

TD de Logique 8 : Ultra-tout : filtres, produits, puissances (corrigé)

Exercice 1.

1. Soit X infini, on pose $\mathcal{F}_{Frechet} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ est cofini}\}$. Montrer que $\mathcal{F}_{Frechet}$ est un filtre. Il est contenu dans un ultrafiltre (Zorn).
2. Il suffit de l'écrire. Soit une famille de filtre $(\mathcal{F}_i)$, on vérifie que $\bigcap \mathcal{F}_i$ est bien un filtre...
3. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble X . On procède par double inclusion pour montrer que

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{U} \text{ ultrafiltre}} \mathcal{U}$$

$\mathcal{F}$ est contenu dans l'intersection, c'est immédiat. Pour l'inclusion réciproque, soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$ et soit $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F} \cup \{X \setminus A\}$ a la propriété des intersections finies : en effet, $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie et ne contient pas $\emptyset$, et si $B \in \mathcal{F}$, alors $B \cap X \setminus A \neq \emptyset$, sinon, il existerait $B \in \mathcal{F}$ tel que $B \subset A$ et donc $A \in \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F} \cup \{X \setminus A\}$ s'étend en un ultrafiltre $\mathcal{V}$ sur X , et clairement $A \notin \mathcal{V}$, donc A n'appartient pas à $\bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{U} \text{ ultrafiltre}} \mathcal{U}$. Ce qui conclut l'inclusion réciproque.

Exercice 2.

- Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre. Si $A \cup B \in \mathcal{U}$, alors $A \in \mathcal{U}$ ou $B \in \mathcal{U}$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors $\neg A, \neg B \in \mathcal{U}$, donc $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B \in \mathcal{U}$, contredisant l'hypothèse.

On montre alors facilement par récurrence que si $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{U}$, alors il existe i tel que $A_i \in \mathcal{U}$. Ceci montre l'existence pour la propriété de n -partitionnement. L'unicité se déduit de la stabilité par intersection finie de $\mathcal{U}$ et de $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

- Supposons que $\mathcal{U}$ a la propriété de n -partitionnement pour un certain $n \geq 3$ et montrons que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre. Tout d'abord, $X = X \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \dots \sqcup \emptyset$. L'unicité du i et l'hypothèse $n \geq 3$ implique que $\emptyset \notin \mathcal{U}$ et $X \in \mathcal{U}$. De plus, en ajoutant des ensembles vides, on prouve que $\mathcal{U}$ a la propriété de m -partitionnement pour tout $m \leq n$, a fortiori pour $m = 2$ et $m = 3$. La partition $X = A \sqcup \neg A$ montre donc que pour tout $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{U}$ ou $\neg A \in \mathcal{U}$, et pas les deux à la fois. Pour deux ensembles disjoints A, B , la partition $X = A \sqcup B \sqcup \neg(A \cup B)$ montre qu'au plus un des deux ensembles A, B est dans $\mathcal{U}$.

Soit $A \in \mathcal{U}$ et $B \supseteq A$. A est disjoint de $\neg B$, donc $\neg B \notin \mathcal{U}$, donc $B \in \mathcal{U}$.

Soient $A, B \in \mathcal{U}$. A est disjoint de $B \setminus (A \cap B)$, donc $B \setminus (A \cap B) \notin \mathcal{U}$. La partition $X = (A \cap B) \sqcup (B \setminus (A \cap B)) \sqcup \neg B$ montre que $A \cap B \in \mathcal{U}$.

Ainsi, $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre.

Exercice 3.

- (1) $\rightarrow$ (2) : Soit φ un énoncé. On pose $X := \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi \text{ et } \mathcal{N}_i \models \neg \varphi\}$ et $Y := \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \neg \varphi \text{ et } \mathcal{N}_i \models \varphi\}$. Si l'un des deux ensembles X, Y est infini, mettons X , alors il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ non-principal le contenant, on a alors $\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / \mathcal{U} \models \varphi$ mais $\prod_{i \in I} \mathcal{N}_i / \mathcal{U} \models \neg \varphi$, contredisant (1). Ainsi, X et Y sont finis, et $I \setminus (X \cup Y)$ est exactement l'ensemble des i tels que $\mathcal{M}_i \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N}_i \models \varphi$.

