1, 2, ..., extraire de $(u_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite, disons $(u_{n(p)})_{p\geq 0}$ telle que, pour tout $k \geq 0$, $(\langle u_{n(p)}, e_k\rangle)_{p\geq 0}$ converge vers, disons, $\hat{u}_k$. L'inégalité de Parseval nous dit que, pour tout $K \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{K} |\hat{u}_k|^2 = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} |\langle u_{n(p)}, e_k\rangle|^2 \leq \sup_{p\geq 0} \|u_{n(p)}\|^2 \leq C.$$

Ainsi $\sum_{k\geq 0} |\hat{u}_k|^2 \leq C$. Soit u le vecteur de $\mathcal{H}$ de coordonnées $(\hat{u}_k)_{k\geq 0}$ dans la base hilbertienne $(e_k)_{k\geq 0}$. Comme, par construction, pour tout $k \geq 0$, $(\langle u_{n(p)}, e_k\rangle)_{p\geq 0}$ converge vers $(\langle u_{n(p)}, e_k\rangle)_{p\geq 0}$, on sait que, pour tout v combinaison linéaire finie des vecteurs $(e_k)_{k\geq 0}$, on a $(\langle u_{n(p)}, v\rangle)_{p\geq 0}$ converge vers $(\langle u_{n(p)}, v\rangle)_{p\geq 0}$. Par définition d'une base hilbertienne, V, l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des vecteurs $(e_k)_{k\geq 0}$, est dense dans $\mathcal{H}$ (pour la topologie de la norme). Donc, si $v \in \mathcal{H}$, il existe $(v_l)_{l\geq 0}$, une suite dans V, telle que $\|v - v_l\| \to 0$ quand $l \to +\infty$. Ainsi, pour $l \geq 0$,

$$\begin{aligned}|\langle u_{n(p)}, v\rangle - \langle u, v\rangle| &\leq |\langle u_{n(p)}, v_l\rangle - \langle u, v_l\rangle| + |\langle u_{n(p)}, v - v_l\rangle| + |\langle u, v - v_l\rangle| \\ &\leq |\langle u_{n(p)}, v_l\rangle - \langle u, v_l\rangle| + 2C\|v - v_l\|.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\limsup_{p\to+\infty} |\langle u_{n(p)}, v\rangle - \langle u, v\rangle| \leq \limsup_{p\to+\infty} |\langle u_{n(p)}, v_l\rangle - \langle u, v_l\rangle| + 2C\|v - v_l\| = 2C\|v - v_l\|.$$

Comme l peut être choisi arbitrarement grand, on a $\lim_{p\to+\infty} |\langle u_{n(p)}, v\rangle - \langle u, v\rangle| = 0$, ceci pour tout v dans $\mathcal{H}$. Ainsi $u_{n(p)} \xrightarrow{w} u$ quand $p \to +\infty$. □

1.2.1 Topologies sur l'espace des opérateurs bornés

On note $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, l'espace des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$. On le muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}}$ notée $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. On rappelle une définition équivalente de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ dans le cas hilbertien

$$\|T\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\substack{(u,v)\in\mathcal{H}^2 \\ \|u\|=1,\ \|v\|=1}} |\langle Tu, v\rangle| \tag{1.5}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un espace de Banach pour cette norme. C'est aussi une algèbre de composition. La topologie définie par cette norme est appelée *topologie de la norme* ou *topologie uniforme*.
On définit deux autres topologies (séquentielles) sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Définition 1.2. Soit $(T_n)_{n\geq 0}$, une suite dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- Topologie forte : on dit que T_n tend vers T fortement si et seulement si $\forall u \in \mathcal{H}$, $\|T_n u - Tu\| \to 0$. On note $T_n \xrightarrow{s} T$.
- Topologie faible : on dit que T_n tend vers T faiblement si et seulement si $\forall u \in \mathcal{H}$, $T_n u \xrightarrow{w} Tu$. On note $T_n \xrightarrow{w} T$.

Proposition 1.2. *Soit $(T_n)_{n\geq 0}$, une suite dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

1. *Si $(T_n)_{n\geq 0}$ converge en norme vers T alors $(T_n)_{n\geq 0}$ converge fortement vers T.*
2. *Si $(T_n)_{n\geq 0}$ converge fortement vers T alors $(T_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers T.*
3. *Si, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $(T_n u)_{n\geq 0}$ converge alors il existe $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $(T_n)_{n\geq 0}$ converge fortement vers T.*
4. *Si, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $(T_n u)_{n\geq 0}$ converge faiblement alors il existe $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $(T_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers T.*

Démonstration. La démonstration des points 1 et 2 est claire.
Supposons que, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $(T_n u)_{n\geq 0}$ converge vers, disons, Tu. Par linéarité des $(T_n)_{n\geq 0}$ et unicité de la limite, l'application $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ainsi définie est linéaire. Le théoréme de Banach-Steinhaus, c'est-à-dire le théorème 1.1, nous apprend que T est borné. Ceci conclut la preuve du point 3. Celle du point 4 lui est identique ; nous la laissons au lecteur. □

1.2.2 Adjoints

Définition 1.3. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On définit l'adjoint de T noté T^* comme étant l'unique opérateur borné sur $\mathcal{H}$ tel que, pour tout $(u, v) \in \mathcal{H}^2$, $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle$.

L'existence de T^* découle de la sesquilinéarité du produit scalaire ; son unicité du fait que le produit scalaire est défini.

Proposition 1.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

1. *L'application $T \to T^*$ est une isométrie anti-linéaire sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
2. *On a $(T^*)^* = T$ et si $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $(TS)^* = S^*T^*$.*
3. *On a $\|TT^*\|_{\mathcal{H}} = \|T^*T\|_{\mathcal{H}} = \|T\|^2_{\mathcal{H}} = \|T^*\|^2_{\mathcal{H}}$.*

Démonstration. La linéarité de l'application $T \to T^*$ découle de la sesquilinéarité du produit scalaire. L'égalité $\|T^*\|_{\mathcal{H}} = \|T\|_{\mathcal{H}}$ est une conséquence directe de la définition de T^*, de la symétrie du produit scalaire et de (1.5). La preuve du point 2 est claire.
Montrons le point 3. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on calcule

$$\begin{aligned}\|T^*T\|_{\mathcal{H}} &= \sup_{\substack{(u,v)\in\mathcal{H}^2\\ \|u\|=1,\ \|v\|=1}} |\langle T^*Tu, v\rangle| = \sup_{\substack{(u,v)\in\mathcal{H}^2\\ \|u\|=1,\ \|v\|=1}} |\langle Tu, Tv\rangle| \\ &\leq \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| \cdot \sup_{\|v\|=1} \|Tv\| = \|T\|^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$ petit et $u_\varepsilon \in \mathcal{H}$ tel que $\|u_\varepsilon\| = 1$ et $\|Tu_\varepsilon\| \geq \|T\|_{\mathcal{H}} - \varepsilon$. Alors,

$$\|T^*T\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\substack{(u,v)\in\mathcal{H}^2\\ \|u\|=1,\ \|v\|=1}} \langle Tu, Tv\rangle \geq \|Tu_\varepsilon\|^2 \geq (\|T\|_{\mathcal{H}} - \varepsilon)^2.$$

En laissant ε tendre vers 0, on obtient $\|T^*T\|_{\mathcal{H}} \geq \|T\|^2_{\mathcal{H}}$. □

Définition 1.4. On dit que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est auto-adjoint si $T^* = T$.

Proposition 1.4. *Pour $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto-adjoint, on a $\|T\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\substack{u\in\mathcal{H}\\ \|u\|=1}} |\langle Tu, u\rangle|$.*

Démonstration. Soit $t = \sup_{\substack{u\in\mathcal{H}\\ \|u\|=1}} |\langle Tu, u\rangle|$. De (1.5), il découle que $\|T\|_{\mathcal{H}} \geq t$.
Comme T est auto-adjoint, pour $(u, v) \in \mathcal{H}^2$, on calcule

$$\mathrm{Re}\,\langle Tu, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(u+v), u+v\rangle - \langle T(u-v), u-v\rangle\right).$$

Soient $\|u\| = \|v\| = 1$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta}\langle Tu, v\rangle = |\langle Tu, v\rangle|$. On pose $\tilde{u} = e^{i\theta}u$. Alors

$$\begin{aligned}
|\langle Tu, v\rangle| = \mathrm{Re}\langle T\tilde{u}, v\rangle &\leq \frac{1}{4}(|\langle T(\tilde{u}+v), \tilde{u}+v\rangle| + |\langle T(\tilde{u}-v), \tilde{u}-v\rangle|) \\
&\leq \frac{t}{4}(\|\tilde{u}+v\|^2 + \|\tilde{u}-v\|^2) \\
&= \frac{t}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) = t.
\end{aligned}$$

Donc, de (1.5), il découle que $\|T\|_{\mathcal{H}} \leq t$. □

1.2.3 Le spectre

Définition 1.5. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- $z \in \mathbb{C}$ est dans l'ensemble résolvant de T si et seulement si $z - T$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}$. On notera $\rho(T)$, l'ensemble résolvant de T.
- Le spectre de T, noté $\sigma(T)$, est le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$.
- Pour $z \in \rho(T)$, l'opérateur $(z-T)^{-1}$ est appelé résolvante de T en z.

Remarque 1.1. Pour $z \in \rho(T)$, par le théorème de l'isomorphisme, le corollaire 1.2, la résolvante de T en z, $(z-T)^{-1}$, est un opérateur borné.

Théorème 1.3. *Soit* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
1. *L'ensemble résolvant* $\rho(T)$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et le spectre* $\sigma(T)$ *un fermé de* $\mathbb{C}$.
2. *L'application* $z \in \rho(T) \mapsto (z-T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *est analytique (i.e. développable en série entière).*
3. *Pour* $(z, z') \in \rho(T)^2$*, on a la formule de la résolvante*

$$\begin{aligned}
(z-T)^{-1} - (z'-T)^{-1} &= (z'-z)(z-T)^{-1}(z'-T)^{-1} \\
&= (z'-z)(z'-T)^{-1}(z-T)^{-1}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \rho(T)$. Alors, $(z_0 - T)^{-1}$ est un opérateur borné. Montrons que $z - T$ est inversible pour z voisin de z_0. Pour cela, on écrit

$$z - T = (z_0 - T)(\mathrm{Id} - (z_0 - z)(z_0 - T)^{-1}).$$

L'inversibilité de $z - T$ est alors une conséquence immédiate de celle de $\mathrm{Id} - (z_0 - z)(z_0 - T)^{-1}$. Soit z tel que $|z_0 - z| \cdot \|(z_0 - T)^{-1}\|_{\mathcal{H}} < 1$. Alors la série

$$\sum_{n \geq 0} (z_0 - z)^n \left[(z_0 - T)^{-1}\right]^n$$

converge en norme dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et ainsi définit un opérateur dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. On calcule

$$\begin{aligned}\mathrm{Id} &= \left(\mathrm{Id} - (z_0 - z)(z_0 - T)^{-1}\right)\left(\sum_{n\geq 0}(z_0 - z)^n \left[(z_0 - T)^{-1}\right]^n\right) \\ &= \left(\sum_{n\geq 0}(z_0 - z)^n \left[(z_0 - T)^{-1}\right]^n\right)\left(\mathrm{Id} - (z_0 - z)(z_0 - T)^{-1}\right).\end{aligned}$$

Donc, pour z tel que $|z_0 - z| < \|(z_0 - T)^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1}$, $z \in \rho(T)$ et la résolvante de T en z est donnée par

$$(z - T)^{-1} = \sum_{n\geq 0}(z_0 - z)^n \left[(z_0 - T)^{-1}\right]^{n+1}.$$

Ainsi $\rho(T)$ est ouvert, $\sigma(T)$, son complémentaire est fermé, et, au voisinage de tout point de $\rho(T)$, la résolvante est développable en série entière.
La formule de la résolvante résulte d'un calcul simple laissé au lecteur. □

Corollaire 1.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Pour $|z| > \|T\|_{\mathcal{H}}$, on a

$$(z - T)^{-1} = -\sum_{n\geq 0} z^{-n-1}T^n.$$

Donc, si $\sigma(T) = \emptyset$ i.e. si $\rho(T) = \mathbb{C}$, on sait que $(z - T)^{-1} \to 0$ quand $|z| \to +\infty$. Le Théorème de Liouville nous dit alors que $(z - T)^{-1} = 0$ ce qui est absurde. □

Proposition 1.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors $(\overline{z} - T^*)^{-1} = ((z - T)^{-1})^*$, $\rho(T^*) = \overline{\rho(T)}$ et $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la relation $\overline{z} - T^* = (z - T)^*$.

1.2.4 Spectre ponctuel et spectre résiduel

Définition 1.6. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

— On dit que $z \in \sigma(T)$ est une valeur propre de T s'il existe $u \in \mathcal{H}$, $u \neq 0$, tel que $Tu = zu$. L'ensemble des valeurs propres de T est appelé spectre ponctuel de T.
— Si $\zeta \in \sigma(T)$ n'est pas une valeur propre et que l'image de $z-T$, notée $\mathrm{Ran}\,(z-T)$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$, on dit que z est dans le spectre résiduel de T.

Donc, $z \in \sigma(T)$ n'est ni dans le spectre résiduel ni une valeur propre si $z-T$ n'est pas inversible mais est injective et l'image de $z-T$ est dense dans $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ est de dimension finie, le spectre consiste en les seules valeurs propres.

Théorème 1.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

1. *On a $(Ran T)^{\perp} = Ker T^*$ et $(Ran T^*)^{\perp} = Ker T$.*
2. *Si z est dans le spectre résiduel de T alors $\overline{z}$ est dans le spectre ponctuel de T^*.*
3. *Si z est dans le spectre ponctuel de T alors $\overline{z}$ est soit dans le spectre ponctuel soit dans le spectre résiduel de T^*.*

Démonstration. Démontrons le point 1. La seconde partie se déduit de la première par passage à l'adjoint et la première découle immédiatement de la définition de l'adjoint i.e., pour $(u,v) \in \mathcal{H}^2$, $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle$.
z est dans le spectre résiduel de T alors, d'après le point 1, $[\mathrm{Ran}\,(z-T)]^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(T^* - \overline{z})$ n'est pas réduit au seul vecteur 0. Ainsi $\overline{z}$ est une valeur propre de T^* ce qui démontre le point 2.
Enfin, si z est une valeur propre de T, $[\mathrm{Ran}\,(T^* - \overline{z})]^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(z-T) \neq \{0\}$. Donc, $\mathrm{Ran}\,(T^* - \overline{z})$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$. Ainsi si $\overline{z}$ n'est pas une valeur propre de T^*, il est dans son spectre résiduel. □
Pour les opérateurs auto-adjoints, la situation se simplifie.

Théorème 1.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $T^* = T$.*

1. *Le spectre de T est contenu dans l'axe réel.*
2. *Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a l'estimation*

$$\|(z-T)^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{|Im\, z|}. \tag{1.7}$$

3. *Le spectre résiduel de T est vide.*
4. *Si $z_1 \neq z_2$ alors $Ker(T - z_1) \perp Ker(T - z_2)$.*

Démonstration. Commençons par la preuve du point 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On calcule

$$\|(z-T)u\|^2 = \|(\operatorname{Re} z - T)u\|^2 + (\operatorname{Im} z)^2\|u\|^2. \tag{1.8}$$

Donc, si $z \notin \mathbb{R}$, $z-T$ et $\overline{z}-T = (z-T)^*$ sont injectives. La proposition 1.5 nous apprend que l'injectivité de $(z-T)^*$ équivaut au fait que $\operatorname{Ran}(z-T)$ est dense. Montrons que $\operatorname{Ran}(z-T)$ est fermé. Soit $u \in \mathcal{H}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\operatorname{Ran}(z-T)$ tendant vers u. Alors il existe $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{H}$ telle que $u_n = (z-T)v_n$. Par (1.8) appliquée au vecteur $v_n - v_m$, on sait que $\|v_n - v_m\| \leq |\operatorname{Im} z|^{-1}\|u_n - u_m\|$. Ainsi la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy et converge vers v. Comme T est borné, on obtient que $u = (z-T)v$. Ainsi $\operatorname{Ran}(z-T)$ est fermé et donc égal à $\mathcal{H}$. Donc $z-T$ est bijective ce qui achève la preuve des points 1 et 2.
Pour le point 3, on remplace u par $(z-T)^{-1}u$ dans (1.8) pour obtenir, pour $u \neq 0$,

$$\|u\|^2 = \|(\operatorname{Re} z - T)(z-T)^{-1}u\|^2 + (\operatorname{Im} z)^2\|(z-T)^{-1}u\|^2 \geq (\operatorname{Im} z)^2\|(z-T)^{-1}u\|^2.$$

Pour $z \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Ran}(z-T)$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$. La proposition 1.5 nous apprend que $\{0\} \neq [\operatorname{Ran}(z-T)]^{\perp} = \operatorname{Ker}(z-T)^* = \operatorname{Ker}(z-T)$. Ainsi z est une valeur propre de T. Le spectre résiduel de T est donc vide.
Enfin, pour le point 4, si $u_1 \in \operatorname{Ker}(T-z_1)$ et $u_2 \in \operatorname{Ker}(T-z_2)$, comme $z_1 \neq z_2$, alors $\langle u_1, u_2\rangle = (z_2 - z_1)(\langle Tu_1, u_2\rangle - \langle u_1, Tu_2\rangle) = 0$. $\square$

Chapitre 2

Opérateurs non bornés

Dans le cas simple d'une particule quantique se déplaçant librement dans l'espace $\mathbb{R}^3$, l'équation de Schrödinger prend la forme

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} & = -\Delta\psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}_{|t=0} & = \psi_0 \end{cases} \quad \text{où } \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \Delta\psi = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2}.$$

La première difficulté rencontrée lorsque l'on cherche à analyser l'existence et les propriétés des éventuelles solution de cette équation est que le Laplacien $-\Delta$ n'est pas un opérateur défini et borné sur $L^2(\mathbb{R}^3)$. On ne peut donc résoudre cette équation comme cela fut fait dans la dernière partie du chapitre précédent.

2.1 Notions générales

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.

Définition 2.1. Un opérateur (non borné) sur $\mathcal{H}$ est la donnée d'une paire (T, D) telle que

— D est un sous-espace de $\mathcal{H}$ que l'on appelle le domaine de T, $D = \mathrm{Dom}(T)$;

— $T : D \to \mathcal{H}$ une application linéaire.

Définition 2.2. Soient (T, D) et (T', D') deux opérateurs sur $\mathcal{H}$. (T, D) est une extension de (T', D') si $D' \subset D$ et $T_{|D'} = T'$ c'est-à-dire si $\Gamma(T') \subset \Gamma(T)$. On notera $T' \subset T$.

