Formes différentielles en dimension 1, 2 et 3

Formulaire

Frédéric Paugam

3 janvier 2015

1 Motivations

Définition intuitive : Les formes différentielles sont les objets naturels qu'on peut intégrer sur des domaines non plats (courbes, surfaces, volumes).

But de leur introduction : Développer un système de notation permettant au calcul vectoriel et intégral d'être invariant par changement de repère (formule du changement de variable automatique). Cette invariance par rapport au repère est fondamentale dans la formulation mathématique des lois de la physique.

Intérêt : Simplifier les calculs, et donner une formule d'intégration (formule de stokes) générale

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega,$$

qui implique toutes les formules intégrales utilisées en mécanique des fluides et en électromagnétisme et généralise la formule classique

$$\int_{[a,b]} df = \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = \int_{\{b+,a-\}} f = \int_{\partial[a,b]} f$$

au cas d'une surface $D = S$ bordée par une courbe $\partial D = C$, et à celui d'un volume $D = V$ bordé par une surface $\partial D = S$.

Précautions : Toutes les fonctions utilisées dans ce texte sont supposées deux fois continument différentiables sur leur domaine de définition, i.e., de dérivées partielles secondes continues.

2 Formes différentielles en dimensions 1, 2 et 3

On définit maintenant les formes différentielles de degré $k = 0, 1, 2, 3$, qui sont des objets qu'on va intégrer sur des domaines de dimension k.

Définition 1.

1. *Une* 0*-forme différentielle* $\omega \in \Omega^0$ *est une fonction* f *des coordonnées.*
2. *Une* 1*-forme différentielle* $\omega \in \Omega^1$ *est une expression de la forme*

$$\begin{array}{ll} \omega = f dx & \textit{(sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \omega = f dx + g dy & \textit{(sur } \mathbb{R}^2\textit{)} \\ \omega = f dx + g dy + h dz & \textit{(sur } \mathbb{R}^3\textit{)} \end{array}$$

   avec f*,* g *et* h *des fonctions des coordonnées.*
3. *Une* 2*-forme différentielle* $\omega \in \Omega^2$ *est une expression de la forme*

$$\begin{array}{ll} \omega = f dx \wedge dy & \textit{(sur } \mathbb{R}^2\textit{)} \\ \omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy & \textit{(sur } \mathbb{R}^3\textit{)} \end{array}$$

   avec f*,* g *et* h *des fonctions des coordonnées.*
4. *Une* 3*-forme différentielle* $\omega \in \Omega^3$ *sur* $\mathbb{R}^3$ *est une expression de la forme*

$$\omega = f dx \wedge dy \wedge dz.$$

Les règles du calcul avec les formes différentielles sont les suivantes :

$$\begin{array}{lcl} du \wedge dv & = & -dv \wedge du \text{ pour } u \text{ et } v \text{ des coordonnées,} \\ du \wedge (dv \wedge dw) & = & (du \wedge dv) \wedge dw, \\ f \wedge \omega & = & f.\omega, \\ (\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta & = & \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta. \end{array}$$

De la première règle, on déduit

$$du \wedge du = 0.$$

Définition 2. *On définit la différentielle extérieure* $d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ *par les règles suivantes :*

1. *La différentielle* $df \in \Omega^1$ *d'une* 0*-forme (fonction)* f *est la* 1*-forme différentielle définie par les dérivées partielles de la fonction :*

$$\begin{array}{ll} df = f' dx & \textit{(sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy & \textit{(sur } \mathbb{R}^2\textit{)} \\ df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz & \textit{(sur } \mathbb{R}^3\textit{)} \end{array}$$

2. *Si f est une fonction et ω est une forme différentielle produit extérieur des formes coordonnées dx, dy, dz (par exemple $\omega = dx$, $\omega = dz \wedge dx$ ou $\omega = dy \wedge dx \wedge dz$) alors*
$$d(f \wedge \omega) = df \wedge \omega.$$
3. *La différentielle est additive : $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.*

Remarque 1. *On peut montrer à partir des règles de calculs de la définition les deux propriétés suivantes :*

1. *La différentielle du produit d'une fonction $f \in \Omega^0$ et d'une k-forme $\omega \in \Omega^k$ est donnée par*
$$d(f \wedge \omega) = df \wedge \omega + f \wedge d\omega.$$
2. *Plus généralement, la différentielle du produit de $\omega \in \Omega^k$ et $\eta \in \Omega^l$ vérifie la règle de dérivation graduée*
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$
3. $d(d\omega) = 0$.

