M2 Théorie spectrale des opérateurs aléatoires

Feuille 1

Exercice 1. *Étude de l'auto-adjonction de $-\Delta + V$ suivant la régularité de V*
1) Étude du laplacien libre.
a) Sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, on considère l'opérateur non borné $-\Delta$ défini sur le domaine $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (l'espace de Schwartz) par

$$-\Delta u = \sum_{1\leq i\leq d} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Montrer que $-\Delta$ est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par ξ^2 agissant sur le domaine $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
b) En déduire que $-\Delta$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que son domaine est $H^2(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ telles que } -\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$.
c) En déduire la résolution spectrale de $-\Delta$.
d) Montrer que $-\Delta \geq 0$ et que son spectre ne contient pas de valeurs propres.
e) On admettra le
Théorème de Hausdorff-Young (voir [1] chap. 7) :
Pour $1 \leq p \leq 2$ et p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, la transformée de Fourier est bornée de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$.
Montrer que, pour $E > 0$, l'opérateur $(E-\Delta)^{-1}$ est borné de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^r(\mathbb{R}^d)$ pour $\frac{1}{r} > \sup(\frac{1}{2} - \frac{2}{d}, 0)$ et vérifie $\|(E-\Delta)^{-1}\|_{L^2\to L^r} \to 0$ quand $E \to +\infty$.
2) Étude des perturbations.
a) Soit $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p > 2$ si $1 \leq d \leq 4$ et $p > d/2$ si $d \geq 5$. Montrer que $V(E-\Delta)^{-1}$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et que $\|V(E-\Delta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \to 0$ quand $E \to +\infty$.
b) En déduire que, si $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$ où p vérifie les conditions décrites ci-dessus, $H = -\Delta + V$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 2. *Étude des laplaciens de Dirichlet et de Neumann perturbés sur un cube*
1) Étude des laplaciens libres.
Soit $L > 1$. On considère le cube $C_L = [0,L]^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Sur $L^2(C_L)$, on considère l'opérateur $-\Delta$ sur les deux domaines

$$\mathcal{D}_D = \{u \in \mathbb{C}^\infty(C_l);\ u = 0 \text{ sur } \partial C_l\} \text{ et } \mathcal{D}_N = \{u \in \mathbb{C}^\infty(C_l);\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial C_l\}$$

∂C_l désigne le bord du cube et $\frac{\partial u}{\partial n}$ la dérivée le long de la normale extérieure.
On notera les opérateurs ainsi obtenus $-\Delta_D$ et $-\Delta_N$.
a) Calculer les valeurs propres de $-\Delta_D$ et $-\Delta_N$ (on utilisera la séparation de variables pour se ramener à un problème unidimensionnel).
b) Montrer que, dans les deux cas, les vecteurs propres forment une une base orthonormale de $L^2(C_L)$.
c) En déduire que $-\Delta_D$ et $-\Delta_N$ sont essentiellement auto-adjoints sur $L^2(C_L)$.

d) Montrer que les résolvantes de $-\Delta_D$ et de $-\Delta_N$ sont compactes.
2) Étude de l'opérateur perturbé : soit $V \in L^p(C_L)$ avec $p > 2$ si $d \leq 4$ et $p > d/2$ si $d \geq 5$.
a) En utilisant la décomposition de $-\Delta_D$ et $-\Delta_N$ sur leurs bases de vecteurs propres respectifs, montrer que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $C_\alpha > 0$ tel que, pour $E > 1$, on a

$$\|V(E-\Delta_D)^{-1}\| + \|V(E-\Delta_N)^{-1}\| \leq CE^{-\alpha}.$$

b) En déduire que V est $-\Delta_D$-compact et $-\Delta_N$-compact.
c) Montrer que $H_D = -\Delta_D + V$ et $H_N = -\Delta_N + V$ sont essentiellement auto-adjoints sur $\mathcal{D}_D$ et $\mathcal{D}_N$.
d) Montrer que H_D et H_N ont un spectre discret (on pourra montrer que les résolvantes de H_D et H_N sont compactes).
3) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $N_{D,N}(\lambda) = \#\{$ valeurs propres de $H_{D,N}$ inférieures à $\lambda\}$.
a) Montrer que, pour tout V vérifiant les hypothèses de la question 2), on a

$$N_{D,N}(\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} N_{D,N}(\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} C\lambda^{d/2}$$

où C est une constante à déterminer.