On dit que T est *densément défini* si $\mathrm{Dom}\,(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$. Remarquons que si T n'est pas densément défini, sur $\mathrm{Dom}\,(T)^{\perp} \neq \{0\}$, T n'est pas défini. On peut donc se restreindre l'étude de T à l'espace de Hilbert $\overline{\mathrm{Dom}\,(T)}$ sur lequel T est densément défini. On supposera que les opérateurs considérés sont densément définis.
On dira que T est *fermé* si son graphe $\Gamma(T)$ est fermé. Le théorème du graphe fermé nous dit que si $\mathrm{Dom}\,(T) = \mathcal{H}$ et que T est fermé alors T est borné.
On dira que T est *fermable* s'il admet une extension fermée. On appellera alors *clôture de* T sa plus petite extension fermée, et on la notera $\overline{T}$.

Proposition 2.1. *Soit T un opérateur sur $\mathcal{H}$. T est fermable si et seulement si $\overline{\Gamma(T)}$, l'adhérence du graphe de T, est le graphe d'une application linéaire. Dans ce cas, $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.*

Démonstration. Si $\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe d'une application linéaire, alors cette application est une extension fermée de T. Si S est une extension fermé de T, alors $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$ comme $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$. Ainsi, $\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe de S restreint au projeté de $\overline{\Gamma(T)}$ sur la première composante ce qui achève la preuve du premier point de la proposition. La clôture de T a pour graphe l'intersection de tous les graphes d'extensions fermées de T ; d'après le premier point, cette intersection est l'adhérence de $\Gamma(T)$. $\square$.
Soit T un opérateur fermé. Un sous-espace $C \subset \mathrm{Dom}\,(T)$ est un *coeur* pour T si $\overline{T_{|C}} = T$.

2.1.1 Spectre

Définition 2.3. Soient T un opérateur sur $\mathcal{H}$ et $z \in \mathbb{C}$.

1. z est dans $\rho(T)$, l'ensemble résolvant de T, si et seulement si $(z - T)$ est bijectif de $\mathrm{Dom}\,(T)$ dans $\mathcal{H}$, et que son inverse, noté $(z - T)^{-1}$ est borné.
2. le spectre de T noté $\sigma(T)$ est le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$.

L'importance du fait qu'un opérateur est fermé est soulignée par le résultat suivant

Lemme 2.1. *Soit T un opérateur sur $\mathcal{H}$.*

1. *Si $\sigma(T) \neq \mathbb{C}$ alors T est fermé.*
2. *$\sigma(T)$ est fermé et $\rho(T)$ ouvert ; plus précisément, si $z_0 \in \rho(T)$ alors $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| \leq \|(z_0 - T)^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1}\} \subset \rho(T)$.*

3. *L'application* $z \mapsto (z-T)^{-1}$ *est analytique dans* $\rho(T)$ *et vérifie l'équation de la résolvante* (1.6).

Démonstration. Démontrons le point 1. Soit $z \in \rho(T) \neq \emptyset$. On pose $R = (z-T)^{-1}$ qui est borné par hypothèse. Montrons que $\Gamma(T)$ est fermé. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ un suite de $\mathrm{Dom}\,(T)$ tel que $u_n \to u$ et $Tu_n \to v$ quand $n \to +\infty$. Alors, en passant à la limite dans l'équation $u_n = R(z-T)u_n$ on obtient vers $u = zRu - Rv$. Donc, comme $\mathrm{Ran}\,R = \mathrm{Dom}\,(T)$, u est dans le domaine de T. On calcule donc

$$v = (z-T)Rv = -(z-T)u + z(z-T)Ru = -zu + Tu + zu = Tu.$$

Le graphe de T est donc fermé.
Les deux autres points se montrent comme dans le cas des opérateurs bornés. Pour $z \in \{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| < \|(z_0-T)^{-1}\|_{\mathcal{H}}^{-1}\}$, on définit, grâce à la convergence normale de la série, l'opérateur

$$R(z) = \sum_{n\geq 0} (z_0 - z)^n \left[(z_0-T)^{-1}\right]^{n+1}.$$

qui est borné sur $\mathcal{H}$. On vérifie l'identité de la résolvante

$$\begin{aligned} R(z) &= (z_0-T)^{-1} + (z_0-z)(z_0-T)^{-1}R(z) \\ &= (z_0-T)^{-1} + (z_0-z)R(z)(z_0-T)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ainsi $\mathrm{Ran}\,R(z) = \mathrm{Ran}\,(z_0-T)^{-1} = \mathrm{Dom}\,(T)$ et $\mathrm{Ker}\,R(z) = \mathrm{Ker}\,(z_0 - T)^{-1} = \{0\}$. Donc $R(z)$ est bijectif de $\mathcal{H}$ vers $\mathrm{Dom}\,(T)$. D'autre part, en utilisant (2.1), on calcule

$$\begin{aligned} (z-T)R(z) &= (z_0-T)R(z) - (z_0-z)R(z) \\ &= (z_0-T)((z_0-T)^{-1} + (z_0-z)(z_0-T)^{-1}R(z)) - (z_0-z)R(z) \\ &= \mathrm{Id} - (z_0-z)R(z) + (z_0-z)R(z)) = \mathrm{Id} \\ R(z)(z-T) &= R(z)(z_0-T) - R(z)(z_0-z) \\ &= ((z_0-T)^{-1} + (z_0-z)R(z)(z_0-T)^{-1})(z_0-T) - (z_0-z)R(z) \\ &= \mathrm{Id} - (z_0-z)R(z) + (z_0-z)R(z)) = \mathrm{Id} \end{aligned}$$

On achève la preuve du lemme 2.1 comme dans le cas des opérateurs bornés. □

Dans le cas des opérateurs non bornés, il se peut que $\sigma(T) = \emptyset$ ou que $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

2.1.2 Adjoints

Définition 2.4. Soit T un opérateur densément défini. L'adjoint de T noté T^* est défini comme suit :

— $\mathrm{Dom}\,(T^*)$ est l'ensemble des vecteurs $v \in \mathcal{H}$ pour lesquels il existe $u \in \mathcal{H}$ tel que, pour tout $w \in \mathrm{Dom}\,(T)$, $\langle Tw, v\rangle = \langle w, u\rangle$;

— pour $v \in \mathrm{Dom}\,(T^*)$, $T^*v = u$ où u est donné ci-dessus et unique (comme T est densément défini).

Théorème 2.1. *Soit T un opérateur densément défini sur $\mathcal{H}$.*

1. *$Ker\, T^* = (Ran\, T)^\perp$.*
2. *T^* est fermé.*
3. *T est fermable si et seulement si $Dom\,(T^*)$ est dense ; dans ce cas, $\overline{T} = (T^*)^*$.*
4. *Si T est fermable alors $\left(\overline{T}\right)^* = T^*$.*

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\, T^* &= \{u \in \mathrm{Dom}\,(T^*);\ T^*u = 0\}\\ &= \{u \in \mathcal{H};\ \forall v \in \mathrm{Dom}\,(T),\ \langle Tv, u\rangle = 0\}\\ &= (\mathrm{Ran}\, T)^\perp.\end{aligned}$$

Pour démontrer le point 2, on considère l'application de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans lui-même définie par $S((u_1, u_2)) = (-u_2, u_1)$. On vérifie facilement qu'il s'agit d'une isométrie unitaire pour la structure naturelle d'espace de Hilbert sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ i.e. pour le produit scalaire

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \langle u_1, v_1\rangle_{\mathcal{H}} + \langle u_2, v_2\rangle_{\mathcal{H}}.$$

D'autre part, $S \circ S = -\mathrm{Id}$. On vérifie facilement que

$$\Gamma(T^*) = [S\Gamma(T)]^\perp = S\left(\Gamma(T)^\perp\right).$$

On en déduit que $\Gamma(T^*)$ est fermé donc que T^* est fermé.
Le point 3 se démontre comme suit. On remarque que, si $\mathrm{Dom}\,(T^*)$ est dense, alors,

$$\Gamma((T^*)^*) = S[(S[\Gamma(T)^\perp])^\perp] = -[\Gamma(T)^\perp]^\perp = \overline{\Gamma(T)}. \tag{2.2}$$

Ainsi, par la proposition 2.1, T est fermable. D'autre part, si $\mathrm{Dom}\,(T^*)$ n'est pas dense et que $0 \neq u \in \mathrm{Dom}\,(T^*)^\perp$, alors $(u, 0) \perp \Gamma(T^*)$, donc $(0, u) \in \overline{\Gamma(T)}$ qui n'est donc pas un graphe.
Enfin, si T est fermable, $T^* = \overline{(T^*)} = ((T^*)^*)^* = \left(\overline{T}\right)^*$. □

2.1.3 Opérateurs symétriques et auto-adjoints

Définition 2.5. Soit T densément défini sur $\mathcal{H}$.

1. T est symétrique si et seulement si $\forall (u,v) \in \mathrm{Dom}\,(T) \times \mathrm{Dom}\,(T)$, $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$ i.e. si et seulement si $T \subset T^*$.
2. T est auto-adjoint si et seulement si $T^* = T$.

On remarque que
- les deux notions sont confondues pour les opérateurs bornés,
- un opérateur auto-adjoint est clairement symétrique,
- un opérateur symétrique est fermable,
- T est auto-adjoint si et seulement si T est symétrique et que $\mathrm{Dom}\,(T) = \mathrm{Dom}\,(T^*)$.

Théorème 2.2. *Soit T un opérateur symétrique sur $\mathcal{H}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est auto-adjoint.*
2. *T est fermé et Ker$\,(T^* \pm i\lambda) = \{0\}$.*
3. *Ran$\,(T \pm i\lambda) = \mathcal{H}$.*

Démonstration. D'après ce que nous venons de voir 1 implique 2. Supposons 2 et démontrons 3. Si $\mathrm{Ran}\,(T \pm i\lambda)$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$, comme $\mathrm{Ker}\,(T^* \mp i\lambda) = (\mathrm{Ran}\,(T \pm i\lambda))^\perp$, il existe $0 \neq u \in \mathrm{Ker}\,(T^* \mp i\lambda)$. Ce qui contredit l'hypothèse faite. Donc $\mathrm{Ran}\,(T \pm i\lambda)$ est dense dans $\mathcal{H}$. Mais, pour $u \in \mathrm{Dom}\,(T)$, on a $\|(T \pm i\lambda)u\|^2 = \|Tu\|^2 + |\lambda|^2\|u\|^2$; le calcul est fait dans la preuve du théorème 1.5. Comme dans cette preuve, ceci montre que $\mathrm{Ran}\,(T \pm i\lambda)$ sont fermés donc égaux à $\mathcal{H}$.
Enfin, supposons 3. Soit $u \in \mathrm{Dom}\,(T^*)$. Comme $\mathrm{Ran}\,(T \pm i\lambda) = \mathcal{H}$, par le théorème 2.1, $\mathrm{Ker}\,(T^* \pm i\lambda) = \{0\}$. D'autre part, il existe $v \in \mathrm{Dom}\,(T) \subset \mathrm{Dom}\,(T^*)$ tel que $(T \pm i\lambda)v_\pm = (T^* \pm i\lambda)u$. Ainsi $u - v_\pm \in \mathrm{Dom}\,(T^*)$ et $(T^* \pm i\lambda)(u - v_\pm) = 0$. Ainsi $u = v_\pm \in \mathrm{Dom}\,(T)$. On obtient ainsi que $\mathrm{Dom}\,(T^*) = \mathrm{Dom}\,(T)$ c'est-à-dire que $T^* = T$ comme T est symétrique. □

Définition 2.6. On dit que T est essentiellement auto-adjoint si $\overline{T}$ est auto-adjoint.

Corollaire 2.1. *Soit T un opérateur symétrique sur $\mathcal{H}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est essentiellement auto-adjoint.*

2. *Ker* $(T^* \pm i\lambda) = \{0\}$.
3. *Ran* $(T \pm i\lambda)$ *sont denses dans* $\mathcal{H}$.

La preuve du corollaire est laissée au lecteur.

Théorème 2.3. *Si* T *auto-adjoint sur* $\mathcal{H}$, *les résultats du théorème 1.5 valent pour* T.

2.1.4 Auto-adjonction et perturbations

Soient T et S deux opérateurs densément définis sur $\mathcal{H}$. On définit l'opérateur $T+S$ sur $\mathrm{Dom}\,(T+S) = \mathrm{Dom}\,(T) \cap \mathrm{Dom}\,(S)$ par $(T+S)u = Tu + Su$ si $u \in \mathrm{Dom}\,(T+S)$.
Supposons que T et S sont auto-adjoints. On veut trouver des conditions suffisantes sur T et S pour que $T+S$ soit auto-adjoint ou essentiellement auto-adjoint. On vérifie facilement que, si T ou S est borné, alors c'est le cas.
Soient T et S deux opérateurs densément définis sur $\mathcal{H}$

Définition 2.7. On dit que S est T -borné si $\mathrm{Dom}\,(T) \subset \mathrm{Dom}\,(S)$ et qu'il existe a et b positifs tel que, pour $u \in \mathrm{Dom}\,(T)$

$$\|Su\| \leq a\|Tu\| + b\|u\|.$$

L'infimum de tous les réels positifs a pour lesquels il existe un tel b est appelé *borne relative* de S par rapport à T.

Théorème 2.4 (Théorème de Kato-Rellich)**.** *Soit* T *auto-adjoint et* S *symétrique relativement borné par rapport à* T *de borne relative* $a < 1$. *Alors* $T+S$ *est auto-adjoint sur Dom* (T) *et essentiellement auto-adjoint sur tout coeur pour* T.

Démonstration. Pour démontrer cela, il suffit de démontrer que $\mathrm{Ran}\,(T + S \pm i\lambda) = \mathcal{H}$ ce qui implique que $\mathrm{Ker}\,(T+S \mp i\lambda) = \{0\}$. En effet, ceci garantit que $T+S$ est auto-adjoint.
Montrons que $\mathrm{Ran}\,(T+S+i\lambda) = \mathcal{H}$. Considérons l'opérateur $S(T \pm i\lambda)^{-1}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Pour $u \in \mathrm{Dom}\,(T)$, $\|(T \pm i\lambda)u\|^2 = \|Tu\|^2 + \lambda^2\|u\|^2$. On en déduit que, pour $u \in \mathcal{H}$

$$\|T(T \pm i\lambda)^{-1}\| \leq 1 \tag{2.3}$$

D'autre part, comme S est T-borné de borne relative $a < 1$, pour $a < a' < 1$, il existe $b' > 0$ tel que, pour $u \in \mathcal{H}$, on a

$$\|S(T \pm i\lambda)^{-1}u\| \leq a'\|T(T \pm i\lambda)^{-1}u\| + b'\|(T \pm i\lambda)^{-1}u\| \leq (a' + b'|\lambda|^{-1})\|u\|.$$

En choisissant λ tel que $a' + b'|\lambda|^{-1} < 1$, on voit donc que l'opérateur $1 + S(T - \pm i\lambda)^{-1}$ est inversible et que son inverse donné par

$$(1 + S(T \pm i\lambda)^{-1})^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (S(T \pm i\lambda)^{-1})^n$$

est borné. Comme $T \pm i\lambda$ est inversible de $\mathrm{Dom}\,(T)$ dans $\mathcal{H}$ d'inverse borné, il en est de même pour $T + S \pm i\lambda$ et son inverse est donné par

$$(T + S \pm i\lambda)^{-1} = (T \pm i\lambda)^{-1}(1 + S(T \pm i\lambda)^{-1})^{-1}.$$

Donc, $\mathrm{Ran}\,(T + S \pm i\lambda) = \mathcal{H}$.
Maintenant, si D est un coeur pour T, pour démontrer que $T + S$ de domaine D, disons $(T + S)_D$, est essentiellement auto-adjoint, il suffit de voir que $\overline{\mathrm{Ran}\,((T + S)_D \mp i\lambda)} = \mathcal{H}$ ce qui suit de $(T + S)_D \mp i\lambda) = (1 + S_D(T \mp i\lambda)^{-1})(T_D \mp i\lambda)$ et du fait que $1 + S_D(T \mp i\lambda)^{-1}$ se prolonge à un opérateur borné qui plus est inversible si λ est assez grand. $\square$

Remarque 2.1. Dire que S est relativement T-borné de borne s équivaut à dire que $\mathrm{Dom}\,(T) \subset \mathrm{Dom}\,(S)$ et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\|S(T + i\lambda)^{-1}\| \leq s + \varepsilon.$$

Ceci se déduit de (2.3) et de $\|(T + i\lambda)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1}$.

2.2 Réduction spectrale des opérateurs auto-adjoints

Nous ne donnerons pas une démonstration complète du théorème de réduction des opérateurs auto-adjoints. On pourra la trouver dans [4] ou [2].

2.2.1 Sous-espaces invariants et sous-espaces cycliques

Soit T auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$.

Définition 2.8. On dit que $\mathcal{H}_1$ est invariant par T si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $(z - T)^{-1}\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$.

On note que
- l'orthogonal d'un espace invariant par T est également invariant par T ;
- si $\mathcal{H}_1$ est invariant par T, on peut restreindre T à $\mathcal{H}_1$ un espace invariant par T et que cet opérateur est auto-adjoint.

Soit Γ un ensemble fini ou dénombrable. Soit $(\mathcal{H}_n)_{n\in\Gamma}$ une collection dénombrable d'espaces de Hilbert séparables. On définit

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\Gamma} \mathcal{H}_n$$

comme l'ensemble des suites $(\psi_n)_{n\in\Gamma}$ telles que
- pour $n \in \Gamma$, $\psi_n \in \mathcal{H}_n$;
- $\displaystyle\sum_{n\in\Gamma} \|\psi_n\|^2 < +\infty$.

On munit cet ensemble de sa structure naturelle d'espace vectoriel et du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\Gamma} \langle \varphi_n, \psi_n \rangle_{\mathcal{H}_n} \text{ si } \psi = (\psi_n)_{n\in\Gamma} \text{ et } \varphi = (\varphi_n)_{n\in\Gamma}.$$

Proposition 2.2. *Pour $n \in \Gamma$, soit $T_n$un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}_n$ de domaine $Dom(T_n)$. On pose*

$$Dom(T) = \left\{ \psi = (\psi_n)_{n\in\Gamma} \in \mathcal{H};\ \forall n \in \Gamma,\ \psi_n \in Dom(T_n),\ \sum_{n\in\Gamma} \|T_n \psi_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < +\infty \right\}.$$

Pour $\psi = (\psi_n)_{n\in\Gamma} \in Dom(T)$, on définit $T\psi = (T_n\psi_n)_{n\in\Gamma}$.
Alors T est auto-adjoint sur $\mathcal{H}$; on écrit $T = \bigoplus_{n\in\Gamma} T_n$ et on vérifie que, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$(z - T)^{-1} = \bigoplus_{n\in\Gamma} (z - T_n)^{-1}. \tag{2.4}$$

La preuve de ce résultat est laissée au lecteur. On verra plus loin que si T est auto-adjoint et que $z \in \rho(T)$ alors $\|(z - T]^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\mathrm{dist}(z, \sigma(T))}$. Ceci permet de monrer que ans le cadre de la proposition 2.2, on a $\sigma(T) = \overline{\bigcup_{n\in\Gamma} \sigma(T_n)}$.

