Gabriel Sébilet Deloge
Bureau T12, toits du DMA
gabriel.sebilet-deloge@imj-prg.fr

TD de Logique 13 : ZF, ordinaux
(corrigé)

Exercice 1.

1. On définit par récurrence une suite $(\alpha_n)_{n<\omega}$ en posant $\alpha_0 = \alpha$ et pour tout $n < \omega$, $\alpha_{n+1} = F(\alpha_n)$. On pose $\alpha_\omega = \sup_{n<\omega} \alpha_n$. Par l'hypothèse sur F, la suite $(\alpha_n)_{n<\omega}$ est croissante et on a $\alpha_\omega \geqslant \alpha$. Et α_ω est point fixe de F : en effet, par continuité de F, on a $F(\alpha_\omega) = \sup_{n<\omega} F(\alpha_n) = \sup_{n<\omega} \alpha_{n+1} = \alpha_\omega$.

   On a obtenu ainsi un point fixe de F plus grand que α. De plus, le point fixe obtenu est le plus petit point fixe supérieur à α : si β est point fixe de F et $\beta \geq \alpha$, alors $\beta = F^n(\beta) \geq F^n(\alpha) = \alpha_n$, donc $\beta \geq \sup \alpha_n = \alpha_\omega$.

2. On définit par récurrence une suite $(\alpha_n)_{n<\omega}$ en posant $\alpha_0 = \alpha$ et pour tout $n < \omega$, $\alpha_{n+1} = \sup_{F\in\mathcal{F}} F(\alpha_n)$. On pose $\alpha_\omega = \sup_{n<\omega} \alpha_n$. Comme dans la question 1, la suite $(\alpha_n)_{n<\omega}$ est croissante et on a $\alpha_\omega \geqslant \alpha$. Et pour tout $F \in \mathcal{F}$, on a $F(\alpha_\omega) = \sup_{n<\omega} F(\alpha_n) \leqslant \sup_{n<\omega} \alpha_{n+1} = \alpha_\omega$; l'inégalité inverse vient de l'hypothèse sur F, et donc α_ω est bien un point fixe de F.

3. La fonctionnelle $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ vérifie les conditions de la première question, on a donc des points fixes de la fonction $\aleph$ arbitrairement grand, le plus petit étant $\sup\{\aleph_0, \aleph_{\aleph_0}, \ldots\}$.

4. La fonctionnelle $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ vérifie les conditions de la première question. Le plus petit point fixe, ϵ_0, est égal à $\sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$, et sa forme normale de Cantor est $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$.

Exercice 2.

1. On considère γ minimum tel que $\alpha + \gamma \geq \beta$ (Il existe un tel γ car $\alpha + \beta \geq \beta$). On veut montrer que $\alpha + \gamma \leq \beta$. Si $\gamma = 0$, on a bien $\alpha \leq \beta$. Si γ est successeur, $\gamma = \gamma' + 1$, on a alors $\alpha + \gamma' < \beta$ par minimalité de γ, donc $\alpha+\gamma = \alpha+\gamma'+1 \leq \beta$. Si γ est limite, $\alpha+\gamma = \sup_{\gamma'<\gamma} \alpha+\gamma' \leq \beta$ par minimalité de γ. Dans tous les cas, $\alpha + \gamma = \beta$.

2. La classe fonctionnelle $\xi \mapsto \omega^\xi$ étant strictement croissante, on a pour tout ξ que $\xi \leqslant \omega^\xi$. En particulier, $\alpha < \omega^\xi$ pour tout $\xi > \alpha$; on peut donc considérer β le supremum des γ tel que $\omega^\gamma \leq \alpha$. D'une part, la définition de β donne $\omega^{\beta+1} > \alpha$ et d'autre part, par continuité, on a $\omega^\beta \leq \alpha$, donc β convient. L'unicité est conséquence de la croissance stricte de la fonctionnelle $\beta \mapsto \omega^\beta$.