Par exemple, sur $\mathbb{R}$, si $\omega = f dx$ est une 1-forme différentielle, sa différentielle extérieure est donnée par
$$d\omega = df \wedge dx + f \wedge d^2x = f'(x)dx \wedge dx + 0 = 0.$$
De même sur $\mathbb{R}^2$, si $\omega = f dx + g dy$ est une 1-forme différentielle, sa différentielle extérieure est donnée par
$$\begin{array}{rcc} d\omega & = & df \wedge dx + dg \wedge dy \\ & = & (\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy) \wedge dx + (\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy) \wedge dy \\ & = & \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy \\ & = & (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dx \wedge dy. \end{array}$$
De même sur $\mathbb{R}^3$, si $\omega = f dx + g dy + h dz$ est une 1-forme différentielle, sa différentielle extérieure est donnée par
$$\begin{array}{rcl} d\omega & = & df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\ & = & (\frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dx) + (\frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz \wedge dy) + (\frac{\partial h}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial y}dy \wedge dz) \\ & = & (\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dx \wedge dy \end{array}$$

Définition 3. *Une forme différentielle ω est dite* fermée *si $d\omega = 0$ et* exacte *si elle admet une primitive, i.e., si il existe η telle que $d\eta = \omega$.*

Comme $d(d\omega) = 0$, toute forme différentielle exacte est fermée. On a aussi la réciproque suivante sur des domaines sans trous.

Théorème 1. *Sur une domaine D “sans trou” de $\mathbb{R}^n$, une forme différentielle est exacte si et seulement si elle est fermée.*

3 Champs de vecteurs et formes différentielles

On montre maintenant que du point de vue des formes différentielles, les opérateurs classiques sur les champs de vecteurs (gradiant, rotationnel, divergence) s'identifient à la différentielle extérieure.
On note $\mathcal{V}$ l'espace des champs de vecteurs, qui sont des fonctions $\vec{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pour $n = 2, 3$, qu'on peut écrire en coordonnées

$$\begin{array}{lcll} \vec{V}(x,y) & = & (f(x,y), g(x,y)) & (\text{sur } \mathbb{R}^2) \\ \vec{V}(x,y,z) & = & (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z)) & (\text{sur } \mathbb{R}^3). \end{array}$$

On note $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions f des coordonnées.
On va symboliser le lien entre les opérateurs du calcul vectoriel et la différentielle extérieure par des diagrammes d'applications et d'équivalences. Ce lien permet de retrouver toutes les formules différentielles et intégrales pour ces opérateurs.
Sur $\mathbb{R}^2$, si $\vec{V} = (f, g)$ est un champ de vecteurs, on note

$$\omega_{\vec{V}} = f dx + g dy.$$

On a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \vec{V} \arrow[d, equal] & \\
\mathcal{F} \arrow[r, "\overrightarrow{\text{grad}}"] \arrow[d, equal] & \overset{(f,g)}{\mathcal{V}} \arrow[r, "\text{rot}"] \arrow[d, equal] & \overset{f}{\mathcal{F}} \arrow[d, equal] \\
\Omega^0 \arrow[r, "d"] & \underset{fdx+gdy}{\Omega^1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \underset{fdx\wedge dy}{\Omega^2} \\
 & \omega_{\vec{V}} &
\end{tikzcd}$$

On a déjà vu par un calcul dans la section précédente que

$$d(f dx + g dy) = \text{rot}(\vec{V})\, dx \wedge dy.$$

Sur $\mathbb{R}^3$, si $\vec{V} = (f, g, h)$ est un vecteur, on pose

$$\omega_{\vec{V}} := f dx + g dy + h dz$$

et (attention, l'ordre des formes de base est différent de celui utilisé avant)

$$* \omega_{\vec{V}} := f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy.$$