On va maintenant voir une réciproque de ce résultat. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et T un opérateur sur $\mathcal{H}$.

Définition 2.9. Une famille de vecteur de $\mathcal{H}$, disons $\mathcal{F} = \{\psi_n;\ n \in \Gamma\}$ est dite cyclique pour T si l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\{\psi_n,\ (z-T)^{-1}\psi_n,\ n \in \Gamma,\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$$

est égale à $\mathcal{H}$.

L'existence d'un ensemble cyclique est garantie par celle d'une base orthonormée. Si $\mathcal{F} = \{\psi\}$ est cyclique pour T, on dit que ψ est cyclique.

Théorème 2.5. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Il existe un ensemble N au plus dénombrable, une famille de sous-espaces de $\mathcal{H}$ deux à deux orthogonaux, disons, $(\mathcal{H}_n)_{n\in N}$ tels que*

1. *$\mathcal{H}_n$ est invariant par T ;*
2. *pour $n \in N$, il existe $\psi_n \in \mathcal{H}_n$ un vecteur cyclique pour T restreint à $\mathcal{H}_n$, noté T_n ;*
3. *$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in N} \mathcal{H}_n$ et $T = \bigoplus_{n\in N} T_n$.*

Démonstration. Soit $(\phi_n)_{n\geq 1}$ une famille cyclique pour T. Soit $0 \neq \psi_1 := \phi_1 \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$, l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\{\psi_1,\ (z-T)^{-1}\psi_1,\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}.$$

$\mathcal{H}_1$ est invariant par T ; on note $T_1 = T_{|\mathcal{H}_1}$ qui est auto-adjoint sur $\mathcal{H}_1$. Si $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}$ i.e. si $\mathcal{H}_1^{\perp} \neq \{0\}$, l'un des $(\phi_n)_{n\geq 0}$ admet une composante non nulle sur $\mathcal{H}_1^{\perp}$ que l'on note ψ_2. On peut recommencer la même construction avec ψ_2 et $T_1' = T_{|\mathcal{H}_1^{\perp}}$ qui est auto-adjoint sur $\mathcal{H}_1^{\perp}$. On obtient ainsi $\mathcal{H}_2$ un espace de Hilbert et T_2 un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}_2$ vérifiant $T_2 = (T_1')_{|\mathcal{H}_2} = T_{|\mathcal{H}_2}$. Ainsi, par récurrence, on construit une suite au plus dénombrable (comme $\mathcal{H}$ est séparable) d'espaces $(\mathcal{H}_n)_{n\in N}$ tels que $\mathcal{H} = \oplus_{n\in N}\mathcal{H}_n$ et d'opérateurs $(T_n)_{n\in N}$ auto-adjoint sur $\mathcal{H}_n$ tels que, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $T = \oplus_{n\in N}T_n$. □

2.2.2 Le théorème spectral, première version

Théorème 2.6. *Soit T auto-adjoint sur $Dom(T) \subset \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.*
Alors, il existe un ensemble au plus dénombrable N, une mesure finie sur $\sigma(T) \times N$, disons μ et un opérateur unitaire

$$U:\ \mathcal{H} \to L^2(\sigma(T) \times N, d\mu) =: L^2$$

tels que

1. *si* $t : \sigma(T) \times N \to \mathbb{R}$ *est l'application* $t(s,n) = s$*, alors pour* $u \in \mathcal{H}$*, u est dans le domaine de* T *si et seulement si* $t \cdot U(u)$ *est dans* L^2 *;*
2. *si* $u \in Dom(T)$*,* $U(Tu) = t \cdot U(u)$ *i.e.* T *est unitairement équivalent à la multiplication par* T*.*

Il existe de nombreuses preuves du théorème 2.6. Celle que nous en donnerons utilise un théorème de représentation de certaines fonctions harmoniques qui est expliqué dans l'appendice aux notes. Le lecteur pourra se référer aux ouvrages suivants [4, 2, 1] pour des preuves différentes de ce résultat.
Esquisse de la preuve : On va commencer par le cas où $\mathcal{H}$ est cyclique pour T i.e. il existe une vecteur cyclique, disons ψ, pour T. Alors on a

Théorème 2.7. *Il existe une unique mesure de Borel finie positive, disons* μ_ψ *sur* $\sigma(T)$ *telle que*

$$\langle (T-z)^{-1}\psi, \psi\rangle = \int_{\sigma(T)} \frac{d\mu_\psi(t)}{t-z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Cette mesure est appelée mesure spectrale de T *et* ψ*.*

Démonstration. On pose $\kappa(z) := \langle (T-z)^{-1}\psi, \psi\rangle$ et $\nu(z) = \mathrm{Im}(\kappa(z))$. En utilisant (1.7), on calcule

$$\nu(x+iy) = y\|(T-x-iy)^{-1}\psi\|^2 \le \frac{1}{|y|}\|\psi\|^2 \tag{2.6}$$

Ainsi, ν est une fonction harmonique dans le demi-plan supérieur (comme partie imaginaire d'une fonction holomorphe) et elle y est strictement positive et vérifie (2.6). Alors, le théorème 5.1 de l'appendice nous dit qu'il existe une mesure de Borel finie et positive μ_ψ telle que, pour $y > 0$,

$$\nu(x+iy) = y\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\psi(t)}{(x-t)^2+y^2}.$$

Comme $\nu(x-iy) = -\nu(x+iy)$, la même formule vaut pour $y < 0$.
Maintenant, les fonctions

$$z \mapsto F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\psi(t)}{t-z}$$

et $z \mapsto \kappa(z)$ sont analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, partagent le même partie imaginaire et s'annulent quand $|\mathrm{Im} z| \to +\infty$; elles sont donc égales. Finalement, comme $\kappa(z)$ est analytique sur $\rho(T)$, il en est de même pour F. Ainsi, $d\mu_\psi$ est supporté sur $\mathbb{R} \setminus \rho(T)$ c'est-à-dire sur $\sigma(T)$. $\square$

Corollaire 2.2. *Sous les hypothèse du théorème 2.7, on a* $\mu_\psi(\sigma(T)) = \mu_\psi(\mathbb{R}) = \|\psi\|^2$.

Démonstration. Commençons par montrer que, pour $\psi \in \mathcal{H}$, on a

$$\|T(T - iy)^{-1}\psi\| \underset{|y|\to+\infty}{\to} 0. \tag{2.7}$$

Pour $\psi \in \mathrm{Dom}\,(T)$, (2.7) est une conséquence de

$$\|T(T - iy)^{-1}\psi\| = \|(T - iy)^{-1}T\psi\| \leq \frac{1}{|y|}\|T\psi\|.$$

Pour $\psi \in \mathcal{H}$, on procède comme suit. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathrm{Dom}\,(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$, il existe $\psi_0 \in \mathrm{Dom}\,(T)$ tel que $\|\psi - \psi_0\| \leq \varepsilon/3$. D'autre part, pour $y \neq 0$, l'opérateur $T(T - iy)^{-1}$ est borné par 2 en vertu de (1.7) et de l'identité

$$T(T - iy)^{-1}\psi = \psi + iy(T - iy)^{-1}\psi. \tag{2.8}$$

Donc, si on choisit $|y|$ grand de façon que $\|T(T-iy)^{-1}\psi_0\| \leq \varepsilon/3$, on obtient

$$\|T(T-iy)^{-1}\psi\| \leq \|T(T-iy)^{-1}\psi_0\| + \|T(T-iy)^{-1}(\psi-\psi_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Revenons à la preuve du corollaire 2.2. L'identité (2.8) implique

$$\int_{\sigma(T)} \frac{-iy}{x - iy} d\mu_\psi = \langle -iy(T - iy)^{-1}\psi, \psi\rangle = \langle T(T - iy)^{-1}\psi, \psi\rangle + \|\psi\|^2.$$

Par convergence dominée, on calcule

$$\int_{\sigma(T)} \frac{-iy}{x - iy} d\mu_\psi \underset{y\to+\infty}{\to} \mu_\psi(\mathbb{R}).$$

Ainsi, le corollaire 2.2 est une conséquence immédiate de (2.7) $\square$

Corollaire 2.3. *Soient* $(\psi, \varphi) \in \mathcal{H}^2$*. Alors, il existe une unique mesure de Borel complexe sur* $\mathbb{R}$*, disons* $\mu_{\psi,\varphi}$ *telle que*

$$\langle (T - z)^{-1}\psi, \varphi\rangle = \int_{\sigma(T)} \frac{d\mu_{\psi,\varphi}(t)}{t - z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Démonstration. L'unicité est claire puisque, par le théorème de Stone-Weierstrass, l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des fonctions du type $(x-z)^{-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 à l'infini.
Pour démontrer l'existence, on utilise les identités de polarisation pour obtenir

$$\begin{aligned}4\langle (T-z)^{-1}\psi, \varphi\rangle &= \langle (T-z)^{-1}(\psi+\varphi), (\psi+\varphi)\rangle - \langle (T-z)^{-1}(\psi-\varphi), (\psi-\varphi)\rangle \\ &\quad - i\langle (T-z)^{-1}(\psi-i\varphi), (\psi-i\varphi)\rangle + i\langle (T-z)^{-1}(\psi+i\varphi), (\psi+i\varphi)\rangle.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mu_{\psi,\varphi} = \frac{1}{4}\left(\mu_{\psi+\varphi} - \mu_{\psi-\varphi} + i\mu_{\psi-i\varphi} - i\mu_{\psi+i\varphi}\right). \quad \square$$

On démontre alors

Théorème 2.8. *Supposons que ψ est un vecteur cyclique pour T auto-adjoint. alors T est unitairement équivalent à la multiplication par t sur $L^2(\sigma(T), d\mu_\psi)$. En particulier, on a $\sigma(T) =$suppdμ_ψ.*

Démonstration. Comme $\psi \neq 0$, l'égalité $(T-z)^{-1}\psi = (T-z')^{-1}\psi$ équivaut à $z = z'$.
Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on pose $r_z(x) = (x-z)^{-1}$. Cette fonction est de carré intégrable pour la mesure $d\mu_\psi$. De plus, l'espace vectoriel engendré par $\{r_z;\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$. Posons

$$U\psi = 1 \quad \text{et} \quad U(T-z)^{-1}\psi = r_z$$

On a alors

$$\langle r_z, r_{z'}\rangle_{L^2(\mathbb{R},d\mu_\psi)} = \langle (T-z)^{-1}\psi, (T-z')^{-1}\psi\rangle.$$

En effet, si $\overline{z'} \neq z$ alors

$$\begin{aligned}\langle r_z, r_{z'}\rangle_{L^2(\mathbb{R},d\mu_\psi)} &= \int_{\mathbb{R}} r_z r_{\overline{z'}} d\mu_\psi = \frac{1}{\overline{z'}-z}\int_{\mathbb{R}} (r_{\overline{z'}} - r_z) d\mu_\psi \\ &= \frac{1}{\overline{z'}-z}\left[\langle (T-\overline{z'})^{-1}\psi, \psi\rangle - \langle (T-z)^{-1}\psi, \psi\rangle\right] \\ &= \langle (T-z)^{-1}\psi, (T-z')^{-1}\psi\rangle.\end{aligned}$$

En passant à la limite, le même résultat vaut si $\overline{z'} = z$. On en déduit donc que, pour φ et χ dans Vect$(\psi,\ (T-z)^{-1}\psi,\ z \notin \mathbb{R}\}$, on a $\langle U\varphi, U\chi\rangle_{L^2(\mathbb{R},d\mu_\psi)} =$

$\langle\varphi,\chi\rangle_{\mathcal{H}}$. Ainsi on peut étendre U en un opérateur unitaire $U:\ \mathcal{H}\to L^2(\mathbb{R},d\mu_\psi)$ qui de plus vérifie

$$U((T-z)^{-1}(T-z')^{-1}\psi)=r_zr_{z'}=r_zU((T-z')^{-1}\psi).$$

Il s'en suit que U conjugue $(T-z)^{-1}$ en la multiplication par r_z. D'autre part,

$$\begin{aligned}U(T(T-z)^{-1}\psi)(x)&=U(\psi+z(T-z)^{-1}\psi)(x)=1+zU((T-z)^{-1}\psi)\\&=(x-z)U((T-z)^{-1}\psi)+zU((T-z)^{-1}\psi)\\&=xU((T-z)^{-1}\psi).\end{aligned}$$

Par cyclicité de ψ, on en déduit que T est unitairement équivalent à la multiplication par x. □

Démonstration du théorème 2.6. Soit T auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ séparable. Soient $(\mathcal{H}_n)_{n\in N}$, $(\psi_n)_{n\in N}$ et $(T_n)_{n\in N}$ respectivement les espaces cycliques, vecteurs cycliques et l'opérateur T restreint aux espaces cycliques construits dans le théorème 2.5. Soit $U_n:\ \mathcal{H}_n\to L^2(\mathbb{R},d\mu_{\psi_n})$ construit pour T_n par le théorème 2.8. Notons l'opérateur de multiplication par x sur $L^2(\mathbb{R},d\mu_{\psi_n})$ par $\hat{T}_n$. Soit $U=\oplus_{n\in N}U_n$. On a alors

Théorème 2.9. *L'application $U:\ \mathcal{H}\to\oplus_{n\in N}L^2(\mathbb{R},d\mu_{\psi_n})$ est unitaire et U conjugue T à l'opérateur $\oplus_{n\in N}\hat{T}_n$. En particulier,*

$$\sigma(T)=\overline{\bigcup_{n\in N}supp\,\mu_{\psi_n}}.$$

Ce théorème est une conséquence des théorèmes 2.5 et 2.8.
Le théorème 2.9 est une reformulation du théorème 2.5. En effet, si on choisit les vecteurs cycliques $(\psi_n)_{n\in N}$ tels que $\sum_{n\in N}\|\psi_n\|^2<+\infty$, on peut identifier $\oplus_{n\in N}L^2(\mathbb{R},d\mu_{\psi_n})$ à $L^2(\mathbb{R}\times N,d\mu)$ où μ est définie de la façon suivante : si F est un borélien de $\mathbb{R}\times N$ alors $F=(F_n)_{n\in N}$ où F_n sont des boréliens de $\mathbb{R}$, et on a $\mu(F)=\displaystyle\sum_{n\in N}\mu_{\psi_n}(F_n)$. On voir alors que les théorèmes 2.9 et 2.5 sont équivalents. □

2.2.3 Décomposition en composantes du spectre

Théorème 2.10. *Soit $\mathcal{H}$ et T comme le théorème 2.5. Il existe $\mathcal{H}_{ac}$, $\mathcal{H}_{sc}$ et $\mathcal{H}_{pp}$ trois sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$ tels que :*

— $\mathcal{H}=\mathcal{H}_{ac}\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{H}_{sc}\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{H}_{pp}$;

— *ces trois espaces sont invariants par T ;*
— *si $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$, la mesure spectrale associée à T et ψ, $d\mu_\psi$, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ;*
— *si $\psi \in \mathcal{H}_{pp}$, la mesure spectrale $d\mu_\psi$ est purement ponctuelle par rapport à la mesure de Lebesgue ;*
— *si $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$, la mesure spectrale $d\mu_\psi$ est singulière continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Si on note $\sigma_\bullet(T) = \sigma(T_\bullet)$ pour $\bullet \in \{ac, sc, pp\}$, alors

$$\sigma(T) = \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T) \cup \sigma_{pp}(T) \quad \text{et} \quad \sigma_{pp}(T) = \overline{\sigma_p(T)}$$

où $\sigma_p(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de T.

Démonstration. Considérons les vecteurs cycliques pour T, $(\psi_n)_{n\in N}$, introduits dans la section précédente. Pour chaque n, on peut décomposer la mesure positive μ_{ψ_n} selon la mesure de Lebesgue en ses trois composantes mutuellement singulière (voir appendice)

$$\mu_{\psi_n} = \mu_{\psi_n,ac} + \mu_{\psi_n,pp} + \mu_{\psi_n,sc}$$

Pour $\bullet \in \{ac, sc, pp\}$ et F un borélien de $\mathbb{R} \times N$, on définit $\mu_\bullet(F) = \sum_{n\in N} \mu_{\psi_n,\bullet}(F_n)$ quand $F = (F_n)_{n\in N}$. L'espace $L^2(R\times N, d\mu_\bullet)$ s'identifie alors à un sous espace fermé de $L^2(R \times N, d\mu)$ (on ne considère ces fonctions que sur le support de $d\mu_\bullet$) ; il est de plus invariant par la multiplication par t. De plus, comme les mesures sont mutuellement singulières, on a

$$L^2(R \times N, d\mu) = L^2(R \times N, d\mu_{ac}) \overset{\perp}{\oplus} L^2(R \times N, d\mu_{sc}) \overset{\perp}{\oplus} L^2(R \times N, d\mu_{pp})$$

Pour $\bullet \in \{ac, sc, pp\}$, on pose $\mathcal{H}_\bullet = U^{-1}L^2(R\times N, d\mu_\bullet)$ où U est l'équivalence unitaire donnée par le théorème 2.6. Ils vérifient l'énoncé du théorème 2.10.
□

Les composantes spectrales ainsi que le spectre sont des invariants unitaires de T.

