Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
20 nov 2000, 14-17 h, Patio 16-25 salle J3

On identifie $\mathbb{R}^2$ (coordonnées x, y) et $\mathbb{C}$ ($z = x + iy$).

Première partie.

1. Pour quelles valeurs de l'entier n la fonction $\frac{1}{z^n}$ est-elle localement intégrable?

2. On note $I_{n,\varepsilon}$ l'intégrale :

$$I_{n,\varepsilon}(\varphi) = \iint_{\varepsilon<|z|<1} \frac{1}{z^n}\varphi(x,y)dxdy$$

Montrer que $I_{n,\varepsilon}(\varphi)$ a une limite pour $\varepsilon \to 0$ si φ est une fonction continue, $\varphi = O(|z|^{n-1})$ au voisinage de 0.

3. Soit $\varphi = z^p\overline{z}^q$ $(p + q < n)$. Montrer que $I_{n,\varepsilon}(\varphi)$ a une limite pour $\varepsilon \to 0$; calculer cette limite si $p + q < n$.

4. Pour $\varphi \in C_0^\infty$ on pose $\langle E_n, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\varepsilon<|z|} \frac{\varphi(x,y)}{z^n}dxdy$: montrer que la limite existe. Montrer que la fonctionnelle E_n ainsi définie est une distribution.

5. On pose $N_k(\varphi) = \sup_{|\alpha|\leq k,(x,y)\in\mathbb{R}^2} |\partial^\alpha\varphi(x,y)| + \int |\varphi|$. Montrer que N_k est une norme continue sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour quelles valeurs de k E_n est-elle continue pour N_k ?

Deuxième partie.

On note $E = E_1$ la distribution $E = \frac{1}{z}$ (c'est une fonction localement intégrable).

6. On note $A_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la similitude complexe $z \to \lambda z$. Comparer E et $E(\lambda z)$

7. On pose $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$. Calculer la distribution $\frac{\partial E}{\partial z}$ en fonction de E_2

8. On pose $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. Calculer la distribution $\frac{\partial E}{\partial \overline{z}}$.

9. Soit f une distribution à support compact. Montrer que le produit de convolution $E * f$ est de classe C^m si f l'est. Montrer qu'on a toujours, au sens des distributions, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(E * f) = Cf$ où C est une constante qu'on calculera.

10. Montrer que E_n est une distribution tempérée (pour tout n). Calculer la transformée de Fourier $\widehat{E}$.

Indications : penser à passer en coordonnées polaires , intégrer par parties , écrire des développements limités comme polynômes de $z, \overline{z}$ plutôt que x, y . Comparer $\widehat{E}$ et $\widehat{E}(\lambda z)$; on rappelle que si T est une distribution, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une transformation linéaire, $T_A = T(Ax)$ est la distribution telle que $\langle T_A, \varphi\rangle = \frac{1}{|detA|}\langle T, \varphi(A^{-1}x)\rangle$).

Corrigé de l'épreuve du 20 nov 2000

I.1. Sur $\mathbb{R}^2$ la fonction z^{-n} est localement intégrable pour $n < 2$.

2. En particulier si $\varphi = O(|z|^{n-1}$, φz^{-n} est intégrable dans le disque $|z| \leq 1$, d'où

$$\iint_{\varepsilon<|z|<1} z^{-n}\varphi \;\rightarrow\; \iint_{|z|<1} z^{-n}\varphi \;\text{ pour } \varepsilon \rightarrow 0$$

3. Si $\varphi = z^p\overline{z}^q$ on a en coordonnées polaires:

$$I_{n,\varepsilon}(\varphi) = \int_\varepsilon^1 r^{p+q-n+1}\int_0^{2\pi} e^{(p-q-n)i\theta}d\theta$$

La deuxième intégrale est nulle si $p+q-n \neq 0$, en particulier si $p+q<n$ $(p,q \geq 0)$, et alors aussi la limite.

4. Écrivons $\varphi = P_{n-1} + r_{n-1}$ où $P_{n-1} = \displaystyle\sum_{p+q<n-1} \partial_z^p\partial_{\overline{z}}^q\varphi(0)\frac{z^p\overline{z}^q}{p!q!}$ et r_{n-1} est le reste à l'ordre $n-1$ de la formule de Taylor.
On a $I_{n,\varepsilon}(P_{n-1}) = 0$ d'après 2), donc l'intégrale proposée, qui est égale à $I_{n,\varepsilon}(r_{n-1}) + \iint_{|z|>1} z^{-n}\varphi$ a une limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ d'après 3). La limite $\langle E_n, \varphi\rangle$ dépend linéairement, et aussi (forcément) continument, de φ: c'est une distribution.

5. N_k est une norme: c'est évidemment sous additif et homogène (semi-norme), et $N_k(\varphi) = 0$ implique en particulier $\sup\varphi = 0$ donc $\varphi = 0$.
On a $|r_{n-1}| \leq cste\ N_{n-1}(\varphi)$ et $|\int_{|z|>1} z^{-n}\varphi \leq \int|\varphi|$ donc

$$|\langle E_n, \varphi\rangle| = |\int_{|z|<1} z^{-n}r_{n-1} + |\int_{|z|>1} z^{-n}\varphi| \leq cste\ N_{n-1}(|ff)$$

de sorte que E_n est continue pour la norme N_k si $k \geq n-1$.
(Remarque: on peut montrer que E_n n'est pas continue pour la norme N_{n-2})

6. On a $E(\lambda z) = \frac{1}{\lambda}E(z)$ (c'est une fonction intégrable).
Plus géneralement on a $E_n = \lim\chi(\frac{z}{\varepsilon}z^{-n}$ où $\chi = 0$ si $|z| < 1$, $\chi = 1$si $|z| \geq 1$ (c'est une limite de fonctions intégrables). Alors $E_n(\lambda z) = lim\chi(\lambda z)(\lambda z)^{-n} = l^{-n}lim\chi(\lambda z)z^{-n} = \lambda^{-n}E_n$.

7. On a $\frac{\partial}{\partial z}E = -\frac{1}{z^2}$ et $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}E = 0$ en dehors de l'origine, mais il faut vérifier ce qui se passe à l'origine où E n'est pas une fonction dérivable: première méthode: on écrit

$$\langle\frac{\partial}{\partial z}E, \varphi\rangle = \langle E, \frac{\partial}{\partial z}\varphi\rangle$$

On écrit cette intégrale en coordonnées polaires, et on intègre par parties; on constate que le terme bord (intégrale sur le cercle $|z| = \varepsilon$ tend vers 0. Deuxième preuve: de toute façon la distribution $T = \frac{\partial}{\partial z}E + E_2$ est portée par l'origine (donc combinaisons de dérivées de δ). En outre elle est homogène de degré -2 et vérifie $T(\lambda z = \lambda^{-2}T$, donc $T = cste\delta$ ($\delta^{(\alpha)}$ est homogène de degré $-2-|\alpha|$) et finalement $T = 0$ (parce que $\delta(\lambda z) = |\lambda|^{-2}\delta(z)$ et $|\lambda|^{-2} \neq \lambda^{-2}$ si λ n'est pas réel.

9. Mêmes remarques et mêmes méthodes. Ici $T = \frac{\partial}{\partial\overline{z}}E$ est homogène de degré -2 et $T(\lambda z) = \frac{\overline{\lambda}}{\lambda}T$ (on a $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}A(\lambda z) = \frac{1}{\overline{\lambda}}(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}A)(\lambda z)$. Donc $T = c\delta$. On calcule c en testant contre une fonction test bien choisie, par exemple $\varphi = e^{-z\overline{z}}(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\varphi = z\varphi)$: on a

$$\langle\frac{\partial}{\partial\overline{z}}E, \varphi\rangle = -\langle E, z\varphi\rangle = \int\varphi = \pi$$

d'où $c = \pi$

10. E_n est une fonction bornée pour $|z| < 1$, donc c'est une distribution tempérée. On a $\frac{\partial}{\partial z}E = \pi\delta$ donc $\frac{1}{2}(i\xi + i.i\eta)\widehat{E} = \pi$ donc $\widehat{E} = -\frac{2i\pi}{zeta}$ $(\zeta = \xi + i\eta)$ (d'abord en dehors de l'origine, mais en fait partout parce que $\widehat{E}$ est homogène de degré -1).

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
29 Janvier 2001 - Durée 4 heures - Aucun document n'est autorisé

I.1. On note $x = (x_1, x_2)$ les points de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \|x\|^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f est-elle intégrable?

2. On note $E_1 \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^2)^{(*)}$ la distribution définie par f ($\langle E_1, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f\varphi$ si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2))^{(*)}$. Quel est le support de E_1? Quel est son support singulier?

(On rappelle que le support singulier d'une distribution T est le plus petit fermé F tel que la restriction de T au complémentaire de F soit C^∞.)

3. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{E}_1(\xi)$ de E_1 (on pourra montrer qu'elle ne dépend que de $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$).

4. On note t, x_1, x_2 les coordonnées sur $\mathbb{R}^3$. On note g la fonction telle que

$$g(t, x_1, x_2) = \begin{cases} (t^2 - \|x\|^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } \ t > \|x\| \\ 0 \quad \text{si } \ t \leq \|x\| & \text{(en particulier si } \ t \leq 0) \end{cases}$$

g est-elle localement intégrable? One note $E \in C^{-\infty}(\mathbb{R}^3)$ la distribution définie par g. Quel est le support de E? Quel est son support singulier?

5. Calculer la transformée de Fourier partielle $\widehat{E}(t, \xi)$ de E par rapport à $x = (x_1, x_2)$.

6. Soit $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ l'opérateur des ondes. Montrer qu'on a $\Box E = C\delta$ où C est une constante qu'on déterminera.

7. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\operatorname{supp} T$ soit contenu dans le demi-espace $\{t \geq t_0\}$ où t_0 est une constante donnée (instant initial). Montrer qu'il existe unique distribution S à support dans le même demi-espace, telle que $\Box S = T$.

II. On note (x, y) les coordonnées sur $\mathbb{R}^2$.
Si $Z \neq 0$ est un nombre complexe tel que $\operatorname{Im} Z > 0$ on note $\operatorname{Arg} Z$ la détermination principale de l'argument $(0 \leq \operatorname{Arg} Z \leq \pi)$. On pose

$$Z^s = \exp s \log Z = \exp s(\log |Z| + i\operatorname{Arg} Z)$$

1. Soit f_s la fonction définie par

$$f_s(x, y) = (x + iy^2)^s \quad \text{pour } (x, y) \neq 0$$

Pour quelles valeurs de s la fonction f_s est-elle localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$: montrer qu'il existe un nombre réel $s_0 < -1$, qu'on déterminera, tel que f_s soit localement intégrable si $\operatorname{Re} s > s_0$.

2. Pour $\operatorname{Re} s > s_0$ la fonction localement intégrable f_s définit une une distribution F_s ($\langle F_s, \varphi \rangle = \int f_s\varphi$ si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2))^{(*)}$. Quel est le support de F_s? Quel est son support singulier?

3. Pour $\varepsilon > 0$ on pose $f_{s,\varepsilon} = (x + iy^2 + i\varepsilon)^s$. Montrer $f_{s,\varepsilon}$ est continue, et $f_{s,\varepsilon}$ tend vers F_s au sens des distributions pour $\varepsilon \to +0$ si $\operatorname{Re} s > s_0$.

4. Montrer qu'on a $\frac{\partial}{\partial x} f_{s,\varepsilon} = s f_{s-1,\varepsilon}$. Montrer que pour tout s, $f_{s,\varepsilon}$ tend pour $\varepsilon \to +0$ vers une disribution limite F_s (celle qui a déja été définie si $\mathrm{Re}\, s > s_0$).

5. On pose $L = \frac{\partial}{\partial y} - 2iy\frac{\partial}{\partial x}$. Montrer qu'on a $LF_s = 0$ pour tout s, au sens des distributions.

6. Calculer la transformée de Fourier de F_{-1} (y a-t-il un rapport avec l'équation de la chaleur?)

$^{(*)}$+ On rappelle que C_0^∞ du cours $= \mathcal{D}$ du livre de Schwartz et du polycopié de J. Vaillant, et $C^{-\infty} = \mathcal{D}'$. (La lettre $\mathcal{D}$ est utilisée dans un grand nombre d'articles récents avec une autre signification).

E.D.P. - Corrigé de l'épreuve du 29.1.2001

I.1. f est est intégrable car elle est positive, C^∞ pour $\|x\| \neq 1$, et on a (en passant en coordonnées polaires)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = 2\pi \int_0^1 \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi$$

2. Le support de E est la boule unité. Le support singulier est la sphère unité (où E est discontinue).

3. E est invariante par rotation, donc aussi $\widehat{E}$. On a donc

$$\widehat{E}(\xi) = \widehat{E}(-\|\xi\|, 0) = \int_{-1}^{1} e^{i\|\xi\|x_1} dx_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \frac{dx_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}$$

Après le changement de variable $x_2 = y\sqrt{1-x_1^2}$ et simplification par $\sqrt{1-x_1^2}$ ceci donne

$$\widehat{E}(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{i\|\xi\|x_1} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\pi \frac{\sin\|\xi\|}{\|\xi\|}$$

4. On a $g(t,x) = \frac{1}{t} f(\frac{x}{t})$. C'est une fonction localement intgrable car elle est nulle pour $t < 0$, et pour $t > 0$ on a $\int_{\mathbb{R}^2} g(t,x)dx = 2\pi t$ donc

$$\int_{|t|<T} g(t,x)dtdx = 2\pi \int_0^T t\,dt = \pi T^2 < \infty$$

Le support de E est le cône d'onde d'avenir $\{t \geq \|x\| \geq 0\}$. E est C^∞ à l'intérieur de ce cône (racine carrée d'une fraction rationnelle non nulle), et aussi à l'extérieur où elle est nulle. Elle est discontinue en chaque point du bord donc le support singulier est le bord de ce cône $\{t = \|x\| \geq 0\}$.

5. La transformée de Fourier partielle de $E = \frac{1}{t} f(\frac{x}{t})$ est

$$\widehat{E}(t,\xi) = \frac{1}{t}\ t^2 \hat{f}(t\xi) = 2\pi \frac{\sin t\|\xi\|}{\|\xi\|}$$

6. La transformée de Fourier partielle en x de la solution élémentaire avancée E_+ de $\Box$ est la fonction $\frac{\sin\|\xi\|}{\|\xi\|}$ (cours) donc $E = 2\pi E_+$.

7. Le demi-espace $H = \{t \geq t_0\}$ et le cône d'onde d'avenir sont adaptés pour la convolution; si T est à support dans H l'équation $\Box S = T$ admet pour unique solution à support dans H la distribution $S = \frac{1}{2\pi} E * T$.

II. 1. f_s est continue (donc localement intégrable) en dehors de l'origine, et on a $|f_s| = (x^2+y^4)^{\frac{\sigma}{2}}$ avec $\sigma = \mathrm{Re}\, s$.

Au voisinage de l'origine, et pour $y > 0$ (resp. $y < 0$) faisons le changement de variable $|y| = \sqrt{u}$: on a

$$\int_{\substack{x^2+y^4<1 \\ \pm y>0}} f_s = \int_{\substack{x^2+u^2<1 \\ u>0}} \frac{1}{2\sqrt{u}} (x^2+u^2)^{\frac{\sigma}{2}} \, dxdu$$

La fonction sous le signe $\int$ est localement intégrable en dehors de 0, homogène de degré $\sigma - \frac{1}{2}$. Elle est donc intégrable, au voisinage de 0 si et seulement si $\sigma - \frac{1}{2} > -2$. Ainsi f_s est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\mathrm{Re}\, s > -\frac{3}{2}$.

2. On a $f_s(x,y) \neq 0$ pour $(x,y) \neq 0$ donc le support de F_s est $\mathbb{R}^2$ tout entier. f_s n'est pas C^∞ à l'origine, donc $\mathrm{suppsing}\, F_s = \{0\}$, sauf si s est entier ≥ 0: dans ce dernier cas c'est un polynôme et $\mathrm{suppsing}\, F_s = \emptyset$.

3. On a $|f_{s,\varepsilon}| \leq |f_s|$ et $f_{s,\varepsilon} \to f_s$ simplement en dehors de l'origine. Donc si $\mathrm{Re}\, s \geq -\frac{3}{2}$ (i.e. si f_s est localement intégrable), $f_{s,\varepsilon}$ tend vers f_s au sens des fonctions localement intégrables (théorème de Lebesgue), donc aussi au sens des distributions.

4. La formule $\frac{\partial}{\partial x} f_{s,\varepsilon} = s f_{s-1,\varepsilon}$ est évidente pour $(x,y) \neq 0$; elle implique $\frac{\partial}{\partial x} F_{s,\varepsilon} = s F_{s-1,\varepsilon}$ (égalité au sens des distributions) si $\mathrm{Re}\, s > -\frac{1}{2}$ car alors les deux membres sont localement intégrables et on peut intégrer par parties dans l'égalité de définition de la dérivée. Plus généralement, par récurrence, on a $F_{s,\varepsilon} = \frac{1}{(s+1)\ldots(s+k)} F_{s+k}$, et à la limite $F_s = \frac{1}{(s+1)\ldots(s+k)} F_{s+k}$ si $\mathrm{Re}\, s > -\frac{3}{2}$.

5. Si $\mathrm{Re}\, s > -\frac{3}{2}$ on a vu $F_{s,\varepsilon}$ tend vers F_s pour $\varepsilon \to +0$. Sinon on peut choisir k de sorte que $-\frac{3}{2} < \mathrm{Re}\, s + k < 0$, donc $F_{s,\varepsilon}$ a une limite au sens des distributions, comme $F_{s+k,\varepsilon}$.

6. La solution élémentaire de l'équation des ondes est

$$\Phi(T,X) = (2\pi)^{-2} \int e^{i(T\tau + X\Xi)} \frac{d\tau d\Xi}{i\tau + \Xi^2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi T}} e^{-\frac{X^2}{4T}} & \text{si } T > 0 \\ 0 & \text{si } T \leq 0 \end{cases}$$

Donc la transformée de Fourier de F_{-1} est

$$\mathcal{F}F_{-1}(\xi,\eta) = \int e^{-i(x\xi + y\eta)} \frac{dx\, dy}{ix + y^2} =$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{i} \Phi(\xi,\eta) = \begin{cases} \frac{(2\pi)^2}{i} \frac{1}{\sqrt{4\pi\xi}} e^{-\frac{\eta^2}{4\xi}} & \text{si } \xi > 0 \\ 0 & \text{si } \xi \leq 0 \end{cases}$$

(faire $\xi = T, \eta = X, x = -\tau, y = -\Xi$ - on a $x + iy^2 = i(-ix + y^2)$).

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
11 septembre 2001 - Durée 4 heures - Aucun document n'est autorisé

I. On note x, y, z les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$, et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{R}$. On pose $E_{\lambda,s} = \frac{e^{\lambda r}}{r^s}$ (fonction continue pour $r \neq 0$).
Pour quelles valeurs de s cette fonction est-elle localement intégrable? Lorsque c'est le cas on notera encore $E_{\lambda,s}$ la distribution ainsi définie; pour quelles valeurs de λ est-ce une distribution tempérée?