Remarquons que la 2-forme $* \omega_{\vec{V}}$ est obtenue à partir de la 1-forme $\omega_{\vec{V}}$ par le remplacement suivant, appelé opérateur étoile de Hodge :

$$\begin{array}{lcl} dx & \longmapsto & * dx := dy \wedge dz \\ dy & \longmapsto & * dy := dz \wedge dx \\ dz & \longmapsto & * dz := dx \wedge dy \end{array}$$

Il existe une autre manière d'associer une 2-forme à un champ de vecteur : si on note la 3-forme volume $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$, on peut associer à $\vec{V} = (f, g, h)$ une 2-forme $\iota_{\vec{V}}\eta$ appelée produit intérieur de $\vec{V}$ avec η. Le produit intérieur est défini très simplement de la manière suivante pour $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$: on pose

$$\iota_{\vec{V}}(du) = V_u \text{ pour } u = x, y, z,$$

et

$$\iota_{\vec{V}}(du \wedge \omega) = \iota_{\vec{V}}(du) \wedge \omega - du \wedge \iota_{\vec{V}}\,\omega.$$

Attention : On utilise la règle de dérivation de Leibniz par rapport au produit extérieur, mais avec un signe négatif.
On peut ainsi calculer pour $\eta = dx \wedge dy \wedge dz$, la 2-forme associée au champ de vecteur $V = (f, g, h)$ pour obtenir

$$\begin{array}{rcl}
\iota_{\vec{V}}(dx \wedge dy \wedge dz) & = & \iota_{\vec{V}}(dx) \wedge dy \wedge dz - dx \wedge \iota_{\vec{V}}(dy \wedge dz) \\
 & = & f dy \wedge dz - dx \wedge [\iota_{\vec{V}}(dy) \wedge dz - dy \wedge \iota_{\vec{V}}(dz)] \\
 & = & f dy \wedge dz - dx \wedge g \wedge dz + dx \wedge dy \wedge h \\
 & = & f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy
\end{array}$$

ce qui permet d'obtenir l'identification

$$\iota_{\vec{V}}(dx \wedge dy \wedge dz) = *\omega_{\vec{V}}.$$

L'avantage de l'utilisation du produit intérieur est qu'il se généralise aux formes différentielles de degré quelconque et en dimension quelconque. Ceci permet d'obtenir une version vectorielle de la formule de Stokes en dimension quelconque (utile en physique).
On a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \vec{V} \arrow[d, equal] & \vec{V} \arrow[d, equal] & \\
\mathcal{F} \arrow[r, "\overrightarrow{\mathrm{grad}}"] \arrow[d, equal] & \overset{(f,g,h)}{\mathcal{V}} \arrow[r, "\overrightarrow{\mathrm{rot}}"] \arrow[d, equal] & \overset{(f,g,h)}{\mathcal{V}} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, equal] & \overset{f}{\mathcal{F}} \arrow[d, equal] \\
\Omega^0 \arrow[r, "d"] & \underset{fdx+gdy+hdz}{\Omega^1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \underset{fdy\wedge dz+gdz\wedge dx+hdx\wedge dy}{\Omega^2} \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \underset{fdx\wedge dy\wedge dz}{\Omega^3} \\
 & \omega_{\vec{V}} & *\,\omega_{\vec{V}} &
\end{tikzcd}$$

Vérifions que la divergence en dimension 3 s'identifie à la différentielle en utilisant les règles $du \wedge du = 0$ et $du \wedge dv = -dv \wedge du$ pour annuler des termes. On a

$$\begin{array}{rcl} d(*\,\omega_{\vec{V}}) & = & d(f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy) \\ & = & df \wedge dy \wedge dz + dg \wedge dz \wedge dx + dh \wedge dx \wedge dy \\ & = & \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial h}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ & = & (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}) dx \wedge dy \wedge dz \\ & = & \mathrm{div}(\vec{V})\, dx \wedge dy \wedge dz \end{array}$$

Vérifions de même que le rotationnel en dimension 3 s'identifie à la différentielle. On a

$$\begin{array}{rcl} d(\omega_{\vec{V}}) & = & d(f dx + g dy + h dz) \\ & = & df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\ & = & (\frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx) + (\frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge dy) + (\frac{\partial h}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial y} dy \wedge dz) \\ & = & (\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}) dy \wedge dz + (\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}) dz \wedge dx + (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) dx \wedge dy \\ & = & *\,\omega_{\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V})} \end{array}$$

La règle de calcul $d^2 = 0$ implique les règles

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \circ \overrightarrow{\mathrm{grad}} = 0 \;\text{ et }\; \mathrm{div} \circ \overrightarrow{\mathrm{rot}} = 0.$$

On a en fait le résultat plus fin suivant.