2.2.4 Le calcul fonctionnel ou la seconde version du théorème spectral

Théorème 2.11. *Soit T auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, un espace de Hilbert séparable. Alors, il existe une unique application $\hat{\Phi}$ des fonctions boréliennes bornées sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant :*

1. *$\hat{\Phi}$ est un homomorphisme d'algèbre tel que $\hat{\Phi}(\overline{f}) = (\hat{\Phi}(f))^*$;*
2. *$\hat{\Phi}$ est continue de norme majorée par 1 i.e. $\|\hat{\Phi}(f)\| \leq \|f\|_\infty$;*
3. *Si $z \notin \mathbb{R}$ et $f(x) = (z-x)^{-1}$ alors $\hat{\Phi}(f) = (z-T)^{-1}$;*
4. *Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions boréliennes bornées tel que $f_n(x) \to f(x)$ ponctuellement et $\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty$, alors, $\hat{\Phi}(f_n) \to \hat{\Phi}(f_n)$ au sens fort.*

De plus, ce morphisme vérifie

- *Si $T\psi = \lambda\psi$, alors $\hat{\Phi}(f)\psi = f(\lambda)\psi$;*
- *Si $f \geq 0$ alors $\hat{\Phi}(f) \geq 0$;*
- *Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions boréliennes bornées tel que $f_n(x) \to x$ ponctuellement et $\sup\limits_n |f_n(x)| \leq |x|$ pour tout x, alors, pour $\psi \in$ Dom (T), $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{\Phi}(f_n)\psi = T\psi$.*

Démonstration. Soit U l'équivalence unitaire donnée par le théorème 2.6. Pour f borélienne bornée, on définit

$$\hat{\Phi}(f) = U^* f \circ t\, U$$

où $f \circ t$ désigne l'opérateur de multiplication par cette fonction sur L^2.
On vérifie alors que les assertions du théorème 2.11 sont vérifiées.
L'unicité découle des propriétés 3 et 4, et de la densité des combinaisons linéaires d'homographies. □
Ce théorème est utile pour définir des fonctions bornées d'un opérateur auto-adjoint. En particulier, on peut s'en servir pour définir l'opérateur e^{itT} pour t réel et étudier les propriétés de l'application $t \mapsto e^{itT}$.
Pour simplifier les notations, par analogies avec le cas d'un opérateur T borné, on notera

$$f(T) = \hat{\Phi}(f).$$

2.2.5 Le théorème spectral, troisième version

On se place dans le même cadre que précédemment. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.

Définition 2.10. Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.
Une résolution spectrale est une famille de projection $(P_\Omega)_{\Omega\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ telle que :

1. pour tout $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, P_Ω est une projection orthogonale ;
2. $P_\emptyset = 0$ et $P_\mathbb{R} = 1$;

3. si $\Omega = \cup_{n\geq 1}\Omega_n$ où $\Omega_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont deux à deux disjoints alors P_Ω est la limite forte de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P_{\Omega_n}$ quand $N \to +\infty$.
4. si $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^2$, $P_{\Omega_1\cap\Omega_2} = P_{\Omega_1}P_{\Omega_2}$;

L'exemple typique d'un résolution spectrale est donnée par la famille $(\mathbf{1}_\Omega)_{\Omega\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ où chacune de ces foncions agit comme une opérateur de multiplication sur l'espace $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, μ une mesure borélienne finie.
Soit $(P_\Omega)_{\Omega\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ une résolution spectrale. Alors, pour $\varphi \in \mathcal{H}$, l'application $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \langle P_\Omega\varphi, \varphi\rangle$ définit une mesure borélienne positive que l'on notera $\langle dP(\lambda)\varphi, \varphi\rangle$. Cette mesure est finie de masse totale égale à $\|\varphi\|^2$.
Par les identités de polarisation, on voit alors que pour $(\psi, \varphi) \in \mathcal{H}^2$, l'application $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \langle P_\Omega\varphi, \psi\rangle$ définit une mesure borélienne complexe que l'on notera $\langle dP(\lambda)\varphi, \psi\rangle$.

Théorème 2.12. *Soit T auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, un espace de Hilbert séparable. Alors, il existe une unique résolution spectrale $(P_\Omega)_{\Omega\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ supportée sur $\sigma(T)$ telle que*

— *$Dom\,(T) = \left\{\varphi \in \mathcal{H};\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2\langle dP(\lambda)\varphi, \varphi\rangle < +\infty\right\}$;*

— *$T = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lambda dP_\lambda$ au sens où, pour $\varphi \in Dom\,(T)$ et $\psi \in \mathcal{H}$,*

$$\langle T\varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda\langle dP(\lambda)\varphi, \psi\rangle. \tag{2.9}$$

Démonstration. théorème se déduit facilement du théorème 2.11 : en effet, si on prend les projecteurs spectraux $(\mathbf{1}_\Omega(T))_{\Omega\in\mathcal{B}(\mathbb{R})} = (\hat{\Phi}(\mathbf{1}_\Omega))_{\Omega\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, on construit une résolution spectrale.
D'autre part, si l'on se donne un résolution spectrale $(P'_\Omega)_{\Omega\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, on peut lui associer un opérateur auto-adjoint de la façon suivante ; on définit $\mathrm{Dom}\,(T')$ comme dans le théorème 2.12 et pour $\varphi \in \mathrm{Dom}\,(T')$, on définit $T'\varphi$ par (2.9). Cette intégrale converge. En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$|\langle P'(\Omega)\varphi, \psi\rangle| \leq \|P'(\Omega)\varphi\| \cdot \|P'(\Omega)\psi\| = \sqrt{\langle P'(\Omega)\varphi, \varphi\rangle} \cdot \sqrt{\langle P'(\Omega)\psi, \psi\rangle}$$

ainsi, si $|\langle dP'(\lambda)\varphi, \psi\rangle|$ désigne la mesure de variation totale de la mesure complexe $\langle dP'(\lambda)\varphi, \psi\rangle$, on obtient

$$\int_\Omega |\langle dP'(\lambda)\varphi, \psi\rangle| \leq \langle P'(\Omega)\varphi, \varphi\rangle \cdot \|\psi\|.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda||\langle dP'(\lambda)\varphi, \psi\rangle| \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 \langle dP'(\lambda)\varphi, \varphi\rangle} \cdot \|\psi\|.$$

Le domaine $\mathrm{Dom}\,(T')$ est dense dans $\mathcal{H}$ (il contient les fonctions de carré intégrable à support compact) et on vérifie que T' est auto-adjoint sur ce domaine. On vérifie facilement que si, pour f borélienne brnée sur $\mathbb{R}$, l'on définit $f(T')$ par

$$\langle f(T')\varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\langle dP(\lambda)\varphi, \psi\rangle, \quad \forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{H}^2,$$

alors $f \mapsto f(T')$ est l'application $\hat{\Phi}$ construite pour T' par le théorème 2.11. L'unicité de la résolution spectrale vient alors de l'unicité de cette application. □

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne localement bornée. On définit le sous-espace dense de $\mathcal{H}$

$$\mathrm{Dom}\,(g(T)) = \left\{\varphi \in \mathcal{H};\ \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2 \langle dP(\lambda)\varphi, \varphi\rangle < +\infty \right\}$$

et pour $\varphi \in \mathrm{Dom}\,(g(T))$, $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\langle g(T)\varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\langle dP(\lambda)\varphi, \psi\rangle.$$

Alors $\mathrm{Dom}\,(g(T))$ est dense dans $\mathcal{H}$ et $g(T)$ définit un opérateur sur le domaine $g(T)$. L'application $g \mapsto g(T)$ est un morphisme d'algèbre qui prolonge le morphisme $\hat{\Phi}$ défini par le théorème 2.11 aux fonctions boréliennes localement bornées. En particulier, $g(T)$ est auto-adjoint si g est à valeurs réelles.

2.3 Quelques conséquences du théorème spectral

Proposition 2.3. *Soient f et g deux fonctions boréliennes bornées. On a*

$$\langle f(T)\psi, g(T)\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\langle dP(t)\psi, \varphi\rangle \tag{2.10}$$

si $dP(t)$ est la résolution spectrale de T.
On en déduit que, si $z \notin \sigma(T)$ alors

$$\|(z-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{dist(z, \sigma(T))}. \tag{2.11}$$

Démonstration. Pour démontrer (2.10), il suffit de le faire pour f et g des fonctions simples i.e. des combinaisons linéaires finies d'indicatrices de boréliens. Le cas général s'obtient par passage à la limite. Pour ces combinaisons linéaires finies, (2.10) se vérifie facilement en utilisant la propriété 4 des résolutions spectrales.
En vertu de (2.10), pour $\psi \in \mathcal{H}$, on calcule

$$\begin{aligned}\|(z-T)^{-1}\psi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (z-t)^{-1}(\overline{z}-t)^{-1}\langle dP(t)\psi,\psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} |z-t|^{-2}\langle dP(t)\psi,\psi\rangle \\ &\leq \sup_{t\in\sigma(T)} |z-t|^{-2}\int_{\mathbb{R}}\langle dP(t)\psi,\psi\rangle = \frac{1}{\operatorname{dist}^2(z,\sigma(T))}\|\psi\|^2.\end{aligned}$$

□

En utilisant le calcul fonctionnel, on donne la caractérisation suivante du spectre et du spectre ponctuel (dont la preuve est laissée au lecteur) :

— $z \in \sigma(T)$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\operatorname{Ran} \mathbf{1}_{]z-\varepsilon,z+\varepsilon[}(T) \neq \{0\}$;

— $z \in \sigma_p(T)$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\operatorname{Ran} \mathbf{1}_{\{z\}}(T) \neq \{0\}$.

Théorème 2.13 (Formule de Stone)**.** *Soient $a < b$. Pour $\psi \in \mathcal{H}$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2i\pi}\int_a^b [(T-x-i\varepsilon)^{-1}\psi-(T-x+i\varepsilon)^{-1}\psi]dx = \frac{1}{2}\left[\mathbf{1}_{[a,b]}(T)\psi + \mathbf{1}_{]a,b[}(T)\psi\right].$$

Démonstration. On calcule

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_a^b \frac{1}{(t-x)^2+\varepsilon^2}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [a,b], \\ 1/2 & \text{si } t \in \{a,b\}, \\ 1 & \text{si } t \in]a,b[. \end{cases}$$

En utilisant le théorème spectral, on calcule

$$\begin{aligned}& s-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2i\pi}\int_a^b [(T-x-i\varepsilon)^{-1}-(T-x+i\varepsilon)^{-1}]dx \\ &= s-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \left[\int_{\mathbb{R}}(t-x-i\varepsilon)^{-1}dP(t) - \int_{\mathbb{R}}(t-x-i\varepsilon)^{-1}dP(t)\right]dx \\ &= s-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2i\pi}\int_a^b\int_{\mathbb{R}}\frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}dP(t)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(s-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}dx\right)dP(t) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{1}_{[a,b]}(T)+\mathbf{1}_{]a,b[}(T)\right].\end{aligned}$$

Ici le passage à la limite s'entend au sens de la convergence forte des opérateurs. L'interversion des deux intégrales puis de la limite et de l'intégrale se justifient de la façon suivante :

— pour $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}^2$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne bornée, par le théorème de Fubini usuel, on a

$$\int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}} g(t,x) \langle dP(t)\psi, \varphi \rangle \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_a^b g(t,x) dx \right) \langle dP(t)\psi, \varphi \rangle.$$

— si $(g_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ boréliennes bornées uniformément et convergeant vers g, alors, au sens de la convergence forte

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(t) dP(t) \underset{n \to +\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} g(t) dP(t).$$

En effet, pour $\psi \in \mathcal{H}$, en utilisant (2.10)

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}} g_n(t) dP(t)\psi - \int_{\mathbb{R}} g(t) dP(t)\psi \right\|^2 \\
&\qquad = \left\| \int_{\mathbb{R}} g_n(t) dP(t)\psi \right\|^2 + \left\| \int_{\mathbb{R}} g(t) dP(t)\psi \right\|^2 \\
&\qquad\qquad - 2\mathrm{Re} \left(\left\langle \int_{\mathbb{R}} g_n(t) dP(t)\psi, \int_{\mathbb{R}} g(t) dP(t)\psi \right\rangle \right) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} \left[|g_n(t)|^2 + |g(t)|^2 - 2\mathrm{Re}(g_n(t)\overline{g(t)}) \right] \langle dP(t)\psi, \psi \rangle
\end{aligned}$$

Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} g_n(t) dP(t)\psi - \int_{\mathbb{R}} g(t) dP(t)\psi \right\|^2 \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

□

Revenons à l'équation de Schrödinger i.e. à l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial \psi}{\partial t} & = T\psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}_{|t=0} & = \psi_0 \end{cases} \quad \text{où } \psi_0 \in \mathrm{Dom}\,(T).$$

On peut la résoudre en posant $\psi(t) = e^{itT}\psi_0$. En effet, le calcul fonctionnel démontre que,

— pour $t \in \mathbb{R}$, e^{itT} est unitaire et c'est un groupe i.e. $e^{isT} e^{itT} = e^{i(s+t)T}$;

— il est fortement continu i.e. si $\psi \in \mathcal{H}$,

$$e^{itT}\psi = \lim_{s \to t} e^{isT}\psi;$$

— pour $\psi \in \mathrm{Dom}\,(T)$, $t \mapsto e^{itT}\psi$ est différentiable et que l'on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(e^{itT}\psi - \psi\right) = iT\psi. \tag{2.12}$$

On démontre de plus que, si la limite du membre de droite de (2.12) existe alors $\psi \in \mathrm{Dom}\,(T)$ et, ainsi, que (2.12) est valide.
On voit donc que $t \mapsto e^{itT}\psi_0$ est une solution de l'équation de Schrödinger. Ces résultats ont une réciproque.

Théorème 2.14 (Théorème de Stone)**.** *Soit $t \mapsto U(t)$ un groupe de transformations unitaires fortement continu sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Alors, il existe un unique opérateur auto-adjoint T tel que $U(t) = e^{itT}$.*

La démonstration de ce résultat est proposée en exercice :

1. On définit $S(t) = t^{-1}\int_0^t U(u)du$.
   Montrer que, pour $\psi \in \mathcal{H}$, $S(t)\psi \to \psi$ quand $t \to 0$ et que
   $$S(t)\frac{(U(u)-1)}{u} = \frac{(U(u)-1)}{u}S(t) = S(u)\frac{(U(t)-1)}{t}.$$
2. On définit
   $$\mathrm{Dom}\,(T) = \{\psi \in \mathcal{H};\ \exists\varphi \in \mathcal{H},\ u^{-1}(U(u)-1)\psi \underset{u\to 0}{\to} \varphi\},$$
   $$\text{et pour } \psi \in \mathrm{Dom}\,(T),\ T\psi = \lim_{u \to 0}\frac{(U(u)-1)}{u}\psi.$$
   Montrer que $\mathrm{Dom}\,(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et que T est fermé.
3. Montrer que T est auto-adjoint et que $U(t) = e^{itT}$.

Chapitre 3

Spectres discret et essentiel

Mis à part dans quelques cas particuliers, il est difficile de connaître la décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert. On doit souvent se contenter d'informations parcellaires. Nous allons maintenant décrire quelques méthode permettant d'extraire de telles informations.

Proposition 3.1. *Soit T auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. S'il existe $\varepsilon > 0$ et $u \in Dom(T)$ tels que*

$$\|(T - \lambda)u\| \leq \varepsilon\|u\|$$

alors $\sigma(T) \cap [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \neq \emptyset$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'estimée (2.11). □
On en déduit le

Théorème 3.1 (Critère de Weyl)**.** *Soit T auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.*
λ est dans le spectre de T si et seulement si il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $Dom(T)$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $\|(T - \lambda)u_n\| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Démonstration. Commençons par l'implication réciproque. Supposons qu'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Dom (T) telle que $\|u_n\| = 1$ et $\|(T-\lambda)u_n\| \to 0$ quand $n \to +\infty$. D'après la proposition 3.1, la distance de λ à $\sigma(T)$ est inférieure à $\|(T - \lambda)u_n\|$ pour tout n. Comme $\sigma(T)$ est fermé, λ appartient à $\sigma(T)$.
L'implication directe se démontre comme suit. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Alors, pour $\varepsilon > 0$, $\mathbf{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[}(T) \neq 0$. Pour $\varepsilon = 1/n$, soit $u_n \in \text{Ran}\,(\mathbf{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[}(T))$ tel que

$\|u_n\| = 1$. En utilisant le théorème spectral, on calcule

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda)u_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (t-\lambda)^2 \mathbf{1}_{]\lambda-1/n,\lambda+1/n[}(t)\langle dP(t)u_n, u_n\rangle \\ &\leq \frac{1}{n^2}\int_{\mathbb{R}} \langle dP(t)u_n, u_n\rangle = \frac{1}{n^2}. \quad \square\end{aligned}$$

3.1 Spectre discret : critères et propriétés

Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit λ, un point isolé de $\sigma(T)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$(]\lambda-2\varepsilon,\lambda[\cup]\lambda,\lambda+2\varepsilon[)\cap\sigma(T) = \emptyset. \tag{3.1}$$

On définit le projecteur de Riesz

$$P_\lambda = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_\varepsilon} (z-T)^{-1}dz$$

où C_ε est le cercle $\{z \in \mathbb{C};\ |z-\lambda| = \varepsilon\}$ orienté dans le sens direct.
L'intégrale est bien définie puisque dans la couronne $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z-\lambda| < \varepsilon\}$, $z \mapsto (z-T)^{-1}$ est analytique. D'autre part, on aurait pu remplacer le cercle par tout autre lacet simple homotope à ce cercle dans $\mathbb{C}\setminus\sigma(T)$, le résultat de l'intégration restant indépendant de ce lacet.

Proposition 3.2. *λ est une valeur propre et P_λ est le projecteur spectral sur l'espace propre associé à λ.*

Démonstration. Comme λ est isolé dans $\sigma(T)$, on a $\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(T) = \mathbf{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[}(T) \neq 0$. Donc λ est une valeur propre. En effet, si $\varphi \in \mathrm{Ran}\,(\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(T))$, $\varphi \in \mathrm{Dom}\,(T)$ et $T\varphi = \lambda\varphi$.
Comme le cercle est symétrique par rapport à l'axe réel et que cette symétrie en renverse l'orientation, on calcule

$$P_\lambda^* = \frac{-1}{2i\pi}\int_{C_\varepsilon} (\overline{z}-T^*)^{-1}d\overline{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_\varepsilon} (\overline{z}-T)^{-1}dz = P_\lambda.$$

D'autre part, si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, en utilisant la formule de la résolvante, on calcule

$$\begin{aligned}
P_\lambda P_\lambda &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C_\varepsilon}(z-T)^{-1}dz\,\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\varepsilon'}}(z'-T)^{-1}dz' \\
&= \frac{-1}{4\pi}\int_{C_{\varepsilon'}}\int_{C_\varepsilon}(z-T)^{-1}(z'-T)^{-1}dzdz' \\
&= \frac{-1}{4\pi}\int_{C_{\varepsilon'}}\int_{C_\varepsilon}(z'-T)^{-1}(z-z')^{-1}dzdz' \\
&\qquad\qquad - \frac{-1}{4\pi}\int_{C_{\varepsilon'}}\int_{C_\varepsilon}(z-T)^{-1}(z-z')^{-1}dzdz'.
\end{aligned}$$

Or, pour $z \in C_\varepsilon$ et $z' \in C_{\varepsilon'}$,

$$\int_{C_{\varepsilon'}}(z-z')^{-1}dz' = 0 \quad \text{et} \quad \int_{C_\varepsilon}(z-T)^{-1}(z-z')^{-1}dz = -2i\pi(z'-T)^{-1}$$

Ainsi

$$P_\lambda P_\lambda = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\varepsilon'}}(z'-T)^{-1}dz' = P_\lambda.$$

Enfin, pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, on calcule

$$(T-\lambda)P_\lambda = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\varepsilon'}}(T-\lambda)(z-T)^{-1}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{\varepsilon'}}(z-\lambda)(z-T)^{-1}dz = 0$$

La dernière égalité s'obtient en laissant ε' tendre vers 0 comme, pour ε' petit et $z \in C_{\varepsilon'}$, on a $\|(z-\lambda)(z-T)^{-1}\| \leq 1$.
Il nous reste donc simplement à vérifier que $P_\lambda \neq 0$. Si $P_\lambda = 0$, le théorème de Morera nous que $z \mapsto (z-T)^{-1}$ est analytique au voisinage de λ. Ainsi λ est dans l'ensemble résolvant. □

Définition 3.1. λ est dans le spectre discret de T si λ est une valeur propre isolée de multiplicité finie de T. On notera $\sigma_d(T)$ le spectre discret de T.
Le spectre essentiel de T est le complémentaire dans $\sigma(T)$ de $\sigma_d(T)$. Il est noté $\sigma_{ess}(T)$.

