Le corps des transséries et ses propriétés

Gabriel Sébilet Deloge

20 juin 2019

Sommaire

Introduction

Nous présentons dans ce mémoire la construction du corps des transséries, aussi appelées séries généralisées logarithmico-exponentielles, et certaines des propriétés fondamentales de ce corps. Nous définissons également quatre opérations sur ce corps : la dérivation, le calcul de primitive, la composition et le calcul d'inverse compositionnel. Nous illustrons cette construction et ces opérations avec des exemples.

Les termes spécifiques utilisés dans cette introduction sont tous définis formellement dans le mémoire à l'exception notable du vocabulaire issu de la théorie des modèles, que nous mentionnons uniquement dans l'introduction afin de remettre les transséries dans leur contexte actuel. L'ensemble du vocabulaire de théorie des modèles utilisé figure dans [8]. Nous utilisons également sans les définir des notions d'algèbre sur les groupes, anneaux et corps ordonnés ainsi que quelques notions d'analyse asymptotique de niveau licence. Des notions de théories de modèles sont nécessaires pour comprendre le point de vue actuel sur les transséries et notamment le Théorème 0.4, mais demeurent facultatives pour la lecture de ce mémoire une fois passée l'introduction.

Le corps des transséries est couramment noté $\mathbb{T}$ dans la littérature classique. Nous le noterons $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, à l'instar de [12] dont nous tirons la plupart des résultats, car cette notation nous semble plus significative de ce qu'est une transsérie et nous permet de différencier l'ensemble des transséries $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ de la structure $\mathbb{T}$ au sens de la théorie des modèles.

Les transséries sont des objets formels analogues aux séries formelles mais dont les monômes font intervenir en outre une exponentielle E et un logarithme L. L'ensemble des monômes que nous définissons ne sera pas dénombrable, mais le support d'une transsérie est raisonnable en un certain sens. Avec les notations et les définitions que nous introduisons dans la première partie de ce mémoire,

$$x^{\pi} + 1,$$

$$\mathrm{E}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{x^p}\right),$$

$$\mathrm{E}(x) + x^{-1}\,\mathrm{E}(x) + 2x^{-2}\,\mathrm{E}(x) + \cdots + px^{-p}\,\mathrm{E}(x) + \cdots,$$

$$x\,\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(x) + \cdots + \pi x^{-p}\,\mathrm{L}(x) + \cdots + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{x^{p\log 2}}$$

désignent des exemples de transséries. Dans ces exemples, il faut comprendre x comme un élément transcendant sur $\mathbb{R}$ et tel que $\forall r \in \mathbb{R},\ x > r$, le terme $\mathrm{E}(x)$ désignant son exponentielle et le terme $\mathrm{L}(x)$ désignant son logarithme. Pour

tout réel positifs non nuls r et s, nous avons $\mathrm{E}(x) > x^r$ et $x^r > \mathrm{L}(x) > s$. Il y a une correspondance entre développements asymptotiques et transséries [13, introduction].
Des éléments tels que

$$1 + \frac{1}{\mathrm{E}(x)} + \frac{1}{\mathrm{E}(\mathrm{E}(x))} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{E}(\ldots(\mathrm{E}(x)\ldots)} + \ldots$$

ou encore,

$$1 + \frac{1}{\mathrm{L}(x)} + \frac{1}{\mathrm{L}(\mathrm{L}(x))} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{L}(\ldots(\mathrm{L}(x)\ldots)} + \ldots$$

ne sont pas considérés comme des transséries dans ce mémoire car la "profondeur" en E et L de leurs monômes n'est pas bornée.

Nous définissons d'abord le corps des transséries sans exponentielle ni logarithme (noté K_0), puis nous construisons le corps des transséries avec des exponentielles uniquement (noté $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$) et enfin nous introduisons le corps des transséries contenant des logarithmes et des exponentielles. $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est alors muni d'une *exponentielle*, c'est-à-dire d'un morphisme de $(\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}, +)$ dans $(\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}>0}, \cdot)$ strictement croissant et surjectif, et nous appelons alors sa réciproque le *logarithme*.

La construction du corps des transséries n'est pas récente : nous tirons la plupart des résultats de [12], publié en 1997. Cependant, l'ouvrage de M. Aschenbrenner, L. Van der Dries et J. Van der Hoeven [3] de 2017 donne un point de vue moderne sur les transséries grâce à la théorie des modèles, et montre que la théorie de $\mathbb{T}$ admet l'élimination des quantificateurs dans un langage approprié. C'est dans l'optique de cet ouvrage que nous orientons la suite de notre mémoire : nous réécrivons les résultats peu récents de [12] au moyen de définitions plus modernes et plus adaptées par rapport au point de vue de la théorie des modèles.

Les transséries forment une extension du corps des réels et héritent de plusieurs propriétés de $\mathbb{R}$. Nous montrons en particulier que $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est ordonné avec des notions d'*infiniment grands* et d'*infinitésimaux* relativement à $\mathbb{R}$ qui rappellent les relations de domination asymptotique des espaces fonctions classiques.

De plus, $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est un corps réel clos, dont nous rappelons la définition :

Définition 0.1. Soit k un corps ordonné. Notons $<$ sa relation d'ordre. Nous disons que k est réel clos si pour tout polynôme $P \in k[Y]$ nous avons la *propriété des valeurs intermédiaires* :

$$\forall a < b \in k,\ P(a) < 0 < P(b) \Rightarrow \exists c,\ a < c < b \wedge P(c) = 0 \qquad \text{(IVP)}$$

Le corps des transséries satisfait en fait la propriété des valeurs intermédiaires (IVP) pour tout polynôme différentiel à coefficients dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ comme le montre [3].

Définition 0.2 ([3])**.** Soit A un anneau. Nous appelons *dérivation* sur A un homomorphisme additif D de A dans A qui vérifie :

$$\forall a, b \in A,\ \mathrm{D}(ab) = (\mathrm{D}a)b + (\mathrm{D}b)a$$

Soit A un anneau muni d'une *dérivation* D. Alors on note $A\{Y\}$ l'anneau des polynômes différentiels sur A l'anneau $A[Y, Y', Y'', \ldots]$ de polynômes sur A d'indéterminées $Y^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) muni de la dérivation D étendu à tout $A[Y, Y', Y'', \ldots]$ par $\mathrm{D}(Y^{(n)}) = Y^{(n+1)}$ pout tout entier n.

Theorème 0.3 (admis, [3])**.** *Pour tout polynôme différentiel $P \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}\{Y\}$ nous avons*

$$\forall a < b \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}},\ P(a) < 0 < P(b) \Rightarrow \exists c,\ a < c < b \wedge P(c) = 0$$

La propriété des valeurs intermédiaires (IVP) pour les polynômes différentiels à coefficients dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ implique que $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est un corps réel clos. Nous démontrons directement que $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est réel clos en utilisant un résultat de Ribenboim dans [10] sur les séries généralisées, sans nous étendre sur les polynômes différentiels.

Nous définissons ensuite la dérivation sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. Nous montrons que son corps des constantes est $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est un *H-field*. Cela signifie que l'on peut munir $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ d'une *valuation différentielle* telle que si A est l'*anneau de valuation* associé à cette valuation et $\mathfrak{M}$ est l'idéal maximal de A, alors nous avons $A = \mathbb{R} + \mathfrak{M}$ et, pour toute transsérie f infiniment grande relativement à $\mathbb{R}$, la dérivée de f est strictement positive. De plus, nous montrons que la dérivée d'un élément de $\mathfrak{M}$ est encore un élément de $\mathfrak{M}$.

Le calcul de primitive nous permet de montrer que le corps des transséries est *Liouville clos* : toute transsérie est la dérivée d'une transsérie et toute transsérie non nulle est la dérivée logarithmique d'une transsérie. De plus, ce calcul étant très algorithmique, il est l'occasion de montrer des manipulations exhaustives de transséries à travers des exemples. Nous faisons également un point sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 dans les transséries et sur le parallèle avec les développements asymptotiques de fonctions.

Enfin la composition et le calcul de l'inverse compositionnel permettent de renforcer la vision des transséries comme une forme de généralisation des échelles asymptotiques et sont une nouvelle fois le moment de montrer des calculs effectifs sur les transséries.

L'ensemble de ces résultats sont cruciaux dans le livre [3] puisqu'il permet de montrer le théorème d'axiomatisation et d'élimination des quantificateurs de $\mathbb{T}$:

Theorème 0.4 (admis, [3])**.** *Soit $\mathbb{T}$ la structure de domaine $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ dans le langage des corps ordonnés différentiels valués : $\mathscr{L} = \{0, 1, +, -, \cdot, \ , \leq, \preccurlyeq\}$ Nous avons alors les résultats suivants :*

1. $\mathrm{Th}(\mathbb{T})$ *est axiomatisée au premier ordre par les axiomes des $\mathscr{L}$-structures k qui vérifient :*
   - *k est un corps ordonné différentiel,*
   - *le symbole $\preccurlyeq$, interprété comme à la remarque 2.46, page 43, induit une valuation différentielle de k telle que k muni de cette valuation est un H-field,*
   - *k est Liouville clos,*
   - *k vérifie la propriété des valeurs intermédiaires* (IVP) *pour tout polynôme différentiel à coefficient dans k*
2. $\mathrm{Th}(\mathbb{T})$ *est modèle-complète,*
3. $\mathrm{Th}(\mathbb{T})$ *élimine les quantificateurs dans le langage*

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{(.)^{-1}, \Lambda, \Omega\}$$

où $(.)^{-1}$ est un symbole de fonction unaire interprété dans $\mathbb{T}$ comme l'inverse multiplicatif et où Λ et Ω sont des symboles de relation unaire (ou prédicat) interprétés dans $\mathbb{T}$ de la façon suivante :

$$\Lambda(f) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ f < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^{n} l_i}$$
$$\Omega(f) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ f < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=0}^{n} (l_i)^2}$$

avec $l_0 = x$ et $l_{i+1} = \mathrm{L}(l_i)$.

1 Construction des transséries

Nous allons d'abord définir dans cette partie les *corps de séries généralisées sur un corps quelconque*. Nous donnerons un exemple fondamental d'un tel corps qui servira de point de départ pour la construction du corps des transséries. Ensuite nous construirons le corps des transséries purement exponentielles comme une union croissante de corps de séries généralisées appropriés sur $\mathbb{R}$. Enfin nous introduirons le corps des transséries à partir du corps des transséries purement exponentielles.

1.1 Le corps des séries généralisées

Nous disons qu'un ensemble ordonné $(E, <)$ est *anti bien-ordonné* s'il ne contient aucune suite infinie strictement croissante. Ceci est équivalent à l'existence d'un plus grand élément dans tout sous-ensemble de E.

Commençons par définir une série généralisée sur un corps ordonné k et un groupe abélien ordonné G quelconques.

Définition 1.1. Soient k un corps ordonné et G un groupe abélien ordonné. Une série généralisée à coefficient dans k et monômes dans G est un objet formel :

$$f = \sum_{g \in G} a_g \cdot g$$

où $\forall g \in G, a_g \in k$ et tel que l'ensemble $\operatorname{Supp} f := \{g \in G : a_g \neq 0\}$, appelé le *support* de f est anti bien-ordonné.

En analogie avec les corps de séries usuels, les a_g sont appelés les *coefficients* de f et les $g \in \operatorname{Supp} f$ sont appelés les *monômes* de f.

Plus formellement, une série généralisée est une suite $(a_g)_{g \in G} \in k^G$ tel que $\operatorname{Supp} f$ est anti bien-ordonné. Cependant la notation en somme évoque les nombreuses analogies entre ces objets formels et les séries formelles usuelles, comme nous le verrons par la suite. Nous introduisons maintenant quelques notions fondamentales sur les séries généralisées qui serviront tout au long de ce mémoire.

Définition 1.2. Soit f une série généralisée à coefficients dans k et monômes dans G de support non vide. Nous définissons le *monôme dominant* de f comme le plus grand élément de $\operatorname{Supp} f$, noté $\operatorname{lm} f$. Nous définissons le *coefficient dominant* de f, noté $\operatorname{lc} f$, comme l'élément de k indexé par $\operatorname{lm} f$ dans f. Enfin nous définissons le *terme dominant* de f comme la série généralisée de support $\{\operatorname{lm} f\}$ et de seul coefficient non nul $\operatorname{lc} f$, nous écrivons :

$$\operatorname{lt} f = \operatorname{lc} f \cdot \operatorname{lm} f$$

Nous notons 0 la série généralisée de support vide et nous posons $\operatorname{lm} 0 = 0_G$ tel que $0_G \notin G$. Nous posons également $\operatorname{lc} 0 = 0 \in k$ et $\operatorname{lt} 0$ la série généralisée de support vide. Nous étendons alors l'ordre et la loi de G à $G \cup \{0_G\}$ par :

- $\forall g \in g,\ 0_G < g$
- $\forall g \in g,\ 0_G \cdot g = g \cdot 0_G = 0_G$

Enfin nous notons $k((G))$ l'ensemble des séries généralisées à coefficients dans k et monômes dans G. Pour tout $S \subset G$, nous appelons l'ensemble des séries généralisées à support dans S, l'ensemble

$$k((S)) := \{f \in k((G)) : \operatorname{Supp} f \subset S\}$$

En particulier, $k((S))$ est un sous-ensemble de $k((G))$, et pour $f \in k((S))$ nous noterons alors $f = \sum_{g \in S} f_g \cdot g$.

Exemple 1.3. Le corps $k((x^{-1}))$ des séries de Laurent à coefficients dans k en la variable x^{-1} est un ensemble de séries généralisées à monômes dans $x^{\mathbb{Z}} \approx \mathbb{Z}$.

Notre prochain but est d'équiper $k((G))$ d'une structure de corps ordonné. Pour cela nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.4 (Lemme de Neumann, partie I, [9])**.** *Soit G un groupe abélien ordonné. Si $A, B \subset G$ sont anti bien-ordonnés, alors l'ensemble*

$$A \cdot B := \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$$

est anti bien-ordonné et $\forall g \in A \cdot B$, il existe un nombre fini de couples $(a, b) \in A \times B$ tel que $g = a \cdot b$.

Définition 1.5. Soient k un corps ordonné et G un groupe abélien ordonné. Soient $f, h \in k((G))$. En notant $f = \sum_{g \in G} f_g \cdot g$ et $h = \sum_{g \in G} h_g \cdot g$ nous définissons la somme de f et h par :

$$f + h := \sum_{g \in G} (f_g + h_g) \cdot g$$

Comme l'ensemble $\{g \in G \;:\; (f_g + h_g) \neq 0$ est contenu dans l'ensemble anti bien-ordonné $\operatorname{Supp} f \cup \operatorname{Supp} h$, la somme de f et h est encore une série généralisée. Avec les même notations, nous définissons le produit de f et h par :

$$f \cdot h := \sum_{g \in G} \left(\sum_{a,b \in G \;:\; ab = g} (f_a \cdot h_b) \right) \cdot g$$

Le Lemme 1.4 assure que $\operatorname{Supp}(f \cdot h)$ est anti bien-ordonné et que la somme $\sum_{a,b \in G \;:\; ab=g} (f_a \cdot h_b)$ est finie pour tout $g \in G$. Donc $f \cdot h$ définit une série généralisée.

Nous laissons la propriété suivante en exercice :

Proposition 1.6 ([12])**.** *Soient k un corps ordonné et G un groupe abélien ordonné, alors $(k((G)), +, \cdot)$ est un anneau intègre avec 0 comme élément neutre additif et $1 = 1_k \cdot 1_G$ comme élément neutre multiplicatif.*

k et G peuvent être respectivement vus comme un sous-anneau et un sous-groupe multiplicatif de $k((G))$ par les identifications $k \simeq k \cdot 1_G$ et $G \simeq 1_k \cdot G$. Ce qui donne à $k((G))$ une structure de k-algèbre.

De plus, si $S \subset G$, $(k((S)), +)$ est un sous-k-espace vectoriel de $(k((G)), +)$.

Enfin les applications lm *et* lt *vérifient :*

- $\forall f \in k((G)),\ \operatorname{lm} f = 0_G \Leftrightarrow f = 0$,
- $\forall f, h \in k((G)),\ \operatorname{lm} fh = \operatorname{lm} f \cdot \operatorname{lm} h$ *et* $\operatorname{lt} fh = \operatorname{lt} f \cdot \operatorname{lt} h$,
- $\forall f, h \in k((G)),\ \operatorname{lm}(f+h) \leq \max(\operatorname{lm} f, \operatorname{lm} h)$ *avec égalité si et seulement si* $\operatorname{lt} f \neq (-\operatorname{lc} h) \cdot \operatorname{lm} h$.

Remarque 1.7. Les derniers points de la proposition impliquent que lm est une valeur absolue non-archimédienne au sens de [1]. Nous ne préciserons pas davantage cette notion dans ce mémoire. Cependant nous introduirons son pendant additif, la valuation, dans la section dédiée à la dérivation.

Exemple 1.8 (première étape de la construction des transséries)**.** Soit $x^{\mathbb{R}}$ le groupe additif $(\mathbb{R}, +, <)$, avec $<$ l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, noté multiplicativement. Autrement dit, $r \mapsto x^r : (\mathbb{R}, +) \to (x^{\mathbb{R}}, \cdot)$ est un isomorphisme de groupe ordonné, avec $1_{x^{\mathbb{R}}} := x^0$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}, x^{a+b} = x^a x^b$, et $x^a < x^b \Leftrightarrow a < b$. Nous posons :

$$K_0 := \mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$$

K_0 est constitué de l'ensemble des $f = \sum_{r \in \mathbb{R}} a_r x^r$ tel que $a_r \in \mathbb{R}$ pour tout r et $\{r \in \mathbb{R} : a_r \neq 0\}$ est anti bien-ordonné.
D'une part, en voyant $x^{\mathbb{Z}}$ comme sous-groupe de $x^{\mathbb{R}}$, les polynômes $\mathbb{R}[Y]$ évalués en x forment un sous-anneau de K_0 comme séries généralisées à supports finis. Donc $x, x^2, x^p, \dots \in K_0$.
D'autre part,

$$f_1 := \sum_{p \in \mathbb{N}^\times} x^{1+\frac{1}{p}}$$

définit une série généralisée car $\operatorname{Supp} f_1 = \{1 + \frac{1}{p} : p \in \mathbb{N}^\times\}$ est anti bien-ordonné, mais

$$f_2 := \sum_{p \in \mathbb{N}^\times} x^{1-\frac{1}{p}}$$

n'en définit pas une puisque $(x^{1+\frac{1}{p}})_{p \in \mathbb{N}^\times}$ est une suite strictement croissante de $x^{\mathbb{R}}$ et donc $\operatorname{Supp} f_2$ n'est pas anti bien-ordonné.