3. **Existence.** On montre l'existence d'une forme normale de Cantor pour α par induction sur α. L'initialisation se fait à $\alpha = 0$, dont l'unique forme normale de Cantor est la somme vide. Fixons maintenant $\alpha > 0$. Notons α_1 l'ordinal β donné par la question 2, et écrivons la division euclidienne de α par ω^{α_1} : il existe des ordinaux k_1 et γ tels que $\alpha = \omega^{\alpha_1} k_1 + \gamma$, et $\gamma < \omega^{\alpha_1}$. On a forcément $k_1 < \omega$; en effet, sinon, on aurait $\alpha \leqslant \omega^{\alpha_1}\omega = \omega^{\alpha_1+1}$, contredisant la définition de α_1. De plus, $\gamma < \alpha$. On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction à γ pour lui trouver une écriture sous forme normale de Cantor : $\gamma = \omega^{\alpha_2} k_2 + \ldots + \omega^{\alpha_n} k_n$, avec $\alpha_2 > \ldots > \alpha_n$ et $k_2, \ldots, k_n < \omega$. De plus, $\omega^{\alpha_2} \leqslant \gamma < \omega^{\alpha_1}$, donc $\alpha_1 > \alpha_2$ par croissance stricte à droite de l'exponentiation. Donc $\alpha = \omega^{\alpha_1} k_1 + \ldots \omega^{\alpha_n} k_n$, et ceci est bien une écriture sous forme normale de Cantor de α.

   Unicité. Montrons que si $\alpha = \omega^{\alpha_1} k_1 + \ldots \omega^{\alpha_n} k_n$ est un ordinal écrit sous forme normale de Cantor et si $\beta > \alpha_1$, alors $\omega^\beta > \alpha$. On a en effet $\alpha \leqslant \omega^{\alpha_1}(k_1 + \ldots + k_n) < \omega^{\alpha_1}\omega = \omega^{\alpha_1+1} \leqslant \omega^\beta$.

   Montrons maintenant l'unicité de la forme normale de Cantor de α par induction sur α. Soit $\alpha = \omega^{\alpha_1} k_1 + \ldots \omega^{\alpha_n} k_n$ une écriture sous forme normale de Cantor, montrons que n, les α_i et les k_i sont uniquement déterminés par α. L'inégalité démontrée au paragraphe précédent montre que $\omega^{\alpha_1} \leqslant \alpha < \omega^{\alpha_1+1}$, donc par l'unicité dans la question 1, α_1 est entièrement déterminé par α. Écrivons maintenant

$\gamma = \omega^{\alpha_2} k_2 + \ldots + \omega^{\alpha_n} k_n$. Alors par l'inégalité du paragraphe précédent, on a que $\gamma < \omega^{\alpha_1}$, et donc l'écriture $\alpha = \omega^{\alpha_1} k_1 + \gamma$ est une division euclidienne de α par ω^{α_1}. Par unicité de la division euclidienne, k_1 et γ sont entièrement déterminés par α. Maintenant, $\gamma < \alpha$, donc par hypothèse d'induction, γ admet une unique écriture sous fome normale de Cantor. Comme $\gamma = \omega^{\alpha_2} k_2 + \ldots + \omega^{\alpha_n} k_n$, on en déduit que n, les α_i et les k_i pour $i \leqslant 2$ sont entièrement déterminés par γ, donc par α, ce qui conclut.

4. **Ordre.** Soient $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m$ et $\beta = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$ deux ordinaux écrits sous forme normale de Cantor. On va montrer que $\alpha < \beta$ si et seulement si $(\alpha_1, k_1, ..., \alpha_m, k_m) <_{lex} (\beta_1, l_1, ..., \beta_n, l_n)$, où $<_{lex}$ désigne l'ordre lexicographique étendu de sorte à pouvoir comparer des uplets de longueur différente : on dira que $(x_1, ..., x_m) <_{lex} (y_1, ..., y_n)$ s'il existe $i \leqslant \min(m, n)$ avec $x_i < y_i$ et $\forall j < i\ x_j = y_j$, ou si $m < n$ et $\forall i \leqslant m\ x_i = y_i$.

