

TD de Logique 5 : Complétude et compacité (corrigé)

On rappelle l'énoncé du théorème de compacité de la logique élémentaire :

Théorème. Une $\mathcal{L}$ -théorie $\mathcal{T}$ est satisfaisable si et seulement elle est finiment satisfaisable (ie tout sous-ensemble fini de $\mathcal{T}$ est satisfaisable).

Exercice 1. Le sens direct est immédiat.

Pour la réciproque, si $\mathcal{T}$ n'est pas satisfaisable, alors par complétude $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \perp$ (voir qu'il existe une formule ψ tel que $\mathcal{T} \vdash \psi$ et $\mathcal{T} \vdash \neg\psi$) et en adjoignant à la déduction la règle $\perp_e$, on obtient une déduction de φ .

Supposons maintenant $\mathcal{T}$ satisfaisable et $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$. Soit $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$ une $\mathcal{L}$ -structure. Alors $\mathcal{M}^{\mathcal{L}'}$, expansion de $\mathcal{M}$ avec n'importe quelle interprétation pour les symboles de $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ est une $\mathcal{L}'$ -structure qui est encore modèle de $\mathcal{T}$. Comme par hypothèse $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$, par le théorème de correction, on a $\mathcal{M}^{\mathcal{L}'} \models \varphi$. Comme φ est une $\mathcal{L}$ formule, il vient que $\mathcal{M} \models \varphi$. Donc $\mathcal{T} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ et par complétude $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

Exercice 2. 1. Soit Δ une axiomatisation d'une théorie $\mathcal{T}$ finiment axiomatisable et soit A une axiomatisation finie de $\mathcal{T}$, alors pour tout $\psi \in A$, comme $\Delta \models \psi$, il existe par le théorème de complétude Δ_{ψ} finie tel que $\Delta_{\psi} \models \psi$. Alors $\bigcup_{\psi \in A} \Delta_{\psi}$ est bien une axiomatisation finie de A , donc de $\mathcal{T}$.

2. La même preuve marche à condition qu'une union de cardinalité κ d'ensembles finis soit bien de cardinalité au plus κ .

Exercice 3. 1. Une axiomatisation de $\mathcal{T} = \text{RCF} = \text{Th}(\mathbb{R}; +, \cdot, \leq)$ est l'union :

- Des axiomes de corps totalement ordonnés ;
- Des axiomes de DLO ;
- Le schéma d'axiome qui assure que toute partie définissable (sans paramètre) majoré par un élément admet une borne supérieure (Dedekind complet au premier ordre) ;
- Tout élément positif a une racine carré ;
- Le Théorème des Valeurs Intermédiaires : tout polynôme de degré impair admet une racine.

Bonus : l'axiomatisation est-elle redondante ?

Bonus : Pour un corps totalement ordonné $(K; 0, +, \cdot, \leq)$ montrer l'équivalence de :

- $K \models \forall x \geq 0 \exists y, y^2 = x$;
- -1 n'est pas un carré dans K et $K(\sqrt{-1})$ est clos par racine carré.

En déduire l'équivalence :

- $(K; 0, +, \cdot, \leq) \models \text{RCF}$;
- $(K(\sqrt{-1}); 0, +, \cdot) \models \text{ACF}$ est clos par racine carré.

2. Non. Soit K , la clôture réelle de $\mathbb{R}(x)$ où x désigne un infiniment grand. C'est un modèle de RCF : la clôture réelle d'un corps ordonné est sa plus petite extension satisfaisant RCF, on peut la construire de manière similaire à la clôture algébrique d'un corps : il suffit de rajouter inductivement les racines des polynômes de degré impair et les bornes sup des ensembles définissables majoré et de prendre la colimite des corps construits. Alors $\mathbb{R}$ vu comme partie de K n'a pas de borne supérieure : une telle borne sup serait un élément non-standard m , et $\frac{m}{2}$ serait encore un majorant de $\mathbb{R}$, plus petit que m .

