M2 Opérateurs de Schrödinger aléatoires

Feuille 2

Exercice 1. *Spectre sûr pour les opérateurs quasi-périodiques*
Sur $\mathbb{R}$, on considère l'opérateur quasi-périodique à une fréquence suivant :

$$[H_\theta u](x) = -\frac{d^2u}{dx^2}(x) + V(x,\alpha\, x+\theta)u(x)$$

où $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathbb{Z}^2$-périodique et continue, et où α est un irrationnel.
1) Montrer que la famille $(H_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ est ergodique.
2) Montrer que la famille $(H_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ est continue au sens fort de la résolvante c'est-à-dire que, si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et si $\theta_n \to \theta$ alors $(z-H_{\theta_n})^{-1}$ tend vers $(z-H)^{-1}$ au sens fort.
3) En déduire qu'il existe $\Sigma \subset \mathbb{R}$ fermé tel que, pour tout $\theta \in [0,1]$, $\sigma(H_\theta) = \Sigma$.

Exercice 2. *Calculs de spectres*
I) Un modèle discret de type Anderson.
Sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, on considère l'opérateur définit par la matrice H de coefficients

$$H = ((H_{\alpha,\beta}))_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^d}.$$

1) On suppose que le coefficient $H_{\alpha,\beta}$ s'écrit $H_{\alpha,\beta} = \hat{h}_{\alpha-\beta}$ où $(\hat{h}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}$ vérifie
- $\hat{h}_{-\alpha} = \overline{\hat{h}_\alpha}$,
- il existe $C > 0$ tel que $|\hat{h}_\alpha| \le Ce^{-|\alpha|/C}$.

a) Montrer que H définit un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ et que le spectre de H est donné par $\sigma(H) = \{h(\theta); \theta \in \mathbb{R}^d\}$ où h est la fonction $h(\theta) = \displaystyle\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} \hat{h}_\alpha e^{i\alpha\cdot\theta}$.
b) Montrer que le spectre de H est purement absolument continu.
2) On considère maintenant le potentiel aléatoire diagonal V_ω défini par $(V_\omega u)_\alpha = \omega_\alpha u_\alpha$. On suppose que les variables aléatoires $(\omega_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}$ sont indépendantes et identiquement distribuées. L'espace de probabilités $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ est muni de P la mesure de probabilité induite par les variables aléatoires $(\omega_\gamma)_\gamma$.
a) Montrer que $H_\omega = H + V_\omega$ est un opérateur aléatoire ergodique standard.
b) Montrer que Σ, le spectre presque sûr de H_ω vérifie

$$\Sigma \subset \sigma(H) + \mathrm{supp}(\omega_0).$$

c) Montrer que, pour $t \in \mathrm{supp}(\omega_0)$, le potentiel constant égal à t appartient au support de P.
d) En déduire que

$$\Sigma = \sigma(H) + \mathrm{supp}(\omega_0).$$

II)*Le modèle d'Anderson continu*
Sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, on considère le modèle d'Anderson $H_\omega = -\Delta + V_\omega$ où $V_\omega = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \omega_\gamma V(\cdot - \gamma)$. On suppose que le potentiel V appartient à $\ell^1(L^p)$ ($p > 2$ si $1 \le d \le 4$ et $p > d/2$ si $d \ge 5$) que les variables aléatoires $(\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$ sont i.i.d. et bornées. On note $\mathcal{S}$ le support de leur loi.

1) Montrer que, si P désigne la mesure de probabilité induite par V_ω sur $L^p_{\text{loc,unif}}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\text{supp}P = \left\{ W; W = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} t_\gamma V(\cdot - \gamma),\, t_\gamma \in \mathcal{S} \right\}.$$

2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{PP}$ définit par

$$\mathcal{PP} = \left\{ W; W = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} t_\gamma V(\cdot - \gamma),\, t_\gamma \in \mathcal{S} \text{ et } (t_\gamma)_\gamma \text{ périodique de période un sous-réseau de } \mathbb{Z}^d \right\}$$

est dense dans supp$P$ (pour la métrique définie sur $L^p_{\text{loc,unif}}(\mathbb{R}^d)$).