Exercice 3. *Opérateurs périodiques en dimension 1*
Soit $\theta \in [0,2\pi[$. On définit l'espace vectoriel

$$\mathcal{H}_\theta = \{f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R});\ \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+n) = e^{in\cdot\theta}f(x)\}$$

que l'on munit du produit scalaire $\displaystyle\int_{[0,1]} f(x)\cdot\overline{g(x)}dx$. C'est un espace de Hilbert.
On considère $-\Delta_\theta$ l'opérateur non borné sur $\mathcal{H}_\theta$ de domaine $\mathcal{D}_\theta = H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}_\theta$ défini par

$$-\Delta_\theta u = -\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{pour} \quad u \in \mathcal{D}_\theta.$$

1) Montrer que $(-\Delta_\theta,\mathcal{D}_\theta)$ est auto-adjoint, positif.
2) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $-\Delta_\theta$.
3) Montrer que le spectre essentiel de $-\Delta_\theta$ est vide i.e. que le spectre de $-\Delta_\theta$ est réduit au spectre discret.
4) Soit $E \in \mathbb{R}$. On définit $N_0(\theta,E)$ par

$$N_0(\theta,E) = \sharp\{\text{valeurs propres de } -\Delta_\theta \text{ inférieures à } E\}.$$

Par un calcul direct, montrer que $N_0(\theta,E) \sim_{E\to+\infty} \frac{1}{\pi}\sqrt{E}$.
5) Soit $V \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}_0$ (i.e. V est $\mathbb{Z}$-périodique). Montrer que $H_\theta = -\Delta_\theta + V$ est auto-adjoint sur $\mathcal{D}_\theta$, semi-borné inférieurement et que le spectre essentiel de H_θ est vide.
6) Soit $E \in \mathbb{R}$. On définit $N(\theta,E)$ par

$$N(\theta,E) = \sharp\{\text{valeurs propres de } H_\theta \text{ inférieures à } E\}.$$

Montrer que $N_0(\theta,E - \|V\|_\infty) \leq N(\theta,E) \leq N_0(\theta,E + \|V\|_\infty)$.
En déduire que $N(\theta,E) \underset{E\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi}\sqrt{E}$.

Exercice 4. *Étude de l'auto-adjonction de $-\Delta + V$ suivant la régularité de V*
On dit que V est localement uniformément L^p sur $\mathbb{R}^d$ i.e. $V \in L^p_{\text{unif,loc}}(\mathbb{R}^d)$ si

- pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^d$, $V \in L^p(C_\gamma)$ ($C_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^d; |x-\gamma|_1 \leq 1\}$).
- $\sup_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \|V\|_{L^p(C_\gamma)} < +\infty$.

1) a) En reprenant l'exercice 1 de la feuille 1, montrer que, si $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p > 2$ si $1 \leq d \leq 4$ et $p > d/2$ si $d \geq 5$, alors, il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ (C ne dépendant que de $\|V\|_p$) tel que $\|V(E-\Delta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq CE^{-\alpha}$.
b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$ ne dépendant que de $\|V\|_p$ tel que, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a $\|V\varphi\|_{L^2} \leq \varepsilon\|\Delta\varphi\| + C\|\varphi\|$.
c) Montrer pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a $\|\nabla\varphi\|_{L^2\otimes C^d} \leq \varepsilon\|\Delta\varphi\| + C\|\varphi\|$.
2) a) Construire une fonction $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $0 \leq \chi \leq 1$, χ supporté dans le cube de centre 0 et de coté 3/2 et telle que $\displaystyle\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \chi_\gamma^2 = 1$ où $\chi_\gamma(\cdot) = \chi(\cdot - \gamma)$.
b) Soit $V \in L^p_{\text{unif,loc}}(\mathbb{R}^d)$. Déduire de 1) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^d$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a $\|\chi_\gamma V\varphi\|^2_{L^2} \leq \varepsilon(\|\Delta\varphi\|^2_{L^2(C_\gamma)} + \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(C_\gamma)}) + C\|\varphi\|^2_{L^2(C_\gamma)}$ (où $C'_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^d; |x-\gamma|_1 \leq 1\}$).
c) En déduire que, si $V \in L^p_{\text{unif,loc}}(\mathbb{R}^d)$ (p vérifiant les conditions du a), alors V est $-\Delta$-borné de borne relative 0.
d) Montrer que $H = -\Delta + V$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^d)$.
Exercice 5. *Estimée de Combes-Thomas*
Soit $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. On définit $H = -\Delta + V$.
1) Montrer qu'il existe $C > 0$ indépendante de V et de $z \notin \sigma(H)$ telle que

