M2 Opérateurs de Schrödinger aléatoires

Feuille 3

Exercice. 1) Soit H un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit $\psi \in \mathcal{H}$ un vecteur tel que $\|\psi\| = 1$. On note P le projecteur orthogonal sur ψ. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$(z - A - tP)^{-1} - (z - A)^{-1} = \frac{t}{1 - t\langle\psi,(z - A)^{-1}\psi\rangle}(z - A)^{-1}P(z - A)^{-1}. \tag{1}$$

2) Soit $\ell^2(\mathbb{Z})$ muni de sa structure canonique d'espace de Hilbert. Soit $(V_\omega(x))_{x\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que ces variables aléatoires sont bornées et que leur distribution admet une densité bornée notée q. On considère l'opérateur borné $H_\omega = H_0 + V_\omega$ défini par

$$(H_\omega\psi)(x) = 2\psi(x) - \psi(x + 1) - \psi(x - 1) + V_\omega(x)\psi(x) \tag{2}$$

où ψ est une suite de $\ell^2(\mathbb{Z})$ et x un point de $\mathbb{Z}$.
On notera $N(E)$ la densité d'états intégrée de H_ω. On rappelle que, dans ce cas, pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E - z} dN(E) = \mathbb{E}(\langle\delta_0,(H_\omega - z)\delta_0\rangle).$$

Ici $\mathbb{E}(\cdot)$ désigne l'espérance en ω et δ_0 le vecteur de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dont la 0-ième composante vaut 1 et les autres valent 0.
a) En choisissant bien le vecteur ψ et en utilisant (1), montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E - z} dN(E) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{t - \zeta(\omega)} dt\right)$$

où $\zeta(\omega)^{-1} = -\langle\delta_0,(H_\omega - z)\delta_0\rangle_{|V_\omega(0)=0}$.
b) Montrer que, si $\mathrm{Im} z > 0$ alors $\mathrm{Im}\zeta(\omega) > 0$.
c) En déduire que, pour tout ω, on a

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{t - \zeta(\omega)} dt\right) \leq \pi \sup_{t\in\mathbb{R}} g(t).$$

d) On rappelle la formule de Perron-Frobenius : soit m une mesure borélienne positive de masse totale finie. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on définit sa transformée de Stieltjes par $f(z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} dm(t)$.
Alors si $a < b$ sont réels tels que $m(\{a,b\}) = 0$, on a

$$m(]a,b[) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \mathrm{Im}(f(t + i\varepsilon)dt. \tag{3}$$

Déduire de (3) que, pour $a < b$, on a

$$N(b) - N(a) \leq \left[\sup_{t\in\mathbb{R}} g(t)\right] \cdot (b - a).$$

Problème. Soit $\ell^2(\mathbb{Z})$ muni de sa structure canonique d'espace de Hilbert. Soit $(V_\omega(x))_{x\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. On notera que ces variables aléatoires ne sont pas supposées bornées. On considère le domaine $\ell_{\text{comp}}(\mathbb{Z}) = \{\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C};\ \exists R > 0,\ \psi(x) = 0 \text{ si } |x| \geq R\}$, et sur ce domaine, on définit l'opérateur $H_\omega = H_0 + V_\omega$ par l'équation (2).

I) 1) Calculer l'adjoint de H_ω.
2) Montrer que, pour tout ω, H_ω est essentiellement auto-adjoint sur $\ell_{\text{comp}}(\mathbb{Z})$. On notera alors H_ω son unique extension auto-adjointe.
3) Montrer que H_ω est un opérateur aléatoire ergodique.
4) Quel est le spectre de H_ω?

II) Dans cette partie, on définit un analogue des restrictions de Dirichlet et Neumann pour les opérateurs discrets.
1) Deux points de $\mathbb{Z}$ (x,y) sont appelés *plus proches voisins* (abrégé en *p.p.v.*) si $x = y + 1$ ou $x = y + 1$. Pour $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, on définit les opérateurs L^{xy} et S^{xy} par

$$(L^{xy}\psi)(z) = \begin{cases} \psi(x) - \psi(y) \text{ si } z = x \\ \psi(y) - \psi(x) \text{ si } z = y \\ 0 \text{ si } z \notin \{x,y\} \end{cases} \quad \text{et } (S^{xy}\psi)(z) = \begin{cases} \psi(x) + \psi(y) \text{ si } z = x \\ \psi(y) + \psi(x) \text{ si } z = y \\ 0 \text{ si } z \notin \{x,y\} \end{cases} .$$

Ici ψ est un vecteur de $\ell^2(\mathbb{Z})$ et $\{x,y,z\}$ des points de $\mathbb{Z}$.
a) Montrer que $L^{xy} \geq 0$ et $S^{xy} \geq 0$.
b) Vérifier que $H_0 = \displaystyle\sum_{x \text{ et } y \text{ p.p.v.}} L^{xy}$.