3. $\mathcal{A}$ n'est pas définissable d'après la question précédente. On définit sur $\mathcal{A}$ la relation d'équivalence (non définissable) $a \sim b \leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, |a - b| \leq \frac{1}{n}$. Alors la projection canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A} / \sim$ est en fait le morphisme cherché (laissé en exercice). Est-ce que $\mathcal{A} / \sim$ est identifiable à un sous-anneau de $\mathbb{R}$? Montrer que $\mathcal{A} / \sim$ est en fait un corps, et qu'il est archimédien. Il est donc isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{R}$ (pour le montrer, on peut d'abord montrer qu'un corps ordonné K est archimédien si et seulement si $\mathbb{Q}$ est dense dans K).
4. On considère la clôture réelle K de $\mathbb{Q}(x)$ où $x > n$ pour tout entier n . On peut montrer que K est dénombrable. K n'est pas archimédien. Donc K ne se plonge pas dans $\mathbb{R}$ en tant que corps ordonné.
5. Non, on donne un contre-exemple sans rentrer dans les détails des preuves (celles-ci sont néanmoins d'un niveau tout à fait accessible). On considère la clôture réelle K du corps des fractions de l'anneau des séries formelles $\overline{\mathbb{Q}}[[x]]$ (ie la clôture réelle du corps des séries de Laurent) où le schéma d'axiome $x < \frac{1}{n}$ pour tout entier n et l'ordre sur $\mathbb{Q}$ induisent bien un ordre sur K . Le corps K est de cardinalité au moins $2^{\aleph_0}$ puisqu'il contient $\mathbb{Q}[[x]]$, mais $\mathbb{R}$ ne se plonge pas dedans : sinon il y aurait un plongement de $\mathbb{R}$ dans $\text{std}(K) = \overline{\mathbb{Q}}^r$: impossible pour des raisons de cardinalité ($\overline{\mathbb{Q}}^r$ est dénombrable). Pour montrer $\text{std}(K) = \overline{\mathbb{Q}}^r$, il suffit de montrer que K est en fait le corps des *séries de Puiseux* à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}^r$, dont l'ensemble des éléments standards est $\overline{\mathbb{Q}}^r$.

Exercice 4.

1. Par compacité, la théorie $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{c > s^n(0) : n \in \mathbb{N}\}$ où c est une nouvelle constante du langage est finiment satisfaisable (voir que tout sous-ensemble fini de $\mathcal{T}'$ est satisfait par $\mathcal{N}$ pour une certaine interprétation de c) donc satisfaisable.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}'$, alors $c^{\mathcal{M}}$ est non standard.

Si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$, on pose $M_{\text{std}} := \{x \in M : \exists n \in \mathbb{N}, x = s^n(0)\}$ et on vérifie que les graphes de $+$ et $\cdot$ laissent M_{std} stable ($s^n(0) + s^m(0) = s^{m+n}(0)$ et $s^n(0) \cdot s^m(0) = s^{nm}(0) \in M_{\text{std}}$) et que $n \mapsto s^n(0)$ est bien l'isomorphisme cherché (il faut encore vérifier sa croissance).

2. les axiomes d'ordre total sont dans $\mathcal{T}$ donc $<^{\mathcal{M}}$ est bien un ordre total. Puis $\mathcal{T}$ assure que 0 est le petit élément de $\mathcal{M}$, et qu'il n'a aucun élément non nul plus petit que $1 = s(0)$, par récurrence, on montre que $s^n(0)$ est le petit élément de $\mathcal{M} \setminus \{0, s(0), \dots, s^{n-1}(0)\}$, ce qui conclut.
3. Soit φ tel que décrit dans l'énoncé. $\mathcal{M} \models \varphi(n^{\mathcal{M}})$ pour tout entier n . Donc $\varphi[x := s^n(0)] \in \mathcal{T}$ pour tout n (car $\mathcal{T}$ est complète) et $\mathcal{N} \models \varphi[n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\mathcal{N} \models \forall x \varphi(x)$. Ainsi $\psi(x)$ définit les standards dans $\mathcal{M}$, il s'ensuit que $\mathcal{M} \models \forall x \psi(x)$ est donc $\mathcal{M}$ est le modèle standard : c'est impossible par hypothèse.
4. C'est un théorème de PA_1 que tout élément non-nul admet un successeur et un prédécesseur, au sens de l'ordre. $\mathcal{M} \setminus M_{\text{std}}$ est stable par successeur et prédécesseur, ne contient pas 0 et il n'y a pas d'élément entre x et $s(x)$ pour l'ordre. Un ensemble totalement ordonné dont tout élément admet un successeur et un prédécesseur est de la forme $X \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique. Si $x < y$ sont non-standards et appartiennent à des copies de $\mathbb{Z}$ distinctes (indexés par des éléments de X différents), on notera $x \ll y$.