$$\|\nabla(z-H)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C\left(\frac{|z| + 1 + \|V\|_\infty}{d(z,\sigma(H))}\right) = \frac{C}{\eta(z)}.$$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^d$. On définit $H_a = e^{a\cdot x}He^{-a\cdot x}$. Calculer H_a et en déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $z \notin \sigma(H)$, si $|a| < \varepsilon\eta(z)$ alors $z - H_a$ est inversible et qu'il existe $C > 0$ tel que $\|(z-H_a)^{-1}\| \leq C/\eta(z)$.
3) On note χ_γ la fonction indicatrice du cube centré en γ de coté 1. En remarquant que $\chi_\gamma(z-H)^{-1}\chi_\beta = (e^{-a\cdot x}\chi_\gamma)(z-H_a)^{-1}(e^{a\cdot x}\chi_\beta)$, montrer que, si $|a| < \varepsilon\eta(z)$, alors

$$\|\chi_\gamma(z-H)^{-1}\chi_\beta\| \leq \frac{C}{\eta(z)}e^{-a\cdot(\gamma-\beta)}.$$

4) En déduire que, si $z \notin \sigma(H)$, alors

$$\|\chi_\gamma(z-H)^{-1}\chi_\beta\| \leq \frac{C}{\eta(z)}e^{-\varepsilon\eta(z)|\gamma-\beta|}.$$

5) Application : soit W un potentiel réel borné à support compact. Montrer que, si λ est une valeur propre discrète de $H + W$ dans l'ensemble résolvant de H, alors les fonctions propres associées à λ sont exponentiellement décroissantes.

Exercice 6. *Inégalité de Kato et étude de l'auto-adjonction de* $-\Delta + V$ *pour* V *positif*

1) On se propose de démontrer l'inégalité de Kato : soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\Delta u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (ici Δu est entendu au sens des distributions). On définit $\text{sgn}u(x) = 0$ si $u(x) = 0$ et $\overline{u(x)}/|u(x)|$ si $u(x) \neq 0$. Alors, au sens des distributions, on a $\Delta|u| \geq \text{Re}[\text{sgn}(u)\Delta u]$.

a) Supposons $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $u_\varepsilon = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2}$. Montrer que $u_\varepsilon \Delta u_\varepsilon \geq \text{Re}(\overline{u}\Delta u)$.

On définit $\text{sgn}_\varepsilon(u) = \overline{u}/u_\varepsilon$.

b) On fixe $\varepsilon > 0$. Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\Delta u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, et φ_n une approximation de l'identité. On pose $u_n = u * \varphi_n$. Montrer que, quitte à extraire une sous-suite, on a $u_n \to u$, $\Delta u_n \to \Delta u$ dans L^1_{loc} et $\text{sgn}(u_{n,\varepsilon}) \to \text{sgn}(u_\varepsilon)$ p.p.

c) En déduire que $\Delta u_\varepsilon \geq \text{Re}[\text{sgn}(u_\varepsilon)\Delta u]$.

d) Conclure en prenant la limite $\varepsilon \to 0$.

2) Application : soit $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ tel que $V \geq 0$. On veut montrer que $H = -\Delta + V$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

a) Soit $u \in \text{Ker}(H^* + 1)$. Montrer que u satisfait $(-\Delta + V + 1)u = 0$ au sens des distributions. En déduire que u et Δu sont dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

b) En utilisant l'inégalité de Kato, montrer que $\Delta|u| \geq 0$.

c) Soit φ_n une approximation de l'identité. On pose $u_n = |u| * \varphi_n$. Constater que u_n est dans $H^2(\mathbb{R}^d)$, et que u_n et Δu_n sont positives. En déduire que $u_n = 0$.

d) Conclure.

Exercice 7. *Étude du spectre* $-\Delta + V$ *pour* V *tendant vers* $+\infty$ *à l'infini*

Soit $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un potentiel continu tel que $V(x) \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$.

1) Montrer que $H = -\Delta + V$ est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On pourra se servir du résultat de l'exercice précédent.

2) Montrer que, pour tout $A \geq 0$, il existe V_A un potentiel continu à support compact tel que

$$-\Delta + V \geq -\Delta + V_A + A.$$

3) En déduire que la suite des valeurs $(\lambda_n(H))_n$ définie par les formules du minimax tend vers $+\infty$ et que H n'a que du spectre discret.

Références

[1] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential equations. I*, volume 256 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer Verlag, 1990.