On a la caractérisation suivante des spectre discret et essentiel.

Lemme 3.1. *Soit $\lambda \in \sigma(T)$.*

— *$\lambda \in \sigma_d(T)$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$0 < dim\, Ran\, \mathbf{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(T) < +\infty.$$

— *$\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$dim\, Ran\, \mathbf{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(T) = +\infty.$$

3.2 Formules variationnelles - principe du minimax

Définition 3.2. Soit T auto-adjoint. On dit que T est semi-borné inférieurement par C, un réel, si $\varphi \in \mathrm{Dom}\,(T)$, $\langle T\varphi,\, \varphi\rangle \geq C\|\varphi\|^2$.
On dit que T est semi-borné supérieurement si $-T$ est semi-borné inférieurement.

Pour T un opérateur semi-borné inférieurement, nous allons donner une façon de construire le spectre discret de T en dessous du spectre essentiel i.e. si le spectre discret dans $]-\infty, s]$ où $s = \inf \sigma_{ess}(T)$.
On définit

$$\lambda_1(T) = \inf_{\substack{\varphi \in \mathrm{Dom}\,(T) \\ \|\varphi\|=1}} \langle T\varphi, \varphi\rangle$$

et, pour $n \geq 2$,

$$\lambda_n(T) = \sup_{\dim\, \mathcal{E}=n} \inf_{\substack{\varphi \in \mathrm{Dom}\,(T)\cap\mathcal{E}^\perp \\ \|\varphi\|=1}} \langle T\varphi, \varphi\rangle$$

où $\mathcal{E}^\perp$ désigne l'orthogonal du sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$.
Comme T est semi-borné inférieurement, λ_1 est fini ; de plus, la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Théorème 3.2. *Soit $s = \inf \sigma_{ess}(T)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'une des deux alternatives suivantes est vraie :*

1. *soit il y a n valeurs propres inférieures à s et, alors λ_n est la n-ième valeur propre de T (en comptant la multiplicité).*
2. *soit $\lambda_n = s$ et $\forall m \geq n$, $\lambda_m = \lambda_n$. Dans ce cas, il y a au plus n valeurs propres de T inférieures à s.*

Démonstration. On note $\mathbf{1}_\Omega(T)$ la résolution spectrale de T.

Lemme 3.2. *On a*

a. dim Ran $\mathbf{1}_{]-\infty,\lambda]}(T) < n$ si $\lambda < \lambda_n$;

b. dim Ran $\mathbf{1}_{]-\infty,\lambda]}(T) \geq n$ si $\lambda > \lambda_n$;

Démonstration. Nous démontrerons ces assertions par la contraposée. Supposons donc que $\dim \mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]-\infty,\lambda]}(T) \geq n$. Il existe donc $\mathcal{E}$, un sous-espace de Dom (T) de dimension n tel que, pour $\psi \in \mathcal{E}$, $\langle T\psi, \psi\rangle \leq \lambda\|\psi\|^2$. En effet, si $\psi \in \mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]-\infty,\lambda]}(T)$, par le théorème spectral, on a

$$\langle T\psi, \psi\rangle = \int_{]-\infty,\lambda]} \lambda\langle dP(\lambda)\psi, \psi\rangle \leq \lambda \int_{]-\infty,\lambda]} \lambda\langle dP(\lambda)\psi, \psi\rangle = \lambda\|\psi\|^2.$$

Si on se donne maintenant $\mathcal{V}$, un sous-espace de $\mathcal{H}$ dimension $n-1$, il existe $\varphi_{\mathcal{V}} \in \mathcal{E} \cap \mathcal{V}^\perp$ tel que $\|\varphi_{\mathcal{V}}\| = 1$. On en conclut que

$$\lambda_n(T) = \sup_{\dim \mathcal{V}=n-1} \inf_{\substack{\varphi \in \mathrm{Dom}\,(T) \cap \mathcal{V}^\perp \\ \|\varphi\|=1}} \langle T\varphi, \varphi\rangle \leq \sup_{\dim \mathcal{V}=n-1} \langle T\varphi_{\mathcal{V}}, \varphi_{\mathcal{V}}\rangle \leq \lambda.$$

Supposons maintenant que $\dim \mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]-\infty,\lambda]}(T) \leq n-1$. Soient alors $(\varphi_j)_{1\leq j\leq n-1}$ des vecteurs (pas forcémeent linéairement indépendants) engendrant l'espace $\mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]-\infty,\lambda]}(T)$. Alors, si ψ est orthogonal à tous ces vecteurs, par le même calcul que ci-dessus, on sait que $\langle T\psi, \psi\rangle \geq \lambda\|\psi\|^2$. On en déduit

$$\lambda_n(T) \geq \inf_{\substack{\varphi \in \mathrm{Dom}\,(T) \cap \mathrm{Vect}\{(\varphi_j)_{1\leq j\leq n-1}\}^\perp \\ \|\varphi\|=1}} \langle T\varphi, \varphi\rangle \geq \lambda. \quad \square$$

Pour démontrer le théorème, on procède par récurrence sur n. Considérons les deux alternatives

α. $\forall \varepsilon > 0$, $\dim \mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]-\infty,\lambda_n+\varepsilon]}(T) = +\infty$.

β. $\exists \varepsilon > 0$, $\dim \mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]-\infty,\lambda_n+\varepsilon]}(T) < +\infty$.

Pour $n = 1$, dans le cas α, on voit que $s = \inf \sigma(T)$. De plus, on ne peut avoir $\lambda_2 > \lambda_1$; sinon, par le point a du lemme 3.2, pour $0 < \varepsilon < (\lambda_2 - \lambda_1)/2$, on a $\dim \mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]-\infty,\lambda_1+\varepsilon]}(T) < +\infty$ ce qui forcerait $\lambda_1 \in \sigma_d(T)$. On peut recommencer ce raisonnement avec λ_2 puis par récurrence avec λ_n pour tout $n \geq 1$; de ceci, il s'ensuit que $\lambda_n = \lambda_1$ si $n \geq 1$.
Dans le cas β, λ_1 est une valeur propre ; c'est clairement la première.
Supposons que l'alternative donnée par le théorème 3.1 est vraie jusqu'au rang $n-1$. Si $\lambda_n = s$, alors le même raisonnement que dans le cas $n = 1$ nous dit que il s'ensuit que $\lambda_m = \lambda_n$ si $m \geq n$.
On peut donc supposer que λ_1, $\cdots$, λ_{n-1} sont toutes des valeurs propres discrètes, et comptées avec multiplicité, elles sont respectivement la première, la seconde, ..., la $(n-1)$-ième. Dans le cas α, $\lambda_n \in \sigma_{ess}(T)$. En effet, $\lambda_{n-1} < \lambda_n$ et si $0 < \varepsilon < \lambda_n - \lambda_{n-1}$, $\dim \mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]\lambda_n-\varepsilon,\lambda_n+\varepsilon]}(T) = +\infty$ comme $\mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]-\infty,\lambda_n-\varepsilon]}(T)$ est de dimension finie. D'autre part, si $\lambda < \lambda_n$, par le point a du lemma 3.2, on a $\dim \mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda]}(T) < +\infty$. Ainsi, $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$. Donc $\lambda_n = s$.
Dans le cas β, λ_n est une valeur propre discrète de T. En effet, en utilisant conjointement a et b du lemme, on voit que $\dim \mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]\lambda_n-\varepsilon,\lambda_n+\varepsilon[}(T) \geq 1$ pour $\varepsilon > 0$, et que $\dim \mathrm{Ran}\, \mathbf{1}_{]\lambda_n-\varepsilon,\lambda_n+\varepsilon[}(T) < +\infty$ si $\varepsilon > 0$ est assez petit. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ est assez petit, $[\lambda_n - \varepsilon, \lambda_n + \varepsilon] \cap \sigma(T) = \{\lambda_n\}$. Ainsi T a au moins n valeurs propres (comptées avec multiplicité) inférieures ou égales à λ_n ; notons les λ_1, $\ldots$, λ_{n-1} et E. Si $E < \lambda_n$, cela contredit le point a.

Le seule possibilité est que $E = \lambda_n$ c'est à dire que λ_n est la n-ième valeur propre. Ceci achève la preuve du théorème 3.1. $\square$

3.2.1 Opérateurs compacts

On rappelle un théorème bien connu.

Définition 3.3. On dit qu'un opérateur T est compact si l'une des proprétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. T envoie la boule unité de $\mathcal{H}$ dans un compact de $\mathcal{H}$.
2. si $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie $u_n \rightharpoonup 0$ alors $Tu_n \to 0$.
3. T est limite en norme d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Un ensemble compact étant borné, un opérateur compact est borné. L'adjoint d'un opérateur compact est également compact. D'autre part, le composé d'un opérateur compact par un opérateur borné est compact. Enfin, si $(T_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'opérateurs bornés convergeant fortement vers 0 et que T est compact, alors $\|T_n T\| \to 0$; ceci suit du fait que cela vaut pour des opérateurs de rang fini, de la caractérisation 3 des opérateurs compacts et du fait qu'une suite d'opérateurs bornés convergeant fortement est uniformément bornée.
Dans le cas des opérateurs compacts auto-adjoints, le théorème spectral prend la forme suivante

Théorème 3.3 (Théorème de Hilbert-Schmidt)**.** *Soit T compact et auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Alors, le spectre de T est constitué de 0 et d'une suite de valeurs propres tendant vers 0. Excepté le point 0, toutes les valeurs propres sont discrètes. Enfin, il existe une base orthonormée de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres de T.*

3.3 Spectre essentiel : critères et propriétés

Soit T auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

Théorème 3.4 (Critère de Weyl)**.** *λ est dans le spectre essentiel de T si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est remplie*

1. *il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Dom(T) telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système orthonormé et $\|(T-\lambda)u_n\| \to 0$ quand $n \to +\infty$.*
2. *il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Dom(T) telle que $\|u_n\| = 1$, $u_n \rightharpoonup 0$ et $\|(T-\lambda)u_n\| \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Weyl pour T et λ.
Démonstration. Remarquons d'abord que 1 implique clairement 2.
λ appartient à $\sigma_{ess}(T)$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \dim \operatorname{Ran} \mathbf{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[}(T) = +\infty.$$

Si $\dim \operatorname{Ran} \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T-\lambda) = +\infty$, alors on choisit pour $(u_n)_{n\geq 0}$, un système orthonormé dénombrable dans $\operatorname{Ker}(T-\lambda)$. Si $\dim \operatorname{Ran} \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(T) < +\infty$, alors $\forall\varepsilon > 0$, $\dim \operatorname{Ran} \mathbf{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda[\cup]\lambda,\lambda+\varepsilon[}(T) = +\infty$. On définit les projecteurs orthogonaux P_n par

$$P_n = \mathbf{1}_{]\lambda-1/n,\lambda-1/(n+1)]\cup]\lambda+1/(n+1),\lambda+1/n[}(T).$$

Ils sont deux à deux orthogonaux et on a

$$\mathbf{1}_{]\lambda-1/n_0,\lambda[\cup]\lambda,\lambda+1/n_0[}(T) = s - \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} P_n.$$

On en déduit qu'une infinité de $(P_n)_{n\geq 0}$ sont non nuls sinon, pour n_0 assez grand, tous les termes dans le membre de droite de l'égalité précédente seraient nuls, et ainsi le membre de gauche le serait aussi. Alors une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_n = P_n u_n$ et $\|u_n\| = 1$ vérifie à la fois 1 et 2.
Supposons maintenant que λ est dans le spectre discret de T donc

$$\exists\varepsilon > 0, \quad 0 < \dim \operatorname{Ran} \mathbf{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[}(T) < +\infty.$$

Étant de rang fini, le projecteur $P := \mathbf{1}_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[}(T)$ est compact. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant 2. Comme $u_n \rightharpoonup 0$, on a $Pu_n \to 0$ dans $\mathcal{H}$. D'autre part, par le calcul fonctionnel, comme $\|u_n\| = 1$, on calcule

$$\begin{aligned}
1 = \|u_n\|^2 &\int_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} \langle dP(t)u_n, u_n\rangle + \int_{\mathbb{R}\setminus]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} \langle dP(t)u_n, u_n\rangle \\
&\leq \int_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} \langle dP(t)u_n, u_n\rangle + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}\setminus]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} (t-\lambda)^2 \langle dP(t)u_n, u_n\rangle \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \langle dP(t)u_n, u_n\rangle = \|Pu_n\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} (t-\lambda)^2 \langle dP(t)u_n, u_n\rangle \\
&= \|Pu_n\|^2 + \|(T-\lambda)u_n\|^2 \underset{n\to+\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

ce qui est absurde. Ceci achève la démonstration du théorème 3.4. $\square$

3.3.1 Perturbations relativement compacts et stabilité du spectre essentiel

Soit T auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

Définition 3.4. Soit S un opérateur sur $\mathcal{H}$. On dit S est T-compact (ou relativement compact par rapport à T) si et seulement si $\mathrm{Dom}\,(T) \subset \mathrm{Dom}\,(S)$ et il existe $z \notin \sigma(T)$ tel que $S(T-z)^{-1}$ est compact.

Si S est T-compact alors, pour tout $z \notin \sigma(T)$, on a $S(T-z)^{-1}$ est compact. En effet, s'il existe $z_0 \notin \sigma(T)$ tel que $S(T-z_0)^{-1}$ est compact, on a $S(T-z)^{-1} = S(T-z_0)^{-1} + (z-z_0)S(T-z_0)^{-1}(T-z)^{-1}$. Le second opérateur du membre de droite de cette égalité est compact comme composé d'un opérateur compact et d'un opérateur borné.
Notons qu'un opérateur compact est T-compact pour tout opérateur T.

Théorème 3.5. *Si S est T-compact alors S est T-borné de borne 0.*

Démonstration. Le théorème est un corollaire immédiat du

Lemme 3.3. *Si S tel que $\mathrm{Dom}\,(T) \subset \mathrm{Dom}\,(S)$ est T-compact alors $\|S(T+i\lambda)^{-1}\| \to 0$ quand $|\lambda| \to +\infty$.*

Démonstration. On écrit $S(T+i\lambda)^{-1} = [S(T+i)^{-1}][(T+i)(T+i\lambda)^{-1}]$. Pour montrer que $\|S(T+i\lambda)^{-1}\| \to 0$, il suffit donc de montrer que $\|[(T+i)(T+i\lambda)^{-1}]^*[S(T+i)^{-1}]^*\| \to 0$. Comme $[S(T+i)^{-1}]^*$ est compact, en vertu des remarques faites à la suite de la définition des opérateurs compacts, il nous suffit de démontrer que $[(T+i)(T+i\lambda)^{-1}]^* = [(T-i)(T-i\lambda)^{-1}]$ tend fortement vers 0 quand $|\lambda| \to +\infty$. Par le théorème spectral, on a

$$\|(T-i)(T-i\lambda)^{-1}\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|t-i|}{|t-i\lambda|} \leq 1 \text{ si } |\lambda| \geq 1. \tag{3.2}$$

Pour $u \in \mathrm{Dom}\,(T)$, on a

$$\|(T-i)(T-\lambda i)^{-1}u\| = \|(T-\lambda i)^{-1}(T-i)u\| \leq \frac{1}{\lambda}\|(T-i)u\| \to 0 \text{ quand } |\lambda| \to +\infty. \tag{3.3}$$

Comme $\mathrm{Dom}\,(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$, on déduit de (3.2) et (3.3), $[(T-i)(T-i\lambda)^{-1}]$ tend fortement vers 0 quand $|\lambda| \to +\infty$. □

Corollaire 3.1. *Si T est auto-adjoint et que S est symétrique et T-compact, alors $T+S$ est auto-adjoint de domaine $\mathrm{Dom}\,(T)$.*

Théorème 3.6 (Théorème de Weyl)**.** *Soit T auto-adjoint et S est symétrique et T-compact. Alors, on a*

$$\sigma_{ess}(T+S) = \sigma_{ess}(T).$$

Démonstration. Commençons par démontrer le lemme suivant

Lemme 3.4. *Si T auto-adjoint et S est symétrique et T-compact, alors S est $(T+S)$-compact.*

Démonstration. On calcule

$$S(T+S+\lambda i)^{-1} = S(T+\lambda i)^{-1} + S(T+\lambda i)^{-1}S(T+S+\lambda i)^{-1}$$

D'après le lemme 3.3, $\|S(T+\lambda i)^{-1}\| \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$. Donc, pour λ suffisamment grand, $1 - S(T+\lambda i)^{-1}$ est inversible d'inverse borné et on obtient

$$S(T+S+\lambda i)^{-1} = \left[1 - S(T+\lambda i)^{-1})\right]^{-1} S(T+\lambda i)^{-1}.$$

Ainsi $S(T+S+\lambda i)^{-1}$ est la composée d'un opérateur borné et d'un opérateur compact. □

Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(T+S)$. D'après le critère de Weyl, il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathrm{Dom}\,(T+S) = \mathrm{Dom}\,(T)$ qui est orthonormée telle que $\|(T+S-\lambda)u_n\| \to 0$. Donc, $v_n := (T+S-i)u_n = (T+S-\lambda)u_n + (\lambda - i)u_n \rightharpoonup 0$. Donc, $Su_n = S(T+S-i)^{-1}v_n \to 0$ car $S(T+S-i)^{-1}$ est compact. Ainsi, on obtient que $\|(T-\lambda)u_n\| \to 0$. On en déduit que $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$. □