2. On note $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (Laplacien de $\mathbb{R}^3$). Soit $f = f(r)$ une fonction invariante par rotation sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, 2 fois dérivable pour $r \neq 0$. Montrer qu'on a $\Delta f = a\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + b\frac{\partial f}{\partial r} + cf$ où a, b, c sont des fonctions de r qu'on calculera.

3. Montrer qu'on a $\Delta E_{\lambda,1} = \alpha E_{\lambda,1} + \beta\delta$ où α, β sont des constantes qu'on calculera (δ désigne la masse de Dirac à l'origine).

4. Soit k un nombre complexe. On pose $H_k = \Delta - k$. Soit $T = T(r)$ une distribution sur $\mathbb{R}^3$ invariante par rotation. Quelle équation différentielle en r T doit-elle satisfaire pour qu'on ait $H_k T = 0$, en dehors de l'origine?

5. Déterminer toutes les solutions élémentaires de H_k invariantes par rotation (on pourra tenir compte des questions 1, 3, 4, avec k et λ convenablement reliés)

6. Parmi celles-ci, quelles sont celles qui sont tempérées? (discuter selon les valeurs de k)

II. On note $\Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ le Laplacien de $\mathbb{R}^n$. Dans le problème f désigne une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$ ($\Delta f = 0$).

1. On suppose f à croissance polynomiale (i.e. $(1 + \|x\|)^{-N} f$ est bornée pour N assez grand). Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}$ est bien définie (comme distribution). Quel est son support? Montrer que f est un polynôme.
Montrer que si f est bornée, elle est constante.

2. Montrer que pour tout $R > 0$ et tout vecteur x tel que $\|x\| < R$ on a

$$\int_{\|y\|=R} \frac{R^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} f(y) d\mu_R(y) = CRf(x)$$

où C est une constante qu'on calculera en fonction du $(n-1)$-volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ ($d\mu_R$ désigne le $(n-1)$-élement de volume usuel de la sphère de rayon R).

3. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe entière. Soit $f = \sum f_k$ le développement de Taylor de f, où f_k est un polynôme homogène de degré k: montrer que chaque polynôme f_k est harmonique.

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Corrigé de l'épreuve du 11 septembre 2001

I.1 $E_{\lambda,s}$ est localement intégrable ssi $s < 3$; alors elle est tempérée ssi $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$.

2. On a $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$ (cours).

3. On a $\Delta E_{\lambda,1} = \lambda^2 E_{\lambda,1} - 4\pi\delta$ (d'aprè ce qui précède et $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta$, cours).

4. Il faut $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - kT = 0$.

5. Les solutions élémentaires invariantes par rotation sont de la forme $aE_{\lambda,1} + bE_{-\lambda,1}$ avec $\lambda^2 = k$, $a + b = -\frac{1}{4\pi}$ (toute solution élémentaire est somme d'une telle distribution, et d'une distribution portée par l'origine et harmonique donc nulle).

6. Si k est réel négatif, toutes ces solutions élémentaires sont tempérées ($e^{\lambda r}$ borné). Sinon il y a une seule solution tempérée : $\frac{e^{-\lambda r}}{r}$ où λ est la racine carrée de k telle que $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

II. f est tempérée donc $\hat{f}$ est défini. On a $\xi^2\hat{f} = 0$ donc $\operatorname{supp} f \subset 0$ (= si $f \neq 0$). $\hat{f}$ est alors combinaison linéaire de dérivées de δ donc c'est un polynôme. Si f est bornée c'est un polynôme borné donc constant.

2. $C = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, le volume de la sphère unité: ceci est l'homothétique de la formule du cours (cas $R = 1$ - noyau de Poisson).

3. Dans cette formule la fonction sous le signe $\int$ se prolonge holomorphiquement de façon évidente au moins pour $\|x\| < \frac{R}{2}$. Comme ceci est vrai pour tout R, f est entière.

Si $f = \sum f_k$ le développement de Taylor de Δf est $\sum \Delta f_k = 0$ donc chaque f_k est un polynôme harmonique.

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
22 nov 2001, 14h45-17h45, Bat 411, salle 113

I. Dans le plan $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ on note les coordonnées x, y et $z = x + iy$. On pose

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}),\ \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}),\quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}$$

1. La fonction $f = \log|z|$ est-elle localement intégrable? Pour quelle valeur de c_1 a-t-on $\Delta f = c_1\delta$ (comme distribution)?

2. Calculer les fonctions a, b telles qu'on ait, en coordonnées polaires ($z = re^{i\theta}$), pour $r \neq 0$: $\frac{\partial}{\partial z} = a\frac{\partial}{\partial r} + b\frac{\partial}{\partial \theta}$.

3. La fonction $g(x,y) = \frac{1}{z}$ est-elle localement intégrable? Montrer qu'on a, au sens des distributions $\frac{\partial}{\partial z}\log|z| = c_3 g$ où c_3 est une constante:
(i) en dehors de $\{0\}$ (calculer c_3);
(ii) au voisinage de $\{0\}$; on pourra exploiter le fait que g est homogène de degré -1, ou, en coordonnées polaires, faire une intégration par parties dans les couronnes $\{r > \varepsilon\}, \varepsilon \to 0$.

4. Déduire de ce qui précède qu'on a $\frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{1}{z} = c_4\delta$ où c_4 est une constante qu'on calculera.

II. Si f est une fonction à support compact dans $\mathbb{R}^2$, localement intégrable dans $\mathbb{R}^2 - 0$, on note vp $\int f$ la limite, si elle existe: [1]

$$\mathrm{vp}\int f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r>\varepsilon} f.$$

On définit la distribution $\mathrm{vp}\, f$ par la condition $\langle \mathrm{vp}\, f, \varphi\rangle = \mathrm{vp}\int f\varphi$ si cette limite existe pour toute $\varphi \in C_0^\infty$.

1. Soient $s \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$; on pose $f_{s,k} = |z|^s z^{-k}$. Cette fonction est-elle localement intégrable dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$? Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ est elle localement intégrable au voisinage de 0?

2. Calculer l'intégrale $I_{pqsk}(\varepsilon) = \iint_{\varepsilon<r<1} f_{s,k} z^p \bar z^q$. Quand a-t-elle une limite pour $\varepsilon \to 0$? Pour quelles valeurs de s, k a-t-elle une limite pour $\varepsilon \to 0$ quels que soient p, q?

3. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ la distribution $\mathrm{vp}\, f_{s,k}$ est-elle bien définie? On pourra utiliser le développement de Taylor :

$$\varphi = \sum_{p+q<N} \varphi_{pq} z^p \bar z^q + \varphi_N \text{ avec } \varphi_{pq} = \frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial z^p \partial \bar z^q}(0),\ \varphi_N = O(r^N) \text{ pour } r \to 0.$$

4. On note T_k la distribution $\mathrm{vp}\, z^{-k}$. Montrer qu'on a $\frac{\partial}{\partial z}T_k = c_k T_{k+1}$ où c_k est une constante qu'on calculera.

5. Calculer $\frac{\partial}{\partial \bar z}T_k$; dans le cas $k = 1$ on pourra utiliser le résultat du premier problème.

[1] vp est le sigle de "valeur principale".

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel

Corrigé de l'épreuve du 22 nov 2001

Remarques générales:
si on ne précise pas, "f intégrable" (resp. localement intégrabl), veut dire que f est mesurable au sens de Lebesgue (en pratique une fonction donnée par une formule explicite l'est toujours), et $\int |f| < \infty$ resp. tout point a un voisinage V tel que $\int_V |f| < \infty$.

Sur $\mathbb{R}^n$ le fonction r^s ($s \in \mathbb{C}$) est localement intégrable ssi $\mathrm{Re}\, s + n > 0$.
En particuiler sur $\mathbb{R}^2$:

I.1. $\log r$ est localement intégrable parce qu'il est continu en dehors de 0 et $O(r^{-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$ au voisinage de 0.

I.3 $\frac{1}{z}$ est localement intégrable

II.1 $|z|^s z^{-k}$ est loclement intégrable si $\mathrm{Re}\, s - k + 2 > 0$

1.1 (suite) on a $\Delta \log |z| = 2\pi\delta$ (cours - on pouvait le redémontrer en inégrant par partie dans la région $\{r > \varepsilon\}$, comme dans le cours).

I.2. En coordonnées polaires on a $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} e^{i\theta}(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta})$

I.3. $g = \frac{1}{z}$ est localement intégrable (voir plus haut).
(i) Pour $z \neq 0$ on a $\frac{\partial}{\partial z} \log |z| = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} \log z\bar{z} = \frac{1}{2}\frac{1}{z}$
(ii) On a $f(\lambda z) = f(z) + \log \lambda$ pour $\lambda > 0$, d'où $(\frac{\partial}{\partial z} g)(\lambda z) = \frac{1}{\lambda} g$ au sens des distributions.

Par suite $(\frac{\partial}{\partial z} f) - \frac{1}{2} g$ est homogène de degré -1, de support $\subset \{0\}$, donc nulle. (une distribution portée par l'origine est combinaison de dérivées de δ; si elle est homogène, son degré est entier ≤ -2 puisque $\delta^{(\alpha)}$ est homogène de degré $-2 - |\alpha|$).

On peut aussi le montrer en intégrant par parties et passant à la limite dans la région $|z| > \varepsilon$: si $\varphi \in C_0^\infty$ on a

$$\int_{|z|<\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z}(\log r\ \varphi) = \int_0^{2\pi} \varepsilon \log \varepsilon\ \varphi(\varepsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Cette dernière intégrale tend vers 0 pour $\varepsilon \to 0$, donc $\langle \frac{\partial}{\partial z} f, \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z|>\varepsilon} \log r\ \frac{\partial}{\partial z}\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z|>\varepsilon} \frac{1}{2z}\varphi = \langle g, \varphi \rangle$.

I.4 Par suite $\displaystyle \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \log r = \frac{1}{2} \Delta \log r = \pi\delta$
(on peut aussi le démontrer en intégant par parties et passant à la limite comme ci-dessus).

II.2 L'intégrale vaut $\int_\varepsilon^1 r^{s+p+q-k+1} dr \int_0^\pi e^{(p-q-k)i\theta}$.
Elle est nulle si $p - q - k \neq 0$.
Si $k = p - q$ donc $s + p + q + 2 - k = s + 2q + 2$, l'intégale vaut $\frac{2\pi}{s+2q+2}(1 - \varepsilon^{s+2q+2})$ resp. $2\pi \log \frac{1}{\varepsilon}$ si $s + 2q + 2 = 0$. Elle a donc une limite pour tous p, q ssi $\mathrm{Re}\, s > -2$; le résultat ne dépend pas de k.

II.3 La distribution $vpf_{s,k}$ existe ssi la valeur principale $vp\int_{|z|\leq 1} f_{s,k}z^p\bar{z}^q$ existe, donc d'après la question précédente: ssi $\mathrm{Re}\, s > -2$

II.4 Par intégration par parties on a :

$$\int_{r>\varepsilon}(\partial_z f\varphi + f\,\partial_z\varphi) = \int_{z>\varepsilon} d(f\varphi\; d\bar{z}) = -\frac{1}{2i}\int_{r=\varepsilon} f\varphi d\bar{z} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f\varphi(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon e^{-i\theta}d\theta$$

On applique ça avec $f = z^{-k}, \varphi \in C_0^\infty$ et on développe φ en série de Taylor: l'intgrale sur le petit cercle tend vers 0 parce que comme dans la question précédente, tous les termes qui ne tendent pas évidemment vers 0 (exposant de ε de partie réelle > 0) sont identiquement nuls (exposant de $e^{i\theta}$ non nul).

Autre preuve: l'application qui à s associe la distribution $|z|^s z^{-k}$ est homomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > -2$ (en fait se prolonge en une fonction méromorphe de s, avec des pôles simples pour $s = -2, -4, \dots$). Pour $\mathrm{Re}\, s$ grand, $f_{s,k}$ est de classe C^1 et on a $\partial_z f_{sk} = (\frac{s}{2} - k)f_{s,k-1}$: cette relation se prolonge dans tout le domaine d'holomorphie, en particulier pour $s = 0$.

II.5 On a vu $\partial_z \frac{1}{z} = \pi\delta$. D'après II.4 on a $vp\, z^{-k} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\;\partial_z^{k-1} vp\,\dfrac{1}{z}$. Donc

$$\partial_z vp\, z^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\;\partial_z^{k-1}\pi\delta.$$

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
22 Janvier 2002 - Durée 4 heures - Aucun document n'est autorisé

I. Sur $\mathbb{R}^n$ on note $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ les $n-1$ premières coordonnées, $y = x_n$, $x^2 = x_1^2 + \ldots x_{n-1}^2$

1. Soit la fonction $f = (x^2 - iy)^{-1}$ (définie pour $(x, y) \neq 0$): f est-elle localement intégrable?

2. Calculer la transformée de Fourier partielle $\mathcal{F}_y f(x, \eta)$ de f par rapport à y.

3. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}(\xi, \eta)$ de f.

4. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon = (x^2 - iy + \varepsilon)^{-1}$. Comparer $D_y f_\varepsilon^k$ et f_ε^{k+1} ($D_y = -i\frac{\partial}{\partial y}$).
Montrer que pour tout entier $k \geq 0$, f_ε^k tend vers une distribution limite f_k pour $\varepsilon \to +0$. Quelle est la transformée de Fourier de f_k?

5. Pour quelles valeurs de k la distribution f_k est-elle une fonction localement intégrable?

II. Sur $\mathbb{R}^{n+1}$ on note $x = (x_1, \ldots, x_n), t = x_{n+1}$, $\Delta_x = \sum \partial_{x_j}^2$, $\Delta = \partial_t^2 + \Delta_x$, $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$.

1. On pose $\varphi_s = (t^2 + x^2)^s$. Montrer qu'il existe une polynôme $P(s)$, qu'on calculera, tel que $\Delta\varphi_s = P(s)\varphi_{s-1}$.

2. On pose $f_s = (t^2 - x^2)_+^s$ (0 si $t^2 \leq x^2$). Montrer qu'il existe une polynôme $Q(s)$ tel que $\Box f_s = Q(s) f_{s-1}$; comparer $P(s)$ et $Q(s)$.

3. On note E_s la distribution définie par la fonction $Y(t)(t^2 - x^2)_+^s$ (0 si $t \leq \|x\|$). De la relation $\Box E_s = cs(s + \frac{n-1}{2})E_{s-1}$ (c une constante), valable pour $\operatorname{Re} s$ assez grand, déduire que la fonction $s \mapsto E_s$, se prolonge en une fonction méromorphe $\mathbb{C} \to C^{-\infty}$, avec des pôles au plus doubles (simples si n est pair) aux points $k_0 + k, k_1 + k$, k entier négatif, k_0, k_1 à déterminer.

4. Sur $\mathbb{R}^n$ on note g_s la fonction $(1 - x^2)_+^s$. Vérifier que pour $\operatorname{Re} s > -1$ on a, pour φ fonction test sur $\mathbb{R}^{n+1}$:
$$\langle E_s, \varphi\rangle = \int_0^\infty dt\; t^\sigma \int_{\|x|\}<1} d^n x (1 - x^2)^s \varphi(t, tx).$$
(on calculera σ). Montrer que la transformée de Fourier de g_s vérifie la relation
$$\hat{g}_s(\xi) = C(s) \int_{-1}^1 dx_1\; e^{x_1 i|\xi|}(1 - x_1^2)^\alpha \quad \text{avec} \quad C(s) = \int_{B_{n-1}} d^{n-1}y(1 - y^2)^s$$
où B_{n-1} désigne la boule unité de $\mathbb{R}^{n-1}$, et α un exposant qu'on calculera l'en fonction de s et n (penser au changement de variable $x = (x_1, x_1 y)$ avec $y = (y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$).

5. Montrer, par prolongement analytique, que ce résultat est encore vrai, si n est pair, pour $s = -\frac{n-1}{2}$. Combien vaut alors l'exposant α? Montrer que dans ce cas, on a $E_s = C(s)E$ où E est la solution élémentaire avancée de $\Box$.

6. Appendice. Calculer C(s) (c'est un produit simple de valeurs de la fonction Γ); en particulier pour $s = -\frac{n-1}{2}$.

EDP - Corrigé de l'épreuve du 22 janvier 2002

I 1. f^k est localement intégrable ssi $2k < n+1$ (ou ($2\ \mathrm{Re}\, k < n+1$ si k est un nombre complexe) parce qu'elle est semi-homogène de degré $-2k$ avec x de degré 1, y de degré 2 (il faut $\deg f^k dx_1 \dots dx_{n-1} dy = -2k + (n-1) + 2 > 0$).

2. La transformée de Fourier partielle est $\mathcal{F}_y f(x,\eta) = 2\pi Y(\eta)\exp(-x^2\eta)$ (0 pour $\eta < 0$) parce qu'elle est tempérée et vérifie $(x^2 + \partial_\eta)\mathcal{F}_y f = \mathcal{F}_y(1) = 2\pi\delta(\eta)$. ($Y$ est la fonction de Heaviside: $Y(\eta) = 1$ si $\eta > 0$, 0 si $\eta \leq 0$).

3. $\hat{f} = (2\pi)^n Y(\eta)(\frac{\pi}{\eta})^{\frac{n-1}{2}} \exp -\frac{\xi^2}{\eta}$. (Remarque: c'est la solution élémentaire de l'équation de la chaleur, avec en plus le facteur $(2\pi)^n$ de la transformation de Fourier).

4. On a $D_y f_\varepsilon^k = k f_\varepsilon^{k+1}$, et pour $\varepsilon \to +0$, f_ε tend vers f au sens des distributions, ou de L^1_{loc}, puisque f est localement intégrable. Par suite f_ε^k tend vers la distribution $f_k = \frac{1}{(k-1)!} D_y^{k-1} f_\varepsilon$ pour $\varepsilon \to +0$.

5. f_k est localement intégrable si $k < \frac{n+1}{2}$ (cf. 1). Attention que pour $k > \frac{(}{n} + 1)2$ f_ε^k tend vers f_k au sens des distributions, mais évidemment pas au sens de L^1_{loc} comme il est affirmé dans beaucoup de copies.

II. 1. $\Delta\varphi_s = 2s(2s+n-1)\varphi_{s-1}$ (Laplacien en coordonnées polaires, en dimension $n+1$).

2. $\square f_s = 2s(2s+n-1)f_{s-1}$ (c'est la même relation, pour x (ou t) imaginaire pur).

3. E_s est localement intégrable pour $\mathrm{Re}\, s > -1$. 2) implique qu'on a

$$E_s = 4^k(s+1)\dots(s+k)(s+1+\frac{n+1}{2})\dots(s+k\frac{n+1}{2})\square^k E_{s+k}$$

si $\mathrm{Re}\, s$ assez grand pour que E_s soit de classe C^{2k} (en fait pour $\mathrm{Re}\, s > -1$). Donc $s \mapsto E_s$ se prolonge méromorphiquement; les pôles sont les zéros des facteurs ci-dessus, i.e. les nombres de la forme $(-1-k)$ ou $-(\frac{n+1}{2} - k$ (k entier ≥ 0). Ces derniers sont entiers si $n+1$ est pair, et alors il s'agit de pôles doubles; ils sont demi-entiers si $n+I$ est impair, et alors tous les pôles sont simples.