Proposition 1. *Soit ω une forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$. On a l'équivalence*

$$d\omega = 0 \iff \exists \eta,\ \omega = d\eta.$$

En utilisant le dictionnaire avec le calcul vectoriel en dimension 2 et 3, on obtient les résultats suivants.

Corollaire 1. *Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. On a l'équivalence*

$$\mathrm{rot}(\vec{V}) = 0 \iff \exists f,\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \vec{V}.$$

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. On a les équivalences

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = 0 \iff \exists f,\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \vec{V}$$

et

$$\mathrm{div}(\vec{V}) = 0 \iff \exists \vec{W},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{W}) = \vec{V}.$$

4 Intégration des formes différentielles

On va négliger les questions d'orientation, en supposant que tous les domaines sont orientés positivement dans les conventions usuelles et que les paramétrisations respectent ces orientations.
On commence par définir l'intégrale des formes différentielles sur des pavés (produits d'intervalles). On suppose pour simplifier que les fonctions considérées sont continument différentiables, ce qui permet de définir l'intégrale "à la Fubini".

Définition 4. *L'*intégrale d'une 1-forme *fdt sur un intervalle $P_1 = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ est définie par*

$$\int_{P_1} fdt = \int_a^b f(t)dt.$$

*L'*intégrale d'une 2-forme *$fds \wedge dt$ sur un pavé $P_2 = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$ est définie par l'intégrale double*

$$\int_{P_2} fds \wedge dt := \int_c^d \left(\int_a^b f(s, t)ds \right) dt.$$

*L'*intégrale d'une 3-forme *$fds \wedge dt \wedge du$ sur un pavé $P_3 = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ de $\mathbb{R}^3$ est définie par l'intégrale triple*

$$\int_{P_3} fds \wedge dt \wedge du = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(s, t, u)ds \right) dt \right) du.$$

Remarque 2. *D'après les règles de calculs qu'on a fixé pour les formes différentielles, qui donnent $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, on aura par définition, en cas d'échange des variables d'intégration, par exemple*

$$\int_{P_2} fdt \wedge ds = -\int_{P_2} fds \wedge dt.$$

Définition 5. *Une* courbe paramétrée *C (dimension 1) dans $\mathbb{R}^2$ est une application*

$$\sigma = (x(t), y(t)) : P_1 = [a, b] \to \mathbb{R}^2.$$

Une surface paramétrée S (dimension 2) dans $\mathbb{R}^3$ est une application

$$\sigma = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) : P_2 = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3.$$

Un volume paramétré V (dimension 3) dans $\mathbb{R}^3$ est une application

$$\sigma = (x(s, t, u), y(s, t, u), z(s, t, u)) : P_3 = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \to \mathbb{R}^3.$$

On définit maintenant la notion de domaine paramétré orienté.

Définition 6. *Soit $\sigma : P_k \to D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine paramétré de dimension $1 \leq k \leq n \leq 3$. On dit que σ est* orienté *si le déterminant de la matrice de ses dérivée partielles est positif.*

