

TD de Logique 10 : Va-et-vient, applications pratiques. (corrigé)

Exercice 0. Cela normalement a été vu en cours, mais comme il s'agit d'un exemple fondamental, il faut savoir le refaire tout seul.

Soit $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \text{DLO}$, comme DLO ne contient pas de symbole de constante ni de fonctions, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont 0-isomorphes.

On note $\mathcal{I} = \{f : f \text{ est un 0-isomorphisme de support fini entre } \mathcal{M} \text{ et } \mathcal{N}\}$. $\mathcal{I}$ est évidemment close sous restriction (et contient bien $\emptyset_{\mathcal{M}} \rightarrow \emptyset_{\mathcal{N}}$ par le paragraphe précédent). Montrons que $\mathcal{I}$ satisfait à la condition de va et vient sans restriction. Soit $f : \bar{a} \mapsto \bar{b} \in \mathcal{I}$. On peut toujours ordonner $a_0 < a_2 < \dots < a_n$ et $b_0 < b_2 < \dots < b_n$. Comme f est un 0-isomorphe, f est une application strictement croissante et par le principe des tiroirs $f(a_i) = b_i$. Montrons le *va* : soit $a_{n+1} \in \mathcal{M} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Comme $<$ est total sur $\mathcal{M}$, on a alors trois cas :

- soit $a_i < a_{n+1} < a_{i+1}$, pour un certain i . Alors comme $(\mathcal{N}, <)$ est un ordre dense, on peut choisir $b_{n+1} \in \mathcal{N}$, tel que $b_i < b_{n+1} < b_{i+1}$;
- soit $a_{n+1} > a_n$ (respectivement $a_{n+1} < a_0$). Comme $(\mathcal{N}, <)$ est un ordre sans extrémités, on peut choisir $b_{n+1} > b_n$ (respectivement $b_{n+1} < b_0$)

Dans chaque cas on a défini b_{n+1} tel que $f' : a_i \mapsto b_i$ pour $i \in \{0, \dots, n+1\}$ est une application strictement croissante telle que $a_{n+1} \in \text{dom } f'$: donc $f' \in \mathcal{I}$ (puisque les 0-isomorphismes des modèles de DLO sont exactement les applications qui préservent l'ordre) et on a la propriété du *va*. Pour la condition du *vient*, on réalise exactement la même disjonction de cas, et les mêmes propriétés des ordres denses totaux.

On en conclut que $\mathcal{I}$ a la propriété du va et vient sans restriction.

En particulier, deux modèles dénombrable de DLO sont ∞ -isomorphes donc isomorphes, et donc DLO est $\aleph_0$ -catégorique (et donc complète). Enfin, les 0-isomorphismes entre modèles sont des ∞ -isomorphismes donc tout type est uniquement déterminé par ses formules sans quantificateur ie DLO élimine les quantificateurs.

Exercice 1.

1. Un sens est évident puisque $\text{Th}(\mathcal{A}) = \text{tp}^{\mathcal{A}}(\emptyset)$, et qu'un n -isomorphisme préserve la satisfaction des formules de profondeur de quantification $\leq n$.

Pour la réciproque, montrons par récurrence qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalences de k -uplets modulo n -isomorphisme ; en outre chacune de ces classes est définie par une formule de rang de quantification n . C'est évident pour $n = 0$, puisque le langage est relationnel et fini. Pour la récurrence, on suppose que pour chaque k les classes d'équivalence de k -uplets modulo n -isomorphisme sont définies par les formules $\varphi_{k,n,0}(\bar{x}), \dots, \varphi_{k,n,d}(\bar{x})$.

