M2 Opérateurs de Schrödinger aléatoires

Feuille 4

Exercice 1. Soit $\mathcal{E} = \big\{\{x,y\}; |x-y|_1 = 1,\ (x,y) \in (\mathbb{Z}^d)^2\big\}$ l'ensemble des paires de plus proches voisins dans $\mathbb{Z}^d$.
Pour $\omega = (\omega_e)_{e\in\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ une famille de réels, et $u \in \tilde{D} := \ell^2_{\text{comp}}(\mathbb{Z}^d)$, on considère

$$(H_\omega u)(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ e=\{x,y\}}} \omega_e (u(x) - u(y)).$$

1. (a) Pour $\varphi \in \tilde{D}$, montrer que

$$\langle H_\omega \varphi, \varphi\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ e=\{x,y\}}} \omega_e |\varphi(x) - \varphi(y)|^2. \tag{1}$$

   (b) Montrer que H_ω est essentiellement auto-adjoint sur $\tilde{D}$.
   (c) Vérifier que (1) reste vraie pour l'extension auto-adjointe de H_ω, aussi notée H_ω.
   (d) Montrer que l'on peut écrire $H_\omega = \sum_{e\in\mathcal{E}} \omega_e \Pi_e$ où $(\Pi_e)_{e\in\mathcal{E}}$ est une famille de projecteurs orthogonaux de rang 1. On calculera aussi l'image de Π_e.
   (e) Calculer le spectre de H_ω si l'on suppose que $\forall e \in \mathcal{E}$, $\omega_e = m$.
2. On suppose dorénavant que $(\omega_e)_{e\in\mathcal{E}}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, réelles, positives.
   (a) Montrer que H_ω est un opérateur aléatoire ergodique (on prendra soin de préciser la famille ergodique de transformations préservant l'espace de probabilité ainsi que les opérateurs unitaires associés).
   (b) Soit Σ, le spectre presque sûr de H_ω et σ le support de la distribution commune aux variables aléatoires $(\omega_e)_{e\in\mathcal{E}}$.
      i. Montrer que $0 \in \Sigma \subset [0,dM]$ où $M = \sup \sigma$.
      ii. Montrer que si $\sigma = [m,M]$ alors $\Sigma = [0,dM]$.
3. Sous les hypothèses de la question précédente, on suppose que la distribution des variables aléatoires admet une densité ρ vérifiant $\sup_{s\in\sigma} |s\rho(s)| < +\infty$.
   Pour $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ fini, on considère l'opérateur $H_{\omega|\Lambda} = \sum_{e\cap\Lambda\neq\emptyset} \omega_e \Pi_e$.
   On veut montrer l'estimée de Wegner suivante : pour $0 < a < b$,

$$\mathbb{E}\left(\#\{\text{valeurs propres de } H_{\omega|\Lambda} \text{ dans } [a,b]\}\right) \leq C\,\#\Lambda\, \frac{b-a}{a} \quad \text{où } C := 6d \sup_{s\in\sigma} |s\rho(s)|. \tag{2}$$

   (a) Soit $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\rho \subset [0,+\infty[$, $\rho' \geq 0$ et soit $E > 0$. Montrer que

$$\sum_{e\cap\Lambda\neq\emptyset} \omega_e \frac{\partial}{\partial\omega_e} \operatorname{tr}(\rho(H_{\omega|\Lambda} - E)) = \operatorname{tr}(H_{\omega|\Lambda}\, \rho'(H_{\omega|\Lambda} - E)) \geq -E \frac{\partial}{\partial E} \operatorname{tr}(\rho(H_{\omega|\Lambda} - E)).$$

(b) En déduire que pour ρ comme ci-dessus bien choisie (on expliquera comment), on a

$$\mathbb{E}\left(\#\{\text{valeurs propres de } H_{\omega|\Lambda} \text{ dans } [a,b]\}\right)$$
$$\leq \frac{2}{a}\sum_{e\cap\Lambda\neq\emptyset}\int_{a\left(1-\frac{b-a}{2(a+b)}\right)}^{b\left(1+\frac{b-a}{2(a+b)}\right)} \mathbb{E}\left(\omega_e \frac{\partial}{\partial\omega_e}\operatorname{tr}(\rho(H_{\omega|\Lambda}-E))\right) dE.$$

(c) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\omega_e}\left[\operatorname{tr}(\rho(H_{\omega|\Lambda}-E))\right]\omega_e\rho(\omega_e)d\omega_e \leq \sup_{s\in\sigma}|s\rho(s)|$$

(d) Conclure.