Remarque 3. *On peut*

Exemple 1. *On donne ici plusieurs exemples de domaines paramétrés.*

1. *Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est la courbe paramétrée orientée de $\mathbb{R}^2$ donnée par*
$$\sigma = (\cos(t), \sin(t)) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2.$$
2. *On peut aussi décrire le cercle comme l'union de deux demi-cercles. Le demi-cercle supérieur a pour paramétrisation orientée*
$$\sigma = (-x, \sqrt{1-x^2}) : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,$$
et le cercle inférieur a pour paramétrisation orientée
$$\sigma = (x, -\sqrt{1-x^2}) : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2,$$
3. *Les paramétrisations du demi-cercle supérieur données par*
$$\sigma = (\sin(t), \cos(t)) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$$
et
$$\sigma = (x, \sqrt{1-x^2}) : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$$
ne sont pas orientées *car elles ne tournent pas dans le sens direct dans le plan.*
4. *La sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est la surface paramétrée orientée (coordonnées sphériques) de $\mathbb{R}^3$ donnée par*
$$\sigma = (\sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi)) : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3.$$
5. *Le cylindre plein d'équation $x^2 + y^2 \leq R$, $z \in [0, 1]$ est le volume paramétré orienté (coordonnées cylindriques) de $\mathbb{R}^3$ donné par*
$$\sigma = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3.$$
6. *La boule pleine d'équation $x^2 + y^2 + x^2 \leq R$ est le volume paramétré orienté (coordonnées sphériques) de $\mathbb{R}^3$ donné par*
$$\sigma = (r\sin(\varphi)\cos(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\varphi)) : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times [0, R] \to \mathbb{R}^3.$$

L'intégrale d'une forme différentielle sur un domaine paramétré général se ramène à celle de son tiré en arrière sur le pavé des paramètres.

Définition 7. *Notons $\sigma : P_k \to D$ une domaine paramétré orienté de dimension k choisi parmi un des exemples ci-dessus. L'intégrale d'une k-forme différentielle $\omega \in \Omega^k$ sur D est définie par*

$$\int_\Omega \omega := \int_{P_k} \sigma^*\omega.$$

Pour que la définition ci-dessus prenne sens, il faut définir le tiré en arrière $\sigma^*\omega$ d'une forme différentielle le long d'une paramétrisation $\sigma : P_k \to D$. Ceci peut se faire de la manière implicite suivante, qu'on va expliciter sur les exemples.

Définition 8. *Si $\sigma : P_k \to D$ est un domaine paramétré de dimension k, et $\omega \wedge \eta$ est un produit de formes différentielles, on pose*

$$\sigma^*(\omega \wedge \eta) = \sigma^*(\omega) \wedge \sigma^*(\eta).$$

Si $f \in \Omega^0$ est une fonction, on pose

$$\sigma^* f = f \circ \sigma.$$

On a aussi la règle

$$\sigma^* d\omega = d\sigma^*\omega.$$

Exemple 2. *Si C est une courbe paramétrée par $\sigma = (x(t), y(t))$ dans $\mathbb{R}^2$, on voit que*

$$\sigma^* dx = d\sigma^* x = d(x(t)) = x'(t)dt.$$

De même, on obtient

$$\sigma^* dy = y'(t)dt.$$

Si f est une fonction, on obtient

$$\sigma^* f(t) := f(x(t), y(t)).$$

Ceci donne par exemple

$$\sigma^*(f dx) = \sigma^*(f).\sigma^*(dx) = f(x(t), y(t))x'(t)dt.$$

Proposition 2. *L'intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle $\omega = fdx + gdy$ le long de la courbe orientée C est donnée par la formule*

$$\int_C \omega := \int_{[a,b]} \sigma^*\omega = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt + g(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

Moralement, lors d'un changement de variable $(x(s,t), y(s,t))$, l'expression $dx \wedge dy$ est multipliée par le déterminant du changement de variables dans la nouvelle coordonnée $ds \wedge dt$. La théorie des formes différentielles est entièrement développée autour de ce point crutial, qui permet de la rendre invariante par changement de coordonnées. On va redémontrer rapidement cette formule par un petit calcul.

Exemple 3. *Si S est une surface paramétrée par $\sigma = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, on peut calculer l'image inverse de la 2-forme $dx \wedge dy$ sur le pavé des paramètres (s,t) de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
\sigma^*(dx \wedge dy) &= \sigma^* dx \wedge \sigma^* dy \\
&= d\sigma^* x \wedge d\sigma^* y \\
&= dx(s,t) \wedge dy(s,t) \\
&= (\tfrac{\partial x}{\partial s} ds + \tfrac{\partial x}{\partial t} dt) \wedge (\tfrac{\partial x}{\partial s} ds + \tfrac{\partial x}{\partial t} dt) \\
&= \tfrac{D(x,y)}{D(s,t)} ds \wedge dt,
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

le déterminant jacobien de la paramétrisation.