On considère le k -uplet $\bar{a}$ et l'on forme

$$I = \{0 \leq i \leq d \text{ tel qu'il existe } \alpha \text{ tel que } \mathcal{A} \models \varphi_{k+1,n,i}(\bar{a}, \alpha)\}$$

puis

$$\chi(\bar{x}) = \left(\bigwedge_{i \in I} \exists y \varphi_{k+1,n,i}(\bar{x}, y) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \notin I} \neg \exists y \varphi_{k+1,n,i}(\bar{x}, y) \right).$$

Il est alors clair que ces formules, en nombre fini quand $\bar{a}$ varie, définissent la classe de n -isomorphisme de $\bar{a}$.

Notamment si $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, alors la fonction $\emptyset : \emptyset_{\mathcal{A}} \rightarrow \emptyset_{\mathcal{B}}$ est pour tout n un n -isomorphisme : c'est un ω -isomorphisme.

2. En langage relationnel de cardinal arbitraire, l'énoncé est faux. Munissons $\mathbb{N}$ de la structure suivante : pour chaque n la relation unaire R_n désigne le segment $x \leq n$. Soit $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors pour chaque restriction finie $\tilde{\mathcal{L}}$ du langage, $(\mathbb{N}, \tilde{\mathcal{L}}) \simeq_\omega (\mathbb{N}^*, \tilde{\mathcal{L}})$. En particulier par finitude des formules, on a bien $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}^*$ dans le langage global. Pourtant $\emptyset$ n'est pas un 1-isomorphisme dans $\mathcal{L}$, car aucun isomorphisme local ne passe par ∞ .

En revanche $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ssi pour toute restriction *finie* $\tilde{\mathcal{L}}$ du langage, $(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{L}}) \simeq_\omega (\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{L}})$.

Exercice 2. Montrons d'abord que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont ω -isomorphes pour si et seulement si pour tout k , $a_k = b_k$.

En effet supposons $a_k = b_k$ pour tout k , par récurrence, si $x \in \mathcal{A}$, on envoie x sur un élément de $\mathcal{B}$ dont la classe d'équivalence a le même cardinal. Soit un n -uplet $x_1 \cdots x_n$ dans $\mathcal{A}$. On peut trouver $y_1 \cdots y_{n-1}$ de même type que $x_1 \cdots x_{n-1}$. On peut supposer $x_n \neq x_1 \cdots x_{n-1}$. Alors ou x_n est dans la classe d'équivalence d'un $(x_i)_{i < n-1}$ auquel cas on prend y_n dans la classe d'équivalence d'un y_i avec i tel que $R(x_n, x_i)$; ou x_n n'est en relation avec aucun x_i , on prend alors y_n dans une classe de même cardinal k que la classe de x_n auquel aucun y_i n'appartient (une telle classe appartient par principe des tiroirs puisque $a_k = b_k$).

Réciproquement s'il existe k_0 tel que $a_{k_0} \neq b_{k_0}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas ω -isomorphe : supposons $a_{k_0} > b_{k_0}$, on prend une famille de $\mathcal{A}$ de représentant des classes de cardinal k_0 de cardinal, alors le type sans paramètre de toute sous-famille de cardinal $b_{k_0} + 1$ de cette famille n'est pas réalisé dans $\mathcal{B}$ donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas $(b_{k_0} + 1)$ -isomorphes (et donc pas ω -isomorphe).

Pour le cas général, si $a_{k_0} \neq b_{k_0}$ pour un certain $k_0 \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas 0-isomorphes : supposons $a_{k_0} > b_{k_0}$, donc b_{k_0} est fini, et $\mathcal{B}$ satisfait l'axiome disant qu'il existe au plus b_{k_0} classe d'équivalence de cardinal k_0 , donc $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{B}$.

Supposons $a_\infty > b_\infty$, et $a_k = b_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $b_\infty = 0$, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ si et seulement s'il existe une infinité de $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ non nulle, mais $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne seront jamais 1-isomorphe (la réalisation du 1-type être dans une classe infinie n'est pas reflétable dans $\mathcal{B}$).