4. $\sigma = n, \alpha = s + \frac{n+1}{2}$. Tout le reste est déja dit dans l'énoncé.

5. La relation reste vraie par prolongement analytique partout où celui-ci est défini, en particulier pour $s = -\frac{n-1}{2}$ si n est impair. Alors $\alpha = 0$, l'intégrale vaut $C(s)2\frac{\sin|\xi|}{|\xi|}$ de sorte que $E_s = C(s)\times$ le solution élémentaire avancée de $\square$.

6. Appendice en coordonnées polaires on obtient

$$C(s) = v_{n-1}\int_0^1 (1-r^2)^s r^{n-2} dr = \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\ \frac{1}{2}\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(s+\frac{n+1}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\frac{n+1}{2})}$$

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
15 Septembre 2002 - Durée 4 heures - Aucun document n'est autorisé

I. 1.Soit $P = P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{R}^n$. Quand dit-on qu'une distribution E est solutions élémentaire de P?

2. Soit D l'opérateur de dérivation $f \mapsto \frac{df}{dx}$ sur $\mathbf{R}$: trouver une solution élémentaire de D.

3. Trouver toutes les solutions élementaires de D^k.

4. Soit l'opérateur $P = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n}$ sur $\mathbf{R}^n$: trouver une solution élémentaire de P.

II. On rappelle que sur $\mathbf{R}^n$ le Laplacien, resp. l'opérateur de la chaleur, est l'opérateur

$$\Delta P = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \qquad \text{resp.} \quad C = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_2^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2};$$

Dans la suite P désigne l'un de ces deux opérateurs ($P = \Delta$ ou C).

1. Décrire une solution élémentaire de P (ça fait deux questions).

2. Soit T une distribution tempérée telle que $P.T = 0$. Montrer que T est un polynôme. On pourra examiner la transformée de Fourier de T.

3. Soit T une distribution tempérée telle que $P.T$ soit nulle en dehors de l'origine. Montrer que T est somme d'un polynôme et d'une combinaison linéaire finie de dérivées de E, où E est solution élémentaire tempérée de E. (On admettra, si on ne l'a pas vu au n^{o}1, que la solution élémentaire canonique (celle du cours) est tempérée).

4. Existe-t-il des opérateurs $P = P(D)$ (à coefficients constants, non constants) autres que Δ ou C pour lesquels la propriété du n^{o}3 soit vraie (donner un exemple)?

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
21 nov 2002, 13h30-16h30, Patio 15-24 salle 4

I. 1. Soit T une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$. On suppose T harmonique ($\Delta T = 0$). Quelle équation la transformation de Fourier $\widehat{T}$ vérifie-t-elle?

2. Quel est le support de $\widehat{T}$?

3. Montrer que T est un polynôme (harmonique).

II. On note $X = (x, y)$ la variable dans $\mathbb{R}^2$. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad \text{si } \|X\|^2 = x^2 + y^2 < 1, \qquad 0 \quad \text{sinon}$$

1. montrer que F est intégrable. Elle définit une distribution à support compact, encore notée F

2. On note $\Xi = (\xi, \eta)$ la variable duale de X. Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{F}(\Xi)$ est une fonction analytique (entière) de Ξ.

3. Montrer que $\widehat{F}(\Xi)$ ne dépend que de $\|\Xi\| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

4. Montrer qu'on a

$$\widehat{F}(\Xi) = \int_{-1}^{1} dx \; e^{ix\|\Xi\|} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

et calculer $\widehat{F}$ (comment, dans l'expression ci-dessus, la deuxième intégrale par rapport à y dépend-elle de x?)

III. On note $z = x + iy$ la variable de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

1. (Question de cours)
(i) Pour quelles valeurs de s la fonction $|z|^s$ est-elle localement intégrable?
(ii) Soit la distribution (fonction localement intégrable) $E = \log|z|$. Montrer qu'on a $\Delta E = C\delta$; quelle est la valeur de la constante C?

2. Rappelons qu'on pose $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} - i\frac{\partial}{\partial y})$, de sorte qu'on a $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$. Calculer la distribution $\frac{\partial}{\partial z} E$; montrer que c'est une fonction localement intégrable.

3. Montrer qu'il existe une constante C, qu'on calculera, telle que la distribution (fonction localement intégrable) $F = \frac{C}{z}$ soit une solution élémentaire de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (i.e. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{C}{z}) = \delta$).

E.D.P. 21 novembre 2002 - Corrigé

I. 1. Si T est tempérée la transformée de Fourier de ΔT est $-(\sum \xi_j^2)\widehat{T}$. Donc $\Delta T = 0$ équivaut à $\|\xi\|^2 \widehat{T} = 0$

2. Alors $\widehat{T}$ est nulle dans l'ouvert $\{\|\xi\|^2 \neq 0\}$, autrement dit $\mathrm{supp}\widehat{T} \subset \{0\}$.

3. On sait (cours) que dans ces conditions $\widehat{T}$ est combinaison linéaire de dérivées de δ: $\widehat{T} = \sum a_\alpha \delta^{(\alpha)}$ (somme finie), donc $\widehat{T}$ est un polynôme: $T = (2\pi)^{-n} \sum a_\alpha (-ix)^\alpha$.

II.1. F est positive; en coordonnées polaires on trouve $\int F = 2\pi \int_0^1 \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = 2\pi < \infty$, donc F est intégrable; elle définit une distribution tempérée, à support compact (contenu dans le disque unité).

2. Comme F est à support compact, la transformée de Fourier est $\widehat{F} = \langle F, e^{-iX.\Xi}\rangle$. C'est évidemment une fonction entière (i.e. défini pour tout Ξ, réel ou complexe, et holomorphe).

3. F est invariante par rotation (ne dépend que de $r = \sqrt{x^2+y^2}$), donc aussi $\widehat{F}$ (on sait (cours) que si A est une transformation orthogonale, $\widehat{F}(A\xi)$ est la transformée de Fourier de $F(Ax)$).

4. On a donc $\widehat{F}(\Xi) = \widehat{F}(-\|\Xi\| e_1)$ (e_1 désigne le premier vecteur de base). On calcule cette intégrale double en intégrant d'abord en y puis en x (Fubini), ce qui donne l'expression de l'énoncé. Le changement de variable $y = \sqrt{1-x^2}\,u$ donne

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,du}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-u^2}} = \pi$$

qui est indépendant de x, d'où $\widehat{F}(\Xi) = \pi \int_0^1 dx\ e^{ix\|\Xi\|} = \pi\,\frac{e^{i\|\Xi\|} - e^{-i\|\Xi\|}}{i\|\Xi\|} = 2\pi\,\frac{\sin\|\Xi\|}{\|\Xi\|}$.

III.1. (i) Sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $|z|^s$ est localement intégrable pour $\mathrm{Re}\, s > -2$.
(ii) On a $\Delta E = 2\pi\delta$ (cours).

2. On a $E = \frac{1}{2}\log(z\bar{z})$ d'où $\frac{\partial E}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2z}$, comme fonction, en dehors de 0. Parce que la fonction $\frac{1}{z}$ est localement intégrable, ceci est aussi vrai au sens des distributions: dans l'intégration par parties:

$$\langle \frac{\partial E}{\partial \bar{z}}, \varphi\rangle = -\langle E, \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} - \int_{|z|>\epsilon} \frac{1}{2z}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \lim_{\epsilon \to 0}\left[I_\epsilon + \int_{|z|>\epsilon} \frac{\partial E}{\partial \bar{z}}\varphi\right]$$

le "terme tout intégré" I_ϵ (qui est une intégrale sur le cercle de rayon ϵ) tend vers 0 pour $\epsilon \to 0$ (le vérifier); à la limite on obtient $\langle \frac{\partial E}{\partial \bar{z}}, \varphi\rangle = \int \frac{1}{2z}\varphi$, autrement dit $\frac{\partial E}{\partial \bar{z}}$ est la fonction localement intégrable $\frac{1}{2z}$.

3. On a, au sens des distributions: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(2\frac{\partial E}{\partial z}) = \frac{1}{2}\Delta \log|z| = \pi\delta$. La constante C demandée est $C = \frac{1}{\pi}$.

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
21 janvier 2003, 14h-18h, tour 25-24 salle 301

I. 1. Soit $a > 0$ une constante réelle. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $\epsilon_a(x) = e^{-\frac{x}{2a}^2}$ sur $\mathbb{R}$? Calculer le produit de convolution $\epsilon_a * \epsilon_b$.

2. Sur $\mathbb{R}^n$ on note $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}), t = x_n$. Pour $s \in \mathbb{C}$ on pose

$$F_s(x,t) = \begin{cases} t^s e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \le 0 \end{cases}.$$

Montrer que F_s est localement intégrable pour $\operatorname{Re} s > s_0$, où s_0 est un nombre qu'on évaluera le mieux possible.

3. On note $\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ l'opérateur de la chaleur ($\Delta = \sum_1^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$). Calculer $\Gamma(F_s)$ en dehors de l'origine ($t = 0, x = 0$).

4. Pour $\operatorname{Re} s > s_0$ on note T_s la distribution (localement intégrable) définie par F_s. Montrer que pour $\operatorname{Re} s > s_0 + 1$ on a $\Gamma(T_s) = c(s)T_{s-1}$ où $c(s)$ est une constante qu'on calculera (on pourra d'abord examiner le cas où $\operatorname{Re} s$ est assez grand).

5. Montrer que l'application $s \mapsto T_s$ se prolonge de façon méromorphe au plan complexe tout entier. Quels sont les pôles?

6. Calculer $\Gamma(T_{-\frac{n-1}{2}})$.

II. 1. Sur $\mathbb{R}^n$ on note $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ et $u = u(x) = x_n + i\frac{\|x'\|}{2}^2$. Pour $s \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$, u^s est défini par $u^s = \exp s \log u$, où on a choisi la détermination principale du log: $\log u = \log |u| + i\operatorname{Arg} u$ avec $0 \le \operatorname{Arg} u \le \pi$. Montrer qu'il existe $c_s > 0$ tel que $\frac{1}{c_s}|u|^{\operatorname{Re} s} \le |u^s| \le c_s |u|^{\operatorname{Re} s}$.

2. Montrer qu'il existe $s_0 < -1$ tel que la fonction u^s soit localement intégrable pour $\operatorname{Re} s > s_0$. On note alors U_s la distribution définie par u^s.

3. Pour $\epsilon > 0$ on pose $u_\epsilon = u + i\epsilon$. Montrer que, pour $\operatorname{Re} s > s_0$, u_ϵ^s tend vers U_s au sens des distributions pour $\epsilon \to +0$.

4. Montrer qu'on a, pour $\operatorname{Re} s > s_0 + 1$, $\frac{\partial}{\partial x_n} U_s = P(s) U_{s-1}$ où $P(s)$ est une constante qu'on déterminera.

5. Montrer que pour tout s, u_ϵ^s tend vers une limite au sens des distributions pour $\epsilon \to +0$. On notera encore la limite U_s.

6. Calculer la transformée de Fourier partielle $\mathcal{F}_{x_n} U_{-1}(x', \xi_n)$ de U_{-1} par rapport à x_n, et la transformée de Fourier $\mathcal{F} U_{-1}(\xi', \xi_n)$.

7. **Question subsidiaire.** On pose $P_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_n} + i \frac{\partial}{\partial x_j}$ pour $1 \le j \le n-1$, et $P_n = u \frac{\partial}{\partial x_n}$. Montrer qu'on a $P_j(U_s) = 0$ si $j < n$ et $P_n(U_s) = sU_s$. Inversement soit T une distribution telle que $P_j(T) = 0$ pour $j < n$, $P_n(T) = sT$: montrer qu'il existe une constante c telle que $T = cU_s$.

(On pourra d'abord montrer qu'il existe c tel que $S = T - cU_s$ soit nulle en dehors de l'origine; alors il existe N tel que $x_j^N S = 0$ ($j < n$), et on pourra utiliser le fait que si $f(x_j)$ est un polynôme de x_j seul on a $(P_j f - f P_j) S = i \frac{\partial f}{\partial x_j} S$.)

Corrigé du problème du 21 janvier 2003

I. 1. La transformée de Fourier de f_a est $\sqrt{2\pi a}\ e^{-\frac{a\xi^2}{2}}$. On a $\epsilon_a * \epsilon_b = \sqrt{\frac{2\pi ab}{a+b}}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a+b}}$.

2. F_s est intégrable dans le domaine $0 < t < 1, \|x\| \geq 1$ (où elle est majorée par exemple par $(t^s e^{-\frac{1}{8t}})e^{-\frac{\|x\|^2}{8}}$ - le premier facteur est borné). On a $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} = (4\pi t)^{\frac{n-1}{2}}$ donc F_s est localement intégrable (au voisinage de 0) ssi $\mathrm{Re}\, s + \frac{n-1}{2} > -1$ i.e. $\mathrm{Re}\, s > -\frac{n+1}{2}$.

3. Pour $t > 0$ n a $\partial_t F_s = (\frac{s}{t} + \frac{\|x\|^2}{4t^2})F_s$, $\partial_{x_j} F_s = -\frac{\|x\|^2}{4t} F_s$ d'où $\Delta F_s = (-\frac{n-1}{2t} + \frac{\|x\|^2}{4t^2})F_s$ et au total $\Gamma(F_s) = (s + \frac{n-1}{2})F_{s-1}$.

4. F_s définit une distribution localement intégrable T_s pour $\mathrm{Re}\, s > -\frac{n+1}{2}$ et il est clair que l'application $s \mapsto T_s$ est holomorphe sur ce domaine. Pour $\mathrm{Re}\, s$ assez grand (par exemple $\mathrm{Re}\, s > 2$), F_s et ses dérivées premières ou secondes comme ci-dessus sont continues; on peut intégrer par parties et on obtient $\Gamma(T_s) = (s + \frac{n+1}{2})T_{s-1}$.

Par prolongement analytique cette relation reste vraie dans son domaine de définition, c'est à dire pour l'instant $\mathrm{Re}\,(s-1) > -\frac{n+1}{2}$.

5. Cette relation montre par récurrence que $s \mapsto T_s$ se prolonge de façon méromorphe dans tout le plan complexe, avec des pôles simples aux points $-\frac{n+1}{2} - k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$T_s = \frac{1}{s + \frac{n+1}{2}}\ T_{s+1} = \cdots = \frac{1}{(s + \frac{n+1}{2})(s + \frac{n+1}{2} + 1)\cdots(s + \frac{n+1}{2} + k - 1)}\ T_{s+k}$$

6. $(4\pi)^{-\frac{n-1}{2}} T_{-\frac{n-1}{2}}$ est la solution élémentaire de Γ (cours), donc $\Gamma(T_{-\frac{n-1}{2}}) = (4\pi)^{\frac{n-1}{2}}\delta$.

II. 1. On a $u^s = \exp s(\log|u| + i\mathrm{Arg}\, u)$ donc $|u^s| = \exp(\mathrm{Re}\ s\log|u| - \mathrm{Im}\ s\mathrm{Arg}\, u)$. Comme $|\mathrm{Arg}\, u| \leq \pi$, on a $e^{-\pi|\mathrm{Im}\ s|} \leq \frac{|u^s|}{|u|^{\mathrm{Re}\ s}} \leq e^{\pi|\mathrm{Im}\ s|}$.

2. u^s est localement intégrable ssi $|u|^{\mathrm{Re}\ s}$ l'est. Comme u ou $|u|$ est semihomogène de poids 1 quand on attribue à x_n le poids 1 et à x' le poids $\frac{1}{2}$, $|u|^{\mathrm{Re}\ s}$ est localement intégrable (au voisinage de 0) ssi $\mathrm{Re}\, s > -(1 + \frac{n-1}{2}) = -\frac{n+1}{2}$.

3. Alors u^s_ϵ tend vers u^s au sens des fonctions localement intégrables donc des distributions.

4. On a noté U_s la distribution, pour l'instant définie pour $\mathrm{Re}\, s > -\frac{n+1}{2}$. On a $\frac{\partial u}{\partial x_n} = 1$ donc $\frac{\partial u^s}{\partial x_n} = su^{s-1}$, au moins en dehors de l'origine. Pour $\mathrm{Re}\, s > -\frac{n-1}{2}$ les deux sont localement intégrables, on peut intégrer par parties et on obtient $\frac{\partial U_s}{\partial x_n} = sU_{s-1}$ (au sens des distributions).

5. L'application $s \mapsto U_s$ est évidemment holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > -\frac{n+1}{2}$ et 4. montre qu'elle se prolonge de façon méromorphe à $\mathbb{C}$, avec au plus des pôles pour $s = -1, -2, \ldots$ Comme elle est en fait holomorphe au voisinage de $s = -1 > -\frac{n+1}{2}$ ($n \geq 2$) il n'y a pas de pôle du tout (d'ailleurs on sait que la distribution $\lim_{\epsilon \to +0}(u + i\epsilon)^s$ existe toujours).

6. On a $U_{-1} = \frac{1}{x_n + \frac{i}{2}\|x'\|^2}$, d'où $\mathcal{F}_{x_n} U_{-1} = -iY(\xi_n)e^{-\frac{1}{2}\xi_n\|x'\|^2}$ (solution élémentaire tempérée de $(i\frac{\partial}{\partial \xi_n} + \frac{i}{2}\|x'\|^2)$, et $\mathcal{F}U_{-1} = -i(\frac{2\pi}{\xi_n})^{\frac{n-1}{2}}\ Y(\xi_n)e^{-\frac{\|\xi'\|^2}{2\xi_n}}$ (à comparer à la solution élémentaire de l'équation de la chaleur).

7. On a $P_j(U_s) = 0; P_n(U_s) = sU_s$ pour $\mathrm{Re}\, s$ assez grand donc pour tout s. Supposons qu'une distribution T vérifient ces mêmes équations. Alors en dehors de l'origine on a $P_j u^{-s}T = P_n u^{-s}T = 0$ ce qui entraîne évidemment $\partial_k u^{-s}T = 0$ pour $k = 1 \ldots n$, donc en dehors de 0, on a $T = cU_s$ avec $c =$ constante, puisque $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est connexe ($n \geq 2$).

Alors $S = T - cU_s$ est portée par 0, et on a toujours $P_j(S) = 0$ si $j < n$. Pour N assez grand on a $x_1^N S = 0$; ceci implique $(P_1 x_1^N - x_1^N P_1)(S) = Nx_1^{N-1}S = 0$ et par récurrence $N!S = 0$, donc $T = cU_s$.

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
8 Septembre 2003, 14-18h - Patio 15-26–02 - Aucun document n'est autorisé

I. Soit f une fonction numérique localement intégrable sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. On suppose qu'il existe des nombres $s \in \mathbb{R}, c > 0$ tels que $f(x) \leq c\|x\|^{-s}$ pour $\|x\| < 1$.

1. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ ces conditions assurent-elles que f est intégrable au voisinage de 0?

2. f définit une distribution sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$: montrer que celle-ci se prolonge toujours en une distribution sur $\mathbb{R}^n$ tout entier.