III)*Le modèle de Poisson*

On se place en dimension 1. Sur $L^2(\mathbb{R})$, on considère le modèle de Poisson avec un potentiel $V \leq 0$ borné, réel, continu ($V \neq 0$).

1) a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $X = (x_j)_{1\leq j\leq n}$ points de $\mathbb{R}$, l'opérateur $H_X = -\Delta + \sum_{j=1}^{n} V(\cdot - x_j) = -\Delta + V_X$ est dans le support de P.

b) Montrer que la famille d'opérateurs $(H_X)_{n,X}$ est dense dans le support de P.

2 a) Montrer que V_X est une perturbation relativement compacte de $-\Delta$. On pourra pour cela utiliser le noyau explicite de $(1-\Delta)^{-1}$.

b) En déduire que le spectre négatif de H_X est discret.

c) Montrer que $-E$ ($E > 0$) est une valeur propre de H_X si et seulement si 1 est une valeur propre de l'opérateur compact $\Gamma(E)$ défini par

$$\Gamma(E) = \sqrt{|V_X|}(E-\Delta)^{-1}\sqrt{|V_X|}.$$

d) En déduire que le spectre négatif de H_X est continu en X.

e) Montrer que $\Gamma(E)$ est croissante en E.

f) En étudiant

Gamma(E) pour $E \to 0^-$, montrer que H_X admet une suite de valeurs propres négatives tendant vers 0.

3) a) Construire une famille de points (n,X) telle que les infima du spectre de H_X tendent vers $-\infty$.

b) Calculer la limite du spectre de H_X quand $X_- = \inf_{i\neq j} |x_i - x_j| \to +\infty$.

c) Déduire des questions précédentes que le spectre presque sûr de H_ω est $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Densité d'états pour le modèle d'Anderson discret*

Sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, on considère l'opérateur défini par la matrice H de coefficients

$$H = ((H_{\alpha,\beta}))_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^d}.$$

On suppose que le coefficient $H_{\alpha,\beta}$ vérifie $H_{\alpha,\beta} = \hat{h}_{\alpha-\beta}$ où $\hat{h}_{-\alpha} = \overline{\hat{h}_\alpha}$ et il existe $C > 0$ tel que $(e^{|\alpha|/C}\hat{h}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$. On définit la fonction $h(\theta) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} \hat{h}_\alpha e^{i\alpha\cdot\theta}$.

On considère l'opérateur aléatoire $H_\omega = H + V_\omega$ où le potentiel aléatoire diagonal V_ω est défini par $(V_\omega u)_\alpha = \omega_\alpha u_\alpha$. On suppose que les variables aléatoires $(\omega_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}$ sont bornées, indépendantes et identiquement distribuées.

I)*Estimée de Combes-Thomas*

1) Montrer que Σ, le spectre presque sûr de H_ω, est compact.

2) On veut montrer qu'il existe $C > 0$ telle si $z \notin \sigma(H_\omega)$ alors

$$(1)\qquad |\langle \delta_\gamma,(z-H)^{-1}\delta_\beta\rangle| \leq \frac{C}{\eta(z)} e^{-\eta(z)|\gamma-\beta|/C} \text{ où } \eta(z) = \inf[1,\mathrm{dist}(z,\sigma(H_\omega))].$$

- Soit $a \in \mathbb{R}^d$. On définit $H_a = e^{a\cdot x} H_\omega e^{-a\cdot x}$. Calculer H_a et en déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $z \notin \sigma(H)$, si $|a| < \varepsilon\eta(z)$ alors $z - H_a$ est inversible et qu'il existe $C > 0$ tel que $\|(z-H_a)^{-1}\| \leq C/\eta(z)$.
- Montrer que, si $|a| < \varepsilon\eta(z)$, alors $|\langle \delta_\gamma,(z-H)^{-1}\delta_\beta\rangle| \leq \dfrac{C}{\eta(z)} e^{-a\cdot(\gamma-\beta)}$.
- Conclure.