4. On se place sous les hypothèses de la question 3. On suppose de plus que $\sup\sigma = +\infty$ et qu'il existe $\eta > 0$ t.q. $x^\eta \cdot \rho(x) \in L^1(\mathbb{R}^+)$.
On veut montrer qu'il existe $0 < E_0$ tel que, ω-p.s., le spectre de H_ω dans $[E_0,+\infty[$ n'est pas vide et est purement ponctuel.
   (a) Montrer qu'il existe $s_0 \in]0,1[$ t.q. pour tout $s \in]0,s_0[$, il existe $\mu_s \in]0,+\infty[$ tels que

$$\forall\alpha\in\mathbb{C},\quad \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^s}{|x-\alpha|^s}\rho(x)dx \leq (\mu_s)^s\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|x-\alpha|^s}\rho(x)dx.$$

   (b) Pour $E \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $(x,y) \in (\mathbb{Z}^d)^2$, on pose $G^\omega(E;x,y) = \langle\delta_x,(H_\omega - E)\delta_y\rangle$.
Montrer que, pour $s \in (0,1)$, on a

$$|E|^s\mathbb{E}\left(|G^\omega(E;x,x_0)|^s\right) \leq \frac{1}{2}\sum_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ e=\{x,y\}}}\mathbb{E}\left(|\omega_e|^s\,|G^\omega(E;x,x_0)-G^\omega(E;y,x_0)|^s\right)+\delta_{x=x_0}.$$

   (c) En se servant de la question 1.d, montrer que, pour tout x, x_0 et E comme ci-dessus, il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que $G^\omega(E;x,x_0)-G^\omega(E;y,x_0) = \dfrac{\alpha}{\omega_{\{x,y\}}-\beta}$.

   (d) En déduire que, pour $s \in]0,s_0[$, on a

$$(|E|^s-(\mu_s)^s d)\mathbb{E}\left(|G^\omega(E;x,x_0)|^s\right) \leq \frac{(\mu_s)^s}{2}\sum_{\substack{e\in\mathcal{E}\\ e=\{x,y\}}}\mathbb{E}\left(|G^\omega(E;y,x_0)|^s\right)+\delta_{x=x_0}.$$

   (e) Montrer que, pour $s \in]0,s_0[$, il existe $E_s > 0$ t.q. $E > E_s$, on a $|E|^s > 2(\mu_s)^s d$ et

$$\mathbb{E}\left(|G^\omega(E;x,y)|^s\right) \leq \left(\frac{((\mu_s)^s d)^2}{|E|^s-2(\mu_s)^s d}\right)\left(\frac{(\mu_s)^s d}{|E|^s-(\mu_s)^s d}\right)^{|x-y|-2}.$$

   (f) Conclure.

5. On se place sous les hypothèses de la question 3. On suppose que $M := \sup(\operatorname{supp}\rho) < +\infty$ et qu'il existe $\eta > 0$ t.q. $\rho(x) = o(|x-M|^\eta)$ quand $x \to M^-$.
On veut montrer qu'il existe $0 < E_0 < 2dM$ tel que, ω-p.s., le spectre de H_ω dans $[E_0,2dM]$ est purement ponctuel.
   (a) Montrer qu'il existe $\mu_0 \in]0,M[$ tels que, pour tout $s \in]0,1[$,

$$\forall\alpha\in\mathbb{C},\quad \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^s}{|x-\alpha|^s}\rho(x)dx \leq (\mu_0)^s\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|x-\alpha|^s}\rho(x)dx.$$

   (b) Conclure.