X est **sans extrémité** : si $x \in M$ est non standard, x^2 est non standard (puisque $z < z^2$ pour $z > 1$ dans Peano) et même $s^n(x) < x^2$ pour entier n : sinon on aurait $x^2 = s^n(x)$, pour un certain entier n , et donc $x^2 = x + n^{\mathcal{M}} < x + x$. Or PA_1 assure que pour $z > 2$, $z^2 > 2z$, et comme x est un élément non standard, $x > 2$. C'est impossible, donc $s^n(x) < x^2$ pour entier n . donc on vient de montrer que $x \ll x^2$: X n'a donc pas de maximum. Pour montrer que X n'a pas de minimum, on prends un entier non standard, x et PA_1 assure qu'il existe un élément y tel que $y^2 < x < (y+1)^2$. Le même raisonnement que précédemment assure que $y \ll x$.

X est **dense** : on se donne deux éléments non-standards x, y , tel que $s^n(x) < y$ pour tout entier n . alors il existe x' et y' tels que $y'^2 < y < (y'+1)^2$ et $x'^2 < x < (x'+1)^2$. Comme précédemment, $y' \ll y$ et $x' \ll x$. Il reste à montrer que $x \ll x'y' \ll y$. Ce n'est pas très compliqué.

5. Aucune idée. Pour construire une addition sur $X \times \mathbb{Z}$ qui respecte l'ordre, il n'y pas vraiment de problème. Par contre ce n'est pas du tout clair que l'on peut mettre une structure respectant la structure de semi anneau de PA_1 sur $X \times \mathbb{Z}$. Il faut peut-être d'avantage d'hypothèse sur la forme de X .

Exercice 5. Supposer une axiomatisation, prendre un modèle bien choisi dans la classe et, par compacité, montrer qu'il existe un modèles élémentairement équivalent qui n'appartient pas à la classe.

- Supposons que $\mathcal{T}$ axiomatise la classe $\mathcal{C}$ des ensembles munis d'une relation d'équivalence dont l'ensemble des classes d'équivalence sont finies. L'ensemble A_n de cardinal fini n , muni de la relation d'équivalence $a \sim b$ pour tout a, b satisfait les formules φ_k pour $k \leq n$ qui énonce au premier ordre qu'il y a au moins k éléments dans la classe d'équivalence de c (où c est une constante rajouté au langage) et où on interprète c n'importe comment dans A . Cela entraîne que $\mathcal{T} \cup \bigcup_{k \leq n} \{\varphi_k\}$ est satisfaisable. Par compacité, il vient que $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\varphi_k\}$ est satisfaisable, et un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}'$ vérifie $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{M} \models \varphi_k$ pour tout k entier. c'est absurde.
- Supposons que la classe soit axiomatisable, et on note $\mathcal{T}$ son axiomatisation. On rappelle que le langage des graphes est $\mathcal{L} = \{\sim\}$ et que la théorie des graphes dans ce langage est exactement axiomatisé par $\sim$ est symétrique et irréflexive. Rajoutons les constantes c_0 et c_1 au langage et considérons le schéma d'axiome $\theta_n: \neg \exists x_0 \dots \exists x_n, c_0 = x_0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} x_i \sim x_{i+1} \wedge x_n = c_1$. On montre que $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \bigcup_{k \leq n} \{\varphi_k\}$ est finiment satisfaisable. Par exemple pour $(\mathbb{Z}, \sim)$ ou $a \sim b \Leftrightarrow a = b + 1 \vee a = b - 1$, $c_0 = 0$ et $c_1 = n + 1$, on a $\mathbb{Z} \models \theta_k$ pour tout $k \leq n$. Un modèle de $\mathcal{T}'$ n'est pas connexe. c'est impossible.
- Penser en terme de rang de résolubilité. On considèrera les axiomes :