   Supposons d'abord $(\alpha_1, k_1, ..., \alpha_m, k_m) <_{lex} (\beta_1, l_1, ..., \beta_n, l_n)$. Si $m < n$ et si pour tout $i \leqslant m$, on a $\alpha_i = \beta_i$ et $k_i = l_i$, alors β est de la forme $\alpha + \gamma$ avec $\gamma > 0$, donc $\alpha < \beta$. Si maintenant, il existe $i \leqslant m$ tel que $\alpha_i < \beta_i$ et pour tout $j < i$, $\alpha_j = \beta_j$ et $k_j = l_j$, alors par le résultat préliminaire démontré à la question précédente, on a $\omega^{\alpha_i} \cdot k_i + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m < \omega^{\beta_i} \leqslant \omega^{\beta_i} \cdot l_i + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$; par croissance stricte à droite de la somme ordinale, on peut alors en déduire que $\alpha < \beta$. Enfin, s'il existe $i \leqslant m$ tel que $k_i < l_i$, $\alpha_i = \beta_i$ et pour tout $j < i$, $\alpha_j = \beta_j$ et $k_j = l_j$, alors en posant $\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_i} \cdot k_i$, on a $\alpha = \gamma + \omega^{\alpha_{i+1}} \cdot k_{i+1} + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m$ et $\beta = \gamma + \omega^{\alpha_i} \cdot (l_i - k_i) + \omega^{\beta_{i+1}} \cdot l_{i+1} + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$; or, par le cas précédent, on a $\omega^{\alpha_{i+1}} \cdot k_{i+1} + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m < \omega^{\alpha_i} \cdot (l_i - k_i) + \omega^{\beta_{i+1}} \cdot l_{i+1} + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$, donc par croissance stricte à droite de la somme, on en déduit que $\alpha < \beta$.

   Réciproquement, si $\alpha < \beta$, alors on a bien $(k_1, ..., k_n) <_{lex} (l_1, ..., l_n)$, car sinon on aurait $(l_1, ..., l_n) \leqslant_{lex} (k_1, ..., k_n)$, ce qui montrerait que $\beta \leqslant \alpha$ par le sens précédent.

   Addition. Soient $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m$, et $\beta = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_n$ deux ordinaux écrits sous forme normale de Cantor. Si $\alpha_m < \beta_1$, alors en notant γ l'ordinal non-nul tel que $\alpha_m + \gamma = \beta_1$, on a $\omega^{\alpha_m} \cdot k_m + \omega^{\beta_1} \cdot l_1 = \omega^{\alpha_m} \cdot (k_m + \omega^{\gamma} \cdot l_1) = \omega^{\alpha_m} \cdot \omega^{\gamma} \cdot l_1 = \omega^{\beta_1} \cdot l_1$, donc $(\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m) + (\omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m) = (\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_{m-1}} \cdot k_{m-1}) + (\omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m)$. Et si $\alpha_m = \beta_1$ alors $(\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot k_m) + (\omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m) = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_m} \cdot (k_m + l_1) + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m$. Une récurrence immédiate utilisant cette remarque montre que :

   - si $\alpha_1 < \beta_1$ alors $\alpha + \beta = \beta = \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m$;
   - s'il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $\alpha_i = \beta_1$, alors $\alpha + \beta = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_i}(k_i + l_1) + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m$;
   - sinon, en prenant $i \in [\![1, m]\!]$ maximal tel que $\alpha_i > \beta_1$, alors on a

   $$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + ... + \omega^{\alpha_i} \cdot k_i + \omega^{\beta_1} \cdot l_1 + ... + \omega^{\beta_n} \cdot l_m.$$

   Dans les trois cas, il s'agit bien d'une écriture sous forme normale de Cantor.

Exercice 3.

1. $g_2(5) = 5 = 2^2 + 1$;

   $g_3(5) = 3^3 = 27$;

   $g_4(5) = 4^4 - 1 = 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 = 255$;

   $g_5(5) = 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 467$;

   $g_6(5) = 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1 = 775$.

   Comme vous pouvez le constater, cela croît très vite... Internet m'informe qu'il faut attendre environ le $A(5, 4)^{\text{ième}}$ terme (où A désigne la fonction d'Ackermann) pour que la suite atteigne enfin 0.

2. Si on écrit l'entier a en base p itérée et qu'on remplace tous les p par des q, puisque $p < q$, tous les coefficients et exposants mis en jeu dans l'écriture obtenue sont bien strictement inférieurs à q, donc il s'agit d'une écriture de $f_{p,q}(a)$ en base q itérée. Il suffit alors de remplacer de nouveau tous les q par des r dans cette écriture pour obtenir $f_{q,r} \circ f_{p,q}(a)$; mais on aurait obtenu le même résultat en remplacant directement tous les p par des r au départ, ce qui montre que $f_{p,r}(a) = f_{q,r} \circ f_{p,q}(a)$ comme voulu.