- (2) $\rightarrow$ (1) : Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non-principal et φ un énoncé vrai dans $\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / \mathcal{U}$. On note $X := \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi\}$. On a $X \in \mathcal{U}$ par le théorème de Łoś. On note $Y := \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N}_i \models \varphi\}$. Y est de complémentaire fini par hypothèse et $\mathcal{U}$ est non-principal, donc $Y \in \mathcal{U}$. On a donc $X \cap Y \in \mathcal{U}$ et si $i \in X \cap Y$, alors $\mathcal{N}_i \models \varphi$, donc $\prod_{i \in I} \mathcal{N}_i / \mathcal{U} \models \varphi$.

Exercice 4.

- Supposons $\mathcal{M}$ modèle de T_0 . Soit φ un énoncé vrai dans $\mathcal{M}$. Si tout modèle fini de T vérifie $\neg\varphi$, alors $\neg\varphi \in T_0$, donc $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, absurde. Il existe donc un modèle fini de T vérifiant φ .
- Supposons que tout énoncé φ vrai dans $\mathcal{M}$ est vrai dans un modèle fini $\mathcal{M}_\varphi$ de T . La famille $X_\varphi := \{\psi \mid \mathcal{M}_\psi \models \varphi\}$, pour $\varphi \in \text{Th}(\mathcal{M})$, a la propriété d'intersection finie, donc se prolonge en un ultrafiltre $\mathcal{U}$, et l'ultraproduit $\prod_{\varphi \in \text{Th}(\mathcal{M})} \mathcal{M}_\varphi / \mathcal{U}$ est élémentairement équivalent à $\mathcal{M}$.
- Supposons $\mathcal{M}$ élémentairement équivalent à un ultraproduit de modèles finis de T . Tout modèle fini de T est modèle de T_0 , donc tout ultraproduit de modèles finis de T est modèle de T_0 , donc $\mathcal{M}$ est modèle de T_0 .

Exercice 5. 1. Les fonctions et les constantes de $\mathfrak{Q}$ se définissent aisément à partir des fonctions point à points dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Montrer l'associativité, la commutativité et la distributivité ne pose pas de problème. Il faut montrer que $\mathfrak{Q}$ est un corps : soit $a \in \mathfrak{Q}$, $a \neq 0$ on note $a = \lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} q_i$ pour signifier que a est dans la classe d'équivalence de $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ pour l'ultrafiltre (ie $\{i \in \mathbb{N} : a_i = q_i\} \in \mathcal{U}$). Si a est non nul, alors $\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\} \in \mathcal{U}$. Alors on pose $b_i = a_i^{-1}$ pour $i \in \mathbb{N}$ tel que $a_i \neq 0$. Alors le produit ab est tel que $\{i \in \mathbb{N} : a_i b_i = 1\} \in \mathcal{U}$. Donc $ab = \lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} 1 = 1^{\mathfrak{Q}}$. Donc $\mathfrak{Q}$ est un corps. Les propriétés de corps ordonnés se montrent essentiellement de la même manière et sont laissés en exercice.

2. $\mathfrak{M}$ est un idéal de A ne pose pas de problème. Il est maximal : si $I \supsetneq \mathfrak{M}$, avec I est un idéal de A . Soit $x \in I \setminus \mathfrak{M}$, il existe $q \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $|x| < q$ et $p \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $|x| > p$. Épargnons nous les valeurs absolues, et supposons $x > 0$.

Alors $q < x < p$, et comme $\mathfrak{Q}$ est un corps ordonné, on a

$$p^{-1} < x^{-1} < q^{-1}$$

Donc l'inverse de x est dans A , puis comme I est un idéal, $1 = x^{-1}x \in I$ donc $I = A$, et $\mathfrak{M}$ est maximal.