II)*La densité d'états*

Soit $\Lambda_l \subset \mathbb{Z}^d$ le cube centré en 0 de côté $2l+1$. On note Π_l le projecteur orthogonal sur ce cube i.e. $\Pi_l = \displaystyle\sum_{\gamma\in\Lambda_l} \delta_\gamma \otimes \delta_\gamma$ où $(\delta_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^d$.

On pose $H_{\omega,l} = \Pi_l H_\omega \Pi_l$ que l'on considère comme un opérateur agissant $\ell^2(\Lambda_l)$ i.e. sur $\mathbb{C}^N$ où N est le cardinal de Λ_l. L'identification est faite en utilisant les bases canoniques.

Pour φ, une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, on pose

$$(2)\qquad \langle \varphi, dN_{\omega,l}\rangle = \frac{1}{(2l+1)^d}\mathrm{tr}(\varphi(H_{\omega,l})).$$

1) Montrer que (2) définit une mesure de probabilités et que cette mesure est à support dans un compact indépendant de ω et de l. En déduire que $dN_{\omega,l}$ vérifie $|\langle\varphi,dN_{\omega,l}\rangle| \leq \|\varphi\|_\infty$.

2) Constater que la fonction de distribution de $dN_{\omega,l}$ est égale à la fonction de comptage des valeurs propres de $H_{\omega,l}$ normalisée par le volume.

3) On choisit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im} z \neq 0$ et on pose $\varphi_z = (z-t)^{-1}$. En utilisant (1), montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$(3)\qquad \lim_{l\to+\infty} \sup_{\gamma\in\Lambda_{(1-\varepsilon)l}} |\langle\delta_\gamma,\varphi_z(H_{\omega,l})\delta_\gamma\rangle - \langle\delta_\gamma,\varphi_z(H_\omega)\delta_\gamma\rangle| = 0.$$

4) En déduire que $\displaystyle\lim_{l\to+\infty}\left|\langle\varphi_z,dN_{\omega,l}\rangle - \frac{1}{(2l+1)^d}\sum_{\gamma\in\Lambda_l}\langle\delta_\gamma,\varphi_z(H_\omega)\delta_\gamma\rangle\right| = 0.$

5) Montrer que, ω presque sûrement, on a

$$(4)\qquad \frac{1}{(2l+1)^d}\sum_{\gamma\in\Lambda_l}\langle\delta_\gamma,\varphi_z(H_\omega)\delta_\gamma\rangle \underset{l\to+\infty}{\to} \mathbb{E}(\langle\delta_0,\varphi_z(H_\omega)\delta_0\rangle).$$

6) En combinant les résultats des questions 4) à 7), montrer que, ω presque sûrement, la suite de mesures $dN_{\omega,l}$ converge vers une mesure de probabilité dN définie par

$$(5)\qquad \langle\varphi,dN\rangle = \mathbb{E}(\langle\delta_0,\varphi(H_\omega)\delta_0\rangle).$$

pour φ une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$.
III) *Conditions au bord quasi-périodiques*
Pour simplifier la situation, on suppose $d = 1$. On pourra vérifier ultérieurement que tout fonctionne encore si $d > 1$.
On considère l'opérateur $H^p_{\omega,n} = H + V^p_{\omega,n}$ où $V^p_{\omega,n}$ est le potentiel $(2n+1)\cdot\mathbb{Z}$-périodique sur $\mathbb{Z}$ défini par

$$V^p_{\omega,n}(\gamma) = \omega_\beta \text{ si } \gamma \equiv \beta\,(2l+1) \text{ et } \beta \in \Lambda_n.$$