3. Que peut-on dire de la différence $f_1 - f_2$ si f_1 et f_2 sont deux distributions prolongeant f à $\mathbb{R}^n$?

II. 1. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ sur $\mathbb{R}$?

2. Soient $a_1, \ldots, a_n$ n nombres > 0. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\frac{1}{2}\sum a_j x_j^2}$ sur $\mathbb{R}^n$?

3. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$ symétrique à coefficients complexes. À quelle condition la distribution $\Phi_A = e^{-\frac{1}{2}\langle Ax.x\rangle}$ est-elle tempérée? (montrer que cette condition ne porte que sur la partie réelle ReA).

4. On suppose A réelle $\gg 0$. Montrer que la transformée de Fourier de $\Phi_A = e^{-\frac{1}{2}\langle Ax.x\rangle}$ est $\widehat{\Phi}_A = Ce^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}\xi.\xi\rangle}$ où C est une constante qu'on déterminera en fonction de A.

5. Montrer qu'un résultat analogue est valable pour A complexe, det$A \neq 0$, Re$A \geq 0$.

6. Soit $A = (a_{ij})$ comme ci-dessus. Sur $\mathbb{R}^{n+1}$ (variables $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$) on considère l'opérateur différentiel:

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Montrer que si A est inversible, Re$A \geq 0$, P admet une solution élémentaire de la forme

$$E = C\ t^k\ Y(t)\ e^{-\frac{1}{4t}\langle {}^tA^{-1}x.x\rangle}$$

où C, k sont des constantes qu'on calculera en fonction de A et n.

$Y(t)$ désigne la fonction de Heaviside: $Y(t) = 1$ si $t \geq 0$, 0 sinon.

CORRIGÉ

I.1.Pour $s < n$

2. Ça se prolonge toujours. Par exemple $\int f\phi$ est convergente si $\phi \in C_0^\infty$ s'annule à l'ordre N si $N + n - s > 0$, et l'espace des fonctions test nulles d'ordre N est (fermé) de codimension finie: on peut prolonger n'importe comment sur un supplémentaire.

3. f_1, f_2 diffèrent par une distributions de support $\subset \{0\}$, i.e. combinaison linéaire de dérivées de la masse de Dirc δ.

II. 1. $\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$

2. $(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod (a_j)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2} \sum \frac{1}{a_j} \xi_j^2)$

3. Si $q(x)$ est une forme quadratique rélle les dérivées de $e^{\pm iq}$ sont chacune majorée par une puissance $\|x\|^N$ pour $\|x\|$ grand, de sorte que $e^{\pm iq}T$ est tempérée ssi T l'est. Le fait que $e^{-\frac{1}{2}Ax.x}$ soit tempéré ne dépend donc que de ReA. C'est évidemment tempéré (borné) si Re$A \geq 0$. La réciproque est vraie parce que (à une variable) $e^{+\epsilon x^2}$ n'est pas tempéré (cours).

4. $(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp {}^t A^{-1} \xi.\xi$. On le voit en faisant le changement de varibles linéaire $y = \sqrt{A} x$ (ou, de façon équivalents, en se ramenant à 2. en choisissant une base orthonormale convenable).

5. Par prolongement analytique et continuité le résultat vaut aussi si A est à coefficients complexes, det$A \neq 0$, Re$A \geq 0$. Il faut prendre la branche de $\sqrt{\det A}$ qui est holomorphe dans le domaine ainsi défini, et positive pour A réel positif.

6. P admet pour solution élémentaire tempérée la distribution E qui a pour transformée de Fourir partielle en x

$$\mathcal{F}_x E = Y(t) e^{-tA\xi.\xi}$$

D'où l'assertion de l'énoncé, avec $k = -\frac{n}{2}, C = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det 2A)^{-\frac{1}{2}}$ (il ne faut pas oublier le acteur $(2\pi)^{-n}$ pour la transformation de Fourier inverse).

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
21 Novembre 2003, 8h30-11h30 - 55-56 salle 105 Aucun document n'est autorisé

I.1) Soient T une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, $\widehat{T}$ sa transformée de Fourier. Calculer la transformée de Fourier de la distribution $e^{iax}T$ et de la translatée $\tau_b T = T(x-b)$ en fonction de $\widehat{T}$.

2) On note δ_n la masse de Dirac placée au point $n \in \mathbb{Z}$, et on définit une distribution P par

$$P = \sum \delta_n \qquad (\langle P, \phi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n)).$$

Montrer que P est tempérée, et qu'on a $P(x-1) = P, (e^{2\pi i x} - 1)P = 0$.

3) Montrer qu'on a $\widehat{P}(\xi-\alpha) = \widehat{P}, (e^{i\beta\xi}-1)\widehat{P} = 0$ où α, β sont des constantes, qu'on calculera.

4) Soient S une distribution, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que $fS = 0$. On suppose que f a dans un intervalle $]a,b[$ un seul zéro simple x_0 ($f(x_0) = 0, f'(x_0) \neq 0, f(x) \neq 0$ pour $x \in]a,b[, x \neq x_0$). Montrer que la restriction $S|_{]a,b[}$ est de la forme $c\delta_{x_0}$, où c est une constante.

Montrer qu'on a $P = C\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$, où C est une constante.

5) Calculer la constante C.

II. Sur $\mathbb{R}^3$ on note E la distribution (fonction localement intégrale) $E = \frac{-1}{4\pi\|x\|}$, f la fonction caractéristique de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ ($f(x) = 1$ si $\|x\| \leq 1$, 0 sinon), et F le produit de convolution $F = E * f$.

1) Calculer la distribution ΔF. Montrer que F est une fonction continue.

2) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ soit X_{ab} la couronne $a < \{\|x\| < b\}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer quelles sont les distributions T sur X_{ab} harmoniques ($\Delta T = 0$) et invariantes par rotation ("ne dépendant que de $\|x\|$").

3) Calculer F pour $\|x\| > 1$ (on pourra chercher un équivalent de F pour $x \to \infty$).

4) Montrer qu'il existe un nombre μ tel que $F - \mu\|x\|^2$ soit harmonique pour $\|x\| < 1$. Montrer qu'on a $F = \mu\|x\|^2 + \gamma$ pour $\|x\| < 1$, où γ est une constante. Calculer μ et γ.

5) Mêmes questions pour $E * S$ où S est la distribution $\langle S, \phi\rangle = \int_{\|x\|=1} \phi(x)d\sigma(x)$ (intégrals de ϕ sur la sphère de rayon 1, pour la mesure d'intégration usuelle).

CORRIGÉ

I. Il s'agit de la formule de Poisson: $\sum f(n) = \sum \hat{f}(2\pi n)$. On l'applique en particulier à la fonction $f = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

1) On a $\mathcal{F}(e^{iax}T) = \widehat{T}(\xi - a), \mathcal{F}(T(x-b)) = e^{ib\xi}\widehat{T}$.

2) Les deux égalités sont évidentes. Une distribution périodique est toujours tempérée.

3) Évident avec $\alpha = 2\pi, \beta = 1$.

4) Si f s'annule en x_0 on a $f\delta_{x_0} = 0$. Inversement si f s'annule à l'ordre 1 en x_0 et pas ailleurs, i.e. $\frac{f}{x-x_0}$ est inversible, donc $fT = 0$ quivaut à $(x-x_0)T = 0$ i.e. $T = d\delta_{x_0}$ ($c =$ constante).

5) $C = 1$. Première preuve: on a $\mathcal{F}(P) = CP(\frac{x}{2\pi})$ d'où $\mathcal{F}(CP(\frac{x}{2\pi})) = C2\pi CP(x) = \mathcal{F}\mathcal{F}(P) = 2\pi P$, donc $C^2 = 1$. En outre on a $C > 0$ car $\langle \widehat{P}, e^{-\frac{1}{2}x^2}\rangle = \langle P, \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}x^2}\rangle > 0$

Deuxième preuve: soit $\phi \in \mathcal{S}$; alors $f = \sum \phi(x+n)$ est périodique C^∞: on a $f = \sum f_n e^{2i\pi nx}$ avec $f_n = \int_0^1 e^{-2i\pi nx} f(x)dx = \widehat{\phi}(2\pi n)$. En particulier $f(0) = \sum \phi(n) = \sum f_n = \sum \widehat{\phi}(2\pi n)$. Ceci implique $C = 1$.

II.1) E est solution élémentaire de Δ et f à support compact. Donc $\Delta F = f$.

$F(x) = \frac{-1}{4\pi}\int \frac{\psi(x-y)}{\|y\|}dy$ (ψ la fonction caractéristique de la boule unité) est continue d'après le théorème de Lebesgue.

2) $T = \frac{\alpha}{\|x\|} + \beta$ avec α, β constantes. Si $0 \in X_{ab}$ $(a > 0, b < 0)$, T doit être de classe C^∞ à l'origine donc $\beta = 0$

3) F est invariante par rotation; pour $\|x\| \to \infty$ on a $F(x) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\|y\|<1}\frac{dy}{\|x-y\|} \sim \frac{-1}{3\|x\|}$ (parceque le volume de la boule unité est $\frac{4\pi}{3}$), donc $F = \frac{-1}{3\|x\|}$.

4) Dans la boule unité on a $\Delta F = 1 = \Delta\frac{\|x\|^2}{6}$, donc $F - \frac{\|x\|^2}{6}$ est harmonique ($\mu = \frac{1}{6}$), et comme elle est invariante par rotation elle est constante: $F = \frac{\|x\|^2}{6} + \gamma$. Pour $\|x\| = 0$ on obtient $\gamma = \frac{-1}{4\pi}4\pi\int_0^1 \frac{r^2}{r}dr = -\frac{1}{2}$. (ce qui colle avec le résultat de 3) sur la sphère unité).

5) À L'extérieur de la boule le potentiel est le même que si toute la masse (charge) était placée au centre, et de même pour la force (champ) qui en dérive (le gradient); ceci est vrai pour tous les problèmes où il y a une symétrie de rotation.

Pour la charge sphérique: à l'intérieur le potentiel est constant. il vaut (et il doit se raccorder continument à l'autre côté : il vaut $F(x) = \frac{-1}{4\pi}\int_S \frac{d\sigma(y)}{((y_1-\|x\|)^2+y_2^2+y_3^2)^{\frac{1}{2}}}$ et est continu d'après le théorème de Lebesgue).

Dans la théorie de la gravitation, c'est ce qui justifie, depuis Newton, qu'en première approximation on assimile les planètes, qui sont approximativement sphériques, à des points.

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
26 Janvier 2004, 14h -18h - amphi Astier   Aucun document n'est autorisé

I.1) Pour $s \in \mathbb{C}$ on note f_s la fonction sur $\mathbb{R}$: $f_s(x) = x^s$ si $x > 0$, 0 sinon. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{C}$ f_s est elle localement intégrable?

2) On note alors T_s la distribution définie par f_s. Montrer qu'on $\frac{dT_s}{dx} = sT_{s-1}$ pour $\operatorname{Re} s > 0$. Montrer que l'application $s \mapsto T_s$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

3) Déterminer les pôles et les parties polaires de la fonction $s \mapsto T_s$. (Si ϕ est une fonction test, on pourra examiner l'intégrale $\int_0^1 x^s \phi(s)dx$ en utilisant le développement de Taylor à l'ordre N de ϕ).

II. Sur $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ on note $t = x_1, x = (x_2, \dots, x_n)$, $\Box = \partial_t^2 - \sum_2^n \partial_{x_j}^2$ (opérateur des ondes), et F la fonction

$$F_s(t,x) = \begin{cases} (t^2 - \|x\|^2)^s & \text{si } \ 0 < \|x\| = (x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} < t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs de s la fonction F_s est-elle localement intégrable (i) dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ (ii) au voisinage de 0 ?

2) On note alors E_s la distribution définie par F_s. Montrer qu'il existe un polynôme $a(s)$, qu'on déterminera, tel que $\Box E_s = a(s) E_{s-1}$ pour Res assez grand.

3) Montrer que l'application $s \mapsto E_s$ se prolonge en une application méromorphe sur $\mathbb{C}$. Quels sont les pôles de cette application?

4) On suppose $n = 3$. Montrer que $E_{-\frac{1}{2}}$ est une fonction localement intégrable. Montrer qu'on a $\Box E_{-\frac{1}{2}} = C\delta$ où C est une constante.

Indication: on pourra déduire du problème I que l'application qui à s associe la restriction $E_s|_{\mathbb{R}^n - 0}$ est holomorphe pour $s \neq -1, -2, \dots,$ puis de 2) que $\Box E_{-\frac{1}{2}} = 0$ en dehors de l'origine. Utiliser aussi le fait que $E_{-\frac{1}{2}}$ et $\Box E_{-\frac{1}{2}}$ sont des distributions homogènes (de quel degré?).

5) Calculer la constante C.

III. Sur le plan $\mathbb{R}^2$ on note P l'opérateur différentiel $P = \partial_x + 2ix\partial_y$. On pose $\phi = \phi(x,y) = x^2 + iy$. On note $H \subset \mathbb{C}$ le demi-plan ouvert $\operatorname{Re} z > 0$, $\overline{H}$ le demi-plan fermé $\operatorname{Re} z \geq 0$.

1) Pour $s \in \mathbb{C}$ on définit $\phi^s = e^{s \log \phi}$ ($\log \phi = \log |\phi| + i \arg \phi$ avec $|\arg \phi| < \frac{\pi}{2}$). Pour quelles valeurs de s la fonction ϕ^s est-elle localement intégrable?

2) Montrer qu'on a $P(\phi) = 0$. Soit $f(z)$ une fonction continue sur $\overline{H}$, holomorphe dans le demi-plan ouvert H. Montrer qu'on a $f(\phi) = \lim_{\epsilon \to +0} f(\phi + \epsilon)$. Montrer qu'on a $P(f(\phi)) = 0$

3) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans H; pour N entier ≥ 0 on note f_N une primitive d'ordre N de f ($f_N^{(N)} = f$). On dit que $f(z)$ est modérée si pour tout $R > 0$ il existe $\nu, c > 0$ tels que $|f(z)| \leq c(\operatorname{Re} z)^{-\nu}$ pour $|z| \leq R$, $\operatorname{Re} z > 0$. Montrer qu'alors, pour tout $R > 0$, f_N se prolonge continument au demi-disque $\operatorname{Re} z \geq 0, |z| \leq R$ pour N assez grand.

4) Montrer que pour tout s $(\phi+\epsilon)^s$ a une limite distribution pour $\epsilon \to +0$. Plus généralement, avec les notations de 3), montrer que si f est modérée, la fonction $f(\phi+\epsilon)$ a une limite T_f (au sens des distributions) pour $\epsilon \to +0$. Montrer qu'on a $P(T_f) = 0$.

5) Question subsidiaire: la réciproque est-elle vraie, i.e. une distribution T telle que $P(T) = 0$ est- elle toujours de la forme T_f où f est holomorphe modérée dans H?

EDP - Janvier 2004 - Corrigé

I.1) x_+^s est intégrable pour $\mathrm{Re}\, s > -1$
2) on a $\partial_x T_s = sT_{s-1}$ si $\mathrm{Re}\, s > 0$ i.e. si T_{s-1} est localement intégrable (pour $\mathrm{Re}\, s > 1$ il s'agit d'une dérivée au sens usuel, continue). pour $s = 0$: on a $\partial_x T_0 = \delta \neq 0$. Cette ëquation montre que $s \mapsto T_S$ se prolonge en une fonction méromorphe, avec des pôles simples pour $s = -1, -2, \ldots$.
3) On a $T_s = \frac{1}{s+1}\partial_x T_{s+1}$. Pour $s \to -1$ ça donne $T_s \sim \frac{\delta}{s+1}$ i.e. le résidu est δ. Par récurrence se résidu en $s = -k-1$ est $\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}$. (Autre preuve: $\langle T_s, \phi\rangle - \int_0^1 x^s\phi(x)dx + \mathrm{holo}(s) = \int_x > 1 x^s\phi(x)dx$ se prolonge holomorphiquement dans $\mathbb{C}$. La formule de Taylor s'écrit $\phi = \sum_k > N\phi^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \phi_N x^N$ où ϕ_N est C^∞. Donc $\sum_{k<N}\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!(s+k+1)}+$ (fonction holo pour $\mathrm{Re}\, s > -N$), donc $T_s = \sum_{k<N}\frac{(-1)^k}{k!(s+k+1)}\delta^{(k)}+$ (fonction holo pour $\mathrm{Re}\, s > -N$).

II.1) loi de $0, F_s$ est localement intégrable pour $\mathrm{Re}\, s > -1$, comme dans I. Il faut de toute façon $\mathrm{Re}\, s > -1$, et comme F_s est homogène de degré $2s$, elle est intégrable près de 0 si en plus $2s > -n$, ce qui est vrai si $n \geq 2$.
2) Le calcul donne $\Box E_s = 2s(2s+n-2)E_{s-1}$, au moins pour $\mathrm{Re}\, s > 2$ (alors E_s est de classe C^2), en fait dès que les deux membres sont définis ($\mathrm{Re}\, s - 1 > -1$) parce que $s \mapsto E_s$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > -1$.
3) Ceci montre que $s \mapsto E_s$ a un prologement méromorphe, avec des pôles au plus doubles (simples si n est impair) pour $s = -1, -2, \ldots$ ou $s = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, -\frac{n}{2} - 2, \ldots$
4) Le pb. 1. montre que $s \mapsto E_s|_{R^n - 0}$ est holomorphe pour $s \neq -1, -2; \ldots$ donc $E_{-\frac{3}{2}}|_{R^n-0}$ est bien définie et, en dehors de l'origine, $\Box E_{-\frac{1}{2}}|_{R^n-0} = 2(-\frac{1}{2})(2(-\frac{1}{2}) + 3 - 2)E_{-\frac{3}{2}}|_{R^n-0} = 0$. Comme $E_{-\frac{1}{2}}$ est homogène de degré $-1, \Box E_{-\frac{1}{2}}$ est homogène de degré -3 de support $\{0\}$ donc de la forme $C\delta$.
5) La transformée de Fourier en x de la solution élémentaire avancée de l'équation des ondes est $\frac{t|\xi|}{\xi|}$ (cours). Donc pour $t > 0$ on a $\mathcal{F}_x E_{-\frac{1}{2}} = C\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$. Pour $t = 1, \xi = 0$ celà donne $C = \int_{\|x\|<1}\frac{d^2x}{\sqrt{1-\|x\|^2}} = 2\pi\int_0^1\frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = \pi\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u}} = 2\pi$

III. 1) $|\phi^s| = e^{Re(s\log\phi)} = e^{Re\, s\log|\phi| - Im\, s Arg\phi}$ a même ordre de grandeur que $|\phi|^{Re\, s}$, parce qu'on a $|\mathrm{Im}\,\phi| < \frac{\pi}{2}$ donc $e^{-\frac{\pi}{2}|Im\, s|} \leq e^{-Im\, s Arg\phi} \leq e^{\frac{\pi}{2}|Im\, s|}$.
ϕ est semi-homogène de poids 2 pour x de poids 1, y de poids 2; donc ϕ^s est intégrable au voisinage de 0 ssi $2s > -3 = -$(poids de $x+$ poids de y).
2) $P(f(\phi)) = 0$ est évident si f est de classe C^1 sur $\overline{H}$. En particulier $P(f(\phi/\epsilon)) = 0$ si $\epsilon > 0$. Comme $f(\phi + \epsilon) \to f(\phi)$ au sens des distributions (en fait uniformément sur tout compact) on a $P(f(\phi) = \lim P(f(\phi + \epsilon)) = 0$.
3) (c'est une question de cours) Si $\nu > 1$, resp. $\nu = 1, 0 < \nu < 1, \nu = 0$, une primitive de f est majorée, pour $|z| \leq R$, par $Cx^{-\nu+1}$, resp. $C|\log x|$, resp. est bornée, resp. continue. Par récurrence on voit, si $|f| \leq Cx^{-\nu}$ pour $x > 0, |z| \leq R$, f_N se prolonge continument au domaine $x \geq 0, |z| \leq R$ poue N assez grand ($N > \nu + 1$). (noter que deux primitives d'ordre N diffèrent par un polynôme de degré $< N$ donc le choix d'une primitive est indifférent.
4) Alors $f(\phi+\epsilon)$ a une limite distribution T pour $\epsilon \to 0$ (pour $|x^2+iy| < R$ c'est $\lim D_y^M f_M(\phi+\epsilon)$ pour M assez grand). A la limite on a aussi $P(T) = 0$.
5) La réciproque indiquée est vraie (cours).