2) Un *lien* est un couple (x,y) de points de $\mathbb{Z}$ plus proches voisins. Pour $\mathcal{B}$ un ensemble arbitraire de liens, on définit les opérateurs

$$H_\omega^{\mathcal{B},D} = H_\omega + \sum_{(x,y)\in\mathcal{B}} L^{xy} \text{ et } H_\omega^{\mathcal{B},N} = H_\omega - \sum_{(x,y)\in\mathcal{B}} S^{xy}.$$

a) Montrer que $H_\omega^{\mathcal{B},D}$ et $H_\omega^{\mathcal{B},N}$ sont auto-adjoint sur le domaine de H_ω.
b) Montrer que l'on a

$$H_\omega^{\mathcal{B},N} \leq H_\omega \leq H_\omega^{\mathcal{B},D}. \tag{4}$$

3) Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de liens qui déconnecte $\mathbb{Z}$ c'est-à-dire tel que $\mathbb{Z}$ s'écrit $\mathbb{Z} = \cup_{n\in N} S_n$ où les ensembles $(S_n)_{n\in N}$ sont 2 à 2 disjoints et tels que si (x,y) est un lien où $x \in S_n$, $y \in S_m$ et $n \neq m$ (i.e. un lien connectant S_n à S_m) alors $(x,y) \in \mathcal{B}$.
On peut alors décomposer en $\ell^2(\mathbb{Z})$ en somme directe orthogonale $\ell^2(\mathbb{Z}) = \displaystyle\bigoplus_{n\in N} \ell^2(S_n)$. On note Π_n le projecteur orthogonal sur $\ell^2(S_n)$. Montrer que les opérateurs $H_\omega^{\mathcal{B},D}$ et $H_\omega^{\mathcal{B},N}$ admettent la décomposition en somme directe

$$H_\omega^{\mathcal{B},D} = \bigoplus_{n\in N} H_{\omega,n}^{\mathcal{B},D} \text{ et } H_\omega^{\mathcal{B},N} = \bigoplus_{n\in N} H_{\omega,n}^{\mathcal{B},N}$$

où $H_{\omega,n}^{\mathcal{B},D} = \Pi_n H_\omega^{\mathcal{B},D}$ et $H_{\omega,n}^{\mathcal{B},N} = \Pi_n H_\omega^{\mathcal{B},N}$.

4) Fixons $m \in \mathbb{N}^*$; on définit l'ensemble de liens $\mathcal{B}_m = \{(mn,mn+1), n \in \mathbb{Z}\}$. Alors les ensembles $(S_n(m))_{n\in\mathbb{Z}}$ définis à la question précédente sont $S_n(m) = \{mn+1, mn+2, \ldots, (m+1)n\}$.
a) Constater que, dans ce cas, pour $n \in \mathbb{Z}$, les opérateurs $H_{\omega,n}^{\mathcal{B}_m,D}$ et $H_{\omega,n}^{\mathcal{B}_m,N}$ sont des matrices $m \times m$.
b) Montrer que $H_\omega^{\mathcal{B}_m,D}$ et $H_\omega^{\mathcal{B}_m,N}$ sont des opérateurs aléatoires ergodiques.
c) On note $N_{m,D}$ et $N_{m,N}$ leurs densités d'états intégrées respectives. Montrer que, pour $E \in \mathbb{R}$, on a

$$N_{m,D}(E) = \frac{1}{m}\mathbb{E}(\Theta_{m,\omega,D}(E)) \text{ et } N_{m,N}(E) = \frac{1}{m}\mathbb{E}(\Theta_{m,\omega,N}(E))$$

où $\Theta_{m,\omega,D}(E)$ (respectivement $\Theta_{m,\omega,N}(E)$) désigne le nombre de valeurs propres de $H_{\omega,0}^{\mathcal{B}_m,D}$ (respectivement $H_{\omega,0}^{\mathcal{B}_m,N}$) inférieures à E.
d) En se servant de (4), montrer que, si N désigne la densité d'états intégrée de H_ω, on a

$$N_{m,D} \leq N \leq N_{m,N}.$$

5) On considère maintenant le cas $V_\omega \equiv 0$. On notera alors $H_0^{\mathcal{B}_m,D} = H_\omega^{\mathcal{B}_m,D}$ et $H_0^{\mathcal{B}_m,N} = H_\omega^{\mathcal{B}_m,N}$. De même, pour $n \in \mathbb{Z}$, on notera $H_{0,n}^{\mathcal{B}_m,D} = H_{\omega,n}^{\mathcal{B}_m,D}$ et $H_{0,n}^{\mathcal{B}_m,N} = H_{\omega,n}^{\mathcal{B}_m,N}$.
a) Montrer que ψ est une fonction propre pour $H_{0,0}^{\mathcal{B}_m,N}$ associée à la valeur propre E si et seulement si la fonction $\overline{\psi}$ obtenue en prolongeant ψ par symétries successives par rapport aux points $nm + 1/2$ ($n \in \mathbb{Z}$) vérifie l'équation $H_0\overline{\psi} = E\overline{\psi}$.
b) Montrer que ψ est une fonction propre pour $H_{0,0}^{\mathcal{B}_m,D}$ associée à la valeur propre E si et seulement si la fonction $\overline{\psi}$ obtenue en prolongeant ψ par symétries par rapport aux points $nm + 1/2$ et changements de signe successifs (pour $n \in \mathbb{Z}$) vérifie l'équation $H_0\overline{\psi} = E\overline{\psi}$.
c) Résoudre l'équation aux différences finies $H_0\psi = E\psi$.
d) Déduire de a) et c) que les valeurs propres de $H_{0,0}^{\mathcal{B}_m,N}$ sont les nombres $2(1-\cos(k\pi/m))$ pour $k = 0, \ldots, m-1$.
e) Calculer le vecteur propre associé à la valeur propre 0.
f) Déduire de b) et c) que les valeurs propres de $H_{0,0}^{\mathcal{B}_m,D}$ sont les nombres $2(1-\cos(k\pi/m))$ pour $k = 1, \ldots, m$.