$$\psi_n: \exists x_1, \dots, \exists x_n [\dots [[x_1, x_2], x_3] \dots, x_n] \neq 1$$

avec $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ le commutateur de x et y .

Exercice 6.

- Par compacité la théorie $\mathcal{T}_0 \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\varphi_k\}$, où $\varphi_k: \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i < j} x_i \neq x_j$, est satisfaisable.
- Si $\mathcal{T} \models \varphi$, il existe $\Delta \subset \mathcal{T}$ fini, tel que $\Delta \models \varphi$. Il existe N tel que $\Delta \subset \mathcal{T}_0 \cup \bigcup_{k \leq N} \{\varphi_k\}$, et pour tout $n > N$, $\mathcal{M}_n \models \Delta$, donc $\mathcal{M}_n \models \varphi$. Réciproquement, si tout $\mathcal{M}_n \models \varphi$, pour $n > N$, on alors que $\mathcal{T} \models \varphi_N \rightarrow \varphi$ et comme $\mathcal{T} \models \varphi_N$, par modus ponens, $\mathcal{T} \models \varphi$.
Si $\{n \in \mathbb{N}, : \mathcal{M}_n \models \varphi\}$ est borné, pour tout n suffisamment grand, $\mathcal{M}_n \models \neg \varphi$, donc $\mathcal{T} \models \neg \varphi$ par ce qui précède. Donc $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ n'est pas satisfaisable. Si $\{n \in \mathbb{N}, : \mathcal{M}_n \models \varphi\}$ n'est pas borné, $\mathcal{T} \cup \{\varphi\}$ est finiment satisfaisable, donc satisfaisable par compacité.
- $\mathcal{T}$ entraîne les axiomes des groupes abéliens. On considère

$$\psi_k: \forall x, \underbrace{x + \dots + x}_{k \text{ fois}} = 0 \rightarrow x = 0$$

On montre que $\mathcal{T} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\psi_k\}$ est satisfaisable. Par compacité, il suffit de montrer que $\mathcal{T} \cup \bigcup_{k \leq N} \{\psi_k\}$ est satisfaisable. Il suffit de montrer que $\{n \in \mathbb{N}, : \mathcal{M}_n \models \bigwedge_{k \leq N} \psi_k\}$ est non-borné. Or pour $p > N$ premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}; 0, +)$ n'a pas d'élément d'ordre $k \leq N$. Donc $\mathcal{T} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\psi_k\}$ est satisfaisable.

Pour la divisibilité, on note,

$$\theta_k: \forall x \exists y, \underbrace{y + \dots + y}_{k \text{ fois}} = x$$

Or dans tout groupe fini, $y \mapsto y^k$ est injective (ψ_k) et seulement si elle est surjective (θ_k). Donc $\mathcal{T} \models p_k \leftrightarrow \theta_k$ pour tout entier k . En particulier, $\mathcal{T} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\theta_k\}$ est satisfaisable si et seulement si $\mathcal{T} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\psi_k\}$ l'est.

Bonus Trouver un modèle de $\mathcal{T}$ non divisible. $(\mathbb{Q}, 0, +)$ est-il un modèle de $\mathcal{T}$?

Exercice 7. Cette correction contient peut-être des erreurs. Merci de me les signaler.