3. On montre par récurrence sur $n < \omega$ que $f_{p,\omega\restriction n}$ est strictement croissante. Le résultat est vrai au rang $n = 0$; supposons le vrai au rang n et montrons-le au rang $n+1$. Il faut montrer que si $0 \leqslant a < b \leqslant n$, alors $f_{p,\omega}(a) < f_{p,\omega}(b)$. Ceci étant clair lorsque $a = 0$, on supposera $a \geqslant 1$. Écrivons $a = a_k p^k + a_{k-1}p^{k-1} + ... + a_0$ et $b = b_k p^k + b_{k-1}p^{k-1} + ... + b_0$, avec $k \in \mathbb{N}$, $\forall i \leqslant k$ $(a_i < p \wedge b_i < p)$, et $b_k \neq 0$. On a donc $f_{p,\omega}(a) = \omega^{f_{p,\omega}(k)}a_k + \omega^{f_{p,\omega}(k-1)}a_{k-1} + \ldots + a_0$ et $f_{p,\omega}(b) = \omega^{f_{p,\omega}(k)}b_k + \omega^{f_{p,\omega}(k-1)}b_{k-1} + \ldots + b_0$. Mais remarquons que $k < p^k \leqslant b \leqslant n$, donc par hypothèse de récurrence, on a $f_{p,\omega}(k) > f_{p,\omega}(k-1) > \ldots > 0$; les deux écritures précédentes sont donc des formes normales de Cantor. Et comme $a < b$, on a $(a_k, \ldots, a_0) <_{lex} (b_k, \ldots, b_0)$, donc $f_{p,\omega}(a) < f_{p,\omega}(b)$ par la question 4 de l'exercice précédent.

4. On montre que si la suite $(g_p(a))_{p\geqslant 2}$ ne s'annule pas sur l'intervalle d'entiers $[\![2, n]\!]$, alors la suite $(f_{p,\omega}(g_p(a)))_{p\geqslant 2}$ est strictement décroissante sur $[\![2, n+1]\!]$. On a en effet, pour $2 \leqslant p \leqslant n$:

$$\begin{array}{rcl} f_{p+1,\omega}(g_{p+1}(a)) & = & f_{p+1,\omega}(f_{p,p+1}(g_p(a)) - 1) \\ & < & f_{p+1,\omega}(f_{p,p+1}(g_p(a))) \\ & = & f_{p,\omega}(g_p(a)), \end{array}$$

l'égalité étant conséquence de la stricte décroissance de $f_{p+1,\omega}$ démontrée à la question précédente, et la dernière égalité étant conséquence de la question 2.

5. Si la suite $(g_p(a))_{p\geqslant 2}$ ne s'annulait pas, alors par la question précédente, la suite $(f_{p,\omega}(g_p(a)))_{p\geqslant 2}$ serait une suite infinie strictement décroissante d'ordinaux, ce qui est impossible.

Exercice 4.

Exercice 5. 1. Contrairement à l'arithmétique ordinale classique, procéder par récurrence s'avère plus délicat : l'absence de continuité à droite ne donne pas de définition par récurrence de la somme naturelle pour les ordinaux limites ! Il vaut donc mieux simplement utiliser la définition donnée. Pour l'*associativité*, soient α, β, γ trois ordinaux. On a :

$$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \sup\{(\alpha \sqcup \beta) \oplus \gamma \text{ avec un bon ordre sur } \alpha \sqcup \beta \text{ qui préserve l'ordre sur } \alpha \text{ et } \beta\}$$

et l'on peut réécrire :

$$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \sup\{(\alpha \sqcup \beta) \sqcup \gamma \text{ avec un bon ordre sur } (\alpha \sqcup \beta) \sqcup \gamma \text{ qui préserve l'ordre sur } \alpha, \gamma \text{ et } \beta\}$$

il suffit de montrer que les ordres sur $(\alpha \sqcup \beta) \sqcup \gamma$ et $\alpha \sqcup (\beta \sqcup \gamma)$ qui préservent les ordres sur α, β et γ sont les mêmes : c'est assez évident.

La *commutativité* est assez claire : les bons ordres sur $\alpha \sqcup \beta$ et $\beta \sqcup \alpha$ qui étendent α et β sont en bijection par :

$$f : (\alpha \sqcup \beta, <) \mapsto (\beta \sqcup \alpha, <_f)$$

avec $<_f$ défini comme le plus petit ordre vérifiant : $a <_f b$ si et seulement si, a, b sont tous les deux dans α ou tous les deux dans β, et $a < b$ ou si $a \in \alpha$, $b \in \beta$ et $b > a$. Alors f préserve les types d'ordres : la somme naturelle est commutative.