Enfin, si $f = x^\pi + 3$, $g = -x^\pi + \frac{1}{x}$ et $h = x - 1$, nous avons :

$$\operatorname{lm}(f+g) = \operatorname{lm}(3 + \frac{1}{x}) = 1 < max(\operatorname{lm} f, \operatorname{lm} g),$$

$$\text{et } \operatorname{lm}(f+h) = \operatorname{lm}(x^\pi + x + 2) = x^\pi = max(\operatorname{lm} f, \operatorname{lm} h).$$

Voyons comment définir un ordre sur un anneau de séries généralisées :

Définition 1.9. Soient k un corps ordonné et G un groupe abélien ordonné, nous définissons sur $k((G))$ la relation binaire $<$ par :

$$\forall f \in k((G)),\ f < 0 \Leftrightarrow \operatorname{lc} f < 0$$

Proposition 1.10 ([12]). *La relation binaire $<$ sur $k((G))$ s'étend en un ordre total, encore noté $<$, sur $k((G))$ qui étend les ordres de k et de G. De plus, $<$ est compatible avec $+$ et $\cdot$ faisant de $k((G))$ un anneau ordonné.*

Exemple 1.11. Donc K_0 est un anneau ordonné avec

$$\forall r \in \mathbb{R},\ r < x$$

$$\forall r \in \mathbb{R}^{>0},\ 0 < x^{-1} < r$$

ou encore,

$$-x^2 + \pi x < -x^{\frac{4}{\pi}} < -2 < -\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{x} < 1 < x^{\frac{1}{6}} < x^2 - \pi x$$

Définition 1.12. Soient k un corps ordonné et G un groupe abélien ordonné, notons $F := k((G))$. L'ensemble des *infiniment grands* de $k((G))$ (relativement à k) est l'ensemble

$$\mathscr{A}(F) := k((G^{>1})) = \{f \in F : \forall g \in \operatorname{Supp} f,\ \forall r \in k,\ g > r\}$$

L'ensemble des *infinitésimaux* de $k((G))$ (relativement à k) est l'ensemble

$$\mathscr{M}(F) := k((G^{<1})) = \{f \in F : \operatorname{lm} f \in G^{<1}\}$$

Nous pouvons alors réécrire les séries généralisées de deux manières différentes en utilisant les notions d'infiniment grands et d'infinitésimaux. La preuve de la proposition suivante qui découle des définitions précédentes est laissée en exercice.

Proposition 1.13. *Soient k un corps ordonné et G un groupe abélien ordonné, alors tout $f \in F = k((G))$ s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$f = a + r + \varepsilon$$

où $a \in \mathscr{A}(F)$, $r \in k$ et $\varepsilon \in \mathscr{M}(F)$. D'autre part, tout $f \in F$ de support non vide s'écrit de manière unique sous la forme :

$$f = c\mu(1 + \varepsilon)$$

où $c \in k$, $\mu = \operatorname{lm} f$ et $\varepsilon \in \mathscr{M}(F)$.

Exemple 1.14. En notant $\mathscr{A}(K_0) = A_0$ et $\mathscr{M}(K_0) = M_0$, nous avons

$$x \in A_0, \frac{1}{x} \in M_0$$

Pour $f = \sum_{p\in\mathbb{N}} x^{5-p}$, on a les réécritures

$$f = \sum_{p=1}^{5} x^p + 1 + \sum_{p\in\mathbb{N}} x^{-(p+1)}$$

$$f = x^5 \left(1 + \sum_{p\in\mathbb{N}} x^{-(p+1)} \right)$$

Nous allons maintenant introduire la notion de somme infinie afin de montrer que $k((G))$ est un corps.

Définition 1.15. Soient I un ensemble et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de $k((G))$ indexée par I. Nous disons que $\sum_{i\in I} f_i$ existe si les deux points suivants sont vérifiés :

(i) Pour tout $g \in G$, l'ensemble $\{i \in I : g \in \operatorname{Supp} f_i\}$ est fini,

(ii) $\bigcup_{i\in I} \operatorname{Supp} f_i$ est anti bien-ordonné.

Si la somme existe , nous définissons alors

$$\sum_{i\in I} f_i := \sum_{g\in G} \left(\sum_{i\in I:(f_i)_g \neq 0} (f_i)_g \right) \cdot g$$

De plus, la sommation sur un ensemble quelconque a des propriétés analogues à celles des séries formelles. Commençons par la plus simple :

Proposition 1.16. *Si I est fini, alors $\sum_{i\in I} f_i$ coïncide avec la somme des f_i dans $k((G))$.*

Démonstration. Supposons I fini, alors $\sum_{i\in I} f_i$ existe, puisque pour tout $g \in G$, l'ensemble $\{i \in I : g \in \operatorname{Supp} f_i\} \subset I$ est fini et $\bigcup_{i\in I} \operatorname{Supp} f_i$ est une union fini d'ensembles anti bien-ordonnés et est donc anti bien-ordonné. Alors,

$$\sum_{i\in I} f_i = \sum_{g\in G} \left(\sum_{i\in I:(f_i)_g \neq 0} (f_i)_g \right) \cdot g$$

coïncide avec la somme terme à terme des f_i. □

Les propriétés suivantes se prouvent à l'aide du Lemme 1.4 et en utilisant la définition de la sommation sur un ensemble. Elles nous serviront à montrer l'existence d'un inverse multiplicatif pour les séries généralisées.

Proposition 1.17. *Soient k un corps ordonné, G un groupe abélien ordonné et I et J deux ensembles. Soient $(f_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in J}, (l_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ trois familles d'éléments de $k((G))$ tel que $\sum_{i\in I} f_i$, $\sum_{j\in J} h_j$ et $\sum_{(i,j)\in I\times J} l_{i,j}$ existent. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\forall d \in k((G)), d \cdot \sum_{i\in I} f_i = \sum_{i\in I} d \cdot f_i$,
(ii) Si $I = J$, $\sum_{i\in I} f_i + \sum_{i\in I} h_i = \sum_{i\in I}(f_i + h_i)$,
(iii) Pour tout $i \in I$, $\sum_{j\in J} l_{i,j}$ *existe et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} l_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} l_{i,j},$$

(iv) $\sum_{(i,j)\in I\times J} f_i \cdot h_j = \left(\sum_I f_i\right)\left(\sum_J h_j\right)$.

Démonstration. Nous montrons ici le point (iv) et laissons les autres points en exercice au lecteur. Supposons que $\sum_{i\in I} f_i$ et $\sum_{j\in J} h_j$ existent. Montrons que $\sum_{(i,j)\in I\times J} f_i h_j$ existe.

- D'une part, soit $g \in G$, nous avons

  $$\{(i,j) \in I \times J : g \in \operatorname{Supp} f_i h_j\} \\ \subset \{(i,j) \in I \times J : \exists a, b \in (\operatorname{Supp} f_i \times \operatorname{Supp} h_j) : g = ab\}.$$

  Par le Lemme 1.4, $\{a, b \in (\operatorname{Supp} f_i \times \operatorname{Supp} h_j) : g = ab\}$ est fini et par hypothèse, chacun des ensembles

  $$\{i \in I : a \in \operatorname{Supp} f_i\} \text{ et } \{j \in J : b \in \operatorname{Supp} h_j\}$$

  est fini. Donc $\{(i,j) \in I \times J : g \in \operatorname{Supp} f_i \cdot h_j\}$ est fini.
- D'autre part,

  $$\bigcup_{(i,j)\in I\times J} \operatorname{Supp} f_i \cdot h_j \subset \bigcup_{i\in I} \operatorname{Supp} f_i \cdot \bigcup_{j\in J} \operatorname{Supp} h_j$$

  est anti bien-ordonné d'après les hypothèses et le Lemme 1.4.

La somme $\sum_{(i,j)\in I\times J} f_i \cdot h_j$ existe et en utilisant sa définition, on trouve

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} f_i \cdot h_j = \left(\sum_I f_i\right)\left(\sum_J h_j\right)$$

□

Avant de continuer, rappelons le lemme suivant :

Lemme 1.18 (Lemme de Neumann, partie II, [9])**.** *Soit* G *un groupe abélien ordonné. Soient* $A \subset G$ *tel que* $A \subset G^{<1}$ *et* A *est anti bien-ordonné. Alors l'ensemble*

$$[A] := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n : (a_1, \ldots, a_n) \in A^n\}$$

est anti bien-ordonné. De plus, pour tout $g \in [A]$ il existe un nombre fini d'entiers n et un nombre fini de n-uplets $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ tel que $g = a_1 \cdot \ \ldots \ \cdot a_n$.

Remarque 1.19. Ce lemme est faux sans l'hypothèse $A \subset G^{<1}$: s'il existe $a \in A$, $a > 1$ alors pour tout entier naturel n non nul, $a^n \in [A]$ et comme G est un groupe ordonné, $(a^n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ est une suite strictement croissante de $[A]$.

Proposition 1.20. *Soient k et G comme précédemment et $F \in k[\![Y_1, \ldots Y_p]\!]$ une série formelle, et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ un p-uplet d'infinitésimaux de $k((G))$ alors $F(\varepsilon)$ existe dans $k((G))$.*

Démonstration. Posons $A := \bigcup_{i=1,\ldots,p} \operatorname{Supp} \varepsilon_i$. A est anti bien-ordonné comme union fini d'ensembles anti bien-ordonnés. Nous obtenons alors le résultat en appliquant le Lemme 1.18 à A. □

Exemple 1.21. Dans K_0, si $r \in \mathbb{R}^{<0}$ alors $\sum_{p \in \mathbb{N}} x^{pr}$ existe dans K_0.

Nous sommes désormais en mesure de montrer que $k((G))$ est un corps :

Corollaire 1.22. *Tout élément de $k((G))$ non nul admet un inverse multiplicatif.*

Démonstration. Prenons $f \in k((G))^\times$. On peut alors réécrire $f = c \cdot \mu(1 - \varepsilon)$ où $c = \operatorname{lc} f$, $\mu = \operatorname{lm} f$ et ε est un infinitésimal de $k((G))$ relativement à k. Nous pouvons donc utiliser la propriété précédente, pour poser :

$$g = c^{-1} \cdot \mu^{-1} (\sum_{p \in \mathbb{N}} \varepsilon^p)$$

Enfin grâce aux propriétés 1.17 (i) et (iii), il vient que $fg = 1$. □

Exemple 1.23. Dans K_0, $f = \sum_{p \in \mathbb{N}} x^{5-p}$ a pour inverse :

$$f^{-1} = x^{-5} \left(1 + \sum_{n \in \mathbb{N}^\times} \left(- \sum_{p \in \mathbb{N}} x^{-(p+1)} \right)^n \right)$$

Nous avons montré que $k((G))$ possède une structure de corps ordonné. Nous admettons le théorème suivant qui donne encore davantage d'information sur la structure du corps $k((G))$:

Theorème 1.24 (Ribenboim, [10])**.** *Si k est un corps réel clos et G est un groupe abélien ordonné divisible, alors $k((G))$ est réel clos.*

Exemple 1.25. K_0, défini à l'exemple 1.8, est réel clos.

1.2 Le corps des transséries purement exponentielles

Dans cette partie nous allons construire le *corps des transséries purement exponentielles*. Pour cela, nous reprenons K_0 que nous avons défini à l'exemple 1.8 qui est la première étape pour bâtir le corps des transséries.

Par les résultats sur les sommes d'infinitésimaux (Proposition 1.20), nous pouvons définir une exponentielle sur $\mathbb{R} \oplus M_0$. En effet, si $f = r + \varepsilon \in K_0$ avec $r \in \mathbb{R}$ et ε infinitésimal, on peut définir l'exponentielle de f en prenant :

$$\mathrm{E}(f) = \exp(r) \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon^p}{p!}$$

Où exp désigne l'exponentielle usuelle sur $\mathbb{R}$.

Pour obtenir l'exponentielle d'un élément quelconque de K_0 il ne reste plus qu'à traiter la partie de f situé dans $A_0 = k((G^{>1}))$, puis en écrivant $f = a+r+\varepsilon$ avec $a \in A_0$, $r \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in M_0$ nous poserons :

$$\mathrm{E}(f) = \mathrm{E}(a) \exp(r) \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon^p}{p!}$$

Cependant nous ne pouvons pas poser $\mathrm{E}(x) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{x^p}{p!}$ car ce n'est pas une série généralisée. Nous allons donc rajouter à K_0 les exponentielles des éléments de K_0 infiniment grands en plongeant K_0 dans un corps plus grand.

Définition 1.26. Si $(A, +)$ est un groupe abélien ordonné, $(\mathrm{E}(A), \cdot)$ désigne une copie de $(A, +)$ notée multiplicativement. Autrement dit,

$$\begin{array}{ccc} A & \to & \mathrm{E}(A) \\ a & \mapsto & \mathrm{E}(a) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupe ordonné. En particulier, $\mathrm{E}(0) = 1$ et pour tout $a,b \in A$, nous avons $\mathrm{E}(a+b) = \mathrm{E}(a)\,\mathrm{E}(b)$, et $a < b \Leftrightarrow \mathrm{E}(a) < \mathrm{E}(b)$.

Définition 1.27. Nous plongeons K_0 dans le corps $K_1 := K_0((\mathrm{E}(A_0)))$ de séries généralisées sur K_0.

Nous définissons alors pour tout $f = a + r + \varepsilon \in K_0$ avec $a \in A_0$, $r \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in M_0$:

$$\mathrm{E}(f) = \mathrm{E}(a) \exp(r) \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon^p}{p!}$$

qui est défini par la Proposition 1.20.

Proposition 1.28. $\mathrm{E} : K_0 \to K_1$ *est un morphisme de* $(K_0, +)$ *dans* $(K_1^{>0}, \cdot)$ *strictement croissant.*

Démonstration. Considérons $f = a + r + \varepsilon \in K_0$ avec les mêmes notations que précédemment et $g = b + s + \varrho \in K_0$ selon la même décomposition. Nous avons donc $a, b \in A_0$, $r, s \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon, \varrho \in M_0$.

Nous avons alors $\operatorname{lt} \mathrm{E}(f) = \mathrm{E}(a) \exp(r)$ donc $\operatorname{lc} \mathrm{E}(f) = \exp(r) > 0$ et donc $\mathrm{E}(f) > 0$.

Puis, nous avons

$$\mathrm{E}(f+g) = \mathrm{E}(a+b) \exp(r+s) \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{(\varepsilon + \varrho)^p}{p!}$$

et par définition de $\mathrm{E}(A_0)$ et propriété de exp, nous avons $\mathrm{E}(a+b) = \mathrm{E}(a)\,\mathrm{E}(b)$ et $\exp(r+s) = \exp(r)\exp(s)$; de plus en utilisant les propriétés 1.17 (iii) et (iv), nous obtenons que

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{(\varepsilon + \varrho)^p}{p!} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{(\varepsilon)^p}{p!} \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{(\varrho)^p}{p!}$$

D'où

$$\mathrm{E}(f+g) = \mathrm{E}(f)\,\mathrm{E}(g)$$

Enfin, si $f < g$, avec les mêmes décompositions que précédemment ($f = a + r + \varepsilon$ et $g = b + s + \varrho$), nous avons que $a < b$, ou $a = b$ et $r < s$, ou $a = b$ et $r = s$ et $\varepsilon < \varrho$. Alors, puisque E est strictement croissante sur A_0, que exp est strictement croissante et qu'on peut montrer que si $\varepsilon < \varrho$, alors

$$\operatorname{lm}\left(\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{(\varepsilon)^p - (\varrho)^p}{p!} \right) = \operatorname{lm} \varepsilon,$$

nous avons $\mathrm{E}(f) < \mathrm{E}(g)$ dans tous les cas. □

Proposition 1.29. *Posons G_1 le produit direct entre $x^{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{E}(A_0)$. G_1 est un groupe abélien ordonné par l'ordre lexicographique :*

$$x^r \,\mathrm{E}(a) < x^s \,\mathrm{E}(b) \Leftrightarrow a < b \text{ ou } a = b \text{ et } r < s$$

Nous avons alors un isomorphisme de corps ordonnés entre K_1 et $\mathbb{R}((G_1))$.

Démonstration. Nous explicitons l'isomorphisme entre les deux corps ordonnés et laissons les détails de la preuve en exercice.

$$\begin{array}{ccc} K_1 = [\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))]((E(A_0))) & \to & \mathbb{R}((G_1)) \\ \sum_{a \in A_0} \left(\sum_{r \in \mathbb{R}} a_r x^r \right) \mathrm{E}(a) & \mapsto & \sum_{a \in A_0, r \in \mathbb{R}} a_r x^r \,\mathrm{E}(a) \end{array}$$

□

Définition 1.30. Nous définissons dans K_1 l'ensemble des infiniment grands relativement à K_0 :

$$A_1 := \left\{h \in K_1 : \operatorname{Supp}^* h \subset \mathrm{E}(A_0)^{>1}\right\}$$

où $\operatorname{Supp}^* h \subset \mathrm{E}(A_0)$ désigne le support de h dans le corps $K_0((\mathrm{E}(A_0)))$. Nous définissons également l'ensemble des infinitésimaux relativement à K_0 :

$$M_1 := \{h \in K_1 : \operatorname{lm}^* \varepsilon < 1\}$$

où lm^* désigne le plus grand élément de Supp^*.

Exemple 1.31. Explicitons quelques éléments de K_1 :
- $\mathrm{E}(x) \in A_1$, $\mathrm{E}(-x) \in M_1$, $\mathrm{E}\left(\sum_{n\leq 1} x^{1+\frac{1}{n}}\right) \in A_1$. Ces éléments sont des monômes de $\mathrm{E}(A_0)$.
- $x^{-1}\,\mathrm{E}(x) \in A_1$, $x\,\mathrm{E}(-x) \in M_1$. Ces éléments sont des monômes de G_1.