1. On considère le langage :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{P_\varphi : \varphi \in \mathcal{L}_{\omega, \omega}\}$$

constitué de $\mathcal{L}$ et d'une nouvelle famille de relation indexé par les $\mathcal{L}$ -formules ; et la théorie :

$$\mathcal{T}' = \langle \mathcal{T} \cup \{\forall \bar{y} P_\varphi(\bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{y}) : \varphi \in \mathcal{L}_{\omega, \omega}\} \rangle_{\models}$$

où $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ désigne la formule φ dont les variables libres sont parmi $x_1, \dots, x_n$, et $\rangle \cdot \langle_{\models}$ est l'opérateur de clôture déductive. On vérifie par induction sur les formules qu'elles sont chacune équivalente à une formule sans quantificateur.

L'équivalence élémentaire ne pose aucun problème en utilisant la définition de $\mathcal{T}'$.

2. (a) Débutons par un raisonnement n'aboutissant pas, mais éclairant sur les difficultés rencontrés : on note $\mathcal{T}'_{sq}$ l'ensemble des $\mathcal{L}'$ -formules sans quantificateur de la théorie $\mathcal{T}'$ définie à la question précédente. On montre rapidement que $\mathcal{T}' \models \mathcal{T}'_{sq}$ et $\mathcal{T}'_{sq} \models \mathcal{T}'$. Le premier point est évident, pour le second, On a $\mathcal{T}' \models \varphi$ si et seulement si $\mathcal{T}'_{sq} \models R_\varphi$. On suppose $\mathcal{T}$ finiment satisfaisable. Alors $\mathcal{T}'$ est finiment satisfaisable par élémentaire équivalence. Donc $\mathcal{T}'_{sq}$ est aussi finiment satisfaisable. Montrons que $\mathcal{T}'_{sq}$ est satisfaisable. On définit par induction sur les formules une application LP des $\mathcal{L}'$ -formules sans quantificateur dans la logique propositionnelle qui conserve la satisfaisabilité :
- si $\theta = R(t_1, \dots, t_n)$, pour toute relation $R \in \mathcal{L}'$ et pour tout $\mathcal{L}'$ -termes $t_1, \dots, t_n$,
 - si $\mathcal{T}'_{sq} \models \theta$, $LP(\theta) = \top$;
 - sinon $LP(\theta) = V_\theta$ où V_θ est une variable propositionnelle « fraîche » (les variables V_θ, V_ψ sont distinctes deux à deux pour $\theta \neq \psi$) ;
 - les connecteurs logique restent identiques : $LP(\theta \star \tau) = LP(\theta) \star LP(\tau)$ pour $\star \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$, et $LP(\neg \tau) = \neg LP(\tau)$.
 - il n'y a pas de formule quantifiée (et c'était le pont de la première question).

Pour montrer la compacité, il faut alors répondre au deux points suivants :

- Pourquoi si $LP(\mathcal{T}'_{sq})$ est satisfaisable alors $\mathcal{T}'_{sq}$ l'est ?
 - A-t-on que $\mathcal{T}'_{sq}$ satisfaisable entraîne que $\mathcal{T}'$ est satisfaisable ?
- (b) Il faut en fait faire les choses plus finement. Tout d'abord montrons pour une théorie $\mathcal{T}$ dans un langage $\mathcal{L}$ comment nous pourrions trouver un modèle de $\mathcal{T}$ en supposant seulement $LP(\mathcal{T})$ satisfaisable (et en ayant les bonnes hypothèses sur $\mathcal{T}$). Soit B une distribution de valeur vérité, satisfaisant $LP(\mathcal{T})$. On va utiliser une structure de Herbrand $\mathbb{S}$: on considère le domaine constitué de l'ensemble des $\mathcal{L}$ -termes sans variable (mais avec les constantes c_x pour $x \in \mathcal{V}$). On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur les termes en posant $t_1 \sim t_2 \Leftrightarrow \mathcal{T} \models t_1 = t_2$. Quotientons alors le domaine des termes par cette relation. On interprète les symboles de fonctions et les constantes naturellement sur l'ensemble des termes. Si toute formule de $\mathcal{T}$ est sans quantificateur, on interprète la relation R , selon la véracité de $V_{R(t_1, \dots, t_n)}$ dans $LP(\mathcal{T})$: si $\mathcal{T} \models R(t_1, \dots, t_n)$, alors $(t_1, \dots, t_n) \in R^{\mathbb{S}}$. Il faut vérifier que la relation passe au quotient (c'est le cas), et que $\mathbb{S}$ est bien un modèle de $\mathcal{T}$ (ie que les connecteurs logique sont bien respectés) : c'est la définition de $LP(\mathcal{T})$. En reprenant les notations précédente, on a donc que $LP(\mathcal{T}'_{sq})$ est satisfaisable si et seulement si $\mathcal{T}'_{sq}$ l'est.