3. Soit $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans le quotient $A/\mathfrak{M}$. Supposons $x < y$. Si $x - y \in \mathfrak{M}$, on a $\bar{x} = \bar{y}$. sinon il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$, et pour tout $x' \in \bar{x}$ et $y' \in \bar{y}$ on a $x' < q < y'$, donc on a bien $\bar{x} < \bar{y}$. Le relation $<$ passe donc bien au quotient. Le lecteur montrera que $A/\mathfrak{M}$ muni de l'ordre est bien un corps totalement ordonné, ie que l'ordre est invariant par translation et stable par multiplication par un élément positif.
4. Deux rationnels dans A (les éléments de la forme $\lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} q$ pour $q \in \mathbb{Q}$) sont bien distincts dans le quotient $\mathfrak{R} = A/\mathfrak{M}$: si $q < q'$, sont deux rationnels alors ils sont séparés par $\frac{q+q'}{2}$. La restriction est donc strictement croissante, donc injective, et son image est un sous-corps de $\mathfrak{R}$ isomorphe à $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot)$: c'est bien le sous corps premier de $\mathfrak{R}$). On note le morphisme canonique :

$$\Pi : x \in A \mapsto \bar{x} \in \mathfrak{R}$$

Montrons que $\mathbb{Q}$ (en fait $\Pi(\lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} \mathbb{Q})$ pour les tâtilons) est non-minoré, non majoré, et dense dans $\mathfrak{R}$. $\mathbb{Q}$ n'est ni minoré, ni majoré puisque A est l'anneau des éléments archimédiens et que $<$ passe au quotient : si $x \in A$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x| < q$, et alors $|\bar{x}| < \overline{q+1}$. Pour la densité, si $\bar{x} < \bar{y}$ dans $\mathfrak{R}$, notons $L_y = \{q \in \mathbb{Q} : q < \bar{y}\}$, et $R_x = \{q \in \mathbb{Q} : \bar{x} < q\}$ et supposons $R_x \cap L_y = \emptyset$. Chacun de ces deux ensembles est non vide (puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas minorée, ni majoré dans $\mathfrak{R}$), et pour tout $q \in L_y$, $p \in R_x$, on a

$$q < x < y < p$$

En particulier, $q - p < x - y$ et $y - x < p - q$. Autrement dit, $|x - y| < p - q$. Donc comme L_y et R_x forme une partition de $\mathbb{Q}$, il vient que pour tout $q \in \mathbb{Q}_+^*$, $|x - y| < q$.

5. Soit B partie non-vide et majorée de $\mathfrak{R}$, si B a un maximum, on a terminé. Sinon on pose $L = \{q \in \mathbb{Q} : \exists b \in B, q < b\}$. L est majorée, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathfrak{R}$, on peut prendre une suite $(q_i)_{i \in \mathbb{N}} \in L^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $b \in B$, il existe i_0 , vérifiant pour tout $i > i_0$, $q_i > b$ (on construit la suite par récurrence). Il suffit de vérifier que $\lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} q_i$ est bien la borne supérieure que l'on recherche (on notera

que j'ai à nouveau fait sauter le passage au quotient au milieu, le lecteur se convaincra que je ne fais pas n'importe quoi.)

D'une part, $\lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} q_i$ majore B , en effet, si $b \in B$, il existe un nombre fini de i tel que $b > q_i$. On écrit $b = \lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} b_i$, et comme $\mathcal{U}$ est non principal, il existe i_0 , tel que pour tout $i > i_0$, $\{j \in \mathbb{N} : b_j < q_i\} \in \mathcal{U}$. On en déduit que $\{j \in \mathbb{N} : b_j \leq q_j\} \in \mathcal{U}$. Sinon, par maximalité de $\mathcal{U}$, $\{j \in \mathbb{N} : b_j \geq q_j\} \in \mathcal{U}$, donc

$$\{j \in \mathbb{N} : b_j < q_j\} \cap \{j \in \mathbb{N} : b_j \geq q_j\} \in \mathcal{U}$$

et $\{j \in \mathbb{N} : q_i > b_j \geq q_j\}$ est fini puisque q_i est croissante. Or $\mathcal{U}$ est non principal : contradiction. Donc $\{j \in \mathbb{N} : b_j \leq q_j\} \in \mathcal{U}$. Par le théorème de Łoś, on en déduit que $\mathfrak{Q} \models b < \lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} q_i$.