Désormais nous avons une exponentielle définie sur K_0 à valeur dans K_1. Nous pouvons l'étendre d'abord aux infinitésimaux de K_1 par la série exponentielle, puis aux infiniment grands de K_1 dans le corps $K_2 := K_1((\mathrm{E}(A_1)))$. En effet, si $f = a + r + \varepsilon \in K_1$, avec $a \in A_1$, $r \in K_0$ et $\varepsilon \in M_1$ nous posons alors :

$$\mathrm{E}(f) = \mathrm{E}(a)\exp(r)\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon^p}{p!}.$$

Puis en posant le produit direct $G_2 = G_1 \cdot \mathrm{E}(A_1)$, nous obtenons $K_2 \approx K_0((G_2))$ de la même façon que $K_1 \approx K_0((G_1))$. En itérant, nous obtenons donc une tour d'extensions de corps de séries généralisées :

Définition 1.32. Nous définissons récursivement pour tout $m \in \mathbb{N}^{\times}$:
- le corps $K_{m+1} = K_m((\mathrm{E}(A_m)))$,
- $A_{m+1} := \left\{h \in K_{m+1} : \operatorname{Supp}^* h \subset E(A_m)^{>1}\right\}$,
  où Supp^* désigne le support dans le corps $K_m((\mathrm{E}(A_m)))$,
- $M_{m+1} := \{h \in K_{m+1} : \operatorname{lm}^* \varepsilon < 1\}$,
  où lm^* désigne le plus grand élément de Supp^*,
- Si $f = a + r + \varepsilon \in K_m$, avec $a \in A_m$, $r \in K_{m-1}$ et ε tel que $\operatorname{lm}^* \varepsilon < 1$, où lm^* désigne le plus grand élément de Supp^*, on pose alors :

  $$\mathrm{E}(f) = \mathrm{E}(a)\,\mathrm{E}(r)\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon^p}{p!} \in K_{m+1},$$

  où $\mathrm{E}(a)$ est un élément de $\mathrm{E}(A_m)$ et $\mathrm{E}(r)$ est définie par récurrence.
- $G_{m+1} = G_m \cdot \mathrm{E}(A_m)$

Proposition 1.33. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons :*

- *$\mathrm{E} : K_m \to K_{m+1}^{>0}$ est un morphisme de $(K_m, +)$ dans $(K_{m+1}, \cdot)$ strictement croissant,*
- *$K_m \approx K_0((G_m))$ et $K_m = A_m \oplus K_{m-1} \oplus M_m$,*
- *si $f \in K_{m+1}$ alors d'une part, puisque $K_{m+1} = K_m((\mathrm{E}(A_m)))$, f s'écrit de façon unique sous la forme :*

$$f = \sum_{a \in A_m} f_a \,\mathrm{E}(a),$$

avec $f_a \in K_m$ pour tout $a \in A_m$; et d'autre part f s'écrit de façon unique sous la forme :

$$f = \sum_{g \in G_m} a_g \cdot g,$$

avec $a_g \in \mathbb{R}$ pour tout $g \in G_m$ en identifiant K_{m+1} et G_{m+1}.

Démonstration. La preuve des trois points s'effectue par récurrence sur m et reprend les arguments utilisés pour l'exponentielle de K_0 dans K_1. Nous laissons donc le lecteur adapter cette preuve au cas général. □

Définition 1.34. Nous définissons le *corps des séries généralisées (purement) exponentielles sur* $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, par

$$\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}} := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m.$$

L'exponentielle E est alors définie pour tout élément de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$. Soit $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $f \in K_m$. Nous définissons l'*exponentielle de* f dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, noté $\mathrm{E}(f)$ comme l'exponentielle de f dans K_{m+1}.

Pour tout entiers m et n, pour tout $h \in K_m$, $\mathrm{E}_n(h)$ désigne la série généralisée $\underbrace{\mathrm{E}(\mathrm{E}(\ldots \mathrm{E}}_{n fois}(h)))$.

Remarque 1.35. $\mathrm{E}(f)$ ne dépend pas du choix de l'entier m tel que $f \in K_m$ puisque l'exponentielle sur K_{m+1} prolonge celle sur K_m.

Exemple 1.36. Pour différentes séries généralisées montrons comment calculer leurs exponentielles :

- Si $f = x^{-2} \in K_0$, $E(f) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{x^{-2p}}{p!} \in K_0$.
- Si $f = x^2 + 3 + 6x^{-1} - 9x^{-2} \in K_0$, alors

$$\mathrm{E}(f) = \mathrm{E}(x^2) \exp(3) \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{(6x^{-1} - 9x^{-2})^p}{p!} \right) \in K_1.$$

- Si $f = x^2 + x$, alors $\mathrm{E}(f) = \mathrm{E}(x^2 + x) = \mathrm{E}(x^2)\,\mathrm{E}(x)$.

- Si $f = \mathrm{E}_2(x) + \mathrm{E}(x) \in K_2$, alors

$$\mathrm{E}(f) = \mathrm{E}_3(x)\,\mathrm{E}_2(x) \in K_3 \setminus K_2.$$

- Pour tout entier $m > 0$, on a $f = \mathrm{E}_m(x) \in A_m$.
- En utilisant la propriété 1.29 et les définitions des ordres sur $K_1 = K_0((E(A_0)))$ et sur K_0, nous avons :

$$0 < \mathrm{E}(-x^3) < \mathrm{E}(-x^3+x^2) < x\,\mathrm{E}(-x^3+x^2) < 1 < x < \mathrm{E}(x^2) < x\,\mathrm{E}(x^2).$$

$\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ comme sous-corps d'un corps de séries généralisées : Nous montrons dans ce paragraphe que le corps $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ peut-être vu comme le sous-corps d'un corps de séries généralisées particulier. Cela nous permet de voir les monômes dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ comme les éléments d'un seul et même groupe.

Définition 1.37. Posons $G^{\mathrm{E}} := \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} G_m$. Nous appelons G^{E} le *groupe des trans-monômes exponentiels.*

Proposition 1.38. *Le corps $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ se plonge dans $\mathbb{R}((G^{\mathrm{E}}))$ en envoyant G_m dans G^{E} par l'inclusion et l'ordre induit sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ par $\mathbb{R}((G^{\mathrm{E}}))$, défini par $\forall f \in \mathbb{R}((G^{\mathrm{E}})), f > 0 \Leftrightarrow \operatorname{lt} f > 0$, étend pour tout entier m l'ordre sur $K_0((G_m))$ donné par la même formule.*

Démonstration. Pour tout entier m, l'ordre de G^{E} étend l'ordre de G_m. Donc l'application lt sur $\mathbb{R}((G^{\mathrm{E}}))$ prolonge lt défini sur $K_0((G_m))$. Ce qui implique le résultat. □

Au vu des exemples précédents, on peut interpréter les éléments de K_m comme des séries généralisées exponentielles dont les monômes sont bornés en itération d'exponentielle par m. Par exemple, $\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mathrm{E}_p(x)} \in \mathbb{R}((G^{\mathrm{E}}))$ n'est pas un élément de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ car il n'appartient à aucun K_m pour $m \in \mathbb{N}$.

1.3 Construction du logarithme

Maintenant que nous avons défini l'exponentielle sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, nous voulons nous munir de sa réciproque, le logarithme et le définir pour tout élément strictement positif de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$. Dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, les élément de $K_0 \setminus \mathbb{R}^{>0}$ n'ont pas de logarithme. Nous allons donc à nouveau construire une tour d'extensions de corps $L_0 \subset L_1 \subset \dots$, partant de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, telle que si $f \in L_n^{>0}$ pour un certain entier n alors il existe un terme $g \in L_{n+1}$ telle que $\mathrm{E}(g) = f$, où E est l'exponentielle sur L_{n+1}, et nous verrons qu'en fait E est indépendant du choix de n que l'on fait.

Afin de construire notre tour, définissons un outil indispensable sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ qui sera aussi la première des nombreuses définitions inductives sur ce corps.

Définition 1.39. Pour tout $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, on définit $\phi(f)$ la *substitution de x par* $\mathrm{E}(x)$ dans f de façon inductive par :

- Si $f \in K_0$, en écrivant $f = \sum_{r\in\mathbb{R}} a_r x^r$,

$$\phi(f) := \sum_{r\in\mathbb{R}} a_r E(rx),$$

- Pour $m > 0$, si $f \in K_m$, en écrivant $f = \sum_{a\in A_{m-1}} f_a E(a)$,

$$\phi(f) = \sum_{a\in A_{m-1}} \phi(f_a) E(\phi(a)).$$

Exemple 1.40. Pour $f = -9xE(x^7)$, on a :

$$\phi(f) = -9E(x)E_2(7x))$$

Il nous faut montrer que l'application ϕ est définie et notamment que les sommes écrites dans la définition existent. Cela se montre par récurrence. Dans la même récurrence, on obtient également :

Proposition 1.41 ([12]). *$\phi : \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}} \to \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ est un plongement de corps ordonné de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ dans lui-même. Plus particulièrement, ϕ plonge K_m dans K_{m+1} et $\phi(A_m) \subset A_{m+1}$. Donc $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ est isomorphe à son image par ϕ.*

De plus, si I est un ensemble quelconque et si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille d'élément de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ telle que $\sum_I f_i$ existe, alors $\phi(\sum_I f_i) = \sum_I \phi(f_i)$.

Notation : Nous écrirons également $\phi(f) = f\uparrow$ et pour n entier naturel,

$$\phi^n(f) = f\uparrow^n,$$

et si $f \in (\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}})\uparrow$, nous noterons

$$\phi^{-1}(f) = f\downarrow.$$

Nous allons maintenant construire notre tour d'extensions de corps.

Définition 1.42. Posons $L_0 := \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$. Puis posons L_1 un corps ordonné isomorphe à $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ dans lequel on aura renommé l'élément x en $\log x$. Nous notons alors $L_1 = \mathbb{R}((\log x))^{\mathrm{E}}$, dans lequel nous interprétons $\log x$ dans L_1 comme l'élément x dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$. Nous appelons ψ_1 l'isomorphisme de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ sur L_1.

Puis nous plongeons L_0 dans L_1 via la substitution $\phi_{\log}$ de $\log x$ par $\mathrm{E}(\log x)$ (défini de la même façon que ϕ sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$) tel que $\phi_{\log}(L_1) \approx L_0$. Nous identifions alors L_0 à $\psi_{\log}(L_1)$ comme sous-corps propre de L_1. Nous notons E l'exponentielle sur L_1 construite de la même façon que l'exponentielle sur L_0. Par définition E prolonge l'exponentielle sur L_0.

Notons que nous avons deux morphismes de corps ordonné distincts :

1. le premier, qui envoie $x \mapsto \log x$, est l'isomorphisme ψ_1 de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ dans L_1 ;
2. le second est $\phi_{\log} : L_1 \to L_1$ qui envoie $\log x \mapsto E(\log x)$ que nous venons de définir dont nous identifions l'image avec L_0 : en particulier, $\mathrm{E}(\log x) = \phi_{\log}(\log x) = x$.

Afin de faciliter la compréhension de la construction, nous proposons une illustration des plongement pour certains termes dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{E}(\ldots\mathrm{E}(x)) & \overset{\phi_{\log}\circ\psi_1}{\longrightarrow} & \mathrm{E}(\ldots\mathrm{E}(\mathrm{E}(\log x)) \\
\vdots & & \vdots \\
\mathrm{E}(x) & \overset{\phi_{\log}\circ\psi_1}{\longrightarrow} & \mathrm{E}(\mathrm{E}(\log x)) \\
x & \overset{\phi_{\log}\circ\psi_1}{\longrightarrow} & \mathrm{E}(\log x) \\
 & & \log x \\
 & & \\
L_0 = \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}} & \overset{\phi_{\log}\circ\psi_1}{\subset} & L_1 = \mathbb{R}((\log x))^{\mathrm{E}}
\end{array}$$

Montrons que tous les éléments de L_0 strictement positifs ont un logarithme dans L_1. Par définition, on a $\mathrm{E}(\log x) = \phi(\log x) = x$, ce qui donne en $\log x$ un bon candidat pour définir le logarithme de x et ce qui explique notre choix de notation.

Proposition 1.43. *Pour tout $f \in L_0$, il existe un unique élément $g \in L_1$ tel que* $\mathrm{E}(g) = f$.

Démonstration. Soit $f \in L_0 = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$. Procédons par récurrence sur m. Supposons f dans K_0 Nous réécrivons $f = cx^r(1+\varepsilon)$ avec $c \in \mathbb{R}^{>0}$, $x^r = \operatorname{lm} f$ et $\varepsilon \in M_0$; alors en notant $\log_{\mathbb{R}}$ le logarithme sur $\mathbb{R}$, nous posons :

$$g := r \cdot \log x + \log_{\mathbb{R}} c + \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^{p+1} \frac{\varepsilon^p}{p}.$$

Nous déduisons $\mathrm{E}(g) = f$ en utilisant la définition de E et les manipulations sur les sommes infinies de la Proposition 1.17.
Si $m > 0$, nous réécrivons $f = c\,\mathrm{E}(a)(1+\varepsilon)$ tel que $a, c \in K_{m-1}$, $c\,\mathrm{E}(a) = \operatorname{lt} f$ et

$\varepsilon \in M_n$. Par hypothèse de récurrence, nous pouvons prendre $\mathrm{L}\, c$ un logarithme de c et nous posons :

$$g := a + \mathrm{L}\, c + \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^{p+1} \frac{\varepsilon^p}{p},$$

et une fois encore, $\mathrm{E}(g) = f$. $\square$

Exemple 1.44. Montrons quelques exemples de logarithme sur L_0 :

- Si $f = x\,\mathrm{E}(x)$, le logarithme de f est $g = x + \log x$,
- Si $f = x^7 + x\,\mathrm{E}(x)$, nous avons $f = x\,\mathrm{E}(x)(1 + x^6\,\mathrm{E}(-x))$. Donc le logarithme de f est donné par :

$$g = x + \log x + \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^{p+1} \left(\frac{x^{6p}}{pE(px)} \right),$$

- En prenant l'ordre induit sur L_1 par ψ_1, nous obtenons :

$$\forall r \in \mathbb{R}, r < \log x < x = \mathrm{E}(\log x) < \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}_2(\log x)$$

Comme L_1 est isomorphe à L_0 via ψ_1, nous pouvons itérer la construction que nous venons d'effectuer.

Définition 1.45. Nous définissons par induction sur $n \in \mathbb{N}$ les objets suivants :

- $\log_{n+1} x$ une nouvelle variable distinctes des précédentes (de la même façon que $\log x$) ;
- $L_{n+1} := \mathbb{R}((\log_{n+1} x))^{\mathrm{E}}$, et $\psi_{n+1} : \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}} \to L_{n+1}$ est l'isomorphisme de corps ordonné qui envoie $x \mapsto \log_{n+1} x$.
- $\phi_{\log_{n+1}} : L_{n+1} \to L_{n+1}$ désigne la substitution de $\log_{n+1} x$ par $\mathrm{E}(\log_{n+1})$ (définie de la même façon que ϕ et $\phi_{\log}$). Nous plongeons L_n dans L_{n+1} par $\phi_(\log_{n+1}) \approx L_n$ et nous identifions L_n comme un sous-corps propre de L_{n+1}.
- Nous notons E l'exponentielle sur L_{n+1} construite de la même façon que l'exponentielle sur L_n. Par définition E prolonge cette dernière.

Pour simplifier quelques notations, nous posons $\log_0 x := x$ et $\log_1 x := \log x$.

Par une récurrence et en utilisant les définitions que nous venons d'introduire, nous avons alors :

Proposition 1.46 ([12])**.** *Pour tout entier n, $\mathrm{E}_n(\log_n x) = \phi^n(\log_n x) = x$ et la substitution $\phi_{\log_{n+1}}$ de $\log_{n+1} x$ par $\mathrm{E}(\log_{n+1} x) = \log_n x$ dans L_{n+1} prolonge la substitution $\phi_{\log_n}$ définie sur L_n.*

Nous définissons maintenant le corps des transséries.

Définition 1.47. Nous définissons le *corps des séries généralisées logarithmico-exponentielle sur* $\mathbb{R}$ ou encore le *corps des transséries*, noté $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ comme l'union croissante :

$$\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$$

Par la proposition précédente sur la substitution dans L_n, nous avons :

Proposition 1.48. $\uparrow$: $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}} \to \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ *s'étend en un automorphisme de* $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ *qui prolonge* $\phi_{\log_n}$ *et envoie* L_{n+1} *dans* L_n *pour tout* n.

Démonstration. Posons $\uparrow = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \phi_{\log_n}$. Alors $\uparrow$ est une union croissante de plongements de corps ordonnés. Donc $\uparrow$ est un plongement de corps ordonné. De plus pour tout n, $\phi_{\log_{n+1}}$ a L_n pour image. Donc $\uparrow$ est surjectif sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. $\square$

Enfin, en reprenant la démonstration de la propriété 1.43, on peut montrer que tout élément de L_n a un logarithme dans L_{n+1}. Nous laissons le lecteur adapter cette preuve et montrer que :

Proposition 1.49. *Pour tout* $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}>0}$, *il existe* $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ *tel que*

$$E(g) = f.$$

Nous explicitons le logarithme sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}>0}$:

Définition 1.50. Soit $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}>0}$, soit n un entier tel que $f \in L_n$ nous le logarithme de f, noté $\mathrm{L}\, f$ est la transsérie définie par :

- Si f s'écrit $f = \sum_{r\in\mathbb{R}} a_r (\log_n x)^r$ dans L_n, nous réécrivons

  $$f = c(\log_n x)^r(1+\varepsilon),$$

  et nous posons :

  $$\mathrm{L}\, f = \log_{\mathbb{R}} c + r \cdot \log_{n+1} x + \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^{p+1}\frac{\varepsilon^p}{p}$$

- Si f s'écrit $f = \sum_{a\in A_m^n} f_a \,\mathrm{E}(a)$ dans L_n avec $A_m^n = \psi_n(A_m)$, nous réécrivons

  $$f = c\,\mathrm{E}(a)(1+\varepsilon)$$

  tel que $\mathrm{lt}\, f = c\,\mathrm{E}(a)$ et nous posons :

  $$\mathrm{L}\, f = a + \mathrm{L}\, c + \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^{p+1}\frac{\varepsilon^p}{p}.$$

Exemple 1.51. Montrons quelques manipulations avec le logarithme :

- Nous avons $\mathrm{L}(\mathrm{E}(x)) = x$, $\mathrm{L}\, x = \log x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{L} \log_n x = \log_{n+1} x = \mathrm{L}^{n+1} x$$

(qui justifie le choix de la notation $\log_n x$,)
- Pour $f, g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}>0}$, nous avons $\mathrm{L}(fg) = \mathrm{L}\, f + \mathrm{L}\, g$ et

$$f = \mathrm{E}(\mathrm{L}\, f) = \mathrm{L}(\mathrm{E}(f)).$$

- Pour $g \in \mathbb{R}((x))^{LE>0}$ on peut définir $g^r := \mathrm{E}(r \cdot \mathrm{L}\, g)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, et nous avons $x^r = \mathrm{E}(r \cdot \log x)$,
- Pour $f \in \mathbb{R}((x))^{LE>0}$, on a $(\mathrm{L}\, f) \uparrow = \mathrm{L}(f \uparrow)$.

