Licence 3 - Mathématiques
LM360 Amphi B
Épreuve du 18/10/2011 de 13h45 à 15h45

Ni les documents, ni les calculatrices ne sont autorisés.
Toutes les réponses devront être dûment justifiées.

Questions de cours :

Q1 : Donner la définition d'un sous-ensemble compact d'un espace métrique.
Q2 : Montrer qu'un produit fini de compacts est compact.
Q3 : Montrer que l'image d'un connexe par une fonction continue est connexe.

Exercices :

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soient K_1 et K_2 deux compacts de (X, d). Montrer que $K_1 \cup K_2$ est compact.
2. Plus généralement, soient $(K_i)_{1\leq i\leq n}$ compacts de (X, d). Que peut on dire de $\cup_{i=1}^{n} K_i$? Justifier votre réponse.

Exercice 2. Soit $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels.
Soit X l'ensemble des suites $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes.
Pour $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans X, on pose

$$d_a(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot \frac{|x(n) - y(n)|}{1 + |x(n) - y(n)|}.$$

1. Montrer que l'application d_a définie ci-dessus est une distance sur X si et seulement si $\forall n \geq 0,\ a(n) > 0$ et $\sum_{n\geq 0} a(n) < +\infty$.
2. Dans tout ce qui suit, on suppose que d_a définit une distance sur X.
Montrer que X est borné pour d_a.
3. Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Démontrer que si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{p\to\infty} x_p(n) = x(n)$$
alors
$$\lim_{p\to\infty} d_a(x_p, x) = 0.$$
4. Réciproquement, démontrer que si $\lim_{p\to\infty} d_a(x_p, x) = 0$ alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{p\to\infty} x_p(n) = x(n).$$
5. Démontrer que l'espace métrique (X, d_a) est complet.
6. Soient $a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b(n))_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes vérifiant chacune les conditions de la questions 1. Montrer que d_a et d_b sont uniformément équivalentes.
7. **Question hors barème.**
Soit $C = \{x \in X;\ \forall n \geq 0,\ x(n) \in [0, 1]\}$. Montrer que C est compact dans (X, d_a).