Pour analyser l'opérateur $H^p_{\omega,n}$, on va utiliser la théorie de Floquet. On note $\mathcal{F}:\ L^2([-\pi,\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ la transformée de Fourier discrète usuelle.
1) Montrer que, pour $u \in L^2([-\pi,\pi])$, on a

$$\hat{H}_\omega u(\theta) = (\mathcal{F}H_\omega\mathcal{F}^* u)(\theta) = h(\theta)u(\theta) + \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \omega_\gamma (\hat{\Pi}_\gamma u)(\theta)$$

$$\text{où } (\hat{\Pi}_\gamma u)(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{i\gamma\theta} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\gamma\theta} u(\theta) d\theta.$$

2) Montrer que, pour tout u fonction de carré sommable sur $[-\pi,\pi]$, il existe $2n+1$ fonctions notées $(u_\gamma(\theta))_{\gamma\in\mathbb{Z}_{2n+1}}$ définies de façon unique telles que

- les fonctions $(u_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}_{2n+1}}$ sont $\frac{2\pi}{2n+1}$-périodiques,
- $u(\theta) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}_{2n+1}} e^{i\gamma\theta} u_\gamma(\theta)$.

Ici $\mathbb{Z}_{2n+1} = \mathbb{Z}/[(2n+1)\mathbb{Z}]$.
2) Montrer que l'application $U\ :\ \ L^2([-\pi,\pi]) \to L^2([-\frac{\pi}{2n+1},\frac{\pi}{2n+1}]) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_{2n+1})$ définie par $(Uu)(\theta) = (u_\gamma(\theta))_{\gamma\in\mathbb{Z}_{2n+1}}$ est une équivalence unitaire.
3) On définie $Uh(\cdot) = (h_\gamma(\cdot))_{\gamma\in\mathbb{Z}_{2n+1}}$. Montrer que $U\mathcal{F}H^p_{\omega,n}\mathcal{F}^*U^*$ est l'opérateur de multiplication par la matrice $H^p_{\omega,n}(\theta) = ((h_{\gamma-\gamma'}(\theta) + \omega_\gamma\delta_{\gamma\gamma'}))_{(\gamma,\gamma')\in\mathbb{Z}^2_{2n+1}}$ agissant sur $L^2([-\frac{\pi}{2n+1},\frac{\pi}{2n+1}]) \otimes \ell^2(\mathbb{Z}_{2n+1})$.
4) Monrtrer que l'on a

$$\sigma(H^p_{\omega,n}) = \bigcup_{\theta\in[-\frac{\pi}{2n+1},\frac{\pi}{2n+1}]} \sigma(H^p_{\omega,n}(\theta))$$

où $H^p_{\omega,n}(\theta)$ agit ici sur $\ell^2(\mathbb{Z}_{2n+1})$.
5) Montrer que le spectre de $H^p_{\omega,n}$ est purement absolument continu.
6) Fixons $\theta \in [-\pi,\pi]$. Soit λ une valeur propre de la matrice $H^p_{\omega,n}(\theta)$ (agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}_{2n+1})$) et u un vecteur propre associé à λ. Montrer que si on prolonge u à $\mathbb{Z}$ de façon quasi-périodique (i.e. $u_{\gamma+\beta} = e^{-i\beta\theta}u_\gamma$ pour $\gamma \in \mathbb{Z}$, $\beta \in (2n+1)\mathbb{Z}$) alors u vérifie $H^p_{\omega,n}u = \lambda u$.
Vérifier que la réciproque est également vraie.
7) D'après la question précédente, $H^p_{\omega,n}(\theta)$ est la restriction de H_ω à Λ_n avec conditions quasi-périodiques au bord.
On peut définir la mesure de comptage pour cette restriction de la façon suivante : si φ est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\langle \varphi, dN_{\omega,n}(\theta)\rangle = \frac{1}{2n+1}\operatorname{tr}(\varphi(H^p_{\omega,n}(\theta))).$$

7) En s'inspirant de la partie II) de l'exercice, montrer que, ω presque sûrement, la mesure $dN_{\omega,l}(\theta)$ converge vers la mesure dN définie par (5)