Nous avons désormais défini le corps des transséries ainsi que l'exponentielle et le logarithme sur ce corps.

2 Propriétés de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$

Dans cette partie, nous allons nous concentrer sur l'introduction de trois opérations sur les transséries : la dérivation, l'intégration et la composition. Avant cela, nous considérons la cardinalité de l'ensemble des transséries et des supports de ses éléments et nous donnons quelques propriétés et définitions élémentaires sur les transséries.

2.1 Remarque sur la dénombrabilité des supports

Jusqu'ici nous n'avons considéré dans nos exemples que des transséries à supports au plus dénombrables. Or, dû à la définition même des séries généralisées, nous pourrions avoir des cas de supports indénombrables, intraitables dans le cadre d'une implémentation informatique. Dans le cas de support dénombrable il est toujours possible de traiter des troncatures de séries dont nous pouvons calculer les termes successifs. Les transséries sont des séries généralisées dont les supports sont toujours dénombrables. Pour le montrer nous admettons le résultat d'Esterle suivant sur les séries généralisées à coefficients dans $\mathbb{R}$:

Proposition 2.1. *(Esterle, [5]) Si tout sous-ensemble anti bien-ordonné d'un groupe G est dénombrable alors tout sous-ensemble anti bien-ordonné de $\mathbb{R}((G))$ est dénombrable.*

La proposition précédente entraîne par récurrence que :

Corollaire 2.2 ([12])**.** *Si $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, alors $\mathrm{Supp}\, f$ est dénombrable. De plus, $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est de cardinalité $2^{\aleph_0}$.*

2.2 Propriétés élémentaires des transséries

Une transsérie est un élément de $\mathbb{R}((log_n\ x))^{\mathrm{E}}$ pour un certain n. En particulier $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ est un sous-corps des transséries.

Définition 2.3. Nous appelons le *groupes des transmonômes de profondeur logarithmique* n *et de profondeur exponentielle* m, noté $G_{n,m}$ le sous-groupe des monôme de $L_n = \mathbb{R}((log_n x))^{\mathrm{E}}$ de profondeur exponentielle $n+m$. Plus formellement, $G_{n,m} := \psi_n(G_{m+n})$. Autrement dit, $G_{n,m}$ est le groupe isomorphe à G_{m+n} dans lequel nous avons substitué $\log_n x$ à x. (Pour rappel, G_{m+n} est le groupes des monômes de K_{m+n} où K_{m+n} est vu comme corps de séries généralisées à coefficients dans $\mathbb{R}$.) Nous posons :

$$G^{\mathrm{LE}} := \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} G_{n,m}$$

Alors $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}((G^{\mathrm{LE}})))$ et si $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, nous notons $\operatorname{Supp} f$ le support de f dans G^{LE}. Nous appelons les éléments de G^{LE} les *LE-monômes* ou les *transmonômes*.

Exemple 2.4. Les éléments suivants sont des transmonômes : x, $x\,\mathrm{E}(x) \in G_{0,1}$ et

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(\log_3 x) + \log_3 x)\,\mathrm{E}_5(\log_3 x) = \log x \cdot \log_2 x \cdot \mathrm{E}(\mathrm{E}(x)) \in G_{2,2}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathrm{E}_p(x) \in G_{0,p}$ et $\log_p x \in G_{p,0}$.

Nous définissons les sommes infinies sur chaque L_n de la même façon que sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, avant de donner un sens à la sommation infinie dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$:

Définition 2.5. Soit $(f_i)_{i\in I} \in L_n^I$ nous disons que $\sum_I f_i$ existe dans L_n si et seulement si $\sum_I \psi_n^{-1}(f_i)$ existe dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ et nous posons $\sum_I f_i = \psi_n(\sum_I \psi_n^{-1}(f_i))$.

Soit $(f_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}})^I$ nous disons que $\sum_I f_i$ existe si et seulement si il existe un entier n tel que pour tout $i \in I$, $f_i \in L_n$ et $\sum_I f_i$ existe dans L_n.

Exemple 2.6. Les sommes suivantes ont un sens dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$:
- pour tout n, $\sum_{p\in\mathbb{N}} (\log_n x)^{1+\frac{1}{p}}$,
- pour tout n, $\sum_{p\in\mathbb{N}} (\log_n x)^p\,\mathrm{E}(-px)$.

Remarque 2.7. Les transséries sont les éléments de $\mathbb{R}((G^{\mathrm{LE}})))$ qui ont une "profondeur en exponentiation et en logarithme bornée". Nous entendons par cela que $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ ne contient pas de séries généralisées comme $\sum_n (\frac{1}{\mathrm{E}(x)^n})$ ou $\sum_n (\frac{1}{\log_n x})$ qui ont pourtant un sens dans le corps des séries généralisées $\mathbb{R}((G^{\mathrm{LE}}))$ mais n'appartiennent à aucun L_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Ordre sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$

Nous pouvons munir $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ d'un ordre qui fait de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ un corps ordonné. En effet, chaque L_n est ordonné car isomorphe à $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ comme corps ordonné. D'après la Proposition 1.41, l'ordre donné par $f > 0 \Leftrightarrow lc\ f > 0$ dans L_{n+1} étend celui sur L_n ce qui induit un ordre sur tout $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$.

Remarque 2.8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$L_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{R}((G_{n,m}))$$

et $G^{\mathrm{LE}} = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} G_{n,m}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}, \cdot)$, ordonné par l'ordre induit. Donc les applications lt, lc et lm sur $\mathbb{R}((G^{\mathrm{LE}}))$ prolongent celles sur L_n pour tout entier n. Donc pour tout entier n, l'ordre sur L_n induit par ψ_n coïncide avec celui induit par les séries généralisées $\mathbb{R}((G^{\mathrm{LE}}))$.

En regardant $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ comme un sous-corps ordonné de $\mathbb{R}((G^{\mathrm{LE}}))$ nous pouvons utiliser des notions de corps de série généralisées dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$:

Définition 2.9. Nous définissons les infinitésimaux de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ (relativement à $\mathbb{R}$) comme l'ensemble :

$$\mathscr{M} := \mathbb{R}((G^{\mathrm{LE}^{<1}})) \cap \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$$

et les infiniment grands de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ (relativement à $\mathbb{R}$) comme l'ensemble :

$$\mathscr{A} := \mathbb{R}((G^{\mathrm{LE}^{>1}})) \cap \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$$

Remarque : En utilisant la structure de $\mathbb{R}((G^{\mathrm{LE}}))$, tout élément $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ peut se réécrire $\mathrm{lt}(f)(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \in \mathscr{M}$. De plus, $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} = \mathscr{A} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathscr{M}$.

Enfin nous avons le résultat majeur suivant :

Theorème 2.10. $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ *est un corps réel clos.*

Démonstration. Commençons par montrer que $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ est réel clos. Nous savons par l'exemple 1.25 que K_0 est réel clos. Montrons par récurrence que pour tout m, G_m est divisible. Comme $x^{\mathbb{R}}$ est divisible, en posant $G_0 = x^{\mathbb{R}}$, il suffit de montrer que si m est un entier naturel tel que G_m est divisible alors $G_{m+1} = G_m \cdot \mathrm{E}(A_m)$ est divisible. Soit p un entier non nul, soit $g \cdot \mathrm{E}(a) \in G_{m+1}$ alors par hypothèse de récurrence, nous pouvons prendre $g^{\frac{1}{p}} \in G_m$ une racine p-ième de g et nous avons

$$\left(g^{\frac{1}{p}} \cdot \mathrm{E}\left(\frac{a}{p}\right)\right)^p = g \cdot \mathrm{E}(a)$$

Donc G_{m+1} est divisible. Ce qui termine la récurrence. Donc pour tout m, G_m est divisible.
Donc d'après le Théorème 1.24, pour tout entier m, $K_m = K_0((G_m))$ est réel clos. Donc $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ est un corps réel clos comme union croissante de corps réel clos. Puis pour tout entier n, L_n est réel clos puisque $\psi_n : L_0 \to L_n$ est un isomorphisme de corps ordonné et $L_0 = \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ est réel clos. Enfin, $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est un corps réel clos comme union croissante de corps réel clos. $\square$

2.4 Dérivation et H-field

Dans cette partie nous définissons la dérivation sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ puis nous montrerons que, muni de cette dérivation, $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est un *H-field* au sens de [2]. Commençons par définir précisément les notions de dérivation et de H-field.

Définition 2.11. Soit k un corps ordonné et A un sous-corps de k. Nous disons qu'une application A-linéaire $\mathrm{D} : k \to k$ est une *dérivation sur* k si elle vérifie la *formule de Leibniz* : $\forall f, g \in k,\ \mathrm{D}(fg) = \mathrm{D}(f)g + \mathrm{D}(g)f$.

De plus, si D est une dérivation sur un corps ordonné k, nous appelons l'ensemble $C = \{f \in k : \mathrm{D}f = 0\}$ le *corps des constantes* de k. Alors C est un sous-corps de k et D est C-linéaire. Nous disons que (k, D) est un *corps ordonné différentiel.*

Soit (k, D) un corps ordonné différentiel et notons C son corps des constantes. Nous disons que k est un *H-field* si k satisfait les deux conditions suivantes :

(i) $\{f \in k : \forall c \in C^{>0}, \mid f \mid \leq c\} = C + \{f \in k : \forall c \in C, f < c\}$,

(ii) $\forall f \in k, (\forall c \in C, f > c) \Rightarrow \mathrm{D}f > 0$.

Nous allons d'abord introduire la dérivée d'une transsérie, puis nous définirons la notion de valuation différentielle qui nous permettra de montrer que, muni de cette opération de dérivation, les transséries forment un H-field.

2.4.1 Définition de la dérivation et premiers résultats

Définissons maintenant la dérivation des transséries. Comme pour toutes les opérations abordées dans ce mémoire, nous définissons d'abord la dérivation sur $K_0 = \mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$ avant de l'étendre à $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ puis à $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$.

Définition 2.12. Soit $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$. Nous définissons par induction la dérivée f' de f par :

- Si $m = 0$ et $f = \sum a_r x^r$, alors $f' := \sum ra_r x^{r-1}$,
- Si $m > 0$ et $f = \sum_{a \in A_m} f_a E(a)$, alors $f' := \sum_{a \in A_m} (f'_a + a' f_a) E(a)$.

Remarque 2.13. Nous définissons une application par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}} &\to \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}} \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

En effet, par induction sur m, si $f \in K_0$, nous avons $\operatorname{Supp} f' \subset (x^{-1} \cdot Supp\ f)$. Donc $\operatorname{Supp} f'$ est anti bien-ordonné et f' est un élément de K_0. Pour $m > 0$, soit $f \in K_m = K_{m-1}((\mathrm{E}(A_{m-1})))$. Par hypothèse d'induction, nous avons

$$\forall a \in A_{m-1},\ (f'_a + a' f_a) \in K_{m-1}$$

et par définition de f', $\operatorname{Supp}^* f' \subset \operatorname{Supp}^* f$. Donc f' définit un élément de K_m. Donc l'application $f \mapsto f'$ est définit sur tout $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$.

Nous admettons le résultat suivant dont une preuve est faite dans [12].

Proposition 2.14 ([12])**.** *Les assertions suivantes sont vraies :*

- *Si $\sum f_i$ existe dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, alors $\sum (f_i)'$ existe et $\left(\sum f_i\right)' = \sum (f_i)'$.*
- *$f \mapsto f'$ est une dérivation : elle est $\mathbb{R}$-linéaire et vérifie la formule de Leibniz.*
- *Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[Y]$ alors $P(x)' = P'(x)$ où P' désigne le polynôme dérivé de P dans $\mathbb{R}[Y]$. En particulier,*

$$\forall r \in \mathbb{R}, r' = 0,$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, x^p = px^{p-1}.$$

- *$\forall f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, $\mathrm{E}(f)' = f' \,\mathrm{E}(f)$, en particulier, $E(x)' = E(x)$ et par récurrence, si $p \in \mathbb{N}^{\times}$, nous avons :*

$$(\mathrm{E}_p(x))' = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i(x).$$

- *$\forall f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, $(f\uparrow)' = (f')\uparrow E(x)$ et pour $p \in \mathbb{N}$, nous avons :*

$$(f\uparrow^p)' = ((f')\uparrow^p) \cdot \prod_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i(x).$$

Pour montrer que qu'un corps ordonné différentiel est un H-field, nous devons déterminer son corps des constantes. Montrons que le corps des constantes de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ pour la dérivation que nous venons de définir est $\mathbb{R}$. les auteurs de [12] utilisent le lemme suivant, instructif sur le comportement de la dérivée sur les sous-ensembles de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$.

Lemme 2.15 ([12]). *Soient $f \in K_m \setminus \{0\}$ tel que le coefficient de f indexé par $1 \in G_m$ est nul, et $g \in A_m \setminus \{0\}$. Les assertions suivantes sont vraies :*

(i) $f' \neq 0$,

(ii) si $m = 0$, $\operatorname{lm} \frac{f'}{f} = x^{-1}$; et si $m > 0$, $\operatorname{lm} \frac{f'}{f} \in G_{m-1}$,

(iii) si $m > 0$ $g' \in A_m \setminus \{0\}$

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence sur m. Pour $m = 0$, nous avons $\operatorname{lm} f = x^r$ pour un certain réel $r \neq 0$. Donc $\operatorname{lm} f' = x^{r-1}$ et $f' \neq 0$. Supposons les trois points du lemme vrais jusqu'au rang m. Soit $f \in K_{m+1} \setminus \{0\}$ de coefficient indexé par 1 nul. Notons $f = \sum_{a \in A_m} f_a \,\mathrm{E}(a)$ et posons

$$\alpha := \max(\operatorname{Supp}^* f) = \max\{a \in A_m : f_a \neq 0\}.$$

Commençons par montrer (i). Nous différencions deux cas.
Si $\alpha = 0$, alors

$$f = f_0 + \sum_{a \in A_m, a < 0} f_a \,\mathrm{E}(a),$$

et le coefficient indexé par 1 de $f_0 \in K_m \setminus \{0\}$ est nul. Par hypothèse de récurrence, nous avons $f_0' \neq 0$ et comme

$$f' = f_0' + \sum_{a \in A_m, a < 0} (f_a' + a' f_a) \,\mathrm{E}(a),$$

nous avons donc $f' \neq 0$.
Sinon, $\alpha \neq 0$, nous avons

$$f' = (f_\alpha' + \alpha' f_\alpha) \,\mathrm{E}(\alpha) + \sum_{a \in A_m, a < \alpha} (f_a' + a' f_a) \,\mathrm{E}(a).$$

Montrons $f_\alpha' + \alpha' f_\alpha \neq 0$, qui implique $f' \neq 0$. Si $f_\alpha' = 0$, par hypothèse de récurrence et définition de $\alpha \in A_m \setminus \{0\}$, nous avons $\alpha' \neq 0$ et $f_\alpha \neq 0$. Donc

$$f_\alpha' + \alpha' f_\alpha = \alpha' f_\alpha \neq 0.$$

Sinon, $f_\alpha' \neq 0$, réécrivons $f_\alpha = \phi + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ et $\phi \in K_m \setminus \{0\}$ de coefficient indexé par 1 nul. Nous réécrivons alors

$$f_\alpha' + \alpha' f_\alpha = \phi \left(\frac{\phi'}{\phi} + \alpha' \frac{\phi + c}{\phi} \right),$$

et nous avons alors

$$\operatorname{lm}\left(\frac{\phi + c}{\phi}\right) = 1 \text{ if } \operatorname{lm}\phi > 1 \text{ ou } c = 0,$$
$$> 1 \text{ if } \operatorname{lm}\phi < 1 \text{ et } c \neq 0.$$

Par hypothèse de récurrence appliquées à ϕ et à α, nous obtenons

$$\operatorname{lm}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right) < \operatorname{lm}\alpha'.$$

En effet, si $m = 0$, $\operatorname{lm}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right) = x^{-1}$ par (ii) et comme $\alpha = x^r$ pour un réel $r > 0$, nous avons

$$lm\frac{\phi'}{\phi} = x^{-1} < x^{r-1} = \operatorname{lm}\alpha'.$$

Si $m > 0$, par (ii) nous avons $\operatorname{lm}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right) \in G_{m-1}$ et par (iii), $\alpha' \in A_m$ ce qui nous donne

$$\operatorname{lm}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right) < \operatorname{lm}\alpha'.$$

Nous avons donc

$$\operatorname{lm}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right) < \operatorname{lm}\alpha' \leq \operatorname{lm}\alpha'\left(\frac{\phi + c}{\phi}\right)$$

qui entraîne

$$\operatorname{lm} f'_\alpha + \alpha' f_\alpha = \operatorname{lm}\alpha'\left(\frac{\phi + c}{\phi}\right) \neq 0$$

et donc $f'_\alpha + \alpha' f_\alpha \neq 0$.
Nous montrons maintenant le point (ii). Autrement dit, nous montrons que f vérifie $\operatorname{lm}\frac{f'}{f} \in G_m$. Si $\alpha = 0$, alors par hypothèse de récurrence nous avons

$$\operatorname{lm}\frac{f'}{f} = \operatorname{lm}\frac{f'_0}{f_0} \in G_{m-1} \subset G_m$$

Sinon, $\alpha \neq 0$, nous avons par hypothèse de récurrence,

$$\operatorname{lm}\frac{f'}{f} = \left(\operatorname{lm}\frac{f'_\alpha + \alpha' f_\alpha}{f_\alpha}\right)\mathrm{E}(\alpha) \in G_m$$

Enfin montrons le point (iii) pour $g \in A_{m+1} \setminus \{0\}$. Comme g est de coefficient indexé par 1 nul, nous avons $g' \neq 0$ et en écrivant $g = \sum_{a\in A_m, a>0} g_a \,\mathrm{E}(a)$, nous avons $g' = \sum_{a\in A_m, a>0}(g'_a + \alpha' g_a)\,\mathrm{E}(a)$ et donc $g' \in A_{m+1} \setminus \{0\}$. Nous avons fini la récurrence. Les trois points du lemme sont donc vérifiés pour tout $m \in \mathbb{N}$. □

Remarque 2.16. Nous avons montré dans la preuve de ce lemme que pour tout entier m, si $a \in A_m$ et $f_a \in K_m$ alors :

- si $a = 0$, $\operatorname{lm}(f_a' + a' f_a) = \operatorname{lm} f_a'$,
- si $a \neq 0$, $\operatorname{lm}(f_a' + a' f_a) = \operatorname{lm} a' f_a$.