3.4 Opérateurs à résolvante compacte

Théorème 3.7. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ semi-borné inférieurement. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe $\lambda \notin \sigma(T)$ tel que $(T-\lambda)^{-1}$ est compact ;*
2. *pour tout $\lambda \notin \sigma(T)$, $(T-\lambda)^{-1}$ est compact ;*
3. *$\{\psi \in Dom\,(T);\ \|\psi\| \leq 1,\ \|T\psi\| \leq t\}$ est un ensemble compact de $\mathcal{H}$ pour tout t.*
4. *il existe $(\varphi_n)_{n\geq 0}$, une base orthonormée de $\mathcal{H}$, constituée de vecteurs propres de T i.e. $T\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ et la suite des valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ est croissante et tend vers $+\infty$;*
5. *la suite $(\lambda_n(T))_{n\geq 0}$ des nombres donnés par le principe du mini-max dans le théorème 3.2 tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. L'équivalence entre 1 et 2 est clairement une conséquence de la formule de la résolvante et du fait qu'un opérateur compact composé avec un opérateur borné est compact.
L'équivalence entre 4 et 5 suit directement du théorème 3.2.
Montrons que 4 implique 3. Pour cela on commence par montrer le

Lemme 3.5. *Soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable.*
$\mathcal{K}$ est compact si et seulement si

- *$\mathcal{K}$ est fermé et borné ;*
- *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$, un sous-espace de dimension finie, tel que $\Pi_{\mathcal{E}^\perp} K \subset B_{\mathcal{H}}(0, \varepsilon)$ où*
  - *$\Pi_{\mathcal{E}}$ désigne le projecteur orthogonal sur $\mathcal{E}$;*
  - *$B_{\mathcal{H}}(u, r)$ est la boule de $\mathcal{H}$ de centre u et de rayon r.*

Démonstration du lemme. Un compact doit clairement être fermé et borné. D'autre part, si $\mathcal{K}$ est compact, pour $\varepsilon > 0$, on peut écrire

$$\mathcal{K} \subset \cup_{u\in\mathcal{K}} B_{\mathcal{H}}(u, \varepsilon).$$

On peut donc extraire un recouvrement fini de ce recouvrement ouvert i.e. il existe $(u_j)_{1\leq j\leq n}$, $u_j \in \mathcal{H}$, tels que

$$\mathcal{K} \subset \cup_{j=1}^{n} B_{\mathcal{H}}(u, \varepsilon).$$

Si $\mathcal{E}$ =Vect$\{u_j,\ 1 \leq j \leq n\}$, on a

$$\Pi_{\mathcal{E}^\perp} K \subset B_{\mathcal{H}}(0, \varepsilon).$$

Réciproquement, soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ vérifiant les trois propriétés du lemme. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$, une suite dans $\mathcal{K}$. Pour $k \geq 1$, il existe $\mathcal{E}_k$ un sous-espace de dimension finie tel que $\Pi_{\mathcal{E}_k^\perp} K \subset B_{\mathcal{H}}(0, 1/k)$. Comme $\mathcal{K}$ est borné, de $(u_n)_{n\geq 1}$, on peut extraire une sous-suite, disons $(u_{\varphi_1(n)})_{n\geq 1}$, telle que $(\Pi_{\mathcal{E}_1} u_{\varphi_1(n)})_n$ converge. Puis, par récurrence, pour chaque $k \geq 2$, de la sous-suite précédemment extraite, on peut extraire une sous-suite, disons $(u_{\varphi_k(\cdots\varphi_1(n)\cdots)})_{n\geq 1}$, telle que $(\Pi_{\mathcal{E}_k} u_{\varphi_k(\cdots\varphi_1(n)\cdots)})_n$ converge. Alors, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi_n(\cdots\varphi_1(n)\cdots)})_n$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\geq 1}$ et elle est de Cauchy : en effet, pour $n \geq k$, on sait que $(\Pi_{\mathcal{E}_k} v_n)_n$ converge et que $\|\Pi_{\mathcal{E}_k^\perp} v_n\| \leq 1/k$. Donc, il existe $n_0 \geq 0$ tel que si $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, $\|\Pi_{\mathcal{E}_k} v_n - \Pi_{\mathcal{E}_k} v_m\| \leq 1/k$. Ainsi,

$$\|v_n - v_m\| \leq \|\Pi_{\mathcal{E}_k} v_n - \Pi_{\mathcal{E}_k} v_m\| + \|\Pi_{\mathcal{E}_k^\perp} v_n\| + \|\Pi_{\mathcal{E}_k^\perp} v_m\| \leq 3/k.$$

Donc, $(v_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{K}$ comme $\mathcal{K}$ est fermé. Ainsi, $\mathcal{K}$ vérifie la caractérisation de Bolzano-Weierstraß des compact. □

Revenons à la preuve du théorème 3.7. L'ensemble $\mathcal{K}_t = \{\psi \in \mathrm{Dom}\,(T);\ \|\psi\| \leq 1,\ \|T\psi\| \leq t\}$ est clairement borné ; il est également fermé. En effet, soit $(\psi_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{K}_t$ convergeant vers ψ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $T_\lambda = T\mathbf{1}_{]-\infty,\lambda]}(T)$ est borné, la suite $(T_\lambda\psi_n)_{n\geq 1}$ converge vers $T_\lambda\psi$. Ainsi $\|T_\lambda\psi\| \leq t$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En laissant $\lambda \to +\infty$, le théorème de convergence monotone nous donne $\|T\psi\| \leq t$. Ainsi $\psi \in \mathcal{K}_t$.
Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ la base orthonormée de vecteurs propres de T donnée par l'hypothèse 4. Soit $\mathcal{E}_n$ l'espace vectoriel engendré par $\{\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}\}$. Pour $\psi \in \mathcal{K}_t$, on sait que

$$\|\Pi_{\mathcal{E}_n^\perp}\psi\|^2 = \sum_{k\geq n} |\langle\psi, \varphi_k\rangle|^2 \leq \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_{k\geq n} \lambda_k^2 |\langle\psi, \varphi_k\rangle|^2 \leq \frac{1}{\lambda_n^2}\|T\psi\|^2.$$

Comme $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$, $\mathcal{K}_t$ vérifie la troisième propriété caractérisant les compacts de $\mathcal{H}$. $\mathcal{K}_t$ est donc compact dans $\mathcal{H}$.
Montrons que 3 implique 1. On peut supposer sans restriction que T est positif. Soit $\mathcal{T} = \{\psi = (T+1)^{-1}\varphi;\ \|\varphi\| \leq 1\}$. On vérifie que $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}_1$. Ainsi $\mathcal{T}$ est relativement compact donc $(T+1)^{-1}$ est compact.
Enfin, montrons que 1 implique 4. Comme T est semi-borné inférieurement, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(T+\lambda)^{-1}$ est compact et positif. Le théorème de Hilbert-Schmidt, le théorème 3.3, garantit l'existence d'une base de $\mathcal{H}$ constituée de vecteurs propres de $(T+\lambda)^{-1}$, disons $(\varphi_n)_{n\geq 0}$, associés à la suite décroissante de valeurs propres, disons $(\mu_n)_{n\geq 0}$, tendant vers 0. Comme $(T+\lambda)^{-1}$ est positif, ces valeurs propres sont positives. De plus, aucune n'est nulle puisque le noyau de $(T+\lambda)^{-1}$ est réduit au vecteur nul. En prenant $\lambda_n = (\mu_n)^{-1} - \lambda$, on obtient 5. Ceci achève la démonstration du théorème 3.7. $\square$

Chapitre 4

Comptage des valeurs propres

Nous commencerons par une courte étude des formes quadratiques non bornées.

4.0.1 Formes quadratiques

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Considérons une forme sesquilinéaire $q : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ continue (i.e. q est linéaire par rapport à la première variable, anti-linéaire para rapport à la seconde et vérifie $|q(\psi, \varphi)| \leq M \, \|\psi\| \, \|\varphi\|$ pour $(\psi, \varphi) \in \mathcal{H}^2$ et une constante $M > 0$). Alors le théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe T un opérateur borné tel que $q(\psi, \varphi) = \langle \psi, T\varphi \rangle$.
Nous allons maintenant nous intéresser à ce qui se passe quand q n'est plus supposée bornée.

Définition 4.1. Une forme quadratique (ou sesquilinéaire) est une application $q : \mathcal{Q}(q) \times \mathcal{Q}(q) \to \mathbb{C}$ telle que :

— $\mathcal{Q}(q)$ est une sous-espace dense de $\mathcal{H}$ appelé domaine de la forme q ;
— $\varphi\psi \mapsto q(\varphi, \psi)$ est linéaire ;
— $\psi \mapsto q(\varphi, \psi)$ est anti-linéaire.

Si, pour $(\varphi, \psi) \in \mathcal{Q}(q)^2$, on a $q(\psi, \varphi) = \overline{q(\varphi, \psi)}$, q est appelée symétrique.
Si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour $\varphi \in \mathcal{Q}(q)$, on a $q(\varphi, \varphi) + M\|\varphi\|^2 \geq 0$, on dit que q est semi-bornée inférieurement. Si dans la définition précédente M peut-être choisie nulle, on dit que q est positive.

Soit q une forme quadratique semi-bornée et M tel que, pour $\varphi \in \mathcal{Q}(q)$, on a $q(\varphi, \varphi) + M\|\varphi\|^2 \geq 0$. On vérifie facilement que, sur $\mathcal{Q}(q)$, l'expression

$\|\varphi\|_{+1} = \sqrt{q(\varphi,\varphi) + M\|\varphi\|^2}$ définit une norme et qu'elle est associé à un produit scalaire.

Définition 4.2. On dit que q est fermée si $\mathcal{Q}(q)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_{+1}$.
Si q est fermée et que $D \subset \mathcal{Q}(q)$ est dense dans $\mathcal{Q}(q)$ pour la norme $\|\cdot\|_{+1}$, on dit que D est une coeur de forme de q.

Exemple 1. Soit T auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ séparable et soit $(P_\Omega)_\Omega$, sa résolution spectrale. On définit

$$\mathcal{Q}(q) = \left\{\psi \in \mathcal{H};\ \int_{\mathbb{R}} |\lambda| \langle dP_\lambda \psi, \psi\rangle < +\infty\right\}.$$

On vérifie que $\mathcal{Q}(q)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et contient le domaine de T. $\mathcal{Q}(q)$ est appelé domaine au sens des formes de T. Pour $(\varphi,\psi) \in \mathcal{Q}(q)^2$, on pose

$$q(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \langle dP_\lambda \varphi, \psi\rangle.$$

La forme quadratique q est dite associée à T.

Théorème 4.1. *Si q est une forme sesquilinéaire, semi-bornée et fermée, alors il existe un unique opérateur auto-adjoint T dont elle est la forme quadratique associée. De plus T est donné par*

$$Dom(T) = \{\varphi \in \mathcal{Q}(q);\ \exists \phi \in \mathcal{H},\ \forall \psi \in \mathcal{Q}(q),\ q(\varphi,\psi) = \langle \phi, \psi\rangle\},$$
$$H\varphi = \phi.$$

On voit que la situation est meilleure que dans le cas des opérateurs ; en effet, un opérateur peut être symétrique et fermé sans être auto-adjoint.
Démonstration du théorème 4.1. Sans restriction, on peut supposer que q est positive. En utilisant les identités de polarisation, on montre que q est symétrique. Comme q est fermée et symétrique, on sait alors que $\mathcal{Q}(q)$ est une espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{+1}$ définie ci-dessus. On appelle cet espace de Hilbert $\mathcal{H}_{+1}$ et on le muni du produit scalaire

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{+1} = q(\cdot,\cdot) + \langle\cdot,\cdot\rangle.$$

Soit $\mathcal{H}_{-1}$ le dual (continu) de $\mathcal{H}_{+1}$. Soit $j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{-1}$ définie par $j(\varphi) = \langle\cdot,\varphi\rangle$. Cette injection est continue car $|[j(\varphi)](\psi)| \leq \|\psi\|\|\varphi\| \leq \|\psi\|_{+1}\|\varphi\|$. De plus, $\mathcal{H}_{+1}$ s'injecte continuement dans $\mathcal{H}$. On peut donc exploiter le théorème de représentation de Riesz. Soit $\phi \in \mathcal{H}_{+1}$. On note $\hat{B}\phi$ l'élément de $\mathcal{H}_{-1}$ définit par $[\hat{B}\phi](\varphi) = q(\varphi, \phi) + \langle \varphi, \phi \rangle$. Le théorème de représentation de Riesz nous dit que $\hat{B}$ est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{H}_{+1}$ dans $\mathcal{H}_{-1}$. On définit

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\,(B) = \{\phi \in \mathcal{H}_{+1};\ \hat{B}\phi \in \mathrm{Ran}\,(j)\}, \\ \text{sur } \mathrm{Dom}\,(B),\ B = j^{-1}\hat{B}. \end{aligned}$$

Montrons que l'image de j est dense dans $\mathcal{H}_{-1}$. Si cela n'était pas le cas, on pourrait trouver $\eta \in \mathcal{H}_{-1}^*$ tel que $\eta \neq 0$ et $\eta[j(\varphi)] = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$. Le théorème de représentation de Riesz nous dit alors qu'il existe $\psi_\eta \neq 0$ dans $\mathcal{H}_{+1}$ tel que $0 = \eta[j(\varphi)] = [j(\varphi)](\psi_\eta) = \langle \psi_\eta, \varphi \rangle$ ce qui est absurde. Comme $\hat{B}$ est un isomorphisme isométrique, on en conclut que $\mathrm{Dom}\,(B)$ est $\|\cdot\|_{+1}$-dense dans $\mathcal{H}_{+1}$. Comme, de plus $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{+1}$ et que $\mathcal{H}_{+1}$ est dense dans $\mathcal{H}$, on voit que $\mathrm{Dom}\,(B)$ est dense dans $\mathcal{H}$.
Soit $(\varphi, \psi) \in \mathrm{Dom}\,(B)^2$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \varphi, B\psi \rangle = q(\varphi, \psi) + (\varphi, \psi) &= \overline{q(\psi, \varphi) + (\psi, \varphi)} \\ = \overline{\langle \psi, B\varphi \rangle} &= \langle B\varphi, \psi \rangle \end{aligned}$$

Ainsi B est densément défini et symétrique.
Montrons que B est auto-adjoint. Soit $C = \hat{B}^{-1}j$. C envoie $\mathcal{H}$ dans lui-même et est symétrique. Le théorème de Hellinger-Toeplitz (voir exercice 4 de la feuille 1) garantit alors que C est auto-adjoint et borné. De plus, C est injectif. Le théorème spectral nous dit alors que $C^{-1} : \mathrm{Ran}\,(C) \to \mathcal{H}$ est auto-adjoint. On conclut en constatant que $C^{-1} = B$.
Pour finit, on définit $T = B - I$ et on vérifie que q est bien associée à T. L'unicité est immédiate par densité des domaines. $\square$

4.0.2 L'extension de Friedrichs

On va maintenant appliquer cela pour construire une extension auto-adjoint pour un opérateur symétrique positif.

Théorème 4.2 (Théorème de Friedrichs)**.** *Soit T un opérateur positif symétrique. On note $q(\psi, \varphi) = \langle \psi, T\varphi \rangle$ pour $(\varphi, \psi) \in \mathrm{Dom}\,(T)^2$. Alors q est fermable et sa clôture $\hat{q}$ est la forme quadratique d'un unique opérateur auto-adjoint noté $\hat{T}$. $\hat{T}$ est une extension positive de T et si q est semi-bornée inférieurement par M, $\hat{T}$ l'est aussi. De plus, $\hat{T}$ est l'unique extension auto-adjoint de T dont le domaine est contenu dans le domaine de la forme $\hat{q}$.*

Démonstration. On définit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{+1}$ comme ci-dessus. Il définit un produit scalaire du Dom (T). On complète cet espace pour obtenir l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{+1}$. q s'étend alors en $\hat{q}$ une forme fermée sur $\mathcal{H}_{+1}$. Pour montrer que $\hat{q}$ est fermée sur $\mathcal{H}$, il suffit de montrer que $\mathcal{H}_{+1}$ est contenu dans $\mathcal{H}$. Soit i l'injection de Dom (T) dans $\mathcal{H}$. Comme $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{+1}$, i est bornée par 1 ainsi elle s'étend à $\mathcal{H}_{+1}$ en $\hat{i}$ de norme inférieure à 1. Montrons que $\hat{i}$ injective. Soit φ tel que $\hat{i}(\varphi) = 0$. Alors, il existe $(\varphi_n)_n$ une suite dans Dom (T) telle que $\|\varphi - \varphi\|_{+1} \to 0$ et $\|i(\varphi_n)\| = \|\varphi_n\| \to 0$. Ainsi

$$\|\varphi\|_{+1} = \lim_{n,m\to+\infty} \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{+1} = \lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} (\langle \varphi_n, T\varphi_m \rangle + (\varphi_n, \varphi_m \rangle) = 0$$

comme $\varphi_m \in$ Dom (T).
Comme $\hat{q}$ est fermée et symétrique, par le théorème 4.1, il existe un unique opérateur $\hat{T}$ tel que Dom $(\hat{T}) \subset \mathcal{Q}(\hat{q})$ et $\hat{q}(\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{T}\psi)$ si $\varphi \in \mathcal{Q}(\hat{q})$ et $\psi \in$ Dom $(\hat{T})$. Si on suppose que $\varphi \in$ Dom (T), alors on calcule

$$\langle T\varphi, \psi \rangle = \hat{q}(\varphi, \psi) = \langle \varphi, \hat{T}\psi \rangle.$$

Comme ceci vaut pour tout $\psi \in$ Dom $(\hat{T})$, on voit que $\varphi \in$ Dom $(\hat{T}^*) =$ Dom $(\hat{T})$ et que $\hat{T}^*\varphi = \hat{T}\varphi = T\varphi$. Ainsi $\hat{T}$ est une extension de T même calcul montre l'unicité de cette extension. $\square$

4.1 Laplaciens de Dirichlet et de Neumann

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^d$.
Le laplacien de Dirichlet sur Ω, noté $-\Delta_\Omega^D$, est l'unique opérateur auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$ dont la forme quadratique est la clôture de la forme

$$q(f, g) = \int_\Omega \nabla f(x) \cdot \overline{\nabla g(x)} dx$$

de domaine $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.
Le laplacien de Neumann sur Ω, noté $-\Delta_\Omega^N$, est l'unique opérateur auto-adjoint sur $L^2(\Omega)$ dont la forme quadratique est la forme

$$q(f, g) = \int_\Omega \nabla f(x) \cdot \overline{\nabla g(x)} dx$$

de domaine $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{\phi \in L^2(\Omega);\ \nabla f \in L^2(\Omega) \times \mathbb{C}^d\}$$

où ∇f s'entend au sens des distributions. Cette dernière forme est fermée.
Il existe d'autres descriptions de $-\Delta_\Omega^D$ et $-\Delta_\Omega^D$ en particulier dans le cas où Ω est un ouvert à bord régulier.

