Licence 3 - Mathématiques
LM360 Amphi B
Corrigé de l'épreuve du 18/10/2011

Questions de cours :

Q1 : Voir la définition 4.1.1 du polycopié de J.-Y. Chemin.

Q2 : Voir la proposition 4.1.6 du polycopié de J.-Y. Chemin.

Q3 : Voir le théorème 5.1.2 du polycopié de J.-Y. Chemin.

Exercices :

Exercice 1. 1. On propose deux démonstrations :

Par les suites. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $K_1 \cup K_2$. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $\mathbb{N}_i = \{n \in \mathbb{N};\ x_n \in K_i\}$. Par définition, on a $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$. Donc l'un au moins des deux ensembles $\mathbb{N}_1$ ou $\mathbb{N}_2$ est infini. Ainsi, il existe une sous-suite de x, disons, $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ (où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante), pour laquelle il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que, pour tout $n \geq 0$, $x_{\varphi(n)} \in K_i$. Comme K_i est compact, il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que $(x_{\varphi(\psi(n))})$ converge dans K_i donc dans $K_1 \cup K_2$.
On a donc montré que, de toute suite dans $K_1 \cup K_2$ on peut extraire une sous-suite convergent dans $K_1 \cup K_2$, soit encore, que $K_1 \cup K_2$ est compact.

Par les recouvrements ouverts. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $K_1 \cup K_2$ par des ouverts i.e.

$$K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Donc, pour $j \in \{1, 2\}$, $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de K_j par des ouverts. Comme K_j est compact, il existe I_j une partie finie de I, tel que $(U_i)_{i\in I_j}$ est un recouvrement de K_j. Ainsi $(U_i)_{i\in I_1\cup I_2}$ est un recouvrement de $K_1 \cup K_2$ qui est fini et extrait de $(U_i)_{i\in I}$.
On a montré que, de tout recouvrement ouvert de $K_1 \cup K_2$ on peut extraire un sous-recouvrement fini, soit encore, que $K_1 \cup K_2$ est compact.

2. On sait alors que $\cup_{j=1}^n K_j$ est compact. En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $\cup_{j=1}^n K_j$ par des ouverts i.e.

$$\cup_{j=1}^n K_j \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Donc, pour $j \in \{1, \cdots, n\}$, $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de K_j par des ouverts. Comme K_j est compact, il existe I_j une partie finie de I, tel que $(U_i)_{i\in I_j}$ est un recouvrement de K_j. Ainsi $(U_i)_{i\in I_1\cup\cdots\cup I_n}$ est un recouvrement de $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ qui est fini et extrait de $(U_i)_{i\in I}$.

On remarquera que ces démonstrations reposent sur le fait qu'une réunion finie d'ensemble finis est finie.

Exercice 2. 1. Supposons que d_a est une distance.

Pour $p \geq 0$, considérons la suite δ_p définie par $\delta_p(n) = 0$ si $n \neq p$ et $\delta_p(p) = 1$. Alors $d_a(\delta_p, 0) = a(p)/2$. Donc, comme $\delta_p \neq 0$, il faut que $a(p) > 0$.

Considérons la suite $\overline{1} = (1)_{n\geq 0}$ i.e. la suite constante dont le terme général est égal à 1. On a

$$\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} a(n) = d_a(\overline{1}, 0) < +\infty.$$

On voit donc que les deux conditions de la question 1 sont nécessaires.

Supposons maintenant que celles-ci sont satisfaites. Alors d_a définit clairement une application de $X \times X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot \frac{|x(n) - y(n)|}{1 + |x(n) - y(n)|} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a(n) < +\infty.$$

Vérifions que c'est une distance. Clairement $d_a(x, y) = d_a(y, x)$. Comme, pour tout n, $a(n) > 0$, on a

$$0 = d_a(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot \frac{|x(n) - y(n)|}{1 + |x(n) - y(n)|} \Longrightarrow \forall n \geq 0,\ x(n) = y(n).$$

Pour démontrer l'inégalité triangulaire, il suffit de montrer que si $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, on a

$$\frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \leq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|}.$$

Il suffit donc de montrer que, si (a, b, c) sont positifs ou nuls tels que $a \leq b + c$ alors

$$\frac{a}{1 + a} \leq \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1 + x} = 1 - \dfrac{1}{1 + x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, il suffit de montrer que, pour (b, c) positifs ou nuls, on a

$$\frac{b + c}{1 + b + c} \leq \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c}.$$

On peut supposer que b est non nul car sinon l'inégalité est clairement vraie. On calcule donc

$$\begin{aligned}\frac{b + c}{1 + b + c} &= \frac{b}{1 + b} \cdot \frac{1 + c/b}{1 + c/(1 + b)} \leq \frac{b}{1 + b} \cdot \left(1 + \frac{c(1/b - 1/(1 + b))}{1 + c/(1 + b)}\right) \\ &= \frac{b}{1 + b} + \frac{1}{1 + b} \cdot \frac{c/(1 + b)}{1 + c/(1 + b)} \leq \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c}.\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière inégalité, on a utilisé le fait que $x \mapsto \dfrac{x}{1 + x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, que $c/(1 + b) \leq c$ et que $1 + b \geq 1$.