Nous réutiliserons ce résultat pour montrer que le transséries sont un H-field.

Corollaire 2.17. *Pour tout $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, $f' = 0 \Leftrightarrow f \in \mathbb{R}$. Autrement dit, le corps des constantes de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ est exactement $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$. Le sens réciproque de l'équivalence découle de la définition de f'. Montrons l'implication directe. Supposons $f' = 0$. Par contraposée du lemme précédent, soit $f = 0 \in \mathbb{R}$, soit f est de coefficient indexé par 1 non nul. Si $c \in \mathbb{R}^{\times}$ est le coefficient de f indexé par 1 alors $f - c$ est de coefficient indexé par 1 nul et $(f - c)' = f' - c' = 0$. Donc par le lemme précédent $f - c = 0$ et $f \in \mathbb{R}$. $\square$

Nous étendons maintenant la définition de la dérivée à tout $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. Pour cela nous utilisons l'idée que si f est dans L_n pour un certain $n > 0$ nous pouvons trouver f' en considérant que "$(log_n\ x)' = \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} log_i\ x}$" (avec $log_0\ x := x$) et que f est un élément de L_0 dans lequel on a substitué x par $log_n\ x$:

$$\text{“}f = (f \uparrow^n) \circ (log_n\ x) = (f \uparrow^n) \circ (x \downarrow^n)\text{”}$$

et donc que

$$\text{“}f' = (log_n\ x)' \cdot [(f \uparrow^n)' \circ (x \downarrow^n)]\text{”}$$

Cette notation ne prendra sens que lorsque nous aurons introduit la composition des transséries, mais elle donne l'intuition pour définir la dérivé d'une transsérie de L_n :

Définition 2.18. Soit $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. Supposons $f \in L_n$ pour un certain entier n. Nous définissons la dérivée $\mathrm{D}_n\ f$ de f par :

$$\mathrm{D}_n\ f = \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} \log_i x} \cdot [(f \uparrow^n)'] \downarrow^n$$

Remarque 2.19. Si $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, nous avons $\mathrm{D}_0\ f = f'$.

Proposition 2.20 ([12])**.** *Pour tout entier n, D_n définit une dérivation sur L_n et le corps des constantes de D_n est exactement $\mathbb{R}$. De plus, pour tout entier n, D_{n+1} prolonge D_n.*

Démonstration. Soit n un entier. Comme D_n est, à multiplication par $\frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} \log_i x}$ près, la conjugaison de $f \mapsto f'$ par l'automorphisme de corps ordonné $\uparrow^n$, nous avons que D_n est $\mathbb{R}$-linéaire et que D_n vérifie la formule de Leibniz. Donc D_n

est une dérivation sur L_n.
Si pour $f \in L_n$ nous avons $\mathrm{D}_n f = 0$ alors par injectivité de $\downarrow$, nous avons nécessairement $(f\uparrow^n)' = 0$. Donc $(f\uparrow^n) \in \mathbb{R}$ et comme $\uparrow$ fixe $\mathbb{R}$, nous avons $f \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si $r \in \mathbb{R}$, nous voyons aisément que $\mathrm{D}_n r = 0$. Donc le corps des constantes de D_n est $\mathbb{R}$.
Enfin si $f \in L_n$, nous avons, en utilisant les propriétés 2.14 de la dérivation et de la substitution ϕ (qui coïncide avec $\uparrow$ sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$),

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{n+1}\ f &= \frac{1}{\prod_{i=0}^{n} \log_i x} \cdot [(f\uparrow^{n+1})']\downarrow^{n+1} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=0}^{n} \log_i x} \cdot [(\phi(f\uparrow^n))']\downarrow^{n+1} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=0}^{n} \log_i x} \cdot [\mathrm{E}(x)\phi(f\uparrow^n)')]\downarrow^{n+1} \\
&= \frac{x\downarrow^n}{\prod_{i=0}^{n} \log_i x} \cdot [(f\uparrow^n)']\downarrow^n \\
&= \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} \log_i x} [(f\uparrow^n)']\downarrow^n = \mathrm{D}_n\ f
\end{aligned}$$

Donc D_{n+1} coïncide avec D_n sur L_n. □

Nous définissons donc une dérivation sur tout $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ en prenant l'union croissante des D_n. Nous notons alors f' la dérivée de $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. Si $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, nous avons alors $f' = 0$ si et seulement si $\mathrm{D}_n\ f = 0$ pour un certain n, et donc si et seulement si $f \in \mathbb{R}$. Le corps des constantes de $f \mapsto f'$ sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est encore $\mathbb{R}$. De plus, les résultats de la Proposition 2.14 pour des éléments de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ restent vrais dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. Nous laissons la proposition suivante en exercice.

Proposition 2.21 ([12]). *Les assertions suivantes sont vraies :*
- *Si $\sum f_i$ existe dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, alors $\sum (f_i)'$ existe et $(\sum f_i)' = \sum (f_i)'$.*
- *Pour tout $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, $\mathrm{E}(f)' = f'\,\mathrm{E}(f)$,*
- *Soit $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, $f\uparrow' = f'\uparrow \mathrm{E}(x)$ et pour $p \in \mathbb{N}$,*

$$(f\uparrow^p)' = f'\uparrow^p \prod_{i=1}^{p} \mathrm{E}_i(x)$$

De plus, le logarithme d'un élément (strictement positif) de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ se dérive de la façon suivante :

Proposition 2.22. *Pour tout* $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} \setminus \{0\}$,

$$\mathrm{L}(\mid f \mid)' = \frac{f'}{f}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. Quitte à remplacer f par $-f$, nous pouvons supposer $f > 0$. Nous avons $f = \mathrm{E}(\mathrm{L}(f))$ par définition du logarithme. Puis en utilisant la Proposition 2.21, nous obtenons

$$f' = (\mathrm{E}(\mathrm{L}(f)))' = (\mathrm{L}\, f)'\, \mathrm{E}(\mathrm{L}(f)) = (\mathrm{L}\, f)' f$$

Enfin, en divisant chaque membre de l'identité précédente par f, nous trouvons l'égalité voulue. □

Exemple 2.23. En utilisant les propriétés précédentes, nous calculons les dérivés suivantes :

- $(E(x \log x))' = (\log x + 1) E(x \log x)$,
- $\left(\sum_p x^{1+\frac{1}{p}}\right)' = \sum_p (1 + \frac{1}{p}) x^{\frac{1}{p}}$

2.4.2 Valuation différentielle

Afin de montrer que $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ muni de la dérivation $f \mapsto f'$ est un H-field nous allons introduire la notion de *valuation différentielle* de [11]. Nous rappelons également la définition d'une valuation dans un corps et quelques propriétés élémentaires de la valuation qui figurent dans [1].

Définition 2.24. Soient k un corps et $(G, +, <)$ un groupe abélien ordonné. Nous étendons l'ordre $<$ et la loi $\cdot$ de G à $G \cup \{\infty\}$ par :

- $\forall g \in G,\ g < \infty$,
- $\forall g \in G, g + \infty = \infty + g = \infty$.

Alors une *valuation* de k est une application $\nu : k \to G \cup \{\infty\}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall a \in k,\ \nu(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$,
2. $\forall a, b \in k,\ \nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$,
3. $\forall a, b \in k,\ \nu(a + b) \geq \min(\nu(a), \nu(b))$, avec égalité si $\nu(a) \neq \nu(b)$.

Nous disons qu'une valuation ν de k est *triviale* sur k si pour tout $a \in k^\times$ nous avons $\nu(a) = 0$.

Soit $\nu : k \to G \cup \{\infty\}$ une valuation de k. Nous définissons l'*anneau de valuation* de ν comme le sous-anneau de k :

$$R_\nu := \{a \in k : \nu(a) \geq 0\}$$

Nous notons $\mathfrak{M}_\nu$ l'idéal maximal de R_ν.

Soit (k, D) est un corps différentiel ordonné, de corps des constantes C. Une *valuation différentielle* de k est une valuation ν de k qui vérifie les points suivants :

1. ν est triviale sur C,
2. $R_\nu = C + \mathfrak{M}_\nu$,
3. $\forall a \in R_\nu,\ \forall b \in \mathfrak{M}_\nu,\ b \neq 0 \Rightarrow \frac{b\mathrm{D}a}{\mathrm{D}b} \in \mathfrak{M}_\nu$.

Commençons par expliciter la valuation de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ qui nous servira à montrer que les transséries forment un H-field :

Proposition 2.25 ([12]). *L'application $\nu : \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} \to \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ définie par*

$$\forall f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} \setminus \{0\},\ \nu(f) = -\mathrm{L}(\operatorname{lm} f),$$

$$\textit{et } \nu(0) = \infty,$$

est une valuation de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ dans le groupe abélien ordonné $(\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}, +)$. Son anneau de valuation est $\{f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} : \operatorname{lm} f \leq 1\} = \mathbb{R} \oplus \mathscr{M}$ et l'idéal maximal de son anneau de valuation est $\mathscr{M}$.

Démonstration. Nous montrons que ν vérifie les trois points de la définition de valuation. Soient $f, g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. Par définition, $\nu(f) = \infty$ si et seulement si $f = 0$. Puis comme $\operatorname{lm}(fg) = \operatorname{lm} f \cdot \operatorname{lm} g$, nous avons

$$\begin{aligned} \nu(fg) &= -\mathrm{L}(\operatorname{lm}(fg)) = -\mathrm{L}(\operatorname{lm} f \cdot \operatorname{lm} g) \\ &= -\mathrm{L}(\operatorname{lm} f) - \mathrm{L}(\operatorname{lm} g) = \nu(f) + \nu(g) \end{aligned}$$

Supposons $f, g \neq 0$. Comme $\operatorname{lm}(f + g) \leq \max(\operatorname{lm} f, \operatorname{lm} g)$ avec égalité si et seulement si $\operatorname{lt} f \neq -\operatorname{lt} g$, en utilisant la croissance du logarithme nous avons :

$$\begin{aligned} \nu(f+g) &= -\mathrm{L}(\operatorname{lm}(f+g)) \\ &\geq -\mathrm{L}(\max(\operatorname{lm} f, \operatorname{lm} g)) \\ &\geq -\max(\mathrm{L}(\operatorname{lm} f), \mathrm{L}(\operatorname{lm} g)) \\ &\geq \min(-\mathrm{L}(\operatorname{lm} f), -\mathrm{L}(\operatorname{lm} g)) = \min(\nu(f), \nu(g)) \end{aligned}$$

et $\nu(f) \neq \nu(g)$, nous avons $\operatorname{lm} f \neq \operatorname{lm} g$ donc $\operatorname{lt} f \neq -\operatorname{lt} g$ et

$$\nu(f+g) = \min(\nu(f), \nu(g))$$

Nous rappelons que $f \mapsto \mathrm{L}(f)$ est une application strictement croissante puisque sa réciproque : $f \mapsto \mathrm{E}(f)$, est strictement croissante. Donc ν est une valuation

de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$.
La croissance de l'exponentielle assure que

$$R_\nu = \{f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} : -\mathrm{L}(\operatorname{lm} f) \geq 0\} = \{f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} : \operatorname{lm} f \leq 1\}$$

Enfin, nous laissons en exercice de montrer que $\mathscr{M} = R_\nu \backslash \mathbb{R}^\times$ est l'idéal maximal de R_ν. □

En utilisant la proposition suivante, partiellement admise, nous montrons que cette valuation est différentielle.

Proposition 2.26 ([12])**.** *Soient $f, g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, alors :*

(i) Si $\operatorname{lm} f \neq 1$ et $\operatorname{lm} g \neq 1$ alors $\operatorname{lm} f \leq \operatorname{lm} g$ ssi $\operatorname{lm} f' \leq lmg'$,

(ii) Si $\operatorname{lm} f < \operatorname{lm} g \neq 1$, alors $\operatorname{lm} f' < \operatorname{lm} g'$,

(iii) Si $\operatorname{lm} f \leq 1$, alors $\operatorname{lm} f' < 1$.

Démonstration. Le point (i), admis, est montré dans [12, Proposition 4.1] . Le point (ii) s'obtient à partir du point (i). Pour le point (iii), nous proposons la démonstration suivante, qui fait appel au point (i) :
Soit $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, tel que $\operatorname{lm} f \leq 1$. Nous pouvons supposer $\operatorname{lm} f < 1$ en prenant le coefficient constant de f nul. Posons $g := \log x$. Par multiplicativité de lm et le point (i) nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} \operatorname{lm} f < 1 &\Rightarrow \operatorname{lm}(f \cdot g) < \operatorname{lm} g \\ &\Rightarrow \operatorname{lm}((fg)') < \operatorname{lm} g' \\ &\Rightarrow \operatorname{lm}\left(f'(\log x) + f\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Supposons que f vérifie

$$\operatorname{lm}(f'(\log x)) \leq \operatorname{lm}\left(f'(\log x) + f\frac{1}{x}\right) \tag{H}$$

Nous avons alors, en utilisant à nouveau la multiplicativité de lm :

$$\begin{aligned} \operatorname{lm} f < 1 &\Rightarrow \operatorname{lm}(f' \log x) < \frac{1}{x} \\ &\Rightarrow \operatorname{lm} f' < \frac{1}{x \log x} \end{aligned}$$

Et comme $\frac{1}{x \log x} < 1$, nous avons donc $\operatorname{lm} f' < 1$.

Regardons maintenant pour quels choix de f l'hypothèse (H) est vérifiée.

Par la proposition 1.6, nous avons

$$\operatorname{lm}\left(f'(\log x) + f\frac{1}{x}\right) = \max\left(\operatorname{lm}\left(f'(\log x)\right), \operatorname{lm}\left(\frac{f}{x}\right)\right)$$

si et seulement si $\operatorname{lt}(f'(\log x)) \neq \operatorname{lt}\left(\frac{-f}{x}\right)$. Pour vérifier l'hypothèse (H) il suffit donc que f vérifie :

$$\operatorname{lt}(f'(\log x)) \neq \operatorname{lt}\left(\frac{-f}{x}\right)$$

Par multiplicativité de lt, l'expression précédente est équivalente à :

$$\operatorname{lt}\left(\frac{f'}{f}\right) \neq \frac{-1}{x \log x}$$

Donc si f telle que $\operatorname{lm} f < 1$ vérifie $\operatorname{lt}\left(\frac{f'}{f}\right) \neq \frac{-1}{x\log x}$, alors f vérifie (H) et le raisonnement précédent assure que $\operatorname{lm} f' < 1$.

Sinon, si f est telle que $\operatorname{lm} f < 1$ et $\operatorname{lt}\left(\frac{f'}{f}\right) = \frac{-1}{x\log x}$, alors par multiplicativité de lt, nous avons

$$\operatorname{lt} f' = \operatorname{lt}\left(f \cdot \frac{-1}{x \log x}\right)$$

Donc, par définition de lt,

$$\operatorname{lm} f' = (\operatorname{lm} f) \cdot \frac{1}{x \log x}$$

Or $\operatorname{lm} f < 1$ et $\frac{1}{x \log x} < 1$ donc $\operatorname{lm} f' < 1$. Dans tous les cas nous avons montré que si $\operatorname{lm} f < 1$, alors $\operatorname{lm} f' < 1$, ce qui termine la preuve du lemme. □

Corollaire 2.27. *La valuation ν de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, définie à la Proposition 2.25, est une valuation différentielle de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ muni de la dérivation $f \mapsto f'$.*

Démonstration. Le corps des constantes de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est $\mathbb{R}$ et si r est un réel non nul, alors :

$$\nu(r) = -\,\mathrm{L}(\operatorname{lm} r) = -\log_{\mathbb{R}} 1 = 0$$

Donc ν est triviale sur le corps des constantes.

À la Proposition 2.25, nous avons montré que $R_\nu = \mathbb{R} + \mathscr{M}$ et $\mathbb{R}$ est bien le corps des constantes de $(\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}, f \mapsto f')$.

Soient $a \in R_\nu = \mathbb{R} + \mathscr{M}$ et $b \in \mathfrak{M}_\nu = \mathscr{M}$ avec $b \neq 0$. Montrons que $\frac{ba'}{b'} \in \mathscr{M}$. Si $a' = 0$, nous avons $\frac{ba'}{b'} = 0 \in \mathscr{M}$.
Sinon, $a' \neq 0$, donc $a \neq 0$ et quitte à remplacer a par $(a - c)$ où $c \in \mathbb{R}$ est le terme constant de a, nous pouvons supposer $a \in \mathscr{M}$. Par multiplicativité de lm,

nous avons $\operatorname{lm}(ab) < \operatorname{lm} b < 1$. Donc, par le Lemme 2.26(ii), nous avons

$$\operatorname{lm}(a'b + b'a) < \operatorname{lm} b'$$

et en factorisant par b', nous obtenons,

$$\operatorname{lm} b' \cdot \operatorname{lm}\left(\frac{ba'}{b'} + a\right) < \operatorname{lm} b'$$

Donc

$$\operatorname{lm}\left(\frac{ba'}{b'} + a\right) < 1$$

Puis, en utilisant l'égalité $\frac{ba'}{b'} = \left(\frac{ba'}{b'} + a\right) - a$, et la Proposition 1.6, nous avons

$$\operatorname{lm} \frac{ba'}{b'} < \max\left(\operatorname{lm}\left(\frac{ba'}{b'} + a\right), \operatorname{lm} a\right) < \max(1, \operatorname{lm} a)$$

Enfin, comme $a \in \mathscr{M}$ et , nous avons donc $\operatorname{lm} \frac{ba'}{b'} < 1$, et $\frac{ba'}{b'} \in \mathscr{M}$.

Donc ν est une valuation différentielle de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ muni de la dérivation $f \mapsto f'$. □

Theorème 2.28. $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ *muni de la dérivation* $f \mapsto f'$ *est un H-field.*

Démonstration. Nous devons montrer :

(i) $\{f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} : \forall c \in \mathbb{R}^{>0}, |\, f \,| \leq c\} = \mathbb{R} + \{f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} : \forall c \in \mathbb{R}, f < c\}$

(ii) $\forall f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}, (\forall c \in \mathbb{R}, f > c) \Rightarrow f' > 0$

Le point (i) se reformule en :

$$R_\nu = \mathbb{R} + \mathfrak{M}_\nu$$

Nous avons montré cette égalité dans la Proposition 2.25.