Proposition 4.1. *Soit Ω un cube de $\mathbb{R}^d$. Alors*

1. $D_D := \{f \in C^\infty(\Omega);\ \forall\alpha, \partial^\alpha f \in C^0(\overline{\Omega});\ f_{|\partial\Omega} = 0\}$ *est un coeur de l'opérateur* $-\Delta_\Omega^D$*, et pour* $f \in D_D$*, on a*

$$-\Delta_\Omega^D f = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f.$$

2. $D_D := \{f \in C^\infty(\Omega);\ \forall\alpha, \partial^\alpha f \in C^0(\overline{\Omega});\ \partial_n f_{|\partial\Omega} = 0\}$ *est un coeur de l'opérateur* $-\Delta_\Omega^N$*, et pour* $f \in D_D$*, on a*

$$-\Delta_\Omega^N f = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f.$$

Ici, ∂_n *est la dérivée normale au bord.*

Démonstration. Sans restriction, on suppose que $\Omega = (-1,1)^d$. En effet, si on considère le groupe des additifs des translations $(\tau_y)_{y\in\mathbb{R}^d}$ définies par $\tau_y(f)(\cdot) = f(\cdot - y)$. τ_y est unitaire de $L^2(y+\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. La forme quadratique $f \mapsto \int_\Omega |\nabla f|^2 dx$ vérifie $\int_{y+\Omega} |\nabla f|^2 dx = \int_\Omega |\nabla \tau_y f|^2 dx$. On en déduit que $-\Delta_{y+\Omega}^\bullet$ et $-\Delta_\Omega^\bullet$ sont unitairement équivalent quand $\bullet \in \{D, N\}$. On peut donc supposer que le cube Ω est centré en 0. On considère maintenant les groupe $(d_a)_{a>0}$ des dilatations définies par $d_a(f)(\cdot) = a^{d/2} f(a\cdot)$. d_a est unitaire de $L^2(a^{-1}\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. La forme quadratique $f \mapsto \int_\Omega |\nabla f|^2 dx$ vérifie $a^2 \int_{a\Omega} |\nabla f|^2 dx = \int_\Omega |\nabla d_a f|^2 dx$. On en déduit que $-a^2\Delta_{a\Omega}^\bullet$ et $-\Delta_\Omega^\bullet$ sont unitairement équivalent quand $\bullet \in \{D, N\}$. On peut donc supposer que le cube Ω est le cube $(-1,1)^d$.
Notons T l'opérateur $-\Delta$ avec le domaine D_D. On veut montrer que $\overline{T} = -\Delta_\Omega^D$. T est symétrique et, par séparation des variables (séries de Fourier en plusieurs variables), on montre que les fonctions

$$\Phi_n(x) = \prod_{j=1}^{d} \phi_{n_j}(x_j) \quad \text{où} \quad n = (n_j)_{j=1}^d \in (\mathbb{N}^*)^d, \tag{4.1}$$

$$\text{et } \phi_k = \begin{cases} \sin(k\pi x/2) \text{ si } k \in 2\mathbb{N}^*, \\ \cos(k\pi x/2) \text{ si } k \in 2\mathbb{N}^* - 1, \end{cases}$$

forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$. Chaque φ_n est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda_n \pi^2 n^2$. On voit ainsi que $\varphi \in \mathrm{Dom}\,(\overline{T})$ si et

seulement si $\sum_n \lambda_n^2 |\langle \varphi, \Phi_n \rangle|^2 < +\infty$. Ainsi $\overline{T}$ est auto-adjoint.
Comme $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathrm{Dom}\,(\overline{T}) \subset \mathcal{Q}(\overline{T})$ et qu'en tant que forme, $T_{|\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\times\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)} = -\Delta^D_{\Omega|\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\times\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}$, il nous suffit de montrer que $\mathcal{Q}(\overline{T}) \subset \mathcal{Q}(-\Delta^D_\Omega)$. Comme D_D est un coeur de forme de $\overline{T}$ (comme forme quadratique), il suffit de prouver que $D_D \subset \mathcal{Q}(-\Delta^D_\Omega)$ c'est-à-dire, pour $f \in D_D$, de trouver une suite $(f_n)_n$ dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\|f - f_n\| + \|\nabla f - \nabla f_n\| \to 0$. Fixons $f \in D_D$. Posons $g_n(x) = f((1+1/n)x)$ si $|x_j| \leq (1+1/n)^{-1}$ et 0 ailleurs. Alors, g_n est continue, C^1 par morceau et de gradient borné. De plus, $g_n \to f$ et $\nabla g_n \to \nabla f$ dans $L^2(\Omega)$. On peut alors régulariser g_n en f_n par convolution avec une approximation de l'identité pour obtenir la suite voulue.
Dans le cas du laplacien de Neumann, on note B l'opérateur $-\Delta$ de domaine D_N. Comme dans le cas de Dirichlet, on montre que B est essentiellement auto-adjoint en faisant le calcul explicite des fonctions propres ; on obtient les fonctions

$$\Psi_n(x) = \prod_{j=1}^d \psi_{n_j}(x_j) \quad \text{où} \quad n = (n_j)_{j=1}^d \in (\mathbb{N}^*)^d, \tag{4.2}$$

$$\text{et } \psi_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2} \text{ si } k = 0, \\ \cos(k\pi x/2) \text{ si } k \in 2\mathbb{N}^*, \\ \sin(k\pi x/2) \text{ si } k \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

Clairement $\mathrm{Dom}\,(B) \subset H^1(\Omega)$ et $\langle f, Bf \rangle = \int |\nabla f|^2 dx$ pour $f \in \mathrm{Dom}\,(B)$ (par intégration par parties en utilisant les conditions au bord). Ainsi, $\mathcal{Q}(\overline{B}) \subset \mathcal{Q}(-\Delta^N_\Omega)$. Il nous suffit donc de prouver $\mathcal{Q}(-\Delta^N_\Omega) \subset \mathcal{Q}(\overline{B})$, soit encore $H^1(\Omega) \subset \mathcal{Q}(\overline{B})$. Soit $f \in H^1(\Omega)$. Si g et ∇g sont continues jusqu'au bord de Ω et que $g(\pm 1, x_2, \cdots, x_d) = 0$, alors

$$\langle \partial_1 f, g \rangle = -\langle f, \partial_1 g \rangle. \tag{4.3}$$

Commençons par voir ce qui se passe si g s'annule sur le bord de Ω. On se retrouve dans le cas de Dirichlet et on peut trouver $(g_n)_n$ une suite dans $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $g_n \to g$ et $\nabla g_n \to \nabla g$. La relation (4.3) vaut avec g remplacé par g_n ; elle vaut donc aussi avec g en passant à la limite. Soit maintenant une suite de fonctions $(\eta_n)_n$ indéfiniment dérivables à support compact dans $\{x;\ \forall 2 \leq j \leq d,\ |x_j| \leq 1 - 1/n\}$ ne dépendant que des variables $(x_2, \cdots, x_d)$ telle que $\eta_n \uparrow 1$ quand $n \to +\infty$. Alors, la relation (4.3) vaut pour g remplacé par $g\eta_n$ et donc aussi pour g car $\partial_1(g\eta_n) = \eta_n \partial_1 g$.
Soient $(\Psi_n)_n$ la base de vecteurs propres de B donnée ci-dessus. En remplaçant le sinus par un cosinus quand n_1 est impair et le cosinus pas un

sinus quand n_1 est pair, on construit une famille orthonormale $(\eta_n)_n$ telle que $\partial_1\eta_n = \pm\frac{\pi}{2}n_1\Psi_n$. Les fonctions η_n et $\nabla\eta_n$ sont continues jusqu'au bord et $\eta_n(\pm 1, x_2, \cdots, x_d) = 0$. L'intégration par parties (4.3) nous donne alors

$$\sum_n n_1^2|\langle f, \Psi_n\rangle|^2 \leq \frac{4}{\pi^2}\sum_n |\langle \partial_1 f, \eta_n\rangle|^2 \leq \frac{4}{\pi^2}\|\partial_1 f\|^2.$$

Ici, nous avons utilisé le fait que la famille $(\eta_n)_n$ est orthonormale. Si on répète cette procédure en chaque variable, on obtient

$$\sum_n (1+n^2)|\langle f, \Psi_n\rangle|^2 \leq \frac{4}{\pi^2}\|\nabla f\|^2 + \|f\|^2.$$

Ceci nous dit que $f \in \mathcal{Q}(\overline{B})$. □

On va commencer par estimer la fonction de comptage pour un cube.

Proposition 4.2. *Soit $\Omega_a = (-a, a)^d$. Soit $N_D(a,\lambda)$ (resp. $N_N(a,\lambda)$) le rang de $\mathbf{1}_{]-\infty,\lambda[}(-\Delta^D_{\Omega_a})$ (resp. de $\mathbf{1}_{]-\infty,\lambda[}(-\Delta^N_{\Omega_a})$).*
Alors, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $a > 0$ et $\lambda > 0$, on a

$$|N_D(a,\lambda) - \tau_d(2a/2\pi)^d\lambda^{d/2}| \leq C(1 + (a^2\lambda)^{(d-1)/2}, \tag{4.4}$$

$$|N_N(a,\lambda) - \tau_d(2a/2\pi)^d\lambda^{d/2}| \leq C(1 + (a^2\lambda)^{(d-1)/2}. \tag{4.5}$$

Ici τ_d est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. En utilisant la remarque préliminaire de la preuve de la proposition 4.1, on voit que

$$N_D(a,\lambda) = N_D(1, a^2\lambda) \text{ et } N_N(a,\lambda) = N_N(1, a^2\lambda).$$

On peut donc à nouveau sans restriction supposer $a = 1$.
Les descriptions des valeurs propres de $-\Delta^D_{(-1,1)^d}$ et $-\Delta^N_{(-1,1)^d}$ données en (4.1) et (4.2) impliquent

$$N_D(\lambda) := N_D(1,\lambda) = \#\{k \in (\mathbb{N}^*)^d;\ k^2 \leq 4\lambda/\pi^2\},$$
$$N_N(\lambda) := N_N(1,\lambda) = \#\{k \in \mathbb{N}^d;\ k^2 \leq 4\lambda/\pi^2\}.$$

Pour $k \in (\mathbb{N}^*)^d$ tel que $k^2 \leq 4\lambda/\pi^2$, le cube $k + (-1,0)^d$ est contenu dans l'octant $\{x \in (\mathbb{R}^+)^d; x^2 \leq 4\lambda/\pi^2\}$. On en déduit que

$$N_D(\lambda) \leq |\{x \in (\mathbb{R}^+)^d; x^2 \leq 4\lambda/\pi^2\}| = \tau_d(1/\pi)^d\lambda^{d/2}. \tag{4.6}$$

Comme l'octant $\{x \in (\mathbb{R}^+)^d ; x^2 \leq 4\lambda/\pi^2\}$ est contenu dans la réunion des cubes $k + (0,1)^d$ quand k parcourt l'ensemble des $k \in (\mathbb{N})^d$ tel que $k^2 \leq 4\lambda/\pi^2$, on voit que

$$N_N(\lambda) \geq \tau_d (1/\pi)^d \lambda^{d/2}. \tag{4.7}$$

Enfin, on constate que

$$\begin{aligned} N_N(\lambda) - N_D(\lambda) &= \#\{k \in \mathbb{N}^d \setminus (\mathbb{N}^*)^d ;\ k^2 \leq 4\lambda/\pi^2\} \\ &= \bigcup_{p=1}^{d} M_p(\lambda) \end{aligned}$$

où

$$M_p(\lambda) = \#\{k \in \mathbb{N}^d ;\ k^2 \leq 4\lambda/\pi^2 \text{ et exactement } p \text{ de ses coordonnées s'annulent}\}.$$

La borne donnée ci-dessus sur N_D nous dit alors que

$$M_p(\lambda) \leq \binom{d}{p} \tau_{d-p} (1/\pi)^{d-p} \lambda^{(d-p)/2}$$

On en déduit que

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \leq C \left(1 + \lambda^{(d-1)/2}\right). \tag{4.8}$$

On déduit alors facilement (4.4)et (4.5) de (4.6), (4.7) et (4.8). □

On va maintenant se servir de ce résultat simple pour comprendre les fonctions de comptage $N_{D,N}(\Omega, \lambda)$ pour des domaines Ω plus compliqués.

Proposition 4.3. *Soient $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \sim \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Soient A_1 auto-adjoint sur $\mathcal{H}_1$ et A_2 auto-adjoint sur $\mathcal{H}_2$. Soit $A_1 \oplus A_2$ l'opérateur sur $\mathcal{H}$ de domaine $Dom(A_1 \oplus A_2) = Dom(A_1) \oplus Dom(A_2)$ défini par $(A_1 \oplus A_2)(\psi_1, \psi_2) = (A_1\psi_1, A_2\psi_2)$ si $(\psi_1, \psi_2) \in Dom(A_1) \oplus Dom(A_2)$.*
Alors, on a

1. *$A_1 \oplus A_2$ est auto-adjoint.*
2. *Si D_1 est un coeur pour A_1 et D_2 est un coeur pour A_2 alors $D_1 \oplus D_2$ est un coeur pour $A_1 \oplus A_2$.*
3. *$Q(A_1 \oplus A_2) = Q(A_1) \oplus Q(A_2)$; si $(\psi_1, \psi_2) \in Q(A_1) \oplus Q(A_2)$, alors*

$$\langle (\psi_1, \psi_2), [A_1 \oplus A_2](\psi_1, \psi_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi_1, A_1\psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle \psi_2, A_2\psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

4. *Pour $\Omega \subset \mathbb{R}$, un borélien,*

$$P_\Omega(A_1 \oplus A_2) = P_\Omega(A_1) \oplus P_\Omega(A_2).$$

5. *Si $N(\lambda; A) =dim\mathbb{R}(P_{]-\infty,\lambda]}(A))$ alors*

$$N(\lambda, A_1 \oplus A_2) = N(\lambda, A_1) + N(\lambda, A_2).$$

On laisse la démonstration de ce résultat au lecteur.

Proposition 4.4. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ disjoints. Ainsi $L^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) = L^2(\Omega_1) \oplus L^2(\Omega_2)$. On a alors*

$$-\Delta_D^{\Omega_1 \cup \Omega_2} = -\Delta_D^{\Omega_1} + -\Delta_D^{\Omega_2},$$
$$-\Delta_N^{\Omega_1 \cup \Omega_2} = -\Delta_N^{\Omega_1} + -\Delta_N^{\Omega_2}$$

Démonstration. On fera la démonstration dasn le cas des conditions au bord de Dirichlet ; le cas des conditions au bord de Neumann est traité de façon identique. Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Alors $f_i = f_{|\Omega_i} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_i)$ et l'on a

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |\nabla f|^2 dx = \int_{\Omega_1} |\nabla f_2|^2 dx + \int_{\Omega_2} |\nabla f_1|^2 dx.$$

Ainsi, les clôtures formes quadratiques dans les deux membres de l'égalité sont encore égales. On en conclut l'égalité des opérateurs. □

On obtient le corollaire immédiat

Corollaire 4.1. *Soit $N_D(\Omega, \lambda)$ (resp. $N_N(\Omega, \lambda)$) le rang du projecteur spectral $P_{[0,\lambda[}(-\Delta_\Omega^D)$ (resp. $P_{[0,\lambda[}(-\Delta_\Omega^N)$).*
Alors si $(\Omega_j)_{1\le j\le k}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^d$ deux à deux disjoints

$$N_D\left(\cup_{1\le j\le k}\Omega_j, \lambda\right) = \sum_{1\le j\le k} N_D(\Omega_j, \lambda),$$
$$N_N\left(\cup_{1\le j\le k}\Omega_j, \lambda\right) = \sum_{1\le j\le k} N_N(\Omega_j, \lambda).$$

Pour comparer les Laplaciens de Dirichlet et de Neumann sur différents domaines, nous définissons

Définition 4.3. Soit $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ deux espaces de Hilbert séparables. Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints positifs définis respectivement sur un sous-espace dense de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{H}_1$.
On écrira $0 \le A \le B$ si et seulement si

1. $Q(B) \subset Q(A)$;
2. Pour $\psi \in Q(B)$, on a $0 \leq \langle \psi, A\psi \rangle \leq \langle \psi, B\psi \rangle$.