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
6 Septembre 2004, 14h -17h - salle 6, Cuvier   Aucun document n'est autorisé

I.1. On considère l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$: $P = \frac{(}{d}dx)^2 + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ donné).

(i) Déterminer les solutions élémentaires de P (on rappelle qu'une solution élémentaire est une distribution E telle que $PE = \delta$).

(ii) Déterminer une solution élémentaire E_+ de support la demi-droite positive $\mathbb{R}_+$. Y en a-t-il plusieurs?

(iii) Déterminer les solutions élémentaires tempérées de P.

2. Sur $\mathbb{R}^n$ on considére l'opérateur différentiel $Q = ((\frac{\partial}{\partial x_1})^2 + \lambda_1) \ldots ((\frac{\partial}{\partial x_n})^2 + \lambda_n)$

(i) Déterminer une solutions élémentaire de Q de support le "premier quadrant" $\{x_i \geq 0\}$.

(ii) Déterminer une solution élémentaire tempérée de Q.

3. Comment faut-il modifier ce qui précède si les λ_i sont des nombres complexes plutôt que réels?

II. Sur $\mathbb{R}^3$ on note $x = (x_1, x_2, x_3)$ la variable,
$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\Delta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial}{\partial x_3})^2$.

1. (Question de cours) Soit $F = f(r)$ une fonction de classe C^2 ne dépendant que de r. Montrer qu'on a $\Delta F = (a(\frac{\partial}{\partial r})^2 + b\frac{\partial}{\partial r})f(r)$ où a, b sont des fonctions de r qu'on déterminera.

2. On pose $f_{s,\lambda} = r^s e^{\lambda r}$. Pour quelles valeurs de s $f_{s,\lambda}$ est-elle localement intégrable sur $\mathbb{R}^3$? Lorsqu'il en est ainsi, pour quelles valeurs de λ définit-elle une distribution tempérée?

3. Montrer qu'on a $\Delta f_{s,\lambda} = af_{s-2,\lambda} + bf_{s-1,\lambda} + cf_{s,\lambda}$ où a, b, c sont des fonctions polynomiales de s, λ, qu'on déterminera.

4. On note $F_{s,\lambda}$ la distribution définie par $f_{s,\lambda}$ pour $\operatorname{Re} s$ assez grand. Montrer que la fonction $s \mapsto F_{s,\lambda}$, est holomorphe pour $\operatorname{Re} s$ assez grand, et se prolonge en une fonction méromorphe ayant au plus des pôles en des poinsts réels $s_K < 0$. Quels sont les pôles? S'agit-il de pôles simples?

5. Montrer qu'on a $(\Delta - \lambda^2)F_{-1,\lambda} = c\delta$, où c est une constante qu'on calculera.

Corrigé - Épreuve de Septembre 2004

I.1. Les distributions solution de $Pf = 0$ sont les fonctions $f = ae^{sx} + be^{-sx}$ avec $s = \sqrt{-\lambda}$ si $\lambda \neq 0$, resp. $f = ax + b$ si $\lambda = 0$.

Elles sont toutes tempérées si s est imaginaire pur (λ réel > 0), ou si $\lambda = 0$; sinon aucune ne l'est (cours).

(i) une solution élémentaire est $E_+ = Y(x)\frac{\mathrm{sh}\, sx}{s}$ resp. $E_+ = Y(x)x$ si $\lambda = 0$ (saut de E_+ nul, saut de $E'_+ = 1$) (Y la fonction de Heaviside: $Y(x) = 1$ pour $x > 0$, 0 sinon). Les autres s'obtiennent en ajoutant n'importe quelle solution de l'équation sans second membre.

(ii) E_+ est la seule nulle pour $x < 0$ parce une solution non nulle de l'équation sans second membre ne s'annule pas dans $\mathbb{R}_-$ (ni dans aucun intervalle).

(iii) Si $\lambda \geq 0$ les solutions élémentaires sont toutes tempérées, de la forme $Y(x)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda} + a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x$ (resp. $Y(x)x + ax + b$ si $\lambda = 0$).

Si $\lambda < 0$ l'unique solution élémentaire tempérée est $E = -\frac{1}{2s}(Y(x)e^{-sx} + Y(-x)e^{sx}$

2. Une solution élémentaire de Q portée par le 'premier quadrant" (resp. tempérée) est $f = E_{+,\lambda_1}(x_1)\dots E_{+,\lambda_n}(x_n)$ (resp. $f = E_{T,\lambda_1}(x_1)\dots E_{T,\lambda_n}(x_n)$).

3. Modifications: 3.1(i) et (ii) rien à changer; (iii) rien à changer non plus, #a condition de remplacer dans la dernière formule s par la racine de $-\lambda$ dont la partie rèelle est positive. Moyennant cela, il n'y a plus rien à changer dans 2. non plus.

II.1. On a $\Delta f = (\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n-1}{r})\frac{\partial}{\partial r}\, f$ (ici $n = 3, n - 1 = 2$)

2. $f_{s,\lambda}$ est localement intégrable ssi r^s l'est, i.e. pour $\mathrm{Re}\, s > -3$ (parce que $e^{\pm\lambda r}$ est localement borné). Alors $f_{s,\lambda}$ définit une distributions $F_{s,\lambda}$ localement intégrable; l'application $s \mapsto F_{s\lambda}$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > -3$, i.e. pour toute fonction test $\phi \in C_0^\infty$ l'application $s \mapsto \int \phi f_{s,\lambda}$ l'est - (c'est évident).

3. On a $e^{-\lambda r}(\frac{\partial}{\partial r}\ e^{\lambda r} = \frac{\partial}{\partial r} + \lambda$, d'où $\Delta f_{s,\lambda} = e^{\lambda r}(\frac{\partial}{\partial r} + \lambda + \frac{n-1}{r})(\frac{\partial}{\partial r} + \lambda)\ r^s =$

$$e^{\lambda r}(s(s + n - 2)r^{s-2} + s(2\lambda + n - 1)r^{s-1} + \lambda^2 r^s$$

Ceci est vrai pour $r \neq 0$, mais aussi au sens des distributions si $\mathrm{Re}\, s > 2$ de sorte que $F_{s,\lambda}$ est un fonction de classe C^2 (en fait c'est vrai pour $\mathrm{Re}\, s > -n + 2 = -1$, i.e. dès que les trois termes qui figurent sont localement intgrables).

4. Ceci s'écrit encore

$$F_{s,\lambda} = \frac{1}{(s + 2)(s + 3)}(\Delta F_{s+2,\lambda} - (s + 2)(2\lambda + 4)F_{s+1,\lambda} - \lambda^2 F_{s+2,\lambda})$$

Cette formule est vraie au sens des distributions pour $\mathrm{Re}\, s > -3$. Elle montre que $s \mapsto F_{s;\Lambda}$ se prolonge de façon méromorphe pour $\mathrm{Re}\, s > -4$, avec au plus un pole simple pour $s = -3$. Par récurrence, on voit que $s \mapsto F_{s;\Lambda}$ se prolonge à $\mathbb{C}$ avec au plus des pôles simples pour s entier ≤ -3.

5. La formule ci-dessus montre qu'on a $(\Delta - \lambda^2)F_{-1,\lambda} = 0$ en dehors de l'origine. On a $(\Delta - \lambda)F_{-1,\lambda} = \sum(\delta - \lambda^2)\frac{1}{k!}r^{k-1}$. Or dans cette somme tous les termes sauf le premier sont des fonctions localement intégrables, et ils se compensent en dehors de l'origine. Donc (puisque la solution élémentaire "canonique" de Δ est $-\frac{1}{4\pi r}$)

$$(\Delta - \lambda^2)F_{-1,\lambda} = \Delta(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta.$$

M1 - ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (Cours de M.BOUTET DE MONVEL)
30 mars 2005, 9h30-12h30, Amphi A2

On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$: on note $z = x + iy$; en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$.
On pose $f_{s,m} = r^s e^{mi\theta} = r^{s-m} z^m$ $(m \in \mathbb{Z})$.

1. Pour quelles valeurs de s et m la fonction $f_{s,m}$ est elle localement intégrable?

   $f_{s,m}$ définit alors une distribution notée $T_{s,m}$.

2. Pour $\epsilon > 0$ on définit la distribution $T_{s,m,\epsilon}$ par $\langle T_{s,m,\epsilon}, \phi \rangle = \int_{r>\epsilon} f_{s,m}\phi$.

   (i) Montrer que pour $s = -2, m \neq 0$, $T_{-2,m,\epsilon}$ a une limite pour $\epsilon \to 0$

   (ii) En général, pour quelles valeurs de s et m $T_{s,m,\epsilon}$ a-t-elle une limite pour $\epsilon \to 0$? (on pourra utiliser le développement de Taylor de ϕ sous la forme $\phi \sim \sum a_{pq} z^p \bar{z}^q$

   On notera encore $T_{s,m}$ la distribution limite (lorsqu'elle existe).

3. On pose $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.

   Montrer qu'on a $\frac{\partial}{\partial z} T_{s,m} = c'_{s,m} T_{s',m'}$ resp. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_{s,m} = c"_{s,m} T_{s',m"}$ en fonction des $T_{s',m'}$

   (pour quelles valeurs de s, m cela marche-t-il?)

4. Montrer que l'application qui à s associe la distribution $T_{s,m}$ se prolonge en une fonction méromorphe de s, dont on précisera les pôles, autant que possible.

   On notera encore $T_{s,m}$ la distribution obtenue ainsi par prolongement analytique (lorsqu'elle est définie).

5. (i) Montrer que $T_{s,m}$, quand elle est définie, est une distribution homogène; de quel degré ?

   (ii) Comment $T_{s,m}$ se transforme-t-elle par rotation?

   Soit $\lambda = \rho e^{i\psi} \neq 0$ $(\rho > 0)$ un nombre complexe; notons $T(\lambda z)$ la transformée de T par la similitude $z \mapsto \lambda z$. Montrer qu'on a $T_{s,m}(\lambda z) = c_{s,m}(\lambda) T_{s,m}$ où $c_{s,m}(\lambda)$ est une constante (i.e. indépendante de z) qu'on calculera.

6. Comment la transformée de Fourier $\mathcal{F}T_{s,m}$ se transforme-t-elle par similitude? Montrer qu'il existe une constante $\gamma_{s,m}$ telle que $\mathcal{F}T_{s,m} = \gamma_{s,m} T_{\sigma,\mu}$, où on calculera s', m' en fonction de s, m. (Pour quelles valeurs de s, m ceci marche-t-il?)

7. Montrer qu'on a $\mathcal{F}T_{-1,-1} = aT_{-1,-1}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_{-1,-1} = b\delta$ où a, b sont des constantes. Calculer a et b. ($T_{-1,-1}$ est la fonction localement intégrable $\frac{1}{z}$.)

8. Question subsidiaire: calculer la constante $\gamma_{s,m}$ de la question 6.

Remarque générale: Soit T une distribution définie par une fonction f. Lorsque f est de classe C^1 la dérivée de $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ au sens des distributions coincide avec la dérivée au sens usuel $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Si f n'est pas C^1 en particulier si elle est discontinue, il faut faire plus attention. Par exemple si f' est localement intégrable et f est primitive de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ($f = \int \frac{\partial f}{\partial x_k}+$ fonction$(x_k, j \neq k)$), $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ est bien encore la dérivée de T au sens des distributions. Mais la dérivée de la fonction de Heaviside ($Y(x) = 1$ si $x \geq 0$, 0 si $x < 0$) est δ. Ici il faut faire attention à ce qui se passe à l'origine, où les fonctions $f_{s,m}$ ne sont pas toujours continues. En gros cela marche toujours ici lorsque f et la dérivée considérée sont localement intégrables, mais il faut justifier.

1. On a $|f_{s,m}| = r^s$: c'est intégrable au voisinage de 0 ssi $\mathrm{Re}\, s > -2$.

2. Il y a un problème uniquement au voisinage de 0. Soit $\phi \in C_0^\infty$: $\phi = \sum_{p+q<N} a_{pq} z^p \bar{z}^q + \phi_N$, avec $a_{pq} = \frac{1}{p!q!}\partial_z^p \partial_{\bar{z}}^q \phi(0)$, $\phi_N = O(r^N)$.

   Calculons l'intégrale $\int_{\epsilon<r<1} \phi f_{s,m}$ en coordonnées polaires:

- le terme provenant de ϕ_N a une limite si $\mathrm{Re}\, s + N + 2 > 0$ (intégrale absolument convergente).
- On a $z^p \bar{z}^q = r^{p+q} e^{i(p-q)\theta}$ donc le terme d'indice p, q vaut $\int_\epsilon^1 r^{s+p+q+1} dr \int_0^{2\pi} e^{i(p-q+m)\theta} d\theta$.
- L'intégrale en θ est nulle sauf si $p - q + m = 0$; alors, si $a_{pq} \neq 0$, l'intégrale en r a une limite ssi $\mathrm{Re} s + p + q + 2 > 0$. Les termes non nuls ($p - q = -m$) ont tous une limite pour $\epsilon \to 0$ (et pour toute ϕ) si et seulement $\mathrm{Re} s > -|m| - 2$ (la borne inférieure de $\mathrm{Re} s + p + q + 2$ pour p, q entiers positifs, $p - q = m$ est $\mathrm{Re} s + |m| + 2$).

   En particulier si $s = -2, m \neq 0$ il y a toujours une limite.

3,4. En dehors de 0, on a

$$\frac{\partial}{\partial z} f_{s,m} = \frac{s+m}{2} f_{s-1,m-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_{s,m} = \frac{s+m}{2} f_{s-1,m+1}, \quad \Delta f_{s,m} = (s^2 - m^2) f_{s,m}$$

on le voit en écrivant $f_{s,m} = z^{\frac{s+m}{2}} \bar{z}^{\frac{s-m}{2}}$ ou, en coordonnées polaires

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2re^{i\theta}}(r\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial}{\partial \theta}), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2re^{-i\theta}}(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \theta}), \quad \Delta = 4\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

La même relation vaut pour les distributions $T_{s,m}$, de façon évitente quand il s'agit de fonctions C^1 (resp. C^2 pour Δ), autrement dit si $\mathrm{Re} s > 1$ resp. 2; en fait dès que les dérivées premières resp. et secondes sont localement intégrables et qu'on peut intégrer par parties, i.e. $\mathrm{Re} s > -1$ resp. 0; en fait (cf. ci-dessous) tant que $T_{s,m}$ est bien définie par prolongement analytique.

5. Cette relation montre que $s \mapsto T_{s,m}$ se prolonge de façon méromorphe au plan complexe tout entier, avec seulement des pôles simples pour $s = -|m| - 2, -|m| - 4, \ldots$

   On le voit aussi sur le découpage d'intégrale ci-dessus: $s \mapsto \int_{r>1} f_{s,m}\phi$ est holomorphe dans tout le plan complexe (l'intégrand dépend de façon holomorphe de s). Pour $\mathrm{Re} s$ grand on a

$$\int_{\epsilon<r<1} \phi f_{s,m} = \int_{\epsilon<r<1} \phi_N f_{s,m} + \sum_{p+q>N, p-q+m=0} \frac{1}{p+q+s+2}$$

L'intégrale en ϕ_N est holomorphe au moins pour $\mathrm{Re} s + N + 2 > 0$, celle d'indice p, q a juste un pôle simple pour $s = -(p + q + 2) = -2 - |m| - 2k$ (avec $k = \inf(p, q)$).

6. On a $T_{s,m}(\lambda z) = \rho^s e^{mi\psi} T_{s,m}(z)$: c'est évident si Re$s > -2$, donc encore chaque fois que $T_{s,m}$ est bien défini par prolongement analytique. En particulier $T_{s,m}$ est homogène de degré s et après rotation d'angle ψ elle est multipliée par $e^{mi\psi}$?

7. Par transformation de Fourier ceci donne $\mathcal{F}T_{s,m}(\lambda\zeta) = \rho^{-2-s} e^{mi\psi} \mathcal{F}T_{s,m}(\zeta)$. Pour Re$-s-2 > -2$ i.e. Re$s < 0$, en particulier $-2 <$ Re$s < 0$, ceci implique que $\mathcal{F}T_{s,m}(\zeta)$ est une fonction localement intégrable, proportionnelle à $T_{-s-2,m}$, et de même chaque foi que $T_{s,m}$ et $T_{-s-2,m}$ sont toutes deux bien définies ,par prolongement analytique.