Pour le point (ii), nous nous réduisons d'abord au cas où $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ par isomorphisme de corps ordonné. En effet, on peut montrer que $f \in L_n$ vérifie $(\forall c \in \mathbb{R},\ f > c)$ si et seulement si $f \uparrow^n \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ vérifie la même condition et $f' > 0$ si et seulement si $(f \uparrow^n)' > 0$. Puis nous procédons par induction sur m tel que $f \in K_m$. Soit $f \in K_0$, tel que $(\forall c \in \mathbb{R},\ f > c)$ alors $\operatorname{lt} f = ax^r$ avec a et r deux réels strictement positifs. Donc $\operatorname{lt} f' = rax^{r-1}$, et $\operatorname{lc} f' = ra > 0$. Donc $f' > 0$.

Soit m un entier positif. Supposons que

$$\forall f \in K_m,\ (\forall c \in \mathbb{R},\ f > c) \Rightarrow f' > 0$$

Soit $f \in K_{m+1}$ tel que $\forall c \in \mathbb{R},\ f > c$. Réécrivons $f = \sum_{a \in A_m} f_a \operatorname{E}(a)$. Par hypothèse sur f, nous avons

$$\operatorname{lt} f = \operatorname{lt} f_\alpha \, \mathrm{E}(\alpha)$$

avec $\alpha = \max(\operatorname{Supp}^* f) \geq 0$. En utilisant la remarque 2.16, si $\alpha = 0$ nous avons $\operatorname{lt} f' = \operatorname{lt} f_0'$, et par hypothèse d'induction appliquée à $f_0 \in K_m$, nous avons $f_0' > 0$ et donc $f' > 0$. Sinon, nous avons $\operatorname{lt} f' = \operatorname{lt}(\alpha' f_\alpha) \, \mathrm{E}(\alpha)$ (vu à la remarque 2.16), et comme $f_\alpha > 0$ et $\alpha > 0$ (puisque $f > c$ pour tout réel c) nous pouvons appliquer l'hypothèse d'induction à $\alpha' f_\alpha$. Nous obtenons $\operatorname{lt}(\alpha' f_\alpha) > 0$ et il en découle que $f' > 0$. □

2.5 Intégration

Dans cette partie, nous allons montrer que le corps des transséries est Liouville clos. Puis, en nous penchant davantage sur les exemples que nous verrons au cours de cette première sous-partie, nous verrons en quoi les transséries constituent un outils d'analyse asymptotique puissant par rapport aux fonctions élémentaires (dont nous rappellerons la définition.)

Nous rappelons d'abord la définition de Liouville clos.

Définition 2.29. Soit (k, D) un corps différentiel, nous disons que (k, D) est *Liouville clos* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Tout élément de $g \in k$ admet une *primitive* dans k. Formellement,

$$\forall g \in k, \ \exists f \in k, \ \mathrm{D}f = g$$

2. Pour tout élément $g \in k^{>0}$, il existe $h \in k$ tel que $\mathrm{D}h = h \cdot g$.

Commençons par montrer que tout élément de $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ admet une primitive. Plus précisément, nous allons donner l'algorithme permettant de trouver un tel f. Pour déterminer la primitive d'une transsérie nous allons utiliser la notion d'opérateur *petit* sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$.

Définition 2.30. Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ et $P : D \to D$ un opérateur sur D (pas forcément linéaire). Nous disons que P est *petit* s'il existe un ensemble $R \subset G^{\mathrm{LE}^{<1}}$ anti bien-ordonné tel que pour tout $f \in D$, $\operatorname{Supp} P(f) \subset R \cdot \operatorname{Supp} f$.

Par induction, pour tout entier n, $\operatorname{Supp} P^n(f) \subset R^n \cdot \operatorname{Supp} f$ où P^n désigne l'itéré n fois de l'opérateur P et $R^n = \{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n : r_1, r_2, \ldots, r_n \in R\}$ l'ensemble des produits produits d'exactement n éléments de R.

À l'aide des manipulations de sommes de la Proposition 1.17, nous obtenons :

Proposition 2.31 (admise, [12]). *Si un opérateur P est petit sur $D \subset \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ et si I désigne l'identité sur D, alors $(I-P)$ est un opérateur inversible sur D et sa réciproque est*

$$(I-P)^{-1}(\varepsilon) = \sum_n P^n(\varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon \in D$.

2.5.1 Primitive d'une transsérie purement exponentiel

Nous détaillons dans cette section comment trouver la primitive d'un élément $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$.

Remarque 2.32. Si $g = a_{-1}x^{-1}$ avec $a_{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors $f = a_{-1}\log x$ est une primitive de g dans $L_1 \setminus L_0$.

Dans la suite, nous allons montrer que x^{-1} est le seul monôme de G^{E} qui n'a pas de primitives dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$.

Définition 2.33. Soit $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$. Nous appelons *résidu de g* le coefficient de g indexé par x^{-1}.

Proposition 2.34. *Si $g = \sum_{r\in\mathbb{R}} a_r x^r \in K_0$ tel que le résidu de g est nul alors :*

$$f = \sum_{r\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}} \frac{1}{r+1} a_r x^{r+1}$$

est une primitive de g.

Démonstration. Posons $f = \sum_{r\neq -1} \frac{1}{r+1} a_r x^{r+1}$. Par définition de f', nous avons alors

$$\begin{aligned} f' &= \sum_{r\neq -1} \left(\frac{r+1}{r+1} a_r x^{r+1-1} \right) \\ &= \sum_{r\neq -1} a_r x^r = g \end{aligned}$$

□

Voyons le cas où $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ est de résidu nul. Pour cela commençons par montrer le lemme suivant :

Lemme 2.35. *([12]) Soit m un entier naturel. Soient $\mu, h \in K_m$ tels que* $\operatorname{lm} \mu < x$ *si $m = 0$ et μ est infinitésimal relativement à K_{m-1} si $m > 0$. Alors l'équation $(y - \mu y') = h$ a une solution dans K_m.*

Démonstration. Pour montrer le lemme, nous montrons que l'opérateur

$$P : y \mapsto \mu y'$$

est petit sur K_m. La solution de l'équation est alors :

$$y = \sum_n P^n(h),$$

Si $m = 0$, pour tout $y \in K_0$, nous avons

$$\operatorname{Supp} P(y) \subset (x^{-1} \cdot \operatorname{Supp} \mu) \cdot \operatorname{Supp} y$$

Par le Lemme 1.4, $(x^{-1} \cdot \operatorname{Supp} \mu)$ est anti bien-ordonné et par hypothèse, nous avons $\operatorname{lm} \mu < x$ donc $(x^{-1} \cdot \operatorname{Supp} \mu) \subset G^{\mathrm{LE}^{<1}}$. Donc P est petit sur K_0.
Si $m > 0$, pour tout $y \in K_m$, nous avons

$$\operatorname{Supp}^* P(y) \subset \operatorname{Supp}^* \mu \cdot \operatorname{Supp}^* y$$

Comme $\mu \in K_m$, $\operatorname{Supp}^* \mu$ est anti bien-ordonné, et comme μ est un infinitésimal de K_m relativement à K_{m-1}, nous avons $\operatorname{Supp}^* \mu \subset \mathrm{E}(A_{m-1})^{<1}$. Donc P est petit sur K_m. $\square$

Proposition 2.36. *Si $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ est tel que le résidu de g est nul alors g a une primitive dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$.*

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur m pour montrer que tout $g \in K_m$ de résidu nul à une primitive dans K_m. Le cas $m = 0$ est exactement la proposition précédente. Soient $m \geq 0$ et $g \in K_{m+1}$, si $f = \sum_{a \in A_m} f_a \, \mathrm{E}(a)$ est une primitive de $g = \sum_{a \in A_m} g_a \, \mathrm{E}(a)$ alors

$$f' = \sum_{a \in A_m} (a' f_a + f_a') \, \mathrm{E}(a) = \sum_{a \in A_m} g_a \, \mathrm{E}(a)$$

et en identifiant les coefficients, nous avons $\forall a \in A_m,\ (a' f_a + f_a') = g_a$. Pour tout $a \in A_m \setminus \{0\}$, nous sommes donc ramenés à résoudre l'équation différentielle d'inconnue y

$$(a' y + y') = g_a. \tag{*}$$

Le résidu de g_0 est le résidu de g et est donc nul. Par hypothèse de récurrence, g_0 possède une primitive y_0 dans K_m. Pour $a \in A_m \setminus \{0\}$ nous réécrivons l'équation (*) sous la forme :

$$\left(y - \frac{1}{-a'} y' \right) = \frac{g_a}{a'} \tag{**}$$

Pour chaque $a \in A_m \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{E}(a) \in \operatorname{Supp}^* g$, nous appliquons le lemme précédent avec $\mu = \dfrac{1}{-a'}$ et $h = \dfrac{g_a}{a'}$ et nous notons y_a la solution de (**). Nous avons donc que

$$f = \sum_{a \in A_m} y_a \, \mathrm{E}(a)$$

est une primitive de g. $\square$

Exemple 2.37. Calculons la primitive de $g = \mathrm{E}(x^2) \in K_1$ en suivant les étapes de la démonstration de la Proposition 2.36. Nous sommes ramené à résoudre l'équation :

$$\left(y - \frac{1}{-2x} y'\right) = \frac{1}{2x}$$

Nous posons donc $P : y \mapsto \dfrac{1}{-2x} y'$, et nous cherchons à calculer

$$(I - P)^{-1} \left(\frac{1}{-2x}\right) = \sum_n P^n \left(\frac{1}{-2x}\right)$$

Nous regardons les premiers termes :

$$\begin{aligned}
P^0 \left(\frac{1}{2x}\right) &= I \left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2x} \\
P^1 \left(\frac{1}{2x}\right) &= \frac{1}{-2x} \cdot \frac{1}{-x^2} = \frac{1}{2} x^{-3} \\
P^2 \left(\frac{1}{2x}\right) &= P \left(\frac{1}{2x^3}\right) = \frac{3}{4} x^{-5} \\
P^3 \left(\frac{1}{2x}\right) &= \frac{15}{8} x^{-7}
\end{aligned}$$

On peut montrer par récurrence que pour $n > 0$,

$$P^n \left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)}{2^n} x^{-2n-1}$$

Nous avons alors une expression d'une primitive ϕ de $\mathrm{E}(x^2)$:

$$\phi = \frac{1}{2x} \mathrm{E}(x^2) + \sum_{n \in \mathbb{N}^\times} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)}{2^n} x^{-2n-1} \, \mathrm{E}(x^2)$$

2.5.2 Primitive d'une transsérie quelconque

Passons maintenant au cas général $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ et montrons que

Proposition 2.38. $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ *est Liouville clos.*

Démonstration. Montrons que tout $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ admet une primitive dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. Nous reprenons la preuve de [12, Théorème 5.6], qui nous donne une méthode que nous illustrerons dans l'exemple suivant. Par la Proposition 2.36 et la remarque sur les éléments de la forme $g = a_{-1}x^{-1}$. Nous avons montré que tout élément de L_0 admet une primitive dans L_1. Soit $g \in L_n$, nous allons nous ramener à un problème de calcul de primitive dans L_0. Si $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est une primitive de g, nous avons :

$$\begin{aligned} f' = g &\Leftrightarrow f' \uparrow^n = g \uparrow^n \\ &\Leftrightarrow (f \uparrow^n)' = g \uparrow^n \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i(x) \end{aligned}$$

Pour la seconde équivalence nous avons utilisé la Proposition 2.14. Comme $g \uparrow^n \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i(x) \in K_m$, nous pouvons prendre $y \in L_1$ une primitive de $g \uparrow^n \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i(x)$ et alors $f = y \downarrow^n \in L_{n+1}$ est une primitive de g.

Soit $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, $g \neq 0$, alors $\mathrm{L}\, g$ est une primitive de $\frac{g'}{g}$. Ce qui conclut la preuve. $\square$

Exemple 2.39. Calculons la primitive d'un élément de L_2. Soit $g = \mathrm{L}(\mathrm{L}(x))$. En plongeant g dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$, nous sommes ramené à résoudre dans K_2 l'équation :

$$y' = x\, \mathrm{E}(x)\, \mathrm{E}_2(x)$$

Nous devons donc résoudre l'équation :

$$z' + z\, \mathrm{E}(x) = x\, \mathrm{E}(x)$$

Que nous réécrivons sous la forme :

$$z - \frac{1}{-\mathrm{E}(x)} z' = x$$

Posons $P : z \mapsto -\frac{1}{\mathrm{E}(x)} z'$. Nous calculons les itérations $P^n(x)$ de P :

$$\begin{aligned} P^0(x) &= x \\ P^1(x) &= -\frac{1}{\mathrm{E}(x)} \\ P^2(x) &= -\frac{1}{\mathrm{E}(x)}(-\mathrm{E}(-x))' = -\frac{1}{\mathrm{E}(x)^2} \\ P^3(x) &= -\frac{2}{\mathrm{E}(x)^3} \end{aligned}$$

Par récurrence, on peut montrer que pour tout $n > 0$,

$$P^n(x) = -\frac{(n-1)!}{\mathrm{E}(x)^n}$$

Donc $z = x - \sum_{p\geq 1} \frac{(p-1)!}{\mathrm{E}(x)^p}$,
puis $y = x\,\mathrm{E}_2(x) - \sum_{p\geq 1} \frac{(p-1)!}{\mathrm{E}(x)^p}\,\mathrm{E}_2(x)$,
et enfin la primitive de $\log_2(x)$ et

$$\phi = y \downarrow^2 = x \log_2 x - \sum_{p\geq 1} (p-1)! \frac{x}{(\log x)^p}$$

L'existence de primitives permet de résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1 :

Proposition 2.40. *Soit $f, g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ alors l'équation $y' + fy = g$ a une solution dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. De plus, si $g = 0$ non pouvons choisir $y \neq 0$*

Démonstration. Détaillons la preuve donnée dans [12]. Soit h_0 une primitive de f et h_1 une primitive de $g\,\mathrm{E}(h_0)$, alors $y = \frac{h_1}{\mathrm{E}(h_0)}$ est solution de l'équation différentielle : en effet nous avons

$$\begin{aligned}\left(\frac{h_1}{\mathrm{E}(h_0)}\right)' + f\frac{h_1}{\mathrm{E}(h_0)} &= \frac{g(\mathrm{E}(h_0))^2 - h_1 f\,\mathrm{E}(h_0)}{\mathrm{E}(h_0)^2} + f\frac{h_1}{\mathrm{E}(h_0)} \\ &= g\end{aligned}$$

et y est solution de l'équation. Si $g = 0$ nous pouvons prendre $h_1 = 1$ ce qui donne $y \neq 0$. □

Exemple 2.41. Résolvons l'équation $y' + y = \mathrm{E}(x)$. Avec les notations de la démonstration précédente, nous avons que $h_0 = x$ est une primitive de 1 et $h_1 = \frac{\mathrm{E}(2x)}{2}$ est une primitive de $(\mathrm{E}(x))^2$. Donc

$$y = \frac{\mathrm{E}(x)}{2}$$

est solution de l'équation. On peut le vérifier.

Cependant les équations différentielles linéaires homogènes n'admettent de solution non triviale dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ en général. Par exemple, à l'ordre 2 :

Proposition 2.42. *([12]) L'équation $y'' + y = 0$ n'admet pas de solution non triviale dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$.*

Démonstration. Supposons que $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ soit telle que $f'' + f = 0$ et $f \neq 0$. Alors :

$$((f')^2 + f^2)' = 2f'(f'' + f) = 0$$

Donc $((f')^2 + f^2) = c \in \mathbb{R}^{>0}$. Si $\operatorname{lm} f > 1$, alors $f^2 > r$ pour tout réel r. Donc pour tout réel r,

$$((f')^2 + f^2) = c > r$$

Ce qui est une contradiction. Si $\operatorname{lm} f < 1$, par la Proposition 2.26(i), nous avons $\operatorname{lm} f' < 1$. Donc, par les propriétés 1.6 sur lm, nous avons $\operatorname{lm}((f')^2 + f^2) < 1$ ce qui contredit encore $((f')^2 + f^2) = c \in \mathbb{R}^{>0}$. Donc $\operatorname{lm} f = 1$. Alors la Proposition 2.26(ii) assure que $\operatorname{lm} f'' < 1$ et alors $f'' + f \neq 0$, encore une contradiction. Donc $f = 0$ est la seule solution de $y'' + y = 0$. □

2.5.3 Fonctions élémentaires et comportements asymptotiques

Dans cette section nous éclairons le lien entre les développements asymptotiques de fonctions et les transséries. Commençons par définir les fonctions que nous allons considérer. Nous prenons les fonctions dites élémentaires définies en 1833 par Liouville dans [6] et [7]. Pour plus de détails sur les définitions d'analyse asymptotique et les propriété nous renvoyons vers [4].

Définition 2.43. Nous appelons l'ensemble des *fonctions élémentaires* le plus petit ensemble $\mathscr{E}$ de fonctions réelles à une variable définies sur un voisinage de l'infini (ie définies sur un intervalle $[c, \infty[$ pour un certain réel c) tel que :

- la fonction identité et les fonctions constantes, définies sur tout intervalle $[c, \infty[$ avec c réel, sont des éléments de $\mathscr{E}$,
- $\mathscr{E}$ est clos par les opérations arithmétiques $(+, -, \times, \div)$,
- Si $f \in \mathscr{E}$ alors les fonctions $\sin(f)$, $\cos(f)$, $\exp(f)$ sont des éléments des $\mathscr{E}$ où exp, sin et cos sont les fonction exponentielle, sinus et cosinus usuelles définies sur $\mathbb{R}$.
- Si $f \in \mathscr{E}$ est définie sur $[c, \infty[$ et $\forall y \in [c, \infty[,\ f(y) > 0$, alors $\log(f)$ est un élément de $\mathscr{E}$ où log désigne la fonction logarithme définie sur $\mathbb{R}^{>0}$.

Remarque 2.44. On peut montrer que les fonctions élémentaires sont exactement les fonctions qui s'expriment comme des compositions finies de la fonction identité, de fonction constante, d'opération arithmétique, d'exponentielle, de logarithme, de sinus et de cosinus.

On peut alors montrer par induction que $\mathscr{E}$ est un sous-ensemble des fonctions continues infiniment dérivables définies au voisinage de l'infini. Nous munissons alors $\mathscr{E}$ de la dérivé usuelle des fonctions réelles (que l'on peut aussi définir sur $\mathscr{E}$ par induction) avec comme constantes les fonctions constantes.