III) Dans cette partie, on va utiliser les constructions précédentes pour prouver l'existence d'asymptotiques de Lifshitz pour H_ω. Pour cela on supposera que :

- les $(V_\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont bornées et positives,
- $\mathbb{P}(V_\omega(n) \in [0,\varepsilon]) \geq C\varepsilon^l$ pour des constantes C et l strictement positives.

Ici $\mathbb{P}(.)$ désigne la probabilité d'un événement.

1) a) Montrer que

$$(5) \qquad \frac{1}{m}\mathbb{P}(\{H_{\omega,0}^{\mathcal{B}_m,D} \text{ admet une valeur propre inférieure à } E\}) \leq N_{m,D}(E) \leq N(E).$$

b) Montrer que

$$(6) \qquad N(E) \leq N_{m,D}(E) \leq \mathbb{P}(\{H_{\omega,0}^{\mathcal{B}_m,N} \text{ admet une valeur propre inférieure à } E\}).$$

2) a) Soit $E > 0$ petit et m entier tel que $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{E}} < m \leq \dfrac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{E}} + 1$. On suppose que pour $x \in S_0(m)$, $V_\omega(x) \leq E/2$. Montrer qu'alors $H_{\omega,0}^{\mathcal{B}_m,D}$ admet alors une valeur propre inférieure à E.

b) En déduire que

$$\mathbb{P}(\{\forall x \in S_0(m),\, V_\omega(x) \leq E/2\}) \leq N_{m,D}(E).$$

c) Montrer que

$$\liminf_{E \to 0^+} \frac{\log(|\log(N(E))|}{\log(E)} \geq -\frac{1}{2}.$$

3) a) Fixons $\alpha \in]0{,}1/2[$. Soit $E > 0$ petit et m entier tel que $E^{-1/2+\alpha} < m \leq E^{-1/2+\alpha} + 1$. Montrer que

- $H_{0,0}^{\mathcal{B}_m,N}$ admet exactement une valeur propre inférieure à E qui est 0,
- l'espace propre associé à 0 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur constant i.e. par le vecteur $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{m}}(1,\ldots,1)$.
- les valeurs propres différentes de 0 sont supérieures à $CE^{1-2\alpha}$ (où $C > 0$ est indépendantes de E).

b) En déduire que, si ψ est un vecteur non nul tel que $\langle H_{\omega,0}^{\mathcal{B}_m,N}\psi,\psi\rangle \leq E\|\psi\|^2$ alors ψ s'écrit $\psi = a\psi_0 + \psi_\perp$ où $|a| \geq 1 - CE^\alpha$, $\langle\psi_\perp,\psi_0\rangle = 0$ et $\|\psi_\perp\| \leq CE^\alpha$. Ici $C > 0$ est une constante indépendante de E.

c) En déduire qu'il existe $C > 0$ et $E_0 > 0$ tel que pour $0 > E \leq E_0$, si ω est tel que $H_{\omega,0}^{\mathcal{B}_m,N}$ admet une valeur propre inférieure à E, alors ω vérifie

$$\Sigma_m(\omega) := \frac{1}{m} \sum_{j \in S_0(m)} V_\omega(j) \leq CE^\alpha.$$

d) On considère l'événement $\Omega(E) = \{\omega;\ \Sigma_m(\omega) \leq CE^\alpha\}$. Montrer que, pour $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\Omega(E)) \leq e^{tCE^\alpha - t\mathbb{E}(V_\omega(0)) - mF(t/m)} \text{ où } F(t) = \log\left[\mathbb{E}\left(e^{-t(V_\omega(0)-\mathbb{E}(V_\omega(0)))}\right)\right].$$

e) Montrer qu'il existe $c_0 > 0$ et $t_0 > 0$ tel que, pour $t \in]-t_0,t_0[$, on a $|F(t)| \leq c_0 t^2$.

f) En choisissant t de façon convenable, en déduire qu'il existe $C > 0$ telle que, pour E assez petit et m donné à la question III)3)a), on a

$$\mathbb{P}(\Omega(E)) \leq e^{-m/C}.$$

g) Montrer que

$$\limsup_{E \to 0^+} \frac{\log(|\log(N(E))|}{\log(E)} \leq -\frac{1}{2}.$$

h) Conclure.