8. En particulier, avec $E = T_{-1,-1} = \frac{1}{z}$, $\mathcal{F}E$ est proportionnelle à E. On a $\mathrm{Log}|z| = \frac{1}{2}\mathrm{Log} z\bar{z}$, $\Delta = 4\,\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, donc (cours) $\Delta \mathrm{Log}|z| = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Log}|z| = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z} = 2\pi\delta$, d'où

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{1}{z}) = \pi\delta \ (b = \pi), \quad \text{et } \frac{i}{2}(\xi + i\eta)\mathcal{F}E = \pi, \quad \text{i.e. } \mathcal{F}\mathrm{E} = -2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{E}\ (\mathrm{a} = -2\mathrm{i}\pi)$$

9. Cas $m = 0$: pour $-2 <$ Re$s < 0$, $f_{s,0} = r^s$ est localement intégrable ainsi que sa transformée de Fourier γr^{-s-2}. On teste contre la fonction gaussienne $\phi = e^{-\frac{1}{2}r^2}$ dont la transformée de Fourier est $\mathcal{F}\phi = 2\pi\phi$:

$$\langle \mathcal{F}\phi, r^s\rangle = (2\pi)^2 \int_0^\infty e - \tfrac{1}{2}r^2 r^s r dr = (2\pi)^2 2^{\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}+1) = \langle \phi, \gamma r^{-s-2}\rangle = \gamma(2\pi)2^{\frac{-s-2}{2}}\Gamma(-\frac{s}{2})$$

$$\text{d'où} \quad \gamma_{s,0} = 2\pi\ 2^{s+1}\frac{\Gamma(1+\frac{s}{2})}{\Gamma(-\frac{s}{2})}$$

Cette relation reste vraie (pour $m = 0$ chaque fois que les deux distributions $T_{s,0}, T_{-s-2,0}$ sont bien définies par prolongement analytique, i.e. si s n'est pas entier pair. Remarquer que si $s = 2k$ est entier pair positif, $T_{s,0}$ est le polynôme $(x^2 + y^2)^k$ et $\mathcal{F}T_{s,0}$ est donc la distribution $(-\partial_\xi + \partial_\eta)^k(2\pi\delta)$ $(2\pi\delta = \mathcal{F}(1))$

Le cas général (par exemple $m > 0$) s'obtient en testant contre la fonction $\bar{z}^m\phi$ (quelle est sa transformée de Fourier?), ou en utilisant les formules de la question 3. On trouve

$$\gamma_{s,m} = 2\pi\ i^{-m}2^{s+1}\frac{\Gamma(1+\frac{m+s}{2})}{\Gamma(\frac{m-s}{2})}$$

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
7 juin 2005 - Durée 4 heures - Aucun document n'est autorisé

I. Sur $\mathbb{R}$ on considère l'opérateur différentiel $P = \frac{d^4}{dx^4} - 1$.

1. Trouver la solution élémentaire de P de support $[0, \infty[$

2. Trouver toutes les solutions élémentaires tempérées de P.

II. On note t, x les coordonnées sur $\mathbb{R}^2$, u la fonction $u(t,x) = (t + ix^2)$, et L l'opérateur différentiel $L = \partial_x - 2ix\partial_t$ (on a $L(u) = 0$)).

1. Soit $f = f(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan complexe $\mathrm{Im}z > 0$, continue dans le demi-plan fermé $\mathrm{Im}z \geq 0$. On note T_f la distribution (fonction continue) $f(t + ix^2)$). Montrer qu'on a $L(T_f) = 0$ (on pourra examiner d'abord la distribution $f(u + i\epsilon)$ pour $\epsilon > 0$).

2. Soit $f = f(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan complexe $\mathrm{Im}z > 0$. On suppose qu'il existe un nombre N et pour tout $R > 0$ une constante c_R tels que $|f| \leq c_R\ (\mathrm{Im}z)^{-N}$ pour $|z| < R$, $\mathrm{Im}z > 0$.

Montrer que la distribution $f(t + ix^2 + i\epsilon)$ a une limite pour $\epsilon \to +0$. On pourra utiliser (montrer) le fait qu'une primitive d'ordre assez élevé de f se prolonge continûment au demi-plan fermé, et qu'on a $\partial_t(f(t + ix^2 + i\epsilon)) = \frac{\partial f}{\partial z}(t + ix^2 + i\epsilon)$.

On note encore cette limite T_f. Montrer qu'on a $L(T_f) = 0$.

3. (i) Montrer que la fonction $\frac{1}{u}$ est localement intégrable. On note E la distribution qu'elle définit. Montrer qu'on a $E = T_f$ avec $f(z) = \frac{1}{z}$.

(ii) Calculer la transformées de Fourier partielle $\mathcal{F}_t E$

(iii) Calculer le transformée de Fourier $\mathcal{F}E$.

(iv) Montrer que la distribution d'une variable $E_x(t) = E(t,x)$ $(x \neq 0)$ a une limite quand $x \to 0$. On note cette limite $E_0 = (t + i0)^{-1}$.

III. Sur $\mathbb{R}^3$ on note les variables $t = x_1, x = (x_2, x_3)$. On note F la fonction telle que $F(t,x) = (t^2 - \|x\|^2)^{-\frac{1}{2}}$ si $\|x\| < t$, 0 sinon.

1. Montrer que F est localement intégrable (on pourra calculer $\int_{t<1} F$). On note E la distribution définie par F.

2. Quel est le support de E? Quel est son support singulier?

Montrer que E est une distribution homogène. De quel degré?

.../...

3. Soit $\Box$ l'opérateur des ondes: $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$ $\ (\Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)$.

(i) Montrer qu'on a $\Box E = 0$ en dehors du cône $\{\|x\| = t\}$.

(ii) On admettra (provisoirement) qu'on a $\Box E = 0$ en dehors de l'origine. Montrer qu'on a $\Box E = C\delta$ où C est une constante.

(iii) Calculer C.

4. Question subsidiaire: indiquer pourquoi on a aussi $\Box E = 0$ en dehors de l'origine (i.e. pour $\|x\| = t \neq 0$).

I.1 Les solutions de $Pf = f^{(4)} - f = 0$ sont combinaisons linéaires de $e^{\pm x}, e^{\pm ix}$. La solution élémentaire de support $\mathbb{R}_+$ est $E_+ = \frac{1}{2}H(x)(\mathrm{sh\,x} - \sin\mathrm{x})$ ($\frac{1}{2}(\mathrm{sh\,x} - \sin\mathrm{x})$ est la seule combinaison telle que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, f'''(0) = 1$).

2. $E = E_+ - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4i}e^{-ix} = \frac{1}{4}(ie^{i|x|} - e^{-|x|})$ est bornée, donc c'est une solution élémentaire tempérée. Les autres sont $E + ae^{ix} + be^{-ix}$ ($ae^x + be^{-x}$ n'est pas tempérée si $(a, b) \neq (0, 0)$, car $e^{\pm x}$ croît trop vite pour $\pm x \to \infty$).

II.1 Si f est C^1 sur le demi-plan fermé, $T_f = f(u)$ est C^1 et on a $LT_f = f'(u)L(u) = 0$ (car L est une dérivation et $L(u) = 0$). Si f est continue sur le demi-plan fermé on a $T_f = \lim_{\epsilon \to +0} f(u + i\epsilon)$ sens des distributions (en fait uniformément sur tout compact); or $f(u + i\epsilon)$ est C^1 donc $L(T_f) = \lim L(f(u + i\epsilon) = 0$.

2. Si f est comme indiquée et $N > 1$, une primitive de f est (localement) $O(y^{-N-1})$ si $N > 1$; si $N = 1$ elle est (localement) $O(|\mathrm{Log} y|)$; alors, ou si $N < 1$, la primitive est (localement) bornée et la suivante continue (localement lipschitzienne) sur le demi-plan fermé. Ainsi les primitives d'ordre $\geq N + 2$ de f sont continues.

Si g est continue dans le demi-plan fermé et $f = \partial_z^k g$ on a $f(u + i\epsilon) = \partial_t^k g(u + i\epsilon)$. Alors $f(t + ix^2 + i\epsilon) = \partial_t^k g(t + ix^2 + i\epsilon)$ tend vers la distribution limite $T_f = \partial_t^k T_g$, et à la limite on a $L(T_f) = \lim L(f(u + i\epsilon)) = 0$.

3. (i) la fonction $\frac{1}{u}$ est localement intégrable: par exemple on a $|\frac{1}{u}| \leq \frac{2}{|t|+x^2}$ donc

$$\int_{|t|<1} |\tfrac{1}{u}| dt dx \leq 2\int_{|t|<1} dt \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{dx}{|t|+x^2} = 2\int_{|t|<1} \pi |t|^{-\frac{1}{2}} dt \ (= 8\pi) < \infty$$

(ii) On a $\int_0^\infty e^{i\tau(t+ix^2+i\epsilon)} = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(e^{-\tau x^2}) = i(t + ix^2 + i\epsilon)^{-1}$

donc $\mathcal{F}_t(\frac{1}{u}) = \frac{2\pi}{i}H(\tau)e^{-\tau x^2}$ (cf. solution élémentaire de $\partial_\tau + x^2$).

(iii) $\mathcal{F}(\frac{1}{u}) = \mathcal{F}_x\mathcal{F}_t(\frac{1}{u}) = \frac{2\pi}{i}H(\tau)\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\, e^{\frac{-\xi^2}{4\tau}}$ (cf. équation de la chaleur).

(iv) La limite est la distribution $(t + i0)^{-1} = \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{\mathrm{t}} - \mathrm{i}\pi\delta$ (cours, ou question 2).

III.1 On a, posant $x = ty$:

$$\int_{t<T} F = \int_0^T dt \int_{|y|<1} \frac{t^2 d^2 y}{\sqrt{t^2(1-|y|^2)}} = \int_0^T t dt \int_{|y|<1} \frac{d^2 y}{\sqrt{1-|y|^2}} = \pi T^2 < \infty.$$ Donc F est localement intégrable.

2. Le support de E est le cône d'onde d'avenir $\{(t, x) \mid \|x\| \leq t\}$ ($t \geq 0$). Le support singulier est le bord de ce cône, où F est discontinue ($\|x\| = t$). Comme F, est localement intégrable, homogène de degré -1, E est homogène de degré -1.

3. (i) On a $\Box F = 0$ donc $\Box E = 0$ hors du support singulier, de même que $\Delta(\frac{1}{r}) = 0$ en dehors de l'origine.

(ii) Si $\Box E$ est nul en dehors de l'origine, elle est porté par 0, donc de la forme $\sum C_\alpha \delta^{(\alpha)}$. Comme c'est une distribution homogène de degré -3 elle est de la forme $C\delta$ (on rappelle que $\delta^{(\alpha)}$ est homogène de degré $-3 - |\alpha|$).

(iii) Pour calculer C on peut par exemple tester contre la fonction e^{-t}, qui est à décroissance rapide sur le support de E: on a $\langle \Box E, e^{-t} \rangle = C = \langle E, \Box e^{-t} \rangle$. Posant encore $x = ty$ on obtient

$$C = \int_0^\infty t e^{-t} dt \int_{\|y<1\|} \frac{d^2 y}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} = 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} = 2\pi$$

4. On peut montrer que $\Box E$ est nulle en dehors de 0 en calculant la transformée de Fourier partielle en x (elle vaut $\frac{2\pi}{\|\xi\|}\sin t\|\xi\|$), ou en observant que dans le calcul des dérivées de distribution partie finie (au sens de Hadamard) il n'y a de probléme que si les exposants sont entiers négatifs; ici le long du cône $\|x\| = t \neq 0$ l'exposant est $\frac{1}{2}$ donc $\Box \text{pf}.F = \text{pf}.\Box F = 0$ en dehors de l'origine (ceci ne marche plus à l'origine qui est un point singulier du cône).

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
6 septembre 2005, 14h–18h - Aucun document n'est autorisé

I. On considère sur $\mathbb{R}$ l'opérateur différentiel $P = (\frac{d}{dx})^3 - (\frac{d}{dx})^2 + \frac{d}{dx} - 1$ ($f \mapsto Pf = f''' - f'' + f' - f$).

1. Quelles sont les solutions de l'équation $Pf = 0$? Quelles sont les solutions tempérées?

2. Montrer que P a une unique solution élémentaire E de support $\mathbb{R}_+$ ($\{x \geq 0\}$); calculer E.

3. Trouver toutes les solutions élémentaires tempérées de P.

II. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. On considère la distribution sur $\mathbb{R}$ $E_\lambda = e^{-\lambda x^2}$

1. On note P_a l'opérateur différentiel $P_a = \frac{d}{dx} + ax$ ($f \mapsto f' + axf$). Pour quelle valeur de a a-t-on $P_a E_\lambda = 0$?

2. Pour quelles valeurs de λ E_λ est-elle tempérée?

3. Quelle est alors l'équation différentielle satisfaite par la transformée de Fourier $\widehat{E_\lambda}$? Montrer que, pour $\lambda \neq 0$ il existe une constante c telle que $\widehat{E_\lambda} = cE_{\lambda'}$, où on calculera λ'.

4. Calculer la constante c en fonction de λ. Que se passe-t-il pour $\lambda = 0$?

III.1 On rappelle qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ est homogène de degré s ($s \in \mathbb{C}$) si $f(\lambda x) = \lambda^s f(x)$ pour $\lambda > 0$. Une distribution T sur $\mathbb{R}$ est homogène de degré s si $T(\lambda x) = \lambda^s T$ pour $\lambda > 0$ (rappeler ce que cela signifie).

On note E_s resp. D_s l'ensemble des fonctions (resp. distributions) homogènes de degré s sur $\mathbb{R} - \{0\}$ (resp. $\mathbb{R}$).

2. Montrer que toute $f \in E_s$ est de classe C^∞. Pour quelles valeurs de s une fonction $f \in E_s$ est-elle intégrable au voisinage de $\{0\}$?

3. Montrer que si $F \in E_s$ (resp. D_s) on a $\frac{d}{dx}F \in E_{s-1}$ (resp. D_{s-1}) et $xF \in E_{s+1}$ (resp. D_{s+1}). Montrer qu'on a $F \in E_s$ (resp. D_s) si et seulement si $x\frac{d}{dx}F = sF$.

4. Si $T \in D_s$, sa restriction à $\mathbb{R} - \{0\}$ est homogène de degré s. On note N_s le noyau de l'opérateur de restriction $\rho_s : D_s \to E_s$. Pour quelles valeurs de s a-t-on $N_s \neq 0$?

5. Montrer que si s n'est pas entier < 0 la restriction ρ_s est une bijection $D_s \to E_s$ (on pourra examiner d'abord le cas Re$s > -1$, puis procéder par récurrence sur s en utilisant 2.). Que se passe-t-il pour $s = -1, -2, \ldots$? Quelle est le dimension des espaces vectoriels E_s, D_s?

EDP - Corrigé de l'examen du 6 septembre 2005

I.1 Les racines du polynôme $T^3 - T^2 + T - 1$ sont $1, \pm i$ donc les solutions distribution de l'équation (1) $Pf = 0$ sont les combinaisons linéaires de e^x, e^{ix}, e^{-ix}. Les solutions tempérées sont les combinaisons de e^{ix}, e^{-ix} (de la forme $a\cos x + b\sin x$): $e^{\pm ix}$ est bornée, donc tempérée, e^x ne l'est pas (cours).

2. La solution élémentaire ($PE = \delta$) de support $\mathbb{R}_+$ est $E = H(x)f$ (H la fonction de Heaviside), où f est la solution de (1) telle que $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 1$: $f = \frac{1}{2}(e^x - \cos x - \sin x)$.

3. $E - \frac{1}{2}e^x$ est une solution élémentaire, et c'est une fonction bornée, donc tempérée. Les autres solutions élémentaires tempérées s'obtiennent en ajoutant n'importe quelle solution tempérée $a\cos x + b\sin x$.

II.1. E_λ est une fonction C^∞. On a $E'_\lambda = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$, donc $P_a E_\lambda = 0$ si $a = 2\lambda$. Toute solution de cette équation est proportionnelle à E_λ (cours).

2. E_λ est tempérée ssi $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$ (cours) - on rappelle la preuve: posons $\lambda = \alpha + i\beta$ avec α, β réels: chaque dérivée de $e^{\pm i\beta x^2}$ est majorée par un polynôme, donc E_λ est tempérée ssi $e^{-\alpha x^2}$ l'est ($e^{\pm i\beta x^2}\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'$); et $e^{-\alpha x^2}$ est tempérée ssi $\alpha \geq 0$ (pour $-\alpha > 0, e^{-\alpha x^2}$ croît trop vite à l'infini pour être tempéré, comme e^x (cours)).

3. On a $\mathcal{F}(P_a E_\lambda)(\xi) = (i\xi + 2ai\frac{d}{d\xi})\widehat{E}_\lambda(\xi)$. Si $\lambda \neq 0$ cela donne $P_b \widehat{E}_\lambda = 0$ avec $b = \frac{1}{2\lambda}$ donc $\widehat{E}_\lambda = c\widehat{E}_{\lambda'}$ avec c constante, $\lambda' = \frac{1}{4\lambda}$.

4. Pour $\|ambda$ réel on a $c = \int E_\lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$, cette relation est encore vraie pour $\mathrm{Re}\lambda > 0$ et à la limite pour $\lambda \neq 0$ imaginaire pur, à condition de prendre la racine d'argument compris entre $-\frac{\pi}{2}$et$\frac{\pi}{2}$.

   Pour $\lambda = 0$ on a $E_0 = 1$ et $\widehat{E}_0 = 2\pi\delta$.

III.1. Par définition $\langle T(\lambda x), u\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle T, u(\frac{x}{\lambda})\rangle$

2. De part et d'autre de 0 f est proportionnelle à $|x|^s$ donc C^∞: $f = c_+ x_+^s + c_- x_-^s$; E_s est de dimension 2. $f \in E_s$ est intégrable au voisinage de 0 ssi $\mathrm{Re}s \geq -1$ (ou si f=0). (Remarque si T est une distribution homogène de degré s sur $\mathbb{R} - 0$, $|x|^{-s}T$ est bien définie et homogène de degré 0, donc constante de chaque côté de 0 - de même qu'une distribution invariante par translations est constante).

3. Si f est une distribution sur $\mathbb{R} - 0$ on a $(x\frac{d}{dx} - s)f = |x|^{s+1}\frac{d}{dx}|x|^{-s}f = 0$ ssi $|x|^{-s}f$ est (localement) constante. Pour les distributions au voisinage de 0 il faut dire autrement: pour toute fonction dérivable, donc à la limite pour toute distribution, on a $\lambda\frac{d}{d\lambda}[T(\lambda x)] = [x\frac{d}{dx}T](\lambda x)$, donc si $(x\frac{d}{dx} - s)T = 0$, on a $(\lambda\frac{d}{d\lambda} - s)[T(\lambda x)] = 0$: alors $T(\lambda x)$ est proportionnel à λ^s, donc égal à $\lambda^s T(x)$ (N.B. $\lambda \mapsto T(\lambda x)$ est une fonction de $\lambda \in \mathbb{R}_+$ à valeurs dans l'espace des distributions).

4. Si $T \in N_s$, son support est $\{0\}$ donc $T = \sum a_k \delta^{(k)}$ (cours). Alors $T(\lambda x) = \sum \lambda^{-1-k} a_k \delta^{(k)}$, de sorte que T est homogène de degré s ssi s est entier < 0 et la somme contient un seul terme avec $k = -s - 1$.

5. Pour $\mathrm{Re}s > -1$ on a $N_s = 0$; toute fonction $f \in E_s$ est localement intégrable et se prolonge de façon unique en une distribution homogène donc ρ_s est bijectif. On a $x\frac{d}{dx} = s$ sur D_s et E_s, de sorte que x resp. $\frac{d}{dx}$ est une bijection $E_s \to E_{s+1}$ et $D_s \to D_{s+1}$ (resp. $E_s \to E_{s-1}$ et $D_s \to D_{s-1}$), sauf pour $s = -1$ (resp. $s = 0$). Par récurrence il s'ensuit que

ρ_s est bijectif, sauf pour $s = -1, -2, \ldots$. On a vu que E_s est de dimension 2, donc aussi D_s si $s \neq -1, -2, \ldots$. En fait c'est encore vrai dans le cas exceptionnel (s entier < 0): on a $\mathcal{F}D_s = D_{-s-1}$; pour s non entier ≥ 0 D_s a pour base les deux distributions $(x \pm i0)^s$. Pour s entier < 0 x^s est bien restriction d'une distribution homogène, pas $(\operatorname{sgn} x)x|^s$.