D'autre part, si $m \in \mathfrak{R}$ majore B , alors m majore chacun des rationnels $\lim_{j \rightarrow \mathcal{U}} q_i$. Écrivons $m = \lim_{j \rightarrow \mathcal{U}} m_j$, et supposons $m \leq \lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} q_i$, ie par Łoś, $\{j \in \mathbb{N} : m_j > q_j\} \notin \mathcal{U}$. Alors par maximalité de $\mathcal{U}$, $\{j \in \mathbb{N} : m_j \leq q_j\} \in \mathcal{U}$. Comme m majore chacun des q_i , par le théorème de Łoś, on a $\{j \in \mathbb{N} : m_j \geq q_i\} \in \mathcal{U}$ pour tout i . Donc pour tout i , $\{j \in \mathbb{N} : q_i \leq m_j < q_j\} \in \mathcal{U}$, or $\min\{j \in \mathbb{N} : q_i \leq m_j < q_j\} \geq i$ et donc $|m - \lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} q_i| < p$ pour tout $p \in \mathbb{Q}$, donc dans $\mathfrak{R}$, $m = \lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} q_i$. Donc $\lim_{i \rightarrow \mathcal{U}} q_i$ est bien majoré par tous les majorants de B .

On vient de montrer que $\mathfrak{R}$ est un corps archimédien et Dedekind complet. Or, il n'y a qu'un seul tel corps à isomorphisme près : $\mathfrak{R}$ est donc isomorphe à $\mathbb{R}$.

6. Si on prend un autre corps ordonné k que $\mathbb{Q}$, on pourrait penser que les questions 1 à 5 amène à la construction d'un sur-corps $K \succeq k$ dans lequel $(k, <)$ est dense, non majoré, ni minoré, et qui admet le théorème de la borne supérieure : c'est le complété de Dedekind de k . En fait, comme l'ultrapuissance est sur $\mathbb{N}$, on n'obtient que la convergence des suites adjacentes (indexé par $\mathbb{N}$) de k : est-ce aussi fort que le théorème de la borne supérieure ?

Exercice 6.

1. Soit X un espace séparé et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X . Soient x, y deux points distincts de X . Il existe deux ouverts V_1, V_2 disjoints contenant respectivement x et y . Les deux ouverts étant disjoints, il y en a au plus un qui appartient à $\mathcal{U}$, donc $\mathcal{U}$ converge vers au plus un des deux points x, y , donc $\mathcal{U}$ converge vers au plus un point.

Réciproquement, supposons que tout ultrafiltre converge vers au plus un point. Soient x, y deux points de X qu'on ne peut pas séparer, c'est-à-dire tel que pour tout ouvert V_1, V_2 contenant respectivement x et y , on a $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Alors la famille $\{V | V \text{ ouvert contenant } x \text{ ou } y\}$ a la propriété d'intersection finie, donc est contenue dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$, et $\mathcal{U}$ converge vers x et y , donc $x = y$.

2. Soit X un espace quasi-compact et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X . Si $\mathcal{U}$ ne converge vers aucun point, alors pour tout $x \in X$, il existe un ouvert V_x contenant x n'appartenant pas à $\mathcal{U}$. La famille $(V_x)_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X , donc admet un sous-recouvrement fini $X = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$. Ainsi, l'un des V_{x_i} appartient à $\mathcal{U}$, contradiction. $\mathcal{U}$ converge donc vers au moins un point.

Réciproquement, supposons que tout ultrafiltre converge vers au moins un point. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts telle que pour tout $I_0 \subseteq I$ fini, $(V_i)_{i \in I_0}$ ne recouvre pas X . On veut montrer que la famille ne recouvre pas X . On pose $F_i = \neg V_i$, alors $(F_i)_{i \in I}$ est une famille ayant la propriété d'intersection finie. Cette famille est donc contenue dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$, qui converge vers un point x . Ce point n'appartient pas à $\bigcup V_i$, car sinon il existerait i tel que $x \in V_i$, donc $V_i \in \mathcal{U}$ par définition de la convergence, mais $F_i = \neg V_i \in \mathcal{U}$, absurde. Les V_i ne recouvrent donc pas X , X est donc quasi-compact.