Cependant, $\mathcal{T}'_{sq}$ satisfaisable n'entraîne pas nécessairement que $\mathcal{T}'$ est satisfaisable, en effet, par exemple $\mathcal{T}'_{sq}$ ne contient pas les formules $\exists x \varphi \leftrightarrow R_{\exists x \varphi}$ puisqu'elles ont un quantificateur.

Il faut passer par une « skolemisation » du langage afin de rajouter des fonctions au langage permettant d'éliminer les quantificateurs $\exists$ (et cela suffit, on verra les quantificateurs $\forall$ ne seront en fait pas gênant). Dans la suite, $FV(\varphi)$ désigne les variables libres occurant dans une formule φ .

Prenons $\mathcal{T}$ une théorie quelconque dans un langage $\mathcal{L}$. on ajoute au langage un symbole de constante c_x pour chaque variable $x \in \mathcal{V}$, et on ajoute à $\mathcal{T}$ les formule $\varphi[x := c_x]_{x \in FV(\varphi)}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{T}$ (ie on remplace les variable libre par des symbole de constante). Cela ne change pas la satisfaisabilité de $\mathcal{T}$: essentiellement on ne fait que rentrer les paramètres dans le langage. On étend ensuite le langage $\mathcal{L}$ en :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{f_{\exists y \varphi} : \varphi \in \mathcal{L}_{\omega, \omega}\}$$

où $f_{\exists y \varphi}$ est un symbole de fonction $|F\mathcal{V}(\exists y \varphi)|$ -aire auquel on donne le sens suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' &= \mathcal{T} \cup \{ \exists y \varphi \leftrightarrow \varphi[y := f_{\exists y \varphi}(x_1, \dots, x_n)] : \varphi \in \mathcal{L}_{\omega, \omega} \} \\ &\cup \{ \varphi[y := f_{\exists y \varphi}(x_1, \dots, x_n)] : \mathcal{T} \models \exists y \varphi, \varphi \in \mathcal{L}_{\omega, \omega} \} \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}$ sont élémentairement équivalentes (il faut utiliser l'axiome du choix pour interpréter $f_{\exists y \varphi}$ dans un modèle de $\mathcal{T}$). Remarquons qu'on peut également supposer $\mathcal{T}'$ déductivement close (si $\mathcal{T}' \models \varphi$ alors $\varphi \in \mathcal{T}'$) sans changer sa classe d'élémentaire équivalence.