2. Soit $S_a := \sum_{n\geq 0} a(n) > 0$. Pour $x \in X$, on a
$$d_a(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\cdot \frac{|x(n)|}{1+|x(n)|} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a(n) = S_a.$$
Donc, $X = B_{d_a}(0, S_a+1)$ est borné.
3. Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{p\to\infty} x_p(n) = x(n). \tag{1}$$
Comme $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{x}{1+x} \leq 1$, on sait que, pour tout $m \geq 0$ et $(x,y) \in X^2$, on a
$$d_a(x,y) \leq \sum_{n=0}^{m} a(n)\cdot \frac{|x(n)-y(n)|}{1+|x(n)-y(n)|} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a(n).$$
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{n\geq 0} a(n) < +\infty$, il existe $n_0 > 0$ tel que $\sum_{n\geq n_0+1} a(n) < \varepsilon/2$. D'après (1), pour $n \in \{0, \cdots, n_0\}$, $\exists p_n \geq 0$ tel que $\sup_{p\geq p_n} |x_p(n) - x(n)| \leq \varepsilon/(2S_a)$. Donc, si $p \geq \max(p_0, \cdots, p_{n_0})$, on a
$$d_a(x_p,x) \leq \sum_{n=0}^{n_0} a(n)\cdot \frac{|x_p(n)-x(n)|}{1+|x_p(n)-x(n)|} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a(n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=0}^{n_0} a(n)\frac{\varepsilon}{2S_a} \leq \varepsilon$$
On a donc montré que $d_a(x_p,x) \to 0$ quand $p \to +\infty$.
4. Ceci est clair car $\forall n$, $a(n) > 0$, car
$$\frac{|x(n)-y(n)|}{1+|x(n)-y(n)|} \leq \frac{d_a(x,y)}{a(n)} \tag{2}$$
et car $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ réalise une bijection bicontinue croissante de $]-1/2, 1/2[$ à valeurs dans $]-1, 1/3[$ qui envoie 0 sur lui même.
5. Soit $(x_p)_{p\geq 0}$ une suite de Cauchy dans (X, d_a). Par (2), on sait que, pour tout $n \geq 0$, la suite $(x_p(n))_{p\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc converge vers une limite que nous appellerons $x(n)$. On définit $x = (x(n))_{n\geq 0}$.
La question 3 nous dit alors que $d_a(x_p,x) \to 0$ quand $p \to +\infty$ soit encore que $x_p \to x$ dans (X, d_a). On a donc montré que (X, d_a) est complet.
6. Il suffit de montrer que l'identité est uniformément continue de (X, d_a) dans (X, d_b) puisque la continuité de l'identité de (X, d_b) dans (X, d_a) sera alors obtenue en intervertissant les rôles de a et b.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour $\sum_{n\geq n_0+1} b(n) \leq \varepsilon/2$. Soit $q_{n_0} = \min_{0\leq n\leq n_0} \frac{a(n)}{b(n)}$.
Donc, si $(x,y) \in X^2$ sont tels que $d_a(x,y) \leq \varepsilon q_{n_0}/2$ alors
$$d_b(x,y) \leq \sum_{n=0}^{n_0} b(n)\cdot \frac{|x(n)-y(n)|}{1+|x(n)-y(n)|} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{q_{n_0}} \sum_{n=0}^{n_0} a(n)\cdot \frac{|x(n)-y(n)|}{1+|x(n)-y(n)|} \leq \varepsilon.$$
Ceci montre que $\mathrm{Id}\colon (X, d_a) \to (X, d_b)$ est uniformément continue.

7. **Question hors barème.**
Soit $(x_p)_{p\geq 0}$ une suite d'éléments de C.
Comme, pour $p \geq 0$, $x_p(0) \in [0,1]$ et que $[0,1]$ est compact dans $\mathbb{C}$, il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi_0(p)}(0))_{p\geq 0}$ converge dans $[0,1]$ vers, disons $x(0)$.
Soit $n \geq 1$ et supposons maintenant construites $\varphi_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pour $j \in \{0, \cdots, n\}$, toutes strictement croissantes telles que, pour $j \in \{0, \cdots, n\}$, $x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_j(p)}(j)$ converge vers, disons, $x(j)$ dans $[0,1]$.
Considérons alors la suite $(x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(p)}(n+1))_{p\geq 0}$. Elle est à valeurs dans $[0,1]$; par compacité de cet intervalle, il existe $\varphi_{n+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(p))}(n+1))_{p\geq 0}$ converge vers une limite dans $[0,1]$ que nous appellerons $x(n+1)$.
On montre ainsi par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, il existe $\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $x(n) \in [0,1]$ telles que $(x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(p)}(n))_{p\geq 0}$ converge vers $x(n)$.
Pour $p \geq 0$, on définit $\psi(p) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(p)$. Comme toutes les $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ sont strictement croissantes, ψ l'est aussi. En effet, pour $n \geq 0$, on a
$$\psi(n+1) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1}(n+1) \geq \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n+1) > \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) = \psi(n).$$
On voit alors que, pour tout $n \geq 0$, $(x_{\psi(p)}(n))_{p\geq 0}$ converge vers $x(n)$. En effet $(x_{\psi(p)}(n))_{p\geq 0}$ est une sous-suite de $(x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(p)}(n))_{p\geq 0}$ qui converge vers $x(n)$.
La question 3 montre alors que $(x_{\psi(p)})_{p\geq 0}$ converge vers $x := (x(n))_{n\geq 0}$ dans (X, d_a).