3. En préambule, on définit, pour $f : X \rightarrow Y$ une application et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X , l'ultrafiltre image de $\mathcal{U}$ par f noté $f(\mathcal{U})$, par $f(\mathcal{U}) = \{A \subseteq Y | f^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$. Alors $f(\mathcal{U})$ est bien un ultrafiltre, et si f est une application continue entre espaces topologiques et $\mathcal{U}$ converge vers un point x de X , alors $f(\mathcal{U})$ converge vers $f(x)$.

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces quasi-compact. On pose $X := \prod_i X_i$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X . Pour tout i , on note p_i la projection canonique $X \rightarrow X_i$. $p_i(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre sur X_i qui est quasi-compact, donc $p_i(\mathcal{U})$ converge vers au moins un point x_i . Montrons que $\mathcal{U}$ converge vers $(x_i)_{i \in I}$. Soit V

un voisinage de (x_i) . V contient un voisinage de (x_i) de la forme $V' := V_{i_1} \times \dots \times V_{i_n} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_n} X_i$, avec V_{i_j} ouverts de X_{i_j} , par définition de la topologie produit. Comme pour tout j , $p_{i_j}(\mathcal{U})$ converge vers x_{i_j} , on a $V_{i_j} \in p_{i_j}(\mathcal{U})$, c'est-à-dire $V_{i_j} \times \prod_{i \neq i_j} X_i \in \mathcal{U}$. L'intersection de ces ouverts est V' , donc $V' \in \mathcal{U}$, ce qu'on voulait.

Exercice 7.

1. Soient A et B deux ensemble finis disjoints de nombres réels. Pour chaque point dans A , on prend un intervalle à extrémités rationnelles contenant ce point et disjoint de B . Alors la réunion de ces intervalles est de la forme O_n pour un certain entier n , et on a $n \in F_t$ pour $t \in A$ et $n \notin F_t$ pour $t \in B$.
2. Tout d'abord, un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, il y a donc au plus $2^{2^{\aleph_0}}$ ultrafiltres sur $\mathbb{N}$.

Ensuite, pour chaque partie X de $\mathbb{R}$, la famille $(F_t)_{t \in X} \cup (\neg F_t)_{t \notin X}$ a la propriété d'intersection finie d'après la question précédente. Ainsi, cette famille est prolongeable en un ultrafiltre $\mathcal{U}_X$. Si X et Y sont deux parties distinctes de $\mathbb{R}$, alors les ultrafiltres $\mathcal{U}_X$ et $\mathcal{U}_Y$ sont distincts. Ainsi, on a trouver autant d'ultrafiltres distincts que de parties de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $2^{2^{\aleph_0}}$.

3. On pourra regarder la fin de cette réponse.

Exercice 8. Posons βX l'ensemble des ultrafiltres sur X , muni de la topologie sur engendré par la famille

$$\{\mathcal{U} \in \beta X : A \in \mathcal{U}\}_{A \in \mathcal{P}(X)}$$

Où les éléments de X sont associés à leur filtres principaux (X est discret, donc $i_X : X \rightarrow \beta X$ est bien continue).

Soit $f : X \rightarrow K$ continue, avec K compact, et F un ultrafiltre sur X , alors $f(F)$ est un ultrafiltre sur K . Alors $f(F)$ admet une unique limite dans K puisque celui-ci est compact, on la note x et on pose $\beta f(F) = x$. Cela définit une extension continue de f à βX .

Alternative : On peut aussi raisonner en terme d'espace de Stone sur l'algèbre de Boole des parties de X (cet espace est en fait exactement l'ensemble des ultrafiltres.)

Bonus : Si on retire l'hypothèse X discret, la compactification existe-elle encore ? En fait, il est possible d'étendre la preuve via les ultrafiltres aux espaces de Tychonoff (espace séparé, complètement régulier) en considérant un ensemble plus large de filtres.