M1 - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
14 mars 2006 - Durée 2 heures - Aucun document n'est autorisé

Le partiel n'a pas eu lieu pour cause CNE

I. Soit $P(x) = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha x^\alpha$ un polynôme de degré N sur $\mathbb{R}^n$[2]. Montrer que P est une distribution tempérée. Quelle est la transformée de Fourier $\widehat{P}$?

II.1 Sur $\mathbb{R}$ on considère l'opérateur différentiel $P_1 = \frac{d}{dx}$. Trouver une distribution E_1 de support $\mathbb{R}_+$ telle que $P_1 E_1 = \delta$ (solution élémentaire avancée de P_1)? E_1 est-elle unique?

2. Sur $\mathbb{R}^2$, trouver une (la?) solution élémentaire E_2 ($P_2 E_2 = \delta$) de l'opérateur $P_2 = (\partial_{x_1} + 1)(\partial_{x_2} + 1)$ portée par le premier quadrant $(x_1, x_2 \geq 0)$.

Y a-t-il une généralisation à $\mathbb{R}^n$?

III. Pour $s \in \mathbb{C}$ on note f_s la fonction sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x^s$.

1. Pour quelles valeurs de s f_s est-elle intégrable au voisinage de 0 (resp. de l'infini)?

2. On dit qu'une distribution (ou une fonction) sur $\mathbb{R}_+$ est prolongeable si c'est la restriction d'une distribution sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour quelles valeurs de s f_s est-elle prolongeable? Le prolongement est-il une distribution tempérée?

3. La fonction $\exp f_1$ ($= e^x$ pour $x > 0$) est prolongeable parce que localement intégrable. Le prolongement est-il tempéré?

La fonction $\exp f_{-1}$ ($= e^{1/x}$ sur $\mathbb{R}_+$) est-elle prolongeable en distribution?

[2] on rappelle: $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ etc.

M1 - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M.Boutet de Monvel
12 juin 2006, 14h–18h - Aucun document n'est autorisé

I. On considère sur $\mathbb{R}$ l'opérateur différentiel $P = (\frac{d}{dx})^3 - 2(\frac{d}{dx})^2 + \frac{d}{dx} - 2$ $(f \mapsto Pf = f''' - 2f'' + f' - 2f)$.

1. Quelles sont les distributions solution de l'équation $Pf = 0$? Quelles sont les solutions tempérées?

2. Montrer que P a une unique solution élémentaire E_+ de support $\mathbb{R}_+$ $(\{x \geq 0\})$; calculer E_+.

3. Trouver toutes les solutions élémentaires tempérées de P.

II. Sur $\mathbb{R}^2$ on note f^s la fonction $f^s(x,y) = \begin{cases} (1-r^2)^s & \text{si } r = \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Pour quelles valeurs de s f^s est-elle intégrable? On notera f_s la distribution qu'elle définit.

2. Soit l'opérateur différentiel $L = x\partial_x + y\partial_y$. Montrer qu'on a, pour $\operatorname{Re} s$ assez grand, $Lf_s = c(x,y,s)f_{s-1}$ où $c(x,y,s)$ est une fonction polynomiale en s qu'on calculera.

3. Montrer que l'application $s \mapsto f_s$ (qui est bien définie pour $\operatorname{Re} s$ grand) se prolonge en une application méromorphe à valeurs distributions. Quels sont ses pôles? Montrer que ce sont des pôles simples.

4. Calculer la transformée de Fourier $\varphi(\xi,\eta)$ de $f_{-\frac{1}{2}}$: on pourra observer qu'elle est invariante par rotation, et calculer $\varphi(\xi,0)$.

II.bis Sur $\mathbb{R}^3$ on note F_s la fonction $F_s(x,y) = \begin{cases} (t^2-x^2-y^2)^s & \text{si } \sqrt{x^2+y^2} < t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Pour quelles valeurs de s F_s est-elle intégrable? Quel est son support? son support singulier?

2. Calculer la transformée de Fourier partielle (en x,y) $\phi(t,\xi,\eta)$ de $F_{-\frac{1}{2}}$.

3. On pose $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2$. Montrer qu'on a $\Box F_{-\frac{1}{2}} = C\delta$ où C est une constante qu'on calculera.

Corrigé de l'épreuve du 12 juin 2006

I.1. Les solutions distribution sont des fonctions; ce sont les combinaisons linéaires de e^{2x}, e^{ix}, e^{-ix} $(2, \pm i$ sont racines de $T^3 - 2T^2 + T - 2 = 0)$. Les solutions tempérées sont combinaisons de $\sin x, \cos x$ (e^{2x} n'est pas tempéré).

2. La solution avancée est $E_+ = \frac{1}{5}Y(x)(e^{2x} - \cos x - 2\sin x)$ (la parenthèse est la solution telle que $f(0) = f'(0) = 0, f"(0) = 1$) (unicité: c'est linverse de $P\delta$ dans l'algèbre de convolution $\mathcal{D}'_+$).

3. La solution "retardée" $E_- = -\frac{1}{5}Y(-x)(e^{2x} - \cos x - 2\sin x)$ est tempérée. Les autres solutions élémentaires tempérées sont: $E_- + a\cos x + b\sin x$

II.1. Il n'y a de problème que pour $r = 1$. f^s est intégrable si $\operatorname{Re} s > -1$ ($s \in \mathbb{C}$): en coordonnées polaires l'intégrale est $2\pi \int_0^1 (1-r^2)^s r dr = \pi \int_0^1 u^s du = \frac{\pi}{s+1}$, absolument convergente ssi $\operatorname{Re} s > -1$ (on a posé $u = 1 - r^2$).

2. On a $Lr^2 = 2r^2$, donc $Lf^s = -2sr^2 f_{s-1}$ au sens des fonctions, et aussi au sens des distributions si les dérivées de f^s sont intégrables, i.e. si $\operatorname{Re} s > 0$.

3. Il n'y a de problème qu'au voisinage de $r = 1$. En dehors de l'origine, la relation de 2) s'écrit $f_s = -\frac{1}{(s+1)r^2}\ Lf_{s+1}$ et montre, par récurrence que l'application $s \mapsto f^s$, qui est bien définie et holomorphe pour $\operatorname{Rer} s > -1$, se prolonge en une fonction méromorphe à valeurs distributions, avec des pôles simples, pour $s = -1, -2, \ldots$

(variante: la relation s'écrit aussi $2sf_{s-1} = (2s - L)f_s$, valable dans tout $\mathbb{R}^2$).

4. Comme $f_{-1/2}$ est invariante par rotation, sa transformée de Fourier l'est aussi. Elle vaut donc, avec $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \alpha = \sqrt{1 - x^2}$:

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi(\rho, 0) = \int e^{i\rho x} \frac{dxdy}{1 - r^2} = \int_{-1}^{1} e^{i\rho x} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

La deuxième intégrale vaut (en posant $y = \alpha u$) $\int_{-1}^{1} \frac{\alpha du}{\sqrt{\alpha^2 - \alpha^2 u^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi$

$$\text{d'où} \quad \varphi = \pi \quad \frac{e^{i\rho}}{i\rho} \Big|_{-1}^{1} = 2\pi \frac{\sin \rho}{\rho}.$$

IIbis.1. En dehors de l'origine F_s est localement intégrable pour $\operatorname{Re} s > -1$, comme dans II. Elle est alors homogène de degré $2s$ donc aussi intégrable au voisinage de 0 (la limite pour l'intégrabilité serait $\operatorname{Re} s = -\frac{3}{2}$).

2,3. La transformée de Fourier partielle se déduit par homothétie de rapport t de celle de II.4 : $\phi = 2\pi Y(t) \frac{\sin t\rho}{\rho}$ (elle). On reconnaît la solution élémentaire avancée de l'opérateur des ondes : $\Box F_{-\frac{1}{2}} = 2\pi\delta$.

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M. Boutet de Monvel
26 mars 2007, 13h30-16h30, salle Cuvier 6
Duré 3h - Aucun document n'est autorisé

I. On note $X = (x, y)$ la variable de $\mathbb{R}^2$, et on identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$: $z = x + iy$.
On pose $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$
(en coordonnées polaires: $\partial_z = \frac{1}{2}e^{-i\theta}(\partial_r - \frac{i}{r}\partial_\theta)$, $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}e^{i\theta}(\partial_r + \frac{i}{r}\partial_\theta)$).

1. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{Z}$ la fonction z^k est-elle localement intégrable?
2. Calculer la distribution $\partial_{\bar z} F_{-1} = \frac{1}{z}$.
3. Pour $k \in \mathbb{Z}$ entier, $\epsilon > 0$, on note $F_{k,\epsilon}$ la fonction $F_{k,\epsilon} = z^k$ si $|z| \geq \epsilon$, 0 si $|z| < \epsilon$. Montrer que pour tout k $F_{k,\epsilon}$ a une limite (distribution) pour $\epsilon \to +0$. On note F_k cette distribution limite (la question se pose surtout pour $k < 0$; on note parfois $F_k = pf\ z^k$).
4. Pour $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ on note H_λ l'application linéaire (similitude) $z \mapsto \lambda z$ sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Quel est le déterminant de H_λ? Rappeler la définition de $T(H_\lambda X)$ si T une distribution sur $\mathbb{R}^2$ $(X = (x, y))$. Comparer $F_k(H_\lambda X)$ et F_k.
5. Pour p, q entiers ≥ 0 on pose $\delta_{p,q} = \partial_z^p \partial_{\bar z}^q \delta$ (δ désigne la masse de Dirac à l'origine). Montrer que $\delta_{p,q}$ est homogène; de quel degré? Comparer $\delta_{p,q}$ et $\delta_{p,q}(H_\lambda X)$.
6. Question subsidiaire: montrer qu'il existe des constantes a_k, b_k, qu'on calculera, telles que $\partial_z F_k = a_k F_{k-1}$, et, pour $k < 0$, $\partial_{\bar z} F_k = b_k \partial_z^{(|k|-1)} \delta$.

II.1. Soient T une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, $\widehat{T}$ sa transformée de Fourier. Calculer les transformées de Fourier de la distribution $e^{iax}T$ et de la translatée $\tau_b T = T(x - b)$ en fonction de $\widehat{T}$.

2. Soit la distribution $P = \sum \delta_n$ (δ_n désigne la masse de Dirac placée au point $n \in \mathbb{Z}$: $\langle P, \phi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n)$)).
Montrer que P est tempérée. Montrer qu'on a $P(x+1) = P, (e^{2\pi i x} - 1)P = 0$.
3. Soit S une distribution telle que S telles que $S(x+1) = T, (e^{2\pi i x} - 1)T = 0$: comparer S et P (on pourra observer que pour tout $n, (x - n)S$ est nulle au voisinage de n)
4. Trouver les constantes α, β, telles que $\widehat{P}(\xi + \alpha) = \widehat{P}$, $(e^{i\beta\xi} - 1)\widehat{P} = 0$.
5. Montrer qu'on a $P = c\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$, où c est une constante.
6. Question subsidiaire: calculer la constante c.

Corrigé - épreuve du 26 mars 2007

I.1 $|z|^s$ est localement intégrable (au voisinage de 0) ssi Re$s > -2$, donc z^k l'est ssi $k \geq -1$ (k entier > -2).

2. Par définition $< \partial_{\bar z}\frac{1}{z}, \phi >= - < \frac{1}{z}, \partial_{\bar z}\phi >$. En coordonnées polaires ça fait $-\lim \int_{r>\epsilon} \frac{1}{re^{i\theta}}(\frac{1}{2}e^{i\theta}(\partial_r + \frac{i}{r}\partial_\theta)\phi)rdrd\theta$. Les facteurs $re^{i\theta}$ se simplifient, et comme l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta$ est nulle, il reste $-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \partial_r\phi dr = \pi\phi(0)$.

   Autrement dit $\partial_{\bar z}F_{-1} = \pi\delta$.

   variante: $F_{-1} = z^{-1}$ est localement intégrable, homogène de degré -1, donc $\partial_{\bar z}F_{-1}$ est homogène de degré -2; comme elle est nulle en dehors de 0, on a $\partial_{\bar z}F_{-1} = c\delta$. En testant contre $e^{-r^2} = e^{-z\bar z}$ on trouve:

$$c =< \partial_{\bar z}F_{-1}, e^{-r^2} >= - < F_{-1}, \partial_{\bar z}e^{z\bar z} >= -\int (\frac{1}{z})(-ze^{z\bar z}) = \pi$$

3. La question se pose pour $k \leq -2$, et au voisinage de 0. (sinon z^k est localement intégrable et évidemment limite des $F_{k,\epsilon}$).

   Si u est une fonction test on a a $u = \sum_{p+q<N} u_{pq}z^p\bar z^q + r_N(X)$ avec $u_{pq} = \frac{1}{p!q!}\partial_z^p\partial_{\bar z}^q u(0)$, $r_N = O(|z|^N)$. Alors pour $\epsilon < 1$ on a

$$< F_{k,\epsilon}, u >= \sum_{p+q<N} u_{pq}\int_{\epsilon<|z|<1} z^{p+k}\bar z^q + \int_{\epsilon<|z|<1} z^k r_N + \int_{|z|>1} z^k u$$

   La dernière intégrale de dépend pas de ϵ, l'avant dernière a une limite si $k + N \geq -1$. Celle indexée par p, q a aussi une limite si $k + p + q \geq -1$, et elle est identiquement nulle si $k + p \neq q$ ($\int_0^{2\pi} e^{mi\theta}d\theta = 0$ si $m \neq 0$); donc tous les termes non nuls ont une limite ($p + k = q$ avec $p, q \geq 0$ implique évidemment $p + q + k = 2q \geq 0$).

4. On a det$H_\lambda = |\lambda|^2$. Par définition, $< T(H_\lambda X), \phi >= \frac{1}{|\lambda|^2} < T, \phi(H_\lambda^{-1}X) >$.

   On a $F_{k\epsilon}(H_\lambda X) = \lambda^k F_{k,\frac{\epsilon}{|\lambda|}}$ $^{(*)}$, donc à la limite $F_k(H_\lambda X) = \lambda^k F_k$; en particuler F_k est homogène de degré k ($^{(*)}$ parce que $|\lambda z| > \epsilon \Leftrightarrow |z| > \frac{\epsilon}{|\lambda|}$)

5. Si u est une fonction test on a $u_(H_\lambda X) = \sum_{p+q<N} u_{p,q}\lambda^p\bar\lambda^q z^p\bar z^q + O(r^N)$ (avec $u_{pq} = \frac{1}{p!q!}\partial_z^p\partial_{\bar z}^q u(0)$, comme ci-dessus), d'où $\delta_{pq}(H_\lambda X) = \lambda^{-p-1}\bar\lambda^{-q-1}\delta_{pq}$.

6. Question subsidiaire. Les distributions $T_k = \partial_z F_k - kF_{k-1}$ et $S_k = \partial_{\bar z}F_k$ sont nulles en dehors de 0, homogènes de degré $k-1$, donc combinaison des δ_{pq}, avec $-(p + q + 2) = k - 1$.

   En outre on a $T_k(H_\lambda X) = \lambda^{k-1}T_k$, $S_k(H_\lambda X) = \lambda^k\bar\lambda^{-1}S_k$: la seule possibilité est $T_k = 0, S_k = c\delta_{k+1,0}$. (si $T = \sum a_{pq}\delta_{pq}$ on a $T(H_\lambda X) = \sum \lambda^{-p-1}\bar\lambda^{-q-1}a_{pq}\delta_{pq}$, or les "monômes $\lambda^m\bar\lambda^n$ sont linéairement indépendants).

   Par récurrence on obtient $F_{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\partial_z^{n-1}F_{-1}$ et $\partial_{\bar z}F_{-n} = \pi\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\partial_z^{n-1}\delta$.

II.1. Les transformées de Fourier sont respectivement $\widehat{T}(\xi - a)$ et $e^{-ib\xi}\widehat{T}$.

2. P est tempérée, comme toute distribution périodique. $(e^{2\pi ix} - 1)P = 0$ parceque $(e^{2\pi ix} - 1)$ s'annule aux points entiers.

3. $(e^{2\pi ix} - 1)$ est non nulle hors de $\mathbb{Z}$ donc supp$S \subset \mathbb{Z}$. Au voisinage de n, $\frac{e^{2\pi ix}-1}{x-n}$ est inversible, donc $(x-n)S$ est nul et S est de la forme $c_n\delta_n$. Au total $S = \sum c_n\delta_n$. Si $S(x+1) = S$ les c_n sonc tous égaux et $S = cP$.

4. $e^{2i\pi x}P = P$ implique $\widehat{P}(\xi - 2\pi) = \widehat{P}$ (α multiple entier de 2π), $P(x+1) = P$ implique $e^{i\xi}\widehat{P} = \widehat{P}$ ($\beta \in \mathbb{Z}$).

5. D'après 3) ceci implique $P = c\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$ (proportionnel à $\widehat{P}(\xi/2\pi)$).

6. On a $c = 2\pi$

   (première preuve: si ϕ est périodique de période 2π on a $\int_0^{2\pi} e^{inx}\phi(x)dx = 2\pi\phi(0)$; ceci se traduit par $2\pi\sum \delta_{2\pi n} = \sum e^{inx} = \widehat{P}$.

   autre preuve: on a $\mathcal{F}P = \gamma P(\frac{x}{2\pi})$ avec $\gamma = \frac{c}{2\pi}$; comme P est paire, on $\mathcal{F}^2P = 2\pi P = 2\pi\gamma^2 P$ donc $\gamma = \pm 1$; or γ est > 0, comme on voit en testant contre $e^{-x:2}$, dont la transformée de Fourier est > 0).

   Cette formule implique qu'on a $\sum \widehat{f}(n) = 2\pi \sum f(2\pi n)$, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ("formule de Poisson"). La formule initialement énoncée par Poisson s'obtient en spécialisant au cas où f est une Gaussienne ($f = e^{-c\frac{x^2}{2}}$).

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M. Boutet de Monvel
18 mai 2007, 14h-17h, salle Cuvier 6   Duré 3h - Aucun document n'est autorisé

I. On considère sur $\mathbb{R}$ l'opérateur différentiel $P = (\frac{d}{dx})^3 - (\frac{d}{dx})^2 + 4\frac{d}{dx} - 4$ $(f \mapsto Pf = f''' - f'' + 4f' - 4f)$.

1. Quelles sont les distributions solution de l'équation $Pf = 0$? Quelles sont les solutions tempérées?

2. Montrer que P a une unique solution élémentaire E_+ de support $\mathbb{R}_+$ $(x \geq 0)$; calculer E_+.

3. Trouver toutes les solutions élémentaires tempérées de P.

II.1 On note $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, t = x_{n+1}$ les variables sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour $s \in \mathbb{C}$ on pose $\quad F_s(x,t) = t^s e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$ si $t > 0$, $\quad 0$ si $t \leq 0$.

Montrer que F_s est localement intégrable pour $\operatorname{Re} s$ assez grand: pour $\operatorname{Re} s > s_0$, où on déterminera s_0 le mieux possible.