La *croissance* est évidente : soit α, β deux ordinaux, et soit $\gamma > \beta$. par un plongement immédiat de γ dans β, on a $\alpha \oplus \beta \leq \alpha \oplus \gamma$.

2. La somme ordinale usuelle est un ordre particulier sur l'union dijointe qui étend l'ordre sur chaque de ses membres, elle donc forcément plus petite que le sup sur ces ordres...

On a $1 \oplus \omega = \omega \oplus 1 \geq \omega + 1$. Il suffit donc de montrer l'inégalité réciproque. On cherche un ordre sur $\omega \sqcup \{p\}$ qui étend l'ordre sur ω. Pour avoir un ordre total, il faut donc choisir la place de p par rapport aux éléments de ω. Si $p > \omega$, alors $(\omega \sqcup \{p\}, <) \simeq \omega + 1$. Sinon, p est entre deux entiers, ou plus petit que 0 pour $<$ et alors $(\omega \sqcup \{p\}, <) \simeq \omega$ (il suffit de prendre une énumération croissante de ω et d'insérer p au bon endroit dans celle-ci). Donc $1 \oplus \omega = \omega + 1$.

3. Soient α et β deux ordinaux dont les écritures sur forme normale de Cantor sont $\alpha = \sum_{i=k-1}^{0} \omega^{\varepsilon_i} n_i$ et $\beta = \sum_{i=k-1}^{0} \omega^{\varepsilon_i} m_i$ (avec éventuellement des n_i, m_i nuls). On définit :

$$\alpha \boxplus \beta := \sum_{i=0}^{k-1} \omega^{\varepsilon_i}(n_i + m_i)$$

Montrons que $\boxplus = \oplus$.

Comme $+$ est commutative pour les ordinaux finis, $\boxplus$ est commutative, et on a

$$(\alpha + 1) \boxplus \beta = (\alpha \boxplus \beta) + 1 = \alpha \boxplus (\beta + 1)$$

en utilisant la forme normale de Cantor. On montre que $\boxplus$ est strictement croissante à droite (respectivement à gauche par commutativité, détail en exercice).

Comme $\alpha \boxplus \beta$ est un bon ordre sur $\alpha \sqcup \beta$ qui préserve l'ordre sur α et l'ordre sur β (voir que l'écriture sous forme normale de Cantor de $\boxplus$ est en fait un ordre sur l'union disjointe), on a $\alpha \boxplus \beta \leq \alpha \oplus \beta$.

Montrons que $\alpha \boxplus \beta \geq \alpha \oplus \beta$. Soit γ un ordinal sur $\alpha \sqcup \beta$ qui étend les ordres sur α et sur β. On veut montrer que $\gamma \leq \alpha \boxplus \beta$. On est tenté de procèder par récurrence transfinie sur γ :

- $\gamma = 0$ Alors $\alpha = \beta = 0$. Il n'y a rien à dire.
- Si $\gamma \in \lim(Ord)$, soit $\delta \leq \gamma$, si δ est un bon ordre sur $\alpha \sqcup \beta$ on a par hypothèse de récurrence, $\delta \leq \alpha \boxplus \beta$. Sinon, on ne peut pas conclure : il faut faire quelque chose de plus.
- Pareillement.

Il faut en fait établir le résultat par récurrence sur $(\alpha, \beta) \in Ord \times Ord$, avec un ordre bien fondé sur $Ord \times Ord$!

On définit l'ordre suivant :

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) \prec (\gamma, \delta) \Leftrightarrow & \alpha \leq \gamma \textbf{ et } \beta \leq \delta \textbf{ et} \\ & \{\text{ordre sur } \alpha \sqcup \beta\} \neq \{\text{ordre sur } \gamma \sqcup \delta\}\end{aligned}$$

et on montre le lemme : suivant qui assure que $\prec$ est l'ordre qui nous intéresse :

Lemme. $\prec$ est un ordre bien fondé sur $Ord \times Ord$ et si $(\alpha, \beta) \prec (\gamma, \delta)$, alors $\alpha \boxplus \beta < \gamma \boxplus \delta$.