On peut également montrer que les fonctions élémentaires ne contenant pas de sinus ni de cosinus, quotientées par la relation

$$f = g \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \forall y > C, f(y) = g(y),$$

forment un corps qui se plonge dans le corps des transséries. Nous noterons ce plongement Ψ. Le quotient est nécessaire pour identifier l'identité sur $\mathbb{R}$ avec l'identité sur $\mathbb{R}^+$ par exemple. On peut vérifier que la dérivation et la composition passe au quotient. Pour construire Ψ, il suffit de plonger la fonction identité sur $x \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$, les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, vu comme sous-corps des transséries, puis, inductivement, de plonger les compositions par des opérations arithmétiques sur les opérations correspondantes dans les transséries et les composition par exp et log sur les compositions par E et L respectivement. De plus, ce plongement commute avec la dérivation.

L'équation $y'' + y = 0$ n'a pas de solution dans les transséries d'après la Proposition 2.42. Cependant, $(y \mapsto \sin(y), y \mapsto \cos(y))$ forment une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de $y'' + y = 0$ dans les fonctions élémentaires. Le plongement Ψ ne s'étend donc pas à $\mathscr{E}$ tout entier et cela explique pourquoi il est question des fonctions non-oscillantes dans la littérature quand un lien entre transséries et fonctions réelles est fait.

Nous rappelons les définitions de domination asymptotique et de développement asymptotique :

Définition 2.45. Soit $f, g \in \mathscr{E}$ toutes deux définies sur $]c, \infty[$, on dit que g *domine* f *au voisinage de l'infini*, et l'on note $f = o(g)$, si

$$\forall r \in \mathbb{R}^{>0},\ \exists Y \in]c, \infty[,\ \forall y > Y,\ \mid f(y) \mid < r \mid g(y) \mid$$

Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{E}$ définis sur un même domaine. Nous disons que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *échelle asymptotique* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\phi_{n+1} = o(\phi_n)$$

Soient $f \in \mathscr{E}$ et $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une *échelle asymptotique* définies sur un même domaine. Nous disons que f admet la série formelle

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n$$

comme *développement asymptotique par rapport à l'échelle* $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à l'ordre* N si

$$f - \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n = o(\phi_N)$$

Remarque 2.46. Une relation de domination peut aussi être définie dans les transséries. Soit $f, g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ on dit que g *domine* f, et l'on note $f \preccurlyeq g$, si

$$\forall r \in \mathbb{R}^{>0},\ \mid f(y) \mid < r \mid g(y) \mid$$

Et alors pour tout $f, g \in \mathscr{E}$, on peut montrer

$$f = o(g) \Rightarrow \Psi(f) \preccurlyeq \Psi(g)$$

Nous admettons le résultat de Liouville suivant, qui implique immédiatement que l'ensemble des fonctions élémentaires n'est pas Liouville clos. En effet, tout élément de $\mathscr{E}$ n'admet pas une primitive dans $\mathscr{E}$.

Proposition 2.47 (admise, [7])**.** *Les fonctions*

$$y \mapsto \int_1^y exp(t^2)dt$$

et

$$li : y \mapsto \int_0^y \frac{1}{\log t} dt$$

définies sur $\mathbb{R}^{>0}$*, ne sont pas élémentaires.*

Or dans l'exemple 2.37, nous avons montré que la transséries $\mathrm{E}(x^2)$ admettait comme primitive la transsérie :

$$\phi = \frac{1}{2x} \mathrm{E}(x^2) + \sum_{n \in \mathbb{N}^\times} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)}{2^n} x^{-2n-1} \mathrm{E}(x^2)$$

Puisque la dérivé et Ψ commutent, la transsérie ϕ n'a pas d'antécédent par Ψ dans les fonctions élémentaires. De plus, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.48. *Pour tout* $y > 0$*, la série de terme général*

$$\left(\frac{\prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)}{2^n} y^{-2n-1} \right)_{n \in \mathbb{N}^\times}$$

diverge.

Démonstration. Soit $y > 0$. Comme on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^\times} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)}{2^n} y^{-2n-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}^\times} 2^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)(2y)^{-2n-1}$$

En remplaçant y par $2y$, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^\times} 2^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)(y)^{-2n-1}$$

diverge. Or, nous avons :

$$\frac{2^{n+2}\prod_{i=1}^{n}(2i+1)(y)^{-2n-3}}{2^{n+1}\prod_{i=1}^{n-1}(2i+1)(y)^{-2n-1}} = 2\cdot(2n+1)\cdot y^{-2}.$$

Donc le quotient de deux termes consécutifs diverge lorsque n tend vers l'infini et la série diverge grossièrement. $\square$

Cette proposition implique que la transsérie ϕ ne peut pas être identifiée avec la fonction $y \mapsto \int_1^y \exp(t^2)dt$ sur un voisinage de l'infini.

Néanmoins, la proposition suivante montre que ϕ donne un développement asymptotique formel (divergent) pour la primitive de $\exp(y^2)$ et les troncatures de ϕ peuvent être interprétées comme des fonctions élémentaires. Ce développement asymptotique formel ne converge nulle part sur $\mathbb{R}^{>0}$.

Proposition 2.49. *Nous avons la relation de domination suivante :*

$$\int_1^y \exp(t^2)dt - \frac{\exp(y^2)}{2y} = o\left(\frac{\exp(y^2)}{2y}\right)$$

De plus, on peut montrer que pour tout $n > 0$, nous avons :

$$\int_1^y \exp(t^2)dt - \frac{\exp(y^2)}{2y} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(2i+1)}{2^k}y^{-2k-1}\exp(y^2) = o\left(\frac{\exp(y^2)}{y^{-2k-1}}\right)$$

Il en découle que

$$y \mapsto \int_1^y \exp(t^2)dt$$

admet un développement asymptotique à tout ordre par rapport à l'échelle

$$(y \mapsto y^{-2n-1}\exp(y^2))_{n\in\mathbb{N}}$$

et son le n-ième coefficient est

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(2i+1)}{2^k}$$

Démonstration. Soit $y > 1$. En intégrant par parties, nous avons

$$\begin{aligned}\int_1^y \exp(t^2)dt - \frac{\exp(y^2)}{2y} &= -\frac{1}{2}\exp(1) + \frac{\exp(y^2)}{2y} + \frac{1}{2}\int_1^y \frac{\exp(t^2)}{t^2}dt - \frac{\exp(y^2)}{2y} \\ &= -\frac{1}{2}\exp(1) + \frac{1}{2}\int_1^y \frac{\exp(t^2)}{t^2}dt\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2}\int_1^y \frac{\exp(t^2)}{t^2}dt$ diverge lorsque y tend vers $+\infty$, il suffit donc de montrer que :

$$\int_1^y \frac{\exp(t^2)}{t^2}dt = o\left(\frac{\exp(y^2)}{2y}\right)$$

En intégrant à nouveau par parties, nous avons

$$\int_1^y \frac{\exp(t^2)}{t^2}dt = \frac{\exp(y^2)}{2y^3} + 3\int_1^y \frac{\exp(t^2)}{t^4}dt + c$$

Où c est une constante réelle. Nous avons alors

$$\frac{\exp(y^2)}{2y^3} = o\left(\frac{\exp(y^2)}{2y}\right)$$

Par croissance de $\frac{\exp(t^2)}{t^4}$, pour y suffisamment grand, nous avons la majoration

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{\exp(t^2)}{t^4}dt &< y\frac{\exp(y^2)}{y^4} + c' \\ &< \frac{\exp(y^2)}{y^3} + c' = o\left(\frac{\exp(y^2)}{2y}\right)\end{aligned}$$

Pour une certaine constante réelle c'. Donc

$$\int_1^y \frac{\exp(t^2)}{t^2}dt = o\left(\frac{\exp(y^2)}{2y}\right)$$

Le second point, laissé en exercice, se montre par récurrence avec des arguments similaires. $\square$

Nous obtenons des résultats analogues pour la primitive de $\log_2(x)$, obtenue à l'exemple 2.39 :

$$\phi = x\log_2 x - \sum_{p\geq 1}(p-1)!\frac{x}{(\log x)^p}$$

La primitive de $y \mapsto \log(\log y))$, définie sur $]1,+\infty[$ peut être écrite en utilisant une intégration par parties comme la fonction

$$y \mapsto y\log(\log y) - \mathrm{li}(y)$$

Cette primitive n'est pas élémentaire puisque $\mathrm{li}(x) \notin \mathscr{E}$. De plus, on peut montrer que la série

$$\sum_{p\geq 1}(p-1)!\frac{y}{(\log y)^p}$$

diverge pour tout $y > 0$ en utilisant la formule de Stirling. La primitive de $y \mapsto \log(\log y))$ ne peut donc pas être identifiée à son développement asymptotique (divergent) sur un voisinage de l'infini.

2.6 Composition

Dans cette partie nous allons définir une opération de composition $\circ$ sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. L'idée est que si $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ et g est une transsérie alors $f \circ g$ est la transsérie dans laquelle nous avons substitué g à x. Afin que l'application $f \mapsto f \circ g$ conserve l'ordre relativement à $\mathbb{R}$ nous voulons donc que g soit positif. En effet, si $f = \mathrm{E}(x)$ et $g = -x$, et en posant $f \circ g := \mathrm{E}(-x)$ nous avons que f est un infiniment grand relativement à $\mathbb{R}$, mais $f \circ g$ est infinitésimal. De plus, si $g = c \in \mathbb{R}$ et $f = \sum a_r x^r$ nous pouvons pas donner de sens à $f \circ g$. Nous allons donc définir la composition sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} \times \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$.

Définition 2.50. Nous posons

$$\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty} := \{f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} : \forall r \in \mathbb{R}, f > r\}$$

Nous allons définir la composition sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}} \times \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}$. Nous procédons comme pour la dérivation et commençons par définir la transsérie $f \circ g$ pour $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ pour tout $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}$, par induction sur les K_m, puis sur $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ tout entier :

Définition 2.51. Soient $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}$, $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ nous définissons inductivement $f \circ g$ par :

- Si $f = \sum_{r \in \mathbb{R}} a_r x^r \in K_0$, $f \circ g = \sum a_r g^r$,
- Si $f = \sum_{a \in A_m} f_a \,\mathrm{E}(a) \in K_{m+1}$ avec $m \geq 0$, $f \circ g = \sum_{a \in A_m} (f_a \circ g) \,\mathrm{E}(a \circ g)$
- Si $f \in L_n$ pour un certain entier n, nous posons $F = f \uparrow^n$ et $f \circ g = F \circ \mathrm{L}_m g$

Remarque 2.52. Nous noterons également $f \circ g = f(g)$.

L'existence des sommes écrites dans la définition de la composition est très technique et détaillée dans [12, résultats 6.6 à 6.13]. Parmi les outils utilisés pour montrer que la somme existe, nous notons l'existence d'un développement en série de Taylor. Nous réécrivons ici sans preuve les conditions pour avoir un tel développement dans $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$:

Theorème 2.53. *Soient $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}$ et $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$. Alors,*
Si $f \in K_0$, et si $\varepsilon \in \mathbb{R}((G_{n,M}))$ ($G_{n,M}$ a été défini dans 2.3) est tel que

$$\operatorname{lm} \varepsilon < \operatorname{lm} g,$$

alors :

$$f \circ (g + \varepsilon) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{f^{(p)} \circ g}{p!} \varepsilon^p \in \mathbb{R}((G_n, M)).$$

Si $f \in K_m$ *pour un entier* $m > 0$*, et si* $\varepsilon \in \mathbb{R}((G_{n,M}))$ *est tel que*

$$\forall h \in K_{m-1}^{>0}, \mid \varepsilon \mid < h \circ g,$$

alors :

$$f \circ (g + \varepsilon) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{f^{(p)} \circ g}{p!} \varepsilon^p \in \mathbb{R}((G_{n,M+m}))$$

Remarque 2.54. Dans le théorème que nous venons d'écrire les conditions

$$\operatorname{lm}(\varepsilon) < \operatorname{lm} g \text{ et } \forall h \in K_{m-1}^{>0}, \mid \varepsilon \mid < h \circ g$$

assurent que ε est "suffisamment petit devant g relativement à f". Il n'existe pas en général de développement en série de Taylor. En effet, si $f := \mathrm{E}(x^3)$ et $\varepsilon := x^{-1}$, alors $\operatorname{lm}\left(\frac{f^{(p)}}{p!}\varepsilon^p\right) = x^p\,\mathrm{E}(x^3)$ est strictement croissant en p. Donc

$$\left\{\operatorname{lm}\left(\frac{f^{(p)}}{p!}\varepsilon^p\right) : p \in \mathbb{N}\right\} \subset \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \operatorname{Supp}\left(\frac{f^{(p)}}{p!}\varepsilon^p\right)$$

n'est pas anti bien-ordonné et $(\mathrm{E}(x^3) \circ (x + x^{-1}))$ n'admet pas de développement en série de Taylor.

Dans la même preuve ([12, résultats 6.6 à 6.13]) on obtient les propriétés suivantes :

Proposition 2.55. *Soient* $g \in \mathbb{R}((x))_{\infty}^{\mathrm{LE}}$*,* $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$*, nous avons alors :*

(i) $\forall r \in \mathbb{R}, r \circ g = r$*,*

(ii) $x \circ g = g$ *et* $f \circ x = f$*,*

(iii) $h \mapsto h \circ g$ *est un plongement de corps de* $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ *dans lui-même.*

(iv) Si $f = \sum_I f_i \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$*, alors* $f \circ g = \sum_I (f_i \circ g) \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$

(v) $\mathrm{E}(f) \circ g = \mathrm{E}(f \circ g)$*,* $(f \circ g) \uparrow = f \circ (g \uparrow)$*,* $f \downarrow = f \circ (\log_n x)$ *et* $\log x \circ g = \mathrm{L}\, g$

(vi) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Nous avons maintenant défini la composition sur $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$.

2.7 Inverse compositionnel

De la Proposition 2.55 découle le corollaire suivant :

Corollaire 2.56. $(\mathbb{R}((x))_{\infty}^{\mathrm{LE}}, \circ)$ *est un monoïde.*

De plus, soient $g \in \mathbb{R}((x))_{\infty}^{\mathrm{LE}}$ *et* $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$*. Si* $f \circ g = x$ *alors* $f \in \mathbb{R}((x))_{\infty}^{\mathrm{LE}}$ *et* $g \circ f = x$*.*

Démonstration. Soient $f, g \in \mathbb{R}((x))_{\infty}^{\mathrm{LE}}$ et soit $r \in \mathbb{R}$. Grâce à la Proposition 2.55 (iii), par plongement de corps ordonné, nous avons $f > r \Leftrightarrow f \circ g > r \circ g = r$. Donc $f \circ g \in \mathbb{R}((x))_{\infty}^{\mathrm{LE}}$.

Toujours par plongement de corps, si $f \circ g = x$ alors $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}$ puisque $x \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}$. Enfin par associativité de $\circ$ (2.55 (vi)) et les identités de 2.55 (ii) nous obtenons :

$$(g \circ f) \circ g = g \circ (f \circ g) = g \circ x = g = x \circ g$$

Enfin par injectivité de $f \mapsto f \circ g$, nous avons $g \circ f = x$. $\square$

Notre but est maintenant de montrer que $(\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}, \circ)$ est un groupe. Plus précisément, étant donné $f \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}$ nous allons montrer comment calculer l'inverse compositionnel de f. Remarquons que nous avons déjà l'inverse compositionnel :

Proposition 2.57. *Pour tout entier positif n,*

$$\mathrm{E}_n(x) \circ \log_n x = (\log_n x) \circ \mathrm{E}_n(x) = x$$

Nous allons d'abord ramener le problème de trouver l'inverse d'un élément quelconque de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}$ à trouver l'inverse d'un élément de la forme $x + \varepsilon$ avec de "bonnes" conditions sur ε, avant de montrer que les éléments de cette forme ont un inverse compositionnel explicite.

Lemme 2.58 ([12])**.** *Pour tout $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}$, il existe m et n des entier tels que*

$$\log_n(x) \circ g \circ E_m(x) = x + \varepsilon,$$

avec ε est un infinitésimal de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$.

Démonstration. Comme $g \uparrow^n = g \circ \mathrm{E}_n$, nous pouvons supposer $\operatorname{lm} g \in G^{\mathrm{E}}$. Procédons par récurrence sur m tel que $\operatorname{lm} g \in G_m$. Supposons $g = cx^r(1+\delta)$, avec $\delta \in \mathscr{M}$. Alors nous avons :

$$\begin{aligned}
\log_3(x) \circ g \circ \mathrm{E}_3(x) &= \log_3(x) \circ (c\,\mathrm{E}_3(x)^r(1 + (\delta \uparrow^3)) \\
&= \mathrm{L}(\mathrm{L}(r\,\mathrm{E}_2(x)) + \log c + \delta_1 \\
&= \mathrm{L}\left(\mathrm{L}(r\,\mathrm{E}_2(x)) + \mathrm{L}\left(1 + \frac{\log c + \delta_1}{r\,\mathrm{E}_2(x)}\right)\right) \\
&= \mathrm{L}\left(\mathrm{E}(x) + \delta_2\right) \\
&= x + \mathrm{L}\left(1 + \frac{\delta_2}{E(x)}\right)
\end{aligned}$$

Où $\delta_1 = \mathrm{L}(1+\delta \uparrow^3))$ et comme δ est infinitésimal relativement à $\mathbb{R}$, par définition du logarithme, nous avons

$$\delta_1 = \sum (-1)^{p+1} \frac{(\delta \uparrow^3)^p}{p}$$

et $\delta_2 = \mathrm{L}\left(1 + \frac{\log c + \delta_1}{r\,\mathrm{E}_2(x)}\right)$. δ_1 et δ_2 sont des infinitésimaux de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$. Nous avons alors que

$$\varepsilon_1 = \mathrm{L}\left(1 + \frac{\delta_2}{E(x)}\right)$$

est un infinitésimal de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ et

$$\log_3(x) \circ g \circ \mathrm{E}_3(x) = x + \varepsilon_1$$

Supposons $\varepsilon_1 \in L_k$ pour un entier k. Alors

$$\begin{aligned} \log_4(x) \circ g \circ \mathrm{E}_4(x) &= \mathrm{L}\left(\mathrm{E}(x)\left(1 + \frac{1 + (\varepsilon\uparrow)}{\mathrm{E}(x)}\right)\right) \\ &= x + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_2 = \mathrm{L}\left(1 + \frac{1 + \varepsilon\uparrow}{\mathrm{E}(x)}\right) = \sum (-1)^{p+1} \frac{(\varepsilon\uparrow)^p}{\mathrm{E}(px)p} \in L_{k-1}$$

En itérant, nous obtenons $\log_{3+k}(x) \circ g \circ \mathrm{E}_{3+k}(x) = x + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in L_0$.