2. Pour $\operatorname{Re} s > s_0$ on note T_s la distribution (localement intégrable) définie par F_s. Quel est le support singulier de T_s?

3. On note $C = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ l'opérateur de la chaleur $(\Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2})$. Calculer $C(F_s)$ en dehors de l'origine $(t = 0, x = 0)$.

4. Calculer $C(T_{-\frac{n}{2}})$.

5. Montrer que pour $\operatorname{Re} s > s_0 + 1$ on a $C(T_s) = c(s) T_{s-1}$ où $c(s)$ est une constante qu'on calculera (on pourra d'abord examiner le cas où $\operatorname{Re} s$ est assez grand).

6. Question subsidiaire. Montrer que l'application $s \mapsto T_s$ se prolonge de façon méromorphe au plan complexe tout entier. Quels sont les pôles?

III. On note (x, y) les coordonnées sur $\mathbb{R}^2$, $u(x,y) = x + iy^2$

1. Montrer que la fonction u^{-1} est localement intégrable. Plus généralement montrer qu'il existe α_0 (qu'on déterminera le mieux possible) tel que la fonction u^α soit localement intégrable pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \alpha > \alpha_0$. (on rappelle que si $\operatorname{Im} Z \geq 0$ on pose $Z^\alpha = \exp \alpha(\mathrm{Log}\,|\mathrm{Z}| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\,\mathrm{Z})$ avec $0 \leq \operatorname{Arg} Z \leq \pi$)

2. u^α définit alors une distribution u_α: quel est son support; quel est son support singulier?

3. Pour $\epsilon > 0$ on note $u_{\alpha,\epsilon} = (x + iy^2 + i\epsilon)^s$. Montrer que $u_{\alpha,\epsilon}$ tend vers u_α pour $\epsilon \to +0$. Montrer qu'il existe une fonction ϕ, qu'on déterminera, telle que l'oprateur $P = \partial_y + \phi \partial_x$ annule toutes les distributions u_α

4. Question subsidiaire. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ la fonction $u_{\alpha,\epsilon}$ a une limite distribution pour $\epsilon \to +0$. On note encore cette limite u_α: montrer qu'on a encore $Pu_\alpha = 0$.

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Corrigé (épreuve du 18 mai 2007

I.1. $P = (D^2 + 4)(D - 1)$: les solutions sont combinaisons linéaires de $e^x, e^{\pm 2ix}$, les solutions tempérées sont combinaisons de $\cos 2x, \sin 2x$.

2. La solution élémentaire avancée est $E_+ = Y(x)(ae^x + b\cos 2x + c\sin 2x)$ avec

$$a + b = a + 2c = 0, a - 4b = 1, \quad \text{i.e. a} = -\text{b} = \frac{1}{5}, \text{c} = -\frac{1}{10}.$$

3. Solutions élémentaires tempérées: $E_+ - \frac{1}{5}e^x + b' \cos x + c' \sin x$.

II.1. On remarque que F_s est "homogène" de poids 2s si on attribue à t le poids 2 et x le poids 1: (poids total de $dx_1...dt$: $n+1$). F_s est localement intégrable si Re$s > -\frac{n+2}{2}$.

2. T_s est nulle pour $t < 0$; pour $t > 0 x \neq 0$ c'est une fonction C^∞ dont toutes les dérivées $\to 0$ pour $t \to +0$ (comme $t^{-N}e^{-\frac{1}{t}}$). Donc suppsing$\subset \{0\}$ en fait = car pour $x = 0$ ça vaut $Y(t)t^s$ qui n'est pas C^∞.

3. On trouve $C(F_s) = (s + \frac{n}{2})\ F_{s-1}$

4. $(4\pi)^{-\frac{n}{2}} T_{-\frac{n}{2}}$ est la solution élémentaire de C (cours), donc $C(T_{-\frac{n}{2}}) = (4\pi)^{\frac{n}{2}}\delta$.

5. Le résultat de 2. est vrai si Res est assez grand pour que F_s et ses dérivées d'ordre ≤ 2 soient des fonctions continues, par exemple Re$s > 2$. Comme $s \mapsto F_s$ est évidemment holomorphe dans son domaine (provisoire) de définition, la relation reste vraie là où elle a un sens (Re$2s > -n + 2$),

6. et ceci montre qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe, avec des pôles au plus simples aux points $s = -\frac{n+2}{2} - k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

III.1 u_α est semi homogéne de poids 2α (poids de x=2, de y=1; poids total 3). C'est localement intégrable ssi $2s > -3$, en particulier u^{-1} l'est.

2. Le support de u_s est tout $\mathbb{R}^2$, le support singulier est $\{0\}$ sauf si α est entier ≥ 0, alors u_α est un polynôme (C^∞) et le support singulier est vide.

3. Il faut s'assurer que $u_{alpha,\epsilon}$ tend vers u_α au sens des fonctions localement intégrables. L'opérateur $P = \partial_y - 2iy\partial_x$ annule u, et comme c'est une dérivation il annule toutes les fonctions de u, en particulier $u_{\alpha,\epsilon}$ et la limite u_α quand elle existe.

4. En fait la limite existe toujours, de même que les valeurs au bord d'une fonction holomorphe "modérée" dans le demi-plan supérieur (cours).

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles

Cours de M. Boutet de Monvel

12 juin 2007, 14h-17h, Duré 3h - Aucun document n'est autorisé

I.1 Sur $\mathbb{R}$ on considère l'opérateur différentiel $P = \frac{d^4}{dx^4} - 1$. Quelles sont les solutions distribution de l'équation $Pf = 0$? Quelles sont ses solutions tempérées?

1. Montrer que P a une unique solution élémentaire E_+ de de support $[0, \infty[$, qu'on calculera.

2. Trouver toutes les solutions élémentaires tempérées de P.

II. Sur $\mathbb{R}^3$ on pose $\Delta = \sum_1^3 \partial_j^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sur $\mathbb{R}^4$ on pose $\Box = \partial_t^2 - \Delta$.

1. On note K la distribution sur $\mathbb{R}^4$ telle que $< K, \phi >= \int_{\mathbb{R}^3} \phi(|x|, x) \frac{d^3x}{|x|}$ (est-ce bien défini?). Montrer qu'on a $K = aE$ où E est la solution élémentaire avancée de $\Box$, et a une constante qu'on calculera.

2. On note $b(x,t) = \frac{1}{r} H(t - r)$, où H est la fonction de Heaviside ($H(s) = 1$ si $s > 0$, 0 sinon).

Est-ce une fonction localement intégrable? On note B la distribution définie par b. Quel est son support? quel est son support singulier?

3. Montrer qu'on a $\partial_t B = bE$ (où b est une constante qu'on déterminera).

4. Montrer qu'on a $\Box B = H(t) S(x)$ où S est une distribution de x, portée par l'origine, qu'on déterminera.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ Pour quelle valeurs de $s \in \mathbb{C}$ la fonction $r^s e^{i\lambda r}$ est-elle localement intégrable sur $\mathbb{R}^3$?

6. Soit E_λ la distribution (localement intégrable $E_\lambda = e^{i\lambda r}$.

Montrer qu'on a $(\Delta + \lambda^2) E_\lambda = 0$ en dehors de l'origine $x \neq 0$

7. Montrer qu'on a $(\Delta + \lambda^2) E_\lambda = c\delta$ où c est une constante qu'on déterminera.

8. On note T_λ la distribution $\frac{1}{r} e^{i\lambda(r \pm t)}$ sur $\mathbb{R}^4$ (est-ce une fonction localement intégrable?). Montrer que $\Box T_\lambda$ est nul en dehors de la droite $x = 0$.

9. Calculer $\Box T_\lambda$.

10. Question subsidiaire: quelle est la solution du problème de Cauchy $\Box T = 0$, avec, pour $t = 0$: $T = \frac{1}{r} e^{i\lambda r}$, $\partial_t T = \pm i\lambda \frac{1}{r} e^{i\lambda r}$?

Exprimer T en fonction de B et T_λ. Quel est le support de $T - T_\lambda$?

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles

Corrigé épreuve du 18 mai 2007

I.1. $P = (D^4 - 1$: les solutions distributions sont C^∞ donc combinaisons linéaires de $e^{\pm x}, e^{\pm ix}$, les solutions tempérées sont combinaisons de $\cos x, \sin x$.

2. La solution élémentaire avancée est $E_+ = H(x)(a\mathrm{ch}x + b\mathrm{sh\,x} + \mathrm{c\cos x} + \mathrm{d\sin x})$ avec $a+c = b+d = a-c = 0, b-d = 1$ donc $a = c = 0, b = -d = \frac{1}{2}$ $E_+ = \frac{1}{2}H(x)(\mathrm{sh\,x} - \mathrm{sin\,x})$.

3. Solutions élémentaires tempérées: $E_+\frac{1}{2}e^{-x} + \alpha\cos x + \beta\sin x$.

II.1. La solution élémentaire de $\Box$ est donnée par

$$< E, \phi >= \int_0^\infty t\,dt \int_{|y|=1} \phi(t,x)\frac{d\sigma(ty)}{4\pi} = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(|x|,x)\frac{d^3x}{|x|}$$

2. La fonction b est localement intégrable, comme $\frac{1}{r}$ sur $\mathbb{R}^3$. Le support de B est le cône plein $0 \leq |x| \leq t$, le support est le cône d'onde d'avenir $0 \leq t = |x|$.

3. On a $< B, \phi >= \int_{t\geq|x|} \phi(t,x)\frac{1}{|x|}dtdx$ donc $\frac{\partial B}{\partial t} \int \frac{d^3x}{|x|}\phi(|x|,x)$ autrement dit $\frac{\partial B}{\partial t} = 4\pi E$.

4. On a $B = H(T)\delta(x) * K$ (unique primitive de K portée par $t \geq 0$), donc $\Box B = H(t)\delta(x) * \Box K = 4\pi H(t)\delta(x)$.

5. c'est localement intégrable ssi $\mathrm{Re\,s} > -3$ (en particulier pur $= -1$). supprimer?

6. E_λ est C^∞ en dehors de 0 et on y trouve (élémentairement) $(\Delta + \lambda^2)E_\lambda = 0$.

7. Au voisinage de 0 on a $E_\lambda = \frac{1}{r} + i\lambda + \frac{1}{2!}(i\lambda)^2 r + \ldots$, et Δ transforme tous ces termes sauf le premier en fonctions localement intégrables (cr^k avec $k \geq -2$). Par suite $(\Delta + \lambda)E_\lambda - \Delta\frac{1}{r}$ est localement intégrable (nul en dehors de 0), et

$$(\Delta + \lambda)E_\lambda = \Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta$$

8,9. On a $\Box T_\lambda = -e^{\pm i\lambda t}(\lambda^2 + \Delta)E_\lambda = 4\pi e^{\pm i\lambda t}\delta(x)$

10. La distribution $T = H(t)(T_\lambda - B)$ vérifie $\Box T = 0$ pour $t > 0$, et la valeurs pour $t = 0$ ainsi que celle de sa dérivée sont celles de l'énoncé. Noter qu'elle ne coïncide avec la "solution évidente T_λ qu pour t assez petit (en dehors du cône d'avenir, support de B).l

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Cours de M. Boutet de Monvel
3 mars 2008, 13h30-16h30, Duré 3h - Aucun document n'est autorisé

I.1 Soit P l'opérateur différentiel $P = \partial_1\partial_2$ sur $\mathbb{R}^2$ $\left(P(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$.

1. Montrer que les fonctions différentiables f solution de l'équation $P(f) = 0$ sont celles de la forme $\phi(x_1) + \psi(x_2)$ (ϕ, ψ fonctions d'une variable). Quelles sont les distributions T solution de l'équation $P(T) = 0$?

2. Montrer que P a une unique solution élémentaire E à support dans le premier quadrant ($x_1, x_2 \geq 0$). Calculer E.

3. Comment ces résultats de généralisent-ils à l'opérateur $P_n = \partial_1\partial_2 \ldots \partial_n$ sur $\mathbb{R}^n$?

II. Sur le plan $\mathbb{R}^2$ on note f_s la fonction telle que $f_s(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^s$ si $x^2 + y^2 < 1$, 0 sinon.

1. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{C}$ la fonction f_s est-elle intégrable?

2. (i) Pour quelles valeurs de s existe-t-il une distribution T égale à f_s pour $x^2 + y^2 \neq 1$?

(ii) Quel est le support d'une telle distribution T? Quel est son support singulier?

(iii) Question subsidiaire: T est-elle unique?

3. Pour $\mathrm{Re}\, s > -1$ on note T_s la distribution définie par la fonction localement intégrable f_s. On note L l'opérateur différentiel $L = x\partial_x + y\partial_y$.

(i) Montrer qu'on a, pour $\mathrm{Re}\, s$ assez grand, $Lf_s = c(x, y, s)f_{s-1}$ où $c(x, y, s)$ est une fonction polynomiale en s qu'on calculera.

(ii) Montrer que l'application $s \mapsto T_s$, qui est bien définie pour $\mathrm{Re}\, s$ grand, se prolonge en une application méromorphe à valeurs distributions. Quels sont ses pôles? Montrer que ce sont des pôles simples.

4. Calculer la transformée de Fourier $\phi(\xi, \eta)$ de $T_{-\frac{1}{2}}$: on pourra montrer que, avec $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ on a

$$\phi(\xi, \eta) = \phi(\rho, 0) = \int_{|x|<1} e^{i\rho x} dx \int_{|y|<\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} dy,$$

et calculer cette dernière intégrale.

5. Question subsidiaire. Sur $\mathbb{R}^3$ on note t, x, y les coordonnées. Soit E la distribution (localement intégrable) sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$E(t, x, y) = (t^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{si } t > \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \text{ sinon.}$$

Montrer qu'on a $\Box E = c\delta$, où $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2$ est le D'Alembertien (opérateur des ondes), et c est une constante qu'on calculera.

III. On rappelle que sur $\mathbf{R}^n$ le Laplacien, resp. l'opérateur de la chaleur, est l'opérateur

$$\Delta P = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \qquad \text{resp.} \quad C = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_2^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2};$$

Dans la suite P désigne l'un de ces deux opérateurs ($P = \Delta$ ou C).

1. Décrire une solution élémentaire de P (ça fait deux questions).
2. Soit T une distribution tempérée telle que $P.T = 0$. Montrer que T est un polynôme. On pourra examiner la transformée de Fourier de T.
3. Soit T une distribution tempérée telle que $P.T$ soit nulle en dehors de l'origine. Montrer que T est somme d'un polynôme et d'une combinaison linéaire finie de dérivées de E, où E est solution élémentaire tempérée de E. (On admettra, si on ne l'a pas vu au n^{o}1, que la solution élémentaire canonique (celle du cours) est tempérée).
4. Existe-t-il des opérateurs $P = P(D)$ (à coefficients constants, non constants) autres que Δ ou C pour lesquels la propriété du n^{o}3 soit vraie (donner un exemple)?

Maîtrise de Mathématiques - Équations aux Dérivées Partielles
Corrigé (épreuve du 3 mars 2008)

I.1. Les solutions fonctions sont de la forme $\phi(x_1) + \psi(x_2)$, les distributions de même (ceci signifiant de la forme $T_1(x_1 \otimes 1 + 1 \otimes T_2(x_2)$. Preuve: $P(T) = 0$ signifie $\partial_1(\partial_2 T) = 0$ donc $S = \partial_2 T$ est "indépendante de x_1", de la forme $1 \otimes T'(x_2)$; si T_2 est une primitive de T'_2 (ça existe - cours), on a $\partial_2(T - T_2) = 0$ donc $T - T_2$ est "indépendante de x_2", de la forme $T_1(x_1) \otimes 1$ (ce raisonnement pour les distributions vaut aussi - en plus facile - pour les fonctions différentiables).

2. P est l'opérateur de convolution par $\delta'(x_1) \otimes \delta'(x_2)$. Il admet pour soultion élémentaire (inverse de convolution) $Z = H(x_1)H(x_2)$. Comme le premier quadrant est un support de convolution (adapté à soi-même), E la seule solution élémentaire à support dedans (dans une algèbre l'inverse d'un élément, s'il existe, est unique).

3. Ceci se généralise aussitôt à $\mathbb{R}^n$: P_n admet pour unique solution élémentaire à support dans l'hyperquadrant $x_j \geq 0$ la distribution (fonction) $\prod H(x_j)$, et les solutions de $P_n(T) = 0$ sont les distributions de la forme $\sum T_j$ où T_j est indépendante de x_j: $\partial_j T_j = 0$, $T_j = T_j(x_1, .., \widehat{x}_j, .., x_n)$

II.1. f_s est intègrable ssi $\mathrm{Re}\, s > -1$.

2. (i) Un prolongement distribution existe pour tout s, par exemple $T(u) = pf. \int_0^\infty r dr \int u(re^{i\theta}) d\theta$ où pf. désigne la partie finie de Hadamard, et (par abus) $re^{i\theta}$ le point de coordonnées $r\cos\theta, r\sin\theta$.

(ii) Le support de T est le disque unité (f_s ne s'annule en aucun point de ce disque); le support singulier est le (quel que soit s, les dérivées d'ordre assez élevé de f_s ne tendent pas vers 0 sur le cercle, donc ne se raccordent pas avec 0 à l'extérieur du disque).

(iii) Il existe des distributions non nulles portées par le cercle, par exemple $T(u- = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta} d\theta$, donc le prolongement T ci-dessus n'est pas unique.

3. (i) En coordonnées polaires, on a $L = r\partial_r$. Pour $\mathrm{Re}\, s$ assez grand $T_s = f_s$ est dérivable et on a $L(f_s) = r\partial_r(1 - r^2)^s = -2sr^2 f_{s-1}$.

(ii) Ceci se reécrit $T_{s-1} = -\frac{1}{2sr^2} L(f_s)$ pour $r \neq 0$. L'application $s \mapsto T_s$ est évidemment holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ (pour toute fonction test u, $s \mapsto \int f_s u$ est holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > -1$). L'application $s \mapsto T_{s|r\neq 1}$ est aussi holomorphe pour tout s. Il n'y a de problème que près du cercle $r = 1$, et la relation ci dessus montre que $s \mapsto T_s$ se prolonge de façon méromorphe, avec juste des pôles simples aux points $s = -1, -2, \ldots$

4. $T_{-\frac{1}{2}}$ (comme les f_s) est invariante par rotation, donc aussi sa transformée de Fourier:
$$\phi(\xi,\eta)=\phi(\rho,0)=\int_{-1}^{1}e^{i\rho x}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$
Le changement de variable $y=u\sqrt{1-x^2}$ montre que la deuxième intégrale ne dépend pas de x et vaut
$$\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du=\pi$$
Au total on trouve $\phi=\pi(\frac{e^{i\rho x}}{i\rho})\big|_{-1}^{1}=2\pi\frac{\sin\rho}{\rho}$

5. La transformée de Fourier en x,y de $(t^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ est donc $2\pi t\frac{\sin t\rho}{\rho}$ (pout $t>0$: on reconnaît la transformée de Fourier de la solution avancée de l'équation des ondes (sauf pour le coefficient 2π): $\Box E=2\pi\delta$.