Démonstration. Essentiellement il faut déplier les définitions, laissée en exercice. □

On reprend alors : montrons par induction sur $(Ord \times Ord, \prec)$ que si γ est un ordinal sur $\alpha \sqcup \beta$ qui étend les ordres sur α et sur β alors $\gamma \leq \alpha \boxplus \beta$.

L'élément minimal pour $\prec$ est $(0, 0)$, il n'y a rien à dire.

Soit $(\alpha, \beta) \in Ord \times Ord$, on suppose le résultat vrai pour tout (α', β') avec $(\alpha', \beta') \prec (\alpha, \beta)$, et on raissonne par récurrence sur γ.

- Si $\gamma = 0$, rien n'a changé par rapport à la première récurrence.
- Si $\gamma \in \lim(Ord)$, soit $\delta < \gamma$. Alors la restrictions de γ (vu comme ordre sur $\alpha \sqcup \beta$)à δ est un ordre sur une ensemble de la forme $\alpha' \sqcup \beta'$, avec $(\alpha', \beta') \prec (\alpha, \beta)$. Par hypothèse d'induction, $\delta \leq \alpha' \boxplus \beta'$, donc $\delta \leq \alpha \boxplus \beta$ par le lemme. Comme $\gamma = \sup_{\delta < \gamma} \delta$, il vient que $\gamma \leq \alpha \boxplus \beta$.
- Si $\gamma = \delta + 1 = \delta \cup \{\delta\}$, alors $\delta \in \alpha$ ou $\delta \in \beta$. On suppose $\delta \in \alpha$ alors α est de la forme $\alpha = \alpha' + 1$ et δ est un ordre sur $\alpha' \sqcup \beta$ qui préserve les ordres sur α' et sur β. Comme $(\alpha', \beta) \prec (\alpha, \beta)$., par hypothèse d'induction, $\delta \leq \alpha' \boxplus \beta$. Puis :

$$\gamma = \delta + 1 \leq (\alpha' \boxplus \beta) + 1 = (\alpha' + 1) \boxplus \beta = \alpha \boxplus \beta$$

Ce qui clos la récurrence et l'induction. Donc $\alpha \boxplus \beta$ majore tous les ordres sur $\alpha \sqcup \beta$ qui étendent les ordres sur α et β, donc $\alpha \boxplus \beta \geq \alpha \oplus \beta$.

Donc $\oplus = \boxplus$, on déduit la stricte croissance de la définition de $\boxplus$.

Alors $(Ord, \oplus)$ est un monoïde abélien libre. Comme pour la construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$, on définit une relation d'équivalence sur $Ord \times Ord$ en posant : $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha_1 \oplus \beta_2 = \alpha_2 \oplus \beta_1$, et la passage au quotient par $\sim$ donne une structure de groupe abélien ordonné libre : on a déjà essentiellement fait les vérifications de compatibilité de $\sim$. Un tel groupe est un $\mathbb{Z}$ module, l'écriture sous forme normale de Cantor en donne une famille génératrice.

4. Laissé en exercice

5. Idem.

6. Reprenons le groupe introduit à la question 3 : on serait tenté de remplacer les ω^α par des variable polynômes et de montrer que la multiplication de Hessenberg se définit sur ce groupe, cependant il faudrait encore quotienter l'anneau pour obtenir des égalité entre certains ordinaux (calculer $\omega \otimes \omega$ par exemple)

Exercice 6.

1. $\mathcal{T}_{\omega_1}$ est clairement contenu dans la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Il suffit donc de montrer que c'est une tribu. Soit $A \in \mathcal{T}_{\omega_1}$. Alors il existe $\alpha < \omega_1$ tel que $A \in \mathcal{T}_\alpha$, et alors $\neg A \in \mathcal{T}_{\alpha+1}$.

   Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_{\omega_1}$. Alors il existe des ordinaux $\alpha_n < \omega_1$ tels que $A_n \in \mathcal{T}_{\alpha_n}$. On a alors $A_n \in \mathcal{T}_{\sup_n \alpha_n}$ pour tout n, donc $\bigcup A_n \in \mathcal{T}_{(\sup_n \alpha_n)+1}$, et $(\sup \alpha_n) + 1 < \omega_1$, donc $\bigcup A_n \in \mathcal{T}_{\omega_1}$.