Exemple 4. *Plus généralement, si $\omega = f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx$ est une 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$, et $\sigma = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ est une surface paramétrée, on obtient pour $\sigma^*\omega$ la forme différentielle sur le rectangle $[a,b] \times [c,d]$ donnée par*

$$\begin{aligned}
\sigma^*\omega &= \sigma^* f.\sigma^*(dx \wedge dy) + \sigma^* g.\sigma^*(dy \wedge dz) + \sigma^* h.\sigma^*(dz \wedge dx) \\
&= \left[f \circ \sigma \cdot \tfrac{D(x,y)}{D(s,t)} + g \circ \sigma \cdot \tfrac{D(y,z)}{D(s,t)} + g \circ \sigma \cdot \tfrac{D(y,z)}{D(s,t)} \right] ds \wedge dt.
\end{aligned}$$

Proposition 3. *L'intégrale d'une 2-forme différentielle*

$$\omega = f dx \wedge dy + g dy \wedge dz + h dz \wedge dx$$

sur une surface S orientée paramétrée par $\sigma : P_2 : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^3$ est donnée par la formule

$$\int_S \omega = \int_{P_2} \left[f \circ \sigma \frac{D(x,y)}{D(s,t)} + g \circ \sigma \frac{D(y,z)}{D(s,t)} + g \circ \sigma \frac{D(y,z)}{D(s,t)} \right] ds \wedge dt.$$

On démontre par un calcul très similaires aux précédents que si V est un volume orienté paramétré par $\sigma : [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to \mathbb{R}^3$, on a

$$\sigma^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} ds \wedge dt \wedge du,$$

avec

$$\frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}$$

le déterminant jacobien de la paramétrisation.

Proposition 4. *L'intégrale d'une 3-forme différentielle $\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$ sur un volume V paramétré par $\sigma : P_3 = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to \mathbb{R}^3$ est donnée par la formule*

$$\int_V \omega = \int_{P_3} f(s,t,u) \frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} ds \wedge dt \wedge du.$$

5 Formule de Stokes et applications

On admettra la formule de Stokes.

Théorème 2. *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k+1$ et de bord ∂D de dimension k. Soit $\omega \in \Omega^k$ une k-forme différentielle et $d\omega \in \Omega^{k+1}$ sa différentielle. On a alors l'égalité*

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

On retrouve facilement les formules d'intégration par partie du calcul vectoriel en utilisant les relations entre champs de vecteurs et formes différentielles explicitées dans la section 3.
Par exemple, si S est une surface de $\mathbb{R}^2$ bordée par une courbe C et $\vec{V}$ est un champ de vecteurs, de 1-forme associée $\omega_{\vec{V}} \in \Omega^1$, on a montré que $d(\omega_{\vec{V}}) = \mathrm{rot}(\vec{V})\, dx \wedge dy$ donc

$$\int_C \omega_{\vec{V}} = \int_S \mathrm{rot}(\vec{V})\, dx \wedge dy.$$

De même, si S est une surface de $\mathbb{R}^3$ bordée par une courbe C et $\vec{V}$ est un champ de vecteurs, de 1-forme associée $\omega_{\vec{V}} \in \Omega^1$, on a montré que $d(\omega_{\vec{V}}) = *\,\omega_{\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V})} \in \Omega^2$ (2-forme associée au champ de vecteur rotationnel de $\vec{V}$), donc on a

$$\int_C \omega_{\vec{V}} = \int_S *\,\omega_{\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V})},$$

Enfin, si V est un volume bordé par une surface S dans $\mathbb{R}^3$ et $\vec{V}$ est un champ de vecteurs, de 2-forme associée $*\,\omega_{\vec{V}}$, on a montré que $d(*\,\omega_{\vec{V}}) = \mathrm{div}(\vec{V})\, dx \wedge dy \wedge dz$, donc on a

$$\int_S *\,\omega_{\vec{V}} = \int_V \mathrm{div}(\vec{V})\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Puisqu'on a l'égalité

$$*\omega_{\vec{V}} = \iota_{\vec{V}}(dx \wedge dy \wedge dz),$$

on peut aussi écrire la formule ci-dessus sous la forme

$$\int_S \iota_{\vec{V}}(dx \wedge dy \wedge dz) = \int_V \mathrm{div}(\vec{V})\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Cette formule a l'avantage de se généraliser aux variétés de dimension supérieure.