On obtient alors la conséquence suivante du principe du mini-max (voir section 3.2)

Lemme 4.1. *Si $0 \leq A \leq B$ alors on a :*

1. *si $(\lambda_n(A))_{n \geq 0}$ sont les nombres définis par le principe du mini-max (voir section 3.2), alors pour tout n, on a $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(B)$.*
2. *pour $\lambda \geq 0$, le rang de $P_{[0,\lambda]}(A)$ est supérieur à celui de $P_{[0,\lambda]}(B)$.*

Démonstration. Comme $Q(B) \subset Q(A)$, on a

$$\inf_{\substack{\varphi \in Q(A) \cap \mathcal{E}^\perp \\ \|\varphi\|=1}} \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq \inf_{\substack{\varphi \in Q(B) \cap \mathcal{E}^\perp \\ \|\varphi\|=1}} \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq \inf_{\substack{\varphi \in Q(B) \cap \mathcal{E}^\perp \\ \|\varphi\|=1}} \langle B\varphi, \varphi \rangle.$$

Ceci implique (1). Le point (2) est alors une conséquence du point (1) et du principe du min-max. □

On arrive maintenant au résultat de comparaison essentiel pour notre analyse de la fonction de comptage

Lemme 4.2. *1. Si $\Omega' \subset \Omega$ alors $0 \leq -\Delta^D_\Omega \leq -\Delta^D_{\Omega'}$.*

2. *Pour tout Ω, $0 \leq -\Delta^N_\Omega \leq -\Delta^D_\Omega$.*
3. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts disjoints d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tel que Ω est égal à l'intérieur de l'adhérence de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ et tel que $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ soit de mesure nulle.*
   Alors, on a
$$0 \leq -\Delta^D_\Omega \leq -\Delta^D_{\Omega_1 \cup \Omega_2},$$
$$0 \leq -\Delta^N_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \leq -\Delta^N_\Omega.$$

Démonstration. Dans le point (1), on plonge $L^2(\Omega')$ dans $L^2(\Omega)$ en prolongeant les fonctions par 0 dans $\Omega' \setminus \Omega$. On a alors $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega') \subset \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ et, en tant que forme quadratique $(-\Delta^D_\Omega)_{|\mathcal{C}^\infty_0(\Omega') \times \mathcal{C}^\infty_0(\Omega')} = -\Delta^D_\Omega$. Ceci implique le point (1).
Le point (2) suit immédiatement de l'inclusion $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.
Démontrons le point (3). L'inclusion $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ nous donne l'inégalité pour les Laplaciens de Dirichlet. Pour ceux de Neumann, on remarque que si $f \in H^1(\Omega)$, sa restriction à $\Omega_1 \cup \Omega_2$ est dans $H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$. De plus, comme $\Omega \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2$ est de mesure nulle, on a

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |\nabla f|^2 dx. \quad \square$$

On appellera cube 2^{-n}-standard dans $\mathbb{R}^d$ un cube de la forme $[a_1 2^{-n}, (a_1 + 1)2^{-n}[\times \cdots \times [a_d 2^{-n}, (a_d+1)2^{-n}[$ où $(a_1, \cdots, a_d)$ sont des entiers relatifs. Pour une ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on appellera $W_n^-(\Omega)$ le volume de la réunion des cubes 2^{-n}-standards contenus dans Ω, et $W_n^+(\Omega)$ le volume de la réunion des cubes 2^{-n}-standards intersectant Ω. On a alors

$$W_n^-(\Omega) \leq W_{n+1}^-(\Omega) \leq |\Omega| \leq W_{n+1}^+(\Omega) \leq W_n^+(\Omega).$$

On définit

$$W_\infty^-(\Omega) = \lim_{n\to+\infty} W_n^-(\Omega) \text{ et } W_\infty^+(\Omega) = \lim_{n\to+\infty} W_n^+(\Omega).$$

$W_\infty^-(\Omega)$ (resp. $W_\infty^+(\Omega)$) est le mesure de Jordan intérieure (resp. extérieure) de Ω. On dit que Ω est Jordan mesurable si $W_\infty^-(\Omega) = W_\infty^+(\Omega)$ et ce nombre est alors sa mesure de Jordan. Tout ensemble Jordan mesurable est Lebesgue mesurable, et sa mesure de Jordan coïncide avec sa mesure de Lebesgue.

Théorème 4.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ Jordan mesurable. On note $N_D(\Omega,\lambda)$ le rang du projecteur spectral $P_{[0,\lambda]}(-\Delta_\Omega^D)$. Alors*

$$N_D(\Omega,\lambda) \equiv_{\lambda+\infty} \frac{\tau_d|\Omega|}{(2\pi)^d}\lambda^{d/2}.$$

Démonstration. Nous allons démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\liminf_{\lambda+\infty} N_D(\Omega,\lambda)\lambda^{-d/2} \leq W_n^-(\Omega)\frac{\tau_d}{(2\pi)^d}, \tag{4.9}$$

$$\limsup_{\lambda+\infty} N_D(\Omega,\lambda)\lambda^{-d/2} \leq W_n^+(\Omega)\frac{\tau_d}{(2\pi)^d}. \tag{4.10}$$

Ceci donne le résultat annoncé en laissant n tendre vers l'infini.
On note Ω_n^+ (resp. Ω_n^-) la réunion des cubes 2^{-n}-standard entrant dans la définition de $W_n^+(\Omega)$ (resp. $W_n^-(\Omega)$) ; soient $\{C_{n,\alpha}^+\}$ (resp. $\{C_{n,\alpha}^-\}$) les intérieurs de ces cubes. On a alors

$$\overline{\Omega_n^+} = \bigcup_\alpha \overline{C_{n,\alpha}^+} \text{ et } \overline{\Omega_n^-} = \bigcup_\alpha \overline{C_{n,\alpha}^-}.$$

Les points (1) et (3) du lemme 4.2 et la proposition 4.4 nous donnent

$$-\Delta_\Omega^D \leq -\Delta_{\Omega_n^-}^D \leq \oplus_\alpha - \Delta_{C_{n,\alpha}^-}^D.$$

Le lemme 4.1 et le corollaire 4.1 impliquent alors

$$\begin{aligned}
N_D(\Omega, \lambda) &\geq \sum_\alpha N_D(C^-_{n\alpha}, \lambda) \\
&= W^-_n(\Omega) 2^{nd} N_D(2^{-n-1}, \lambda) \\
&= W^-_n(\Omega) \tau_d (2\pi)^{-d} \lambda^{d/2}(1 + o(1)) \text{ quand } \lambda \to +\infty
\end{aligned}$$

en vertu de la proposition 4.2. Ceci démontre (4.9). La démonstration de (4.10) se fait de la même manière en utilisant

$$-\Delta^D_\Omega \geq -\Delta^D_{\Omega^+_n} \geq -\Delta^N_{\Omega^+_n} \geq \oplus_\alpha - \Delta^N_{C^+_{n,\alpha}}. \quad \square$$

Chapitre 5

Appendice

5.1 Formule de représentation de Poisson pour les fonctions harmoniques

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ deux fois différentiable. On dit que f est harmonique si $\Delta f = 0$ identiquement sur U. Il est équivalent de demander que f soit la partie réelle d'une fonction holomorphe dans U ou que f vérifie l'égalité de la moyenne i.e. que pour tout $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D(z,r)} \subset U$, on ait

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

On pourra consulter [5, 3] pour plus de détails.
On va prouver le

Théorème 5.1. *Soit $z \mapsto F(z)$ une fonction harmonique positive dans $\mathbb{C}^+$. Alors, il existe une unique constante $c > 0$ et μ une unique mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}$ de masse finie telle que*

$$F(x+iy) = cy + y \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{(x-t)^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \tag{5.1}$$

Pour μ une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{R}$, on notera dans la suite

$$P_\mu(x+iy) = y \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{(x-t)^2 + y^2}.$$

On va commencer par démontrer une telle caractérisation pour les fonctions harmoniques dans le disque unité, la formule de Poisson. Puis nous transporterons cette formule au demi-plan par l'intermédiaire de la transformation de Cayley.

Soit $D = \{z;\ |z| < 1\}$ et $\Gamma = \{z;\ |z| = 1\}$. Pour $z \in D$ et $w \in \Gamma$, on définit le noyau de Poisson

$$p_z(w) = \mathrm{Re}\frac{w+z}{w-z} = \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}.$$

Alors

Théorème 5.2. *Soit f harmonique positive dans D. Alors, il existe une mesure de Borel positive finie ν sur Γ telle que, pour $z \in D$, on ait*

$$f(z) = \int_\Gamma p_z(w) d\nu(w). \tag{5.2}$$

Démonstration. La propriété de la moyenne nous dit que, pour $0 < r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = f(0).$$

donc

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = f(0) < +\infty.$$

Pour $g \in \mathcal{C}(\Gamma)$, on pose

$$\Phi_r(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})g(e^{i\theta})d\theta$$

Cette forme linéaire est continue sur l'espace de Banach $\mathcal{C}(\Gamma)$ et $\|\Phi_r\| = f(0)$. On peut donc par un argument d'extraction diagonale (procédé de Cantor) trouver une suite $r_j \to 1^-$ telle que, pour tout $g \in \mathcal{C}(\Gamma)$, $\Phi_{r_j}(g) \to \Phi_r(g)$ qui vérifie $\|\Phi\| = f(0)$. De plus $\Phi(g) \geq 0$ si g est à valeurs positives.
Le théorème de représentation de Riesz (voir [5]) implique qu'il existe une mesure positive ν sur Γ telle que

$$\Phi(g) = \int_\Gamma g(w)d\nu(w).$$

Pour $z \in D$ et $r_j > |z|$, on vérifie que

$$f(zr_j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r_je^{i\theta})p_z(e^{i\theta})d\theta = \Phi_{r_j}(p_z).$$

En passant à la limite $j \to +\infty$, on obtient (5.2) ce qui achève la preuve du Théorème 5.2. □

Démontrons maintenant le Théorème 5.1. À cet effet, on définit la transformation de Cayley $S: \mathbb{C}^+ \to D$ par $S(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$. C'est une bijection bi-holomorphe qui s'étend en $S: \overline{\mathbb{C}^+} \to \overline{D} \setminus \{-1\}$. On vérifie que $S(\mathbb{R}) = \Gamma \setminus \{-1\}$. Si, pour $z \in \mathbb{C}^+$, on pose

$$(1+t)^2 K_z(t) = p_{S(z)}(S(t)),$$

on calcule

$$K_z(t) = y\frac{1}{(x-t)^2+y^2}, \quad z = x+iy \in \mathbb{C}^+.$$

L'inverse de S se calcule explicitement $T(z) = \dfrac{z-1}{i\,z+i}$.
On pose $f(z) = F(T(z))$. Alors, il existe une mesure de Borel positive ν sur Γ telle que f soit représentée par la formule (5.2). Soit ν_T la mesure image de ν par T qui est un homéomorphisme de $\Gamma \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors par définition de la mesure image

$$\int_{\Gamma\setminus\{-1\}} p_z(w)d\nu(w) = \int_{\mathbb{R}} (1+t^2)K_{T(z)}(t)d\nu_T(t).$$

Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}^+$, on obtient

$$F(z) = p_{S(z)}(-1)\nu(\{-1\}) + \int_{\mathbb{R}} (1+t^2)K_z(t)d\nu_T(t).$$

En posant $c = \nu(\{-1\})$ et $d\mu(t) = (1+t^2)d\nu_T(t)$, comme $p_{S(z)}(-1) = y$, on obtient (5.1) ce qui prouve le résultat d'existence du Théorème 5.1.
En remarquant que $c = \lim\limits_{y\to+\infty} F(iy)/y$, on voit que c est unique. Une fois c fixé, ν détermine alors F. Ceci est une conséquence immédiate du résultat qui suit.
Soit ν une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{R}$. Pour $z = x+iy \in \mathbb{C}^+$, on définit la mesure

$$d\nu_y = \frac{1}{\pi}P_\nu(x+iy)dx.$$

Théorème 5.3. *La famille de mesure $d\nu_y$ converge faiblement vers $d\nu$ quand $y \to 0^+$ i.e., pour $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (les fonctions continues tendant vers 0 à l'infini), on a*

$$\lim_{y\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(x)d\nu_y(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\nu(x).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{C}_0(\mathbb{R})$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_y(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} P_{(f(x)-f)\nu}(x+iy)dx + \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu(x).$$

Il suffit donc de prouver que

$$\int_{\mathbb{R}} P_{(f(x)-f)\nu}(x+iy)dx \underset{y \to 0^+}{\to} 0. \tag{5.3}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ telle que, si $|x-t| \leq \delta$ tel que $|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon$. Soit $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et

$$C(x) = 2M \int_{|x-t| \geq \delta} \frac{d\nu(t)}{|x-t|^2}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} P_{(f(x)-f)\nu}(x+iy)dx \leq \pi\nu(\mathbb{R})\varepsilon + y \int_{\mathbb{R}} C(x)dx \leq \pi\nu(R)(\varepsilon + 4yM/\delta).$$

Donc

$$0 \leq \limsup_{y \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} P_{(f(x)-f)\nu}(x+iy)dx \leq \varepsilon$$

pour ε positif arbitraire ce qui prouve (5.3). Ceci achève la preuve du Théorème 5.3. □

5.2 Compléments de théorie de la mesure

5.2.1 Mesures complexes

Soit $(X, \mathcal{A})$, un espace mesuré (i.e. $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X).

Définition 5.1. $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ est une mesure complexe s'il existe $\mu_{r,+}$, $\mu_{r,-}$, $\mu_{i,+}$ et $\mu_{i,-}$, des mesures σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que, pour $Y \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu_{r,+}(Y) + \mu_{r,-}(Y) + \mu_{i,+}(Y) + \mu_{i,-}(Y) < +\infty, \tag{5.4}$$

on ait

$$\mu(Y) = \mu_{r,+}(Y) - \mu_{r,-}(Y) + i\,\mu_{i,+}(Y) - i\,\mu_{i,-}(Y).$$

Définition 5.2 (Variation totale d'une mesure complexe)**.** Pour $Y \in \mathcal{A}$ vérifiant (5.4), on définit

$$|\mu|(Y) = \sup \sum_{i \in I} |\mu(Y_i)|$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions mesurables dénombrables de Y notées $(Y_i)_{i \in I}$.

On montre

Théorème 5.4. *Soit μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{A})$. Alors*

- *La variation totale $|\mu|$ est une mesure positive σ-finie sur $(X, \mathcal{A})$.*
- *Il existe une fonction mesurable $h : X \to \mathbb{C}$ telle que $|h(x)| = 1$ pour tout $x \in X$ et que, pour $Y \in \mathcal{A}$ vérifiant (5.4), on ait*

$$\mu(Y) = \int_Y h(x)\, d|\mu|(x).$$

On notera $d\mu = h\, d|\mu|$.

On dira que μ est régulière si $|\mu|$ l'est. On notera que si, pour ν une mesure positive sur $(X, \mathcal{A})$ et $f \in L^1(X, d\nu)$, on définit

$$\mu(Y) = \int_Y f(x)\, d\nu(x),$$

alors μ est une mesure complexe telle que

$$|\mu|(Y) = \int_Y |f(x)|\, d\nu(x).$$

Donc, pour μ une mesure complexe et $f \in L^1(X, d|\mu|)$, on définit la mesure complexe $f\mu$ par

$$(f\mu)(Y) = \int_Y f(x)\, d\mu(x).$$

On a $|f\mu| = |f|\, |\mu|$.

5.2.2 Théorème de représentation de Riesz

Soit X une espacement localement compact (i.e. chaque point admet un voisinage compact).
Une fonction continue $f : X \to \mathbb{C}$ *s'annule à l'infini* si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε tel que, pour $x \notin K_\varepsilon$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. L'espace de ces fonctions est appelé $\mathcal{C}_0(X)$; muni de la norme uniforme (i.e. de la norme du supremum), $\mathcal{C}_0(X)$ est un espace de Banach.

Théorème 5.5 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit φ une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(X)$. Alors, il existe une unique mesure de Borel complexe régulière, disons μ, telle que, pour $f \in \mathcal{C}_0(X)$, on a*

$$\varphi(f) = \int_X f\, d\mu.$$

De plus, $\|\varphi\| = |\mu|(X)$.

5.2.3 Décomposition des mesures complexes

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesuré et μ_1, μ_2 deux mesures complexes.

Définition 5.3. On dit que μ_1 et μ_2 sont mutuellement singulières si et seulement si il existe $Y \subset \mathcal{A}$ tel que $|\mu_1|(Y) = 0 = |\mu_2|(X \setminus Y)$. On note $\mu_1 \perp \mu_2$.

Clairement $\mu_1 \perp \mu_2$ équivaut à $|\mu_1| \perp |\mu_2|$.
Soit μ une mesure complexe et ν une mesure positive.

Définition 5.4. On dit que μ est absolument continue par rapport à ν si, pour $Y \in \mathcal{A}$, $\mu(Y) = 0$ implique $\mu(Y) = 0$. On écrit $\mu \ll \nu$.

On démontre le

Théorème 5.6 (Théorème de Radon-Nicodym)**.** *Soit μ une mesure complexe et ν une mesure positive σ-finie sur $(X, \mathcal{A})$.*
Alors, il existe une unique pair de mesures complexes μ_a et μ_s telles que $\mu_a \ll \nu$, $\mu_s \perp \nu$ et

$$\mu = \mu_a + \mu_s.$$

De plus, il existe une unique fonction $f \in L^1(X, d\nu)$ telle que, pour $Y \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu_a(Y) = \int_Y f(x) d\nu(x).$$

On écrira alors

$$\mu = f \cdot \nu + \mu_s.$$

On note que dans le théorème de Radon-Nicodym, on a $\mu_a \perp \mu_s$. La mesure μ_a est la partie absoluement continue (par rapport à ν) de la mesure μ et μ_s sa partie singulière. La fonction f est la densité de μ_a (par rapport à ν). Quand $X = \mathbb{R}^d$ et ν est la mesure de Lebesgue, on peut préciser la mesure singulière. En effet, on dit que x est un atome de μ si $\mu(\{x\}) \neq 0$. On vérifie que le nombre des atomes est au plus dénombrable. On écrit alors

$$\mu_s = \mu_{sc} + \mu_{pp}$$

où μ_{pp} est definie par, si $Y \in \mathcal{A}$ vérifie (5.4),

$$\mu_{pp}(Y) = \sum_{\substack{y \in Y \\ y \text{ atome}}} \mu(\{y\}).$$

μ_{pp} est la partie purement ponctuelle de μ et μ_{sc} sa partie singulière continue.

5.2.4 Transformée de Fourier de mesures

On considère maintenant μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}$ que l'on suppose de masse totale finie. Sa transformée de Fourier est définie par

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mu(x).$$

On peut vérifier que μ définit une distribution tempérée et que la transformée de Fourier définie ci-dessus coincide bien avec celle définie pour les distributions tempérées.
La fonction $t \mapsto \hat{\mu}(t)$ est uniformémemnt continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle le

Lemme 5.1 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors* $\lim_{|t| \to +\infty} \hat{\mu}(t) = 0$.

La réciproque du lemme de Riemann-Lebesgue n'est pas vraie.
On démontre

Théorème 5.7 (Théorème de Wiener)**.** *On a*

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2 dt = \sum_{x \text{ atome de } \mu} |\mu(\{x\})|^2.$$

Démonstration. En appliquant le théorème de Fubini, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} e^{-it(x-y)} d\mu(x) d\mu(y) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} K_T(x,y) d\mu(x) d\mu(y) \end{aligned}$$

où

$$K_T(x,y) := \frac{1}{T}\int_0^T e^{-it(x-y)}dt = \begin{cases} 1 \text{ si } x = y, \\ (1-e^{-iT(x-y)})/(iT(x-y)) \text{ si } x \neq y. \end{cases}$$

On a

$$\lim_{T\to\infty} K_T(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq y, \\ 1 \text{ si } x = y. \end{cases}$$

Comme $|K_T(x,y)| \leq 1$, le théorème de convergence dominée nous dit que, pour tout x,

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} K_T(x,y)d\mu(y) = \mu(\{x\})$$

et que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\})d\mu(x) = \sum_{x \text{ atome de } \mu} |\mu(\{x\})|^2.$$

ce qui achève la preuve du Théorème 5.7. $\square$

Bibliographie

[1] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak. *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller.

[2] B. Davies. *Spectral theory and differential operators*. Cambridge Univeristy Press, Cambridge (U.K), 1995.

[3] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.

[4] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. I.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980. Functional analysis.

[5] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1975. Traduit de l'anglais par N. Dhombres et F. Hoffman.