Si $b_\infty \neq 0$, on a $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ et montrons alors que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont b_∞ -isomorphes, ou presque (mais pas plus par ce qui précède). $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont 0-isomorphes et les $(b_\infty - 1)$ -uplets de $\mathcal{B}$ sont bien reflétables dans $\mathcal{A}$ (détails en exercices). Les b_∞ -uplets de $\mathcal{B}$ sont bien reflétables dans $\mathcal{A}$ si et seulement si s'il existe une infinité de $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ non nulle (sinon, $\mathcal{A}$ satisfait le schéma d'axiomes disant qu'il existe b_{k_0} classes infinies (avec les paramètres) et il existe une classe distinctes de cardinal au moins k pour tout entier k).

Exercice 3. Un groupe abélien divisible sans torsion non-dénombrable est isomorphe à $\mathbb{Q}^{(I)}$ avec I non-dénombrable. Entre deux tels groupes, les applications linéaires partielles de domaine un sous-espace de dimension fini forment un système de va-et-vient qui montre que ces deux groupes sont ∞ -isomorphes.

La notion de groupe abélien divisible sans torsion s'exprime au premier ordre, on obtient ainsi que cette théorie est complète car tous les modèles non-dénombrables sont élémentairement équivalents.

Dans le cas dénombrable, on n'a pas nécessairement $G \simeq_\infty G'$, par exemple en prenant $G = \mathbb{Q}$ et $G' = \mathbb{Q}^2$.

Exercice 4. On considère un langage contenant un symbole de relation binaire $\sim$ et on prend la théorie T qui dit que $\sim$ est une relation d'équivalence qui a deux classes d'équivalence, dont l'une des classes ne contient qu'un point. T est alors clairement $\aleph_0$ -catégorique, T admet des modèles infinis et T n'élimine pas les quantificateurs.

Exercice 5. Soit $\mathcal{M}$ un modèle. La fonction s y est injective et sans cycle ; tout élément non-nul est successeur. Appelons *orbite* de $a \in \mathcal{M}$ l'ensemble $O(a)$ des images et éventuels antécédents de a sous s . Deux cas se présentent : $O(a) \simeq \mathbb{N}$ ou $O(a) \simeq \mathbb{Z}$. Mais il y a une seule orbite de type $\mathbb{N}$, qui est celle de 0 et de chacun de ses itérés. La structure générale des modèles en découle : $\mathcal{M} \simeq \mathbb{N} \sqcup \bigsqcup_I \mathbb{Z}$ pour I un ensemble quelconque d'indices.

Appelons *riche* un modèle où I est infini. Par compacité, tout modèle possède une extension élémentaire riche. Le va-et-vient entre modèles riches est sans restrictions. La complétude et l'élimination des quantificateurs suivent.

Deux modèles $\mathcal{M}_I, \mathcal{M}_J$ sont isomorphes ssi I et J sont en bijection. Clairement $\text{card } \mathcal{M}_I = \text{card } I + \aleph_0$. Notamment si $\mathcal{M}_I$ est non-dénombrable, alors $\text{card } I = \text{card } \mathcal{M}_I$. D'où la κ -catégoricité en κ non-dénombrable (mais pas l' $\aleph_0$ -catégoricité).

Exercice 6. Tout modèle est clairement de la forme $\mathcal{M}_I = \mathbb{N} \sqcup_{<} \bigsqcup_I \mathbb{Z}$, où I est ordonné. Appelons *riche* un modèle où I est un ordre linéaire dense sans extrémités. Tout modèle possède une extension élémentaire riche. Entre tels modèles, deux uplets 0-isomorphes *au sens de $\hat{\mathcal{L}}$* sont ∞ -isomorphes. Cela montre tout.

On peut aussi montrer $\mathcal{M}_I \simeq \mathcal{M}_J$ ssi $I \simeq J$ (en tant qu'ordres). Ceci exclut la catégoricité en tout cardinal.

Exercice 7.