Une fois cette préparation faite, on peut utiliser la question 1 pour ramener $\mathcal{T}'$ à une théorie $\mathcal{T}''$ dans laquelle toute formule est équivalente à une formule sans quantificateur. Il faut alors montrer que si $\mathcal{T}_{sq}''$ (l'ensemble des énoncés sans quantificateurs de $\mathcal{T}''$) est satisfaisable alors $\mathcal{T}'$ est satisfaisable. On prends la structure de Hebrand $\mathbb{S}$ de $\mathcal{T}_{sq}''$. On montre par induction sur les formules qu'il satisfait toute formule de $\mathcal{T}'$. Si $\varphi \in \mathcal{T}'$ est atomique, $\varphi \in \mathcal{T}_{sq}''$, donc $\mathbb{S} \models \varphi$. Si φ est une combinaison booléenne de formule, par récurrence, on trouve que $\mathbb{S} \models \varphi$. Si $\varphi = \exists y \varphi(x_1, \dots, x_n)$, comme on a $\mathcal{T}' \models \varphi[y := f_{\exists y \varphi}(x_1, \dots, x_n)]$, par récurrence, $\mathbb{S} \models \varphi[y := f_{\exists y \varphi}(x_1, \dots, x_n)]$, et donc $\mathbb{S} \models \exists y \varphi$. Si $\varphi = \forall y \varphi \in \mathcal{T}'$, par récurrence, $\mathbb{S} \models \varphi[y := t]$ pour tout terme t dans lequel on a substitué c_x à la variable x (où R_φ désigne le symbole de relation logique témoignant de φ définit dans la question 1.) l'ensemble de ces termes interprétés dans $\mathbb{S}$ est en fait le domaine de $\mathbb{S}$ tout entier. Donc $\mathbb{S} \models \forall y \varphi$.

Il ne reste alors plus qu'à recoller les morceaux, résumons :

Pour la construction, à partir $\mathcal{T}$ on skolemise en $\mathcal{T}'$, puis on élimine les quantificateurs dans $\mathcal{T}''$, et on voit $\mathcal{T}_{sq}''$ comme une logique purement propositionnelle.

Pour la compacité, $\mathcal{T}$ finiment satisfaisable entraîne $LP(\mathcal{T}_{sq}'')$ finiment satisfaisable. Par compacité, $LP(\mathcal{T}_{sq}'')$ est satisfaisable, puis en passant par la structure de Herbrand, $\mathcal{T}'$ est satisfaisable et donc $\mathcal{T}$ est satisfaisable puisque $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

3. Rappelons la définition de la logique propositionnelle. Elle est formée des formules définie par récurrence par :

- une variable propositionnelle (un élément de $\mathcal{V}$) est une formule ;
- $\perp$ est une formule ;
- les combinaison logique de formules (implication, négation, conjonction, disjonction) sont des formules.

On appelle une distribution de valeur de vérité un application $v : \mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}$. On note W l'ensemble des distributions de valeur de vérité. On définit la valeur de vérité $v(\varphi)$ d'une formule φ selon une distribution de valeur de vérité donnée v par récurrence :

- si $\varphi = P \in \mathcal{V}$, alors $v(\varphi) = v(P)$;
- si $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, $v(\varphi) = v(\psi_1) \cdot v(\psi_2)$;
- si $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, $v(\varphi) = \max(v(\psi_1), v(\psi_2))$;
- si $\varphi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$, $v(\varphi) = \max((1 - v(\psi_2)), v(\psi_1))$;
- si $\varphi = \neg \psi$, $v(\varphi) = 1 - v(\psi)$;

On dit qu'une théorie $\mathcal{T}$ (ici un ensemble de formule de la logique propositionnelle) est satisfaisable si et seulement si il existe une distribution de valeur de vérité v tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{T}$, $v(\varphi) = 1$. Une théorie $\mathcal{T}$ est finiment satisfaisable si et seulement si, pour tout sous-ensemble fini Δ de $\mathcal{T}$, Δ est satisfaisable.

Montrons que $\mathcal{T}$, une théorie de la logique propositionnelle, est finiment satisfaisable si et seulement si elle est satisfaisable.

Pour toute formule φ , on pose $\mathcal{O}_\varphi = \{v \in W : v(\varphi) = 1\}$. Montrer que les $\mathcal{O}_\varphi$ couvre W et forme une famille stable par intersection finie. On en déduit que les $\mathcal{O}_\varphi$ forment la base d'une topologie sur W .

Montrer que si la topologie engendré est compacte, alors on a le théorème de compacité.

Pour montrer la compacité, on pourra montrer que W muni de cette topologie et l'espace de Cantor (éventuellement généralisé, si $\mathcal{V}$ n'est pas dénombrable) coïncide (W est en bijection avec $2^{|\mathcal{V}|}$).