Géométrie de la théorie quantique des champs

Frédéric Paugam[*][†]

6 février 2011

1 Description

Titre

Géométrie de la théorie quantique des champs

Objectifs

Le but de ce cours est de présenter sans coordonnées (quand c'est possible) les outils nécessaires à la description des modèles mathématiques de la physique des particules. L'objectif est de donner aux étudiants en mathématiques sans connaissance physique préalable la possibilité d'interagir avec des physiciens théoriciens, ainsi qu'une ouverture vers les rapports entre géométrie et physique mathématique.

Thèmes abordés

On commencera par une présentation des outils de la géométrie différentielle et de la super-géométrie permettant de formaliser succintement le calcul différentiel sur les fonctionnelles non locales. On présentera le calcul fonctionnel local et la version algébrique de la théorie variationnelle, utilisant le formalisme des jets. On décrira l'espace des phases covariant. Suivra la description de plusieurs exemples physiques : mécanique classique et fermionique, Relativité, formalisme de Cartan, électromagnetisme, Dirac, Klein-Gordon, Yang-Mills avec matière. On décrira les solutions fondamentales des opérateurs différentiels à coefficients constants. On expliquera la quantification par l'intégrale fonctionnelle, en utilisant l'équation de Dyson-Schwinger. On expliquera la méthode BV de reduction symplectique homologique. On terminera par une présentation succinte des méthodes de renormalisation, avec notamment la formulation de Connes-Kreimer de la renormalisation BPHZ, et celle de Costello de la méthode de l'action effective à la Wilson.

Prérequis

Aucun prérequis n'est supposé en physique, mais il est conseillé d'avoir un goût prononcé pour les méthodes fonctorielles. Des bases de géométrie différentielle (cours de V. Minerbe), d'algèbre homologique et de théorie des faisceaux (cours de P. Schapira) seraient profitables.

Référence

Les notes de cours [Pau09] contiennent une liste exhaustive de références.

[*]email: frederic.paugam at math.jussieu.fr

[†]Page web du cours: http://www.math.jussieu.fr/∼fpaugam/parts-fr/enseignement-actuel.html

2 Présentation

De nombreux modèles physiques se basent sur la notion de problème variationnel lagrangien. Il s'agit d'etudier un espace H de trajectoires $x : M \to C$ (espace de fonctions) appelé espace des histoires et une fonctionnelle d'action $S : H \to \mathbb{R}$ dont les extrémas décrivent l'espace

$$T = \{x \in H,\, d_x S = 0\}$$

des trajectoires extremales de la théorie (principe de moindre action). Dans de nombreuses situations intéressantes, la fonctionnelle d'action est invariante par un groupe $\mathcal{G}$ de symétries de jauge, qui identifie les trajectoires entre elles, et on s'intéresse plutôt à l'espace des points critiques modulo symétries, appelé espace des trajectoires classiques. Le théorème principal de la théorie des champs classique est le suivant :

Theorème 1. *L'espace des trajectoires classiques*

$$T/\mathfrak{g}$$

d'une théorie des champs locale est muni d'une structure de Poisson homotopique.

Le but de la première partie du cours est de décrire des notions d'espace et de calcul différentiel suffisamment générales pour montrer ce théorème dans la majorité des exemples présents dans la littérature physique et mathématique. Ces exemples ont des applications en physique mais aussi en topologie, géométrie algébrique et différentielle, et dans de nombreux domaines des mathématiques.

Par exemple, le modèle standard de la physique des particules est construit à partir de la formule suivante, appelée action de Yang-Mills sur l'espace temps M :

$$S(A,\psi) = \int_M -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_A \wedge *F_A) + \langle \psi, (\not{D}_A - m)\psi \rangle.$$

On souhaite étudier ses extrémas, et ses "fluctuations quantiques". Un premier problème, du point de vue mathématique est de donner un sens à cette formule qui soit suffisamment proche de celui que lui donnent les physiciens, quand ils l'utilisent pour construire le modèle standard quantique. Ici, A et ψ sont des trajectoires données par des "fonctions" sur l'espace temps, ou plus exactement des sections de fibrés : le champ de jauge A, représentant les interactions, est une connexion sur un fibré principal P sous un groupe $\mathrm{SU}(n)$ et ψ est une section d'un super-fibré de la forme $V \otimes \Pi S$ avec V associé à P et S le fibré spinoriel. La première étape du cours est d'expliquer en détails cette action et la nature de ses composantes, dans un langage intrinsèque et général, dont le champ d'application va de la théorie des cordes à la relativité générale et aux théories supersymmétriques. Nous pourrons ainsi présenter des actions similaires dont l'utilisation en géométrie a été développée par Witten et Kontsevich (tous les deux médaillés fields pour leurs travaux précisément dans ce domaine, comme Borcherds, Donaldson, Jones, Yau).