1. Une axiomatisation est donné par les énoncés suivants :

- $\forall x \neg xRx$;
- $\forall x, y (xRy \leftrightarrow yRx)$;
- Pour tous entiers n, m , l'énoncé $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m (\bigwedge_{i,j} x_i \neq y_j) \rightarrow \exists z (\bigwedge_i zRx_i \wedge \bigwedge_j z \neq y_j \wedge \neg zRy_j)$.

2. On construit par récurrence une suite croissante de graphes finis $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout n , pour toute partie X de G_n , il existe un point $y \in G_{n+1}$ tel que yRx pour tout $x \in X$ et $\neg yRx$ pour tout $x \in G_n \setminus X$. Le graphe $\bigcup_n G_n$ est alors un graphe aléatoire dénombrable.

3. On regarde $S_1 := \{y \in \text{dom}(\varphi) \mid xRy\}$ et $S_2 := \{y \in \text{dom}(\varphi) \mid \neg xRy\}$. Alors $\varphi(S_1)$ et $\varphi(S_2)$ sont deux ensembles finis disjoints de H , il existe donc $z \in H$ relié à chaque point de $\varphi(S_1)$ et à aucun point de $\varphi(S_2)$, on pose alors $\tilde{\varphi}(x) = z$. On obtient bien un isomorphisme partiel qui étend φ .

4. On applique la méthode du va-et-vient. Étant donné deux graphes aléatoires dénombrables G et H , on les énumère $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}, (h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et on construit une suite d'isomorphismes partiels finis $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout i , $g_i \in \text{dom}(f_i)$ et $h_i \in \text{im}(f_i)$. En effet, étant donné f_i , on peut étendre f_i en isomorphisme partiel fini f dont le domaine contient g_i , puis on étend f^{-1} en un isomorphisme partiel fini f' dont le domaine contient h_i et on pose $f_{i+1} = f'^{-1}$. L'isomorphisme souhaité entre G et H est alors $\bigcup_i f_i$.

La théorie T est donc $\aleph_0$ -catégorique et n'a pas de modèle fini, elle est donc complète.

5. On considère deux modèles de T M, N qui ont une sous-structure commune A , $\varphi(\bar{x}, y)$ une formule sans quantificateurs, $\bar{a} \in A$ et $c \in M$ tels que $M \models \varphi(\bar{a}, c)$. On cherche $d \in N$ tel que $N \models \varphi(\bar{a}, d)$. Comme N est aléatoire, on peut étendre l'isomorphisme partiel $\text{id} : \bar{a} \rightarrow \bar{a}$ en un isomorphisme défini en c , dont on note d l'image. Comme φ est sans quantificateur, on a $M \models \varphi(\bar{a}, c)$ si et seulement si $\{\bar{a}, c\} \models \varphi(\bar{a}, c)$ ssi $\{\bar{a}, d\} \models \varphi(\bar{a}, d)$ ssi $N \models \varphi(\bar{a}, d)$. Le point d convient, T élimine donc les quantificateurs.

Exercice 8. Supposons que X n'est pas $\mathcal{L}$ -définissable sans paramètres (ie, R n'est pas équivalent modulo $\text{Th}(\mathbb{A}')$ à une $\mathcal{L}$ -formule). On va construire un automorphisme de $\mathcal{L}$ -structure d'une $\mathcal{L}'$ -extension élémentaire de $\mathbb{A}$ qui ne préserve pas R .

Soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ deux n -uplet de variables disjoints. On considère le $2n$ -type suivant :

$$\{R(\bar{x}) \wedge \neg R(\bar{y})\} \cup \{\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{y}) : \varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})\}$$

Par compacité, cet ensemble est satisfaisable, sinon R serait définissable par un nombre fini de $\mathcal{L}$ -formules, et donc définissable sans paramètres. Soit $\mathbb{A}'_0$ une extension élémentaire de $\mathbb{A}'$ qui réalise ce type. On note $\bar{a}, \bar{b}$ cette réalisation. Comme

$$\text{tp}_{\mathcal{L}}(\bar{a}) = \text{tp}_{\mathcal{L}}(\bar{b})$$

on pose un $\mathcal{L}$ -isomorphisme partiel en posant $\varphi_0(\bar{a}) = \bar{b}$ qui ne préserve pas R . On peut étendre φ_0 en un automorphisme de $\mathcal{L}$ -structure d'une extension élémentaire dénombrable de $\mathbb{A}$ par va-et-vient. Supposons avoir construit φ_i , $\mathcal{L}$ -automorphisme partiel de $\mathbb{A}_i \succ_{\mathcal{L}'} \mathbb{A}$. On se donne une énumération de $\mathbb{A}_i$ (voir la remarque plus bas sur l'énumération).

Pour i impair, soit a le premier élément de $\mathbb{A}_i$ qui n'est pas dans le domaine de φ_i . Alors il existe une extension élémentaire $\mathbb{A}_{i+1}$ dénombrable de $\mathbb{A}_i$ et $b \in \mathbb{A}_{i+1}$ tel que

$$\text{tp}_{\mathcal{L}}(a / \text{dom}(\varphi_i)) = \text{tp}_{\mathcal{L}}(b / \text{im}(\varphi_i))$$

On pose alors $\varphi_{i+1} = \varphi_i \cup \{(a, b)\}$.

Pour i pair, soit b le premier élément de $\mathbb{A}_i$ qui n'est pas dans l'image de φ_i . Alors il existe une extension élémentaire $\mathbb{A}_{i+1}$ dénombrable de $\mathbb{A}_i$ et $a \in \mathbb{A}_{i+1}$ tel que

$$\text{tp}_{\mathcal{L}}(a/\text{dom}(\varphi_i)) = \text{tp}_{\mathcal{L}}(b/\text{im}(\varphi_i))$$

On pose alors $\varphi_{i+1} = \varphi_i \cup \{(a, b)\}$.

Pour tout i , on a alors,

$$\text{tp}_{\mathcal{L}}(a/\text{dom}(\varphi_{i+1})/\emptyset) = \text{tp}_{\mathcal{L}}(b/\text{im}(\varphi_{i+1})/\emptyset)$$

On pose alors $\mathbb{B} = \bigcup_i \mathbb{A}_i$. Par union de chaîne élémentaire (colimite filtrante), $\mathbb{B} \succ_{\mathcal{L}'} \mathbb{A}$. Il faut montrer que $\bigcup_i \varphi_i$ est bien un $\mathcal{L}$ -automorphisme de $\mathbb{B}$: il faut en fait prendre une énumération de B avant de construire les $\mathbb{A}_i$: on peut prendre une énumération d'une extension $\aleph_0$ -saturé dénombrable de $\mathbb{A}$ et prendre une énumération de ce domaine tout entier. Avec cette énumération, $\bigcup_i \varphi_i$ est un $\mathcal{L}$ -automorphisme de $\mathbb{B}$. Comme φ_0 ne préserve pas R , φ non plus : contradiction. Donc X est définissable sans paramètre.

Exercice 9. On considère la fonction de restriction :

$$\begin{array}{ccc} \rho : S_n(A\bar{b}) & \rightarrow & S_n(A) \\ p & \mapsto & p \cap \text{Form}(\mathcal{L}_A)(\bar{x}), \end{array}$$

qui est continue. Par commodité, on note seulement φ la formule $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$. Par hypothèse, $\rho(O_\varphi)$ et $\rho(O_{\neg\varphi})$ sont disjoints : ils partitionnent $S_n(A)$. Mais par compacité, continuité, et séparation, ce sont des fermés de $S_n(A)$, donc des ouverts-fermés. Notamment $\rho(O_\varphi)$ est un O_χ pour une formule $\chi(\bar{x}, \bar{a})$ à paramètres dans A . Ainsi $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in p$ ssi $\chi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$.