Dans une deuxième partie du cours, on s'intéressera à la quantification et renormalisation des théories des champs, qui fait intervenir un analogue formel de la notion de mesure de probabilité gaussienne $e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}dx$, qui permet d'étudier les amplitudes de probabilités sur les "fluctuations quantiques" des trajectoires autour des trajectoires classiques. Nous expliquerons le sens mathématique précis (théorie perturbative) qu'il faut donner à la notion de fluctuation quantique, dans un langage d'intégration fonctionnelle, en se basant sur les équations de Dyson-Schwinger et le formalisme BV quantique. On utilisera les travaux de Costello et Connes-Kreimer pour présenter la renormalisation perturbative dans un langage facilement accessible aux mathématiciens. On énoncera et donnera les points principaux de la démonstration du théorème suivant :

Theorème 2. *Une théorie des champs euclidienne linéaire sans symétries est toujours formellement perturbativement renormalisable. Les obstructions à la quantification d'une théorie euclidienne avec symétries sont de nature locale.*

L'objectif final du cours est de fournir les outils pour rendre accessibles aux futurs chercheurs en mathématiques des textes fondateurs plus avancés de Witten et d'autres physiciens mathématiciens comme Kontsevich sur les théories des champs topologiques, les invariants de Seiberg-Witten, la théorie des champs symplectique, la déformation quantification des variétés de Poisson, la théorie de Gromov-Witten de comptage des courbes pseudo-holomorphes, le lien entre théorie de Langlands géométrique et le principe holographique et bien d'autres encore... Ce cours est donc une bonne ouverture pour ceux qui souhaitent faire une thèse dans un des nombreux domaine mathématique ayant pour source des travaux de physiciens sur la théorie des champs.

Les méthodes utilisées seront relativement formelles (algèbre, groupes, catégories, homotopie) afin d'être intrisèques (on pourrait dire "covariantes", i.e., ne dépendant pas du choix de coordonnées) mais on a aussi besoin de quelques outils d'analyse, qui seront rappelés dans le cours. On traitera de nombreux exemples et résultats simples en exercices pour illustrer les méthodes générales.

Références

[BD04] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. *Chiral algebras*, volume 51 of *American Mathematical Society Colloquium Publications.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[CM08] Alain Connes and Matilde Marcolli. *Noncommutative geometry, quantum fields and motives*, volume 55 of *American Mathematical Society Colloquium Publications.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Cos10] Kevin Costello. Renormalization and effective field theory, 2010.

[Der92] Andrzej Derdziński. *Geometry of the standard model of elementary particles.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[DeW03] Bryce DeWitt. *The global approach to quantum field theory. Vol. 1, 2*, volume 114 of *International Series of Monographs on Physics.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2003.

[Fol08] Gerald B. Folland. *Quantum field theory : a tourist guide for mathematicians*, volume 149 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[GS77] I. M. Gel′fand and G. E. Shilov. *Generalized functions. Vol 1-4*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1964 [1977].

[KV98] Joseph Krasil'shchik and Alexander Verbovetsky. Homological methods in equations of mathematical physics. *arXiv*, 1998.

[Pau09] F. Paugam. Towards the mathematics of quantum field theory, upmc/impa master course notes. *(book in preparation) http ://people.math.jussieu.fr/∼fpaugam/*, 2009.

[Pau10] F. Paugam. Histories and observables in covariant field theory. *Journal of geometry and physics*, 2010.

[vN96] John von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. Translated from the German and with a preface by Robert T. Beyer, Twelfth printing, Princeton Paperbacks.

[ZJ93] J. Zinn-Justin. *Quantum field theory and critical phenomena*, volume 85 of *International Series of Monographs on Physics*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1993. Oxford Science Publications.

3 Programme des cours et travaux dirigés

	Date	Type	Thèmes abordés
Semaine 1	Mercredi 12/01	CM	Géométrie différentielle sur les espaces de fonctions
	Jeudi 13/01	TD	Catégories et foncteurs
	Vendredi 14/01	CM	Géométrie relative et varietes
Semaine 2	Mercredi 19/01	CM	Géométrie differentielle relative
	Jeudi 20/01	TD	Géométrie relative et super-géométrie
	Vendredi 21/01	CM	Algèbre homotopique
Semaine 3	Mercredi 26/01	CM	D-modules et D-algebres
	Jeudi 27/01	TD	Calcul fonctionnel
	Vendredi 28/01	CM	Théories de jauge générales
Semaine 4	Mercredi 02/02	CM	Théorème de l'espace des phases covariant (BV classique)
	Jeudi 03/02	CM/TD	Spineurs/Groupes
	Vendredi 03/02	CM	Exemples : Electromagnétisme, Yang-Mills avec matière, relativité générale...
Semaine 5	Mercredi 09/01	CM	Fin de BV classique/Exemples supersymétriques
			(si temps) Definition des théories des champs effective a la Wilson/Costello
	Jeudi 10/01	TD	Equations aux dérivées partielles linéaires et régularisations
	Vendredi 11/01	CM	Le théorème de renormalisabilité sans symétries
Semaine 6	Mercredi 16/01	CM	Le formalisme BV quantique effectif
	Jeudi 17/01	CM/TD	Completion des cours précédents
	Vendredi 18/01	CM	Les obstructions à la quantification d'une théorie de jauge sont locales

4 Programme détaillé

4.1 Semaine 1

4.1.1 Géométrie différentielle sur les espaces de fonctions

4.1.2 Géométrie relative et super-géométrie