Si maintenant $g = \phi\,\mathrm{E}(a)(1+\delta)$, avec $a \in A_m$, $\phi \in K_m$ et $\delta \in \mathscr{M}$, nous avons :

$$\log x \circ g = \mathrm{L}\, g = a + \mathrm{L}\,\phi + \varepsilon$$

avec $\varepsilon = \sum (-1)^{p+1} \frac{(\delta\uparrow^2)^p}{p}$. Alors $\mathrm{lm}(\log x \circ g) = \mathrm{lm}\, a \in G_m$. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\log x \circ g$ pour conclure. □

Nous cherchons à calculer l'inverse compositionnel d'un élément de la forme $x + \varepsilon$. Pour cela, nous utilisons les lemmes suivants. Le premier, que nous admettons, permet de contrôler la composition à droite par un élément de la forme $x + \varepsilon$.

Lemme 2.59 ([12]). *Soient $m \leq n$, $f \in K_m$ et $\varepsilon \in K_n$ tel que :*

- *si $m = 0$, alors $\mathrm{lm}\,\varepsilon < x$,*
- *et si $m > 0$, alors $\forall g \in G_{m-1}$, $\mathrm{lm}\,\varepsilon < g$.*

Alors nous avons $f \circ (x + \varepsilon) \in K_n$ et $\mathrm{lm}\, f \circ (x + \varepsilon) = \mathrm{lm}\, f$.

Les deux lemmes suivants indiquent comment effectuer une étape de calcul nous rapprochant de l'inverse de $x + \varepsilon$. Dans leurs preuves, nous ferons de nouveau appel à la notion d'opérateur petit (définie dans 2.30.)

Lemme 2.60 ([12]). *Soit $\varepsilon \in K_n$, tel que $\mathrm{lm}\,\varepsilon < x$. Alors il existe $\delta \in K_0$ avec $\mathrm{lm}\,\delta < x$ tel que*

$$(x + \delta) \circ (x + \varepsilon) = x + \varepsilon^*,$$

avec $\varepsilon \in K_n$ tel que $\forall r \in \mathbb{R}^{>0}, \varepsilon^* < x^r$. De plus, pour $n = 0$, nous avons $(x+\delta) \circ (x+\varepsilon) = x$.

Démonstration. Réécrivons $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$ avec $\varepsilon_0 \in K_0$ et $\forall r \in \mathbb{R}^{>0}, \varepsilon_1 < x^r$. Nous avons par le développement en série de Taylor de la Proposition 2.53 :

$$(x+\delta) \circ (x+\varepsilon) = (x+\delta) \circ (x+\varepsilon_0) + \eta,$$

avec, par le Lemme 2.59, $\eta \in K_n$ et $\forall r \in \mathbb{R}^{>0}$, $\operatorname{lm} \eta < x^r$. Nous cherchons $\delta_0 \in K_0$ avec $\operatorname{lm} \delta_0 < x$ tel que $(x+\delta_0) \circ (x+\varepsilon_0) = x$. Posons $D := \{\delta \in K_0 : \operatorname{lm} \delta < x\}$. alors pour tout $\delta \in D$, nous avons

$$\begin{aligned}(x+\delta) \circ (x+\varepsilon_0) &= x + \varepsilon_0 + \delta + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\delta^{(p)}}{p!} \varepsilon_0^p \\ &= x + \varepsilon_0 + (I + P_{\varepsilon_0})(\delta),\end{aligned}$$

où I désigne l'identité sur D et P_{ε_0} est défini sur D par :

$$P_{\varepsilon_0} : \delta \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\delta^{(p)}}{p!} \varepsilon_0^p.$$

Alors trouver $\delta_0 \in D$ tel que $(x+\delta_0) \circ (x+\varepsilon_0) = x$ revient à résoudre l'équation d'inconnue δ

$$(I + P_{\varepsilon_0})(\delta) = -\varepsilon_0.$$

Or, P_{ε_0} est un opérateur petit sur D, puisque nous avons

$$\operatorname{Supp} P_{\varepsilon_0}(\delta) \subset \left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^\times} \{x^{-p}\} \cdot [\operatorname{Supp} \varepsilon] \right) \cdot \operatorname{Supp} \delta,$$

où $[\operatorname{Supp} \varepsilon] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n : (a_1, \ldots, a_n) \in (\operatorname{Supp} \varepsilon)^n\}$ (c'est la notation introduite au point 1.18), et par les lemmes 1.4 et 1.18, nous avons que

$$\bigcup_{p \in \mathbb{N}^\times} \{x^{-p}\} \cdot [\operatorname{Supp} \varepsilon]$$

est anti bien-ordonné et contenu dans $G^{E^{<1}}$.

$(I + P_{\varepsilon_0})$ est donc inversible sur D par la Proposition 2.31. Nous posons alors

$$\delta_0 := (I + P_{\varepsilon_0})^{-1}(-\varepsilon_0) = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p (P_{\varepsilon_0})^p (-\varepsilon)$$

et nous avons $(x+\delta_0)\circ(x+\varepsilon_0)=x$ et

$$(x+\delta_0)\circ(x+\varepsilon)=x+\eta$$

avec $\eta \in K_n$ et $\forall r \in \mathbb{R}^{>0}, \operatorname{lm} \eta < x^r$. $\square$

Le cas général, où ε est dominé par les éléments de G_{m-1} pour $m>0$ se montre essentiellement de la même façon :

Lemme 2.61 ([12])**.** *Soient $m \leq n$, et soit $\varepsilon \in K_n$ avec $\forall g \in G_{m-1} \operatorname{lm} \varepsilon < g$. Alors il existe $\delta \in K_m$ tel que $\forall g \in G_{m-1} \operatorname{lm} \delta < g$ et*

$$(x+\delta)\circ(x+\varepsilon)=x+\varepsilon^*,$$

avec $\varepsilon \in K_n$ tel que $\forall g \in G_m, \varepsilon^* < x^r$. De plus, si $m=n$, nous avons $(x+\delta)\circ(x+\varepsilon)=x$.

Démonstration. Comme précédemment, en réécrivant, $\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1$ avec $\varepsilon_0 \in K_m$ et $\forall g \in G_m, \varepsilon_1 < g$ nous avons par le développement en série de Taylor (2.53),

$$(x+\delta)\circ(x+\varepsilon)=(x+\delta)\circ(x+\varepsilon_0)+\eta,$$

avec, par le Lemme 2.59, $\eta \in K_n$ et $\forall g \in G_m, \operatorname{lm} \eta < g$. Nous cherchons $\delta_0 \in K_0$ tel que $\forall g \in G_{m-1} \operatorname{lm} \delta_0 < g$ et $(x+\delta_0)\circ(x+\varepsilon_0)=x$. Posons

$$D := \{\delta \in K_m : \forall g \in G_{m-1} \operatorname{lm} \delta < g\}.$$

Alors, pour tout $\delta \in D$, nous avons par le développement en série de Taylor (2.53) :

$$\begin{aligned}(x+\delta)\circ(x+\varepsilon_0) &= x+\varepsilon_0+\delta+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\delta^{(p)}}{p!}\varepsilon_0^p \\ &= x+\varepsilon_0+(I+P_{\varepsilon_0})(\delta),\end{aligned}$$

Où I désigne l'identité sur D et P_{ε_0} est défini sur D par

$$P_{\varepsilon_0} : \delta \mapsto \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\delta^{(p)}}{p!}\varepsilon_0^p.$$

Alors trouver $\delta_0 \in D$ tel que $(x+\delta_0)\circ(x+\varepsilon_0)=x$ revient à résoudre l'équation d'inconnue δ

$$(I+P_{\varepsilon_0})(\delta)=-\varepsilon_0.$$

Montrons que P_{ε_0} est un opérateur petit. Nous avons

$$\operatorname{Supp}^* P_{\varepsilon_0}(\delta) \subset [\operatorname{Supp}^* \varepsilon] \cdot \operatorname{Supp}^* \delta$$

Où Supp^* désigne le support dans le corps $K_m = K_{m-1}((\mathrm{E}(A_{m-1})))$ et

$$[\operatorname{Supp}^* \varepsilon] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n : (a_1, \ldots, a_n) \in (\operatorname{Supp}^* \varepsilon)^n\}.$$

Par le Lemme 1.18, nous avons que $[\operatorname{Supp}^* \varepsilon]$ est anti bien-ordonné et par hypothèse sur D et ε,

$$[\operatorname{Supp}^* \varepsilon] \cdot \operatorname{Supp}^* \delta \subset \mathrm{E}(A_{m-1})^{<1}$$

$(I + P_{\varepsilon_0})$ est donc inversible sur D et nous posons

$$\delta_0 = (I + P_{\varepsilon_0})^{-1}(-\varepsilon_0) = \sum_{p\in\mathbb{N}} (-1)^p (P_{\varepsilon_0})^p(-\varepsilon)$$

Nous avons alors $(x + \delta_0) \circ (x + \varepsilon_0) = x$ et

$$(x + \delta_0) \circ (x + \varepsilon) = x + \eta$$

avec $\eta \in K_n$ et $\forall g \in G_m, \operatorname{lm} \eta < g$. □

Nous pouvons désormais inverser les éléments de la forme $x + \varepsilon$ pour la composition :

Proposition 2.62. *Soient $\varepsilon \in M_n$, alors il existe $\delta \in M_n$ tel que*

$$(x + \delta) \circ (x + \varepsilon) = x$$

Démonstration. Appliquer une fois le Lemme 2.60 puis n fois le Lemme 2.61 pour $m = 1, \ldots, m = n$ successivement. Nous obtenons alors des infinitésimaux $\delta_0 \in K_0, \delta_1 \in K_1, \ldots, \delta_n \in K_n$ tel que :

$$(x + \delta_0) \circ \cdots \circ (x + \delta_n) \circ (x + \varepsilon) = x$$

Le Lemme 2.59 assure que $(x + \delta_0) \circ \cdots \circ (x + \delta_n) \in K_n$ et par récurrence on peut montrer $\operatorname{lm}(x + \delta_0) \circ \cdots \circ (x + \delta_n) = x$ en utilisant également le Lemme 2.59. Nous pouvons donc écrire

$$(x + \delta_0) \circ \cdots \circ (x + \delta_n) = x + \delta,$$

où δ est un infinitésimal. □

Theoreme 2.63 ([12]). *$(\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}, \circ)$ est un groupe, d'élément neutre x.*

Démonstration. Par le théorème, 2.55, x est un élément neutre pour $\circ$ et $\circ$ est associative. Soit $g \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}$, par la Proposition 2.58, nous avons deux entiers n et m tels que

$$\log_n(x) \circ g \circ E_m(x) = x + \varepsilon,$$

avec ε infinitésimal de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$. Par la Proposition 2.62, il existe δ infinitésimal de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$ tel que

$$(x + \delta) \circ (x + \varepsilon) = x$$

Nous avons donc

$$(x + \delta) \circ \log_n(x) \circ g \circ E_m(x) = x$$

Enfin, par le corollaire 2.56, nous obtenons :

$$E_m(x) \circ (x + \delta) \circ \log_n(x) \circ g = x$$

Donc g admet $E_m(x) \circ (x+\delta) \circ \log_n(x)$ comme inverse compositionnel à gauche. Par le corollaire 2.56, c'est également l'inverse à droite et $(\mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}_{\infty}, \circ)$ est un groupe. □

Exemple 2.64. Illustrons d'abord le calcul d'un inverse. Soit $f = x + E(-x)$. Notons que f est déjà de la forme $x+\varepsilon$ avec $\varepsilon = E(-x)$ infinitésimal de $\mathbb{R}((x))^{\mathrm{E}}$. En reprenant la démonstration du Lemme 2.60 et ses notations, nous posons

$$P_\varepsilon : \delta \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\delta^{(p)}}{p!} \,\mathrm{E}(-px)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
P_\varepsilon^0(-\mathrm{E}(-x)) &= -\mathrm{E}(-x),\\
P_\varepsilon^1(-\mathrm{E}(-x)) &= \sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \,\mathrm{E}(-(p+1)x),\\
P_\varepsilon^2(-\mathrm{E}(-x)) &= \sum_{p\geq 1} \sum_{p_0\geq 1} \frac{(p_0+1)^p(-1)^{p+p_0}}{p!p_0!} \,\mathrm{E}(-(p+p_0+1)x),
\end{aligned}$$

et par récurrence sur $n > 0$, on peut montrer que

$$\begin{aligned}
&(P_\varepsilon)^n(-\mathrm{E}(-x)) =\\
&\quad (-1)^n \sum_{p_0,p_1,\ldots p_n \geq 1} \frac{\prod_{k=1}^{n}(-1-\sum_{i=0}^{k-1} p_i)^{p_k}}{\prod_{k=1}^{n} p_i!} \,\mathrm{E}\left(-(1+\sum_{i=0}^{n} p_i)x\right)
\end{aligned}$$

Nous posons alors,

$$\delta = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n (P_{\varepsilon_0})^n(-\,\mathrm{E}(-x)),$$

et l'inverse compositionnel de $x + E(-x)$ est

$$\begin{aligned} x{+}\delta &= x + \mathrm{E}(-x) \\ &+ \sum_{n\geq 1}(-1)^n \sum_{p_0,p_1,\ldots p_n\geq 1} \frac{\prod_{k=1}^{n}(-1-\sum_{i=0}^{k-1}p_i)^{\sum_{i=0}^{n}p_i}}{\prod_{k=1}^{n}p_i!}\,\mathrm{E}\left(-(1+\sum_{i=0}^{n}p_i)x\right) \end{aligned}$$

Nous obtenons en particulier que

$$\mathrm{Supp}(x+\delta) \subset \{x\} \cup \{\mathrm{E}(-px) : p \in \mathbb{N}^{\times}\}.$$

Prenons maintenant $f = \sqrt{\log x}$. Nous connaissons déjà l'inverse compositionnel de f, c'est $\mathrm{E}(x^2)$. Voyons ce que nous obtenons en suivant l'algorithme. Commençons par mettre f sous la forme $x + \varepsilon$.

$$\log x \circ f \circ \mathrm{E}(x) = \mathrm{L}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\log x$$
$$\log x \circ f \circ \mathrm{E}_2(x) = \frac{1}{2}x$$

$$\log_2 x \circ f \circ \mathrm{E}_3(x) = x - \log 2$$

$$\begin{aligned} \log_3 x \circ f \circ \mathrm{E}_4(x) &= x + \mathrm{L}\left(1 + \frac{-\log 2}{E(x)}\right) \\ &= x - \sum_{k\geq 1}\frac{(\log 2)^k}{k}\,\mathrm{E}(-kx) \end{aligned}$$

Nous posons alors $\varepsilon = -\sum_{k\geq 1}\dfrac{(\log 2)^k}{k}\,\mathrm{E}(-kx)$ et

$$P_\varepsilon : \delta \mapsto \sum_{p\geq 1}\frac{\delta^{(p)}}{p!}\left(-\sum_{k\geq 1}\frac{(\log 2)^k}{k}\,\mathrm{E}(-kx)\right)^p$$

Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
P_\varepsilon(-\varepsilon) &= \sum_{p\geq 1}\left(\sum_{k\geq 1}(-k)^{p-1}(\log 2)^k \operatorname{E}(-kx)\right)\frac{\left(-\sum_{k\geq 1}\frac{(\log 2)^k}{k}\operatorname{E}(-kx)\right)^p}{p!}\\
&= \sum_{k\geq 1}\frac{(\log 2)^k}{k}\operatorname{E}(-kx)\operatorname{E}(-k\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Nous voyons alors que le calcul exact de $(P_\varepsilon)^n(-\varepsilon)$ pour $n > 1$ s'avère compliqué à exprimer. Nous nous contenterons de donner un ensemble restreint contenant le support de l'inverse compositionnel de $\sqrt{\log x}$. Nous devrions obtenir un ensemble contenant le monôme $\operatorname{E}(x^2)$.
Par une récurrence laissée en exercice au lecteur, nous obtenons :

$$\forall n > 0,\ \operatorname{Supp}[(P_\varepsilon)^n(-\varepsilon)] \subset \{\operatorname{E}(-kx) \in \mathbb{R}((x))^{\operatorname{E}} : k \in \mathbb{N}^\times\}$$

et en posant $\delta := \sum_{n\geq 0}(-1)^n(P_\varepsilon)^n(-\varepsilon)$ nous avons :

$$\operatorname{Supp}\delta \subset \{\operatorname{E}(-kx) : k \in \mathbb{N}^\times\}$$

ce qui nous amène à

$$\operatorname{Supp}(x+\delta) \subset \{x\} \cup \{\operatorname{E}(-kx) \in \mathbb{R}((x))^{\operatorname{E}} : k \in \mathbb{N}^\times\}$$

L'inverse compositionnel de $\sqrt{\log x}$ obtenu par l'algorithme est $g = \operatorname{E}_4(x)\circ(x+\delta)\circ\log_3 x$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Supp}(\log_4(x)\circ g) &= \operatorname{Supp}((x+\delta)\circ\log_3 x)\\
&= (\operatorname{Supp}((x+\delta)))\downarrow^3\\
&\subset \{\log_3 x\} \cup \{(\log_2 x)^{-k} : k \in \mathbb{N}^\times\}.
\end{aligned}
$$

Si $h \in \mathbb{R}((x))^{\operatorname{LE}}$ est telle que $\operatorname{Supp} h \subset (\{\log_3 x\} \cup \{(\log_2 x)^{-k} : k \in \mathbb{N}^\times\})$ et $\operatorname{lm} h = \log_3 x$, alors en réécrivant $h = a\log_3 x + \sum_{k\in\mathbb{N}^\times} a_k(\log_2 x)^{-k}$ avec $a_k \in \mathbb{R}$, nous avons donc

$$\operatorname{Supp}\operatorname{E}(h) \subset (\log_2 x)^a \cdot \{(\log_2 x)^{-p} : p \in \mathbb{N}\}$$

Et, de plus, $\operatorname{lm}\operatorname{E}(h) = (\log_2 x)^a$. Pour $h = (x+\delta)\circ\log_3 x$, nous avons donc

$$\operatorname{Supp}\operatorname{E}((x+\delta)\circ\log_3 x) \subset (\log_2 x)\cdot\{(\log_2 x)^{-p} : p \in \mathbb{N}\}$$

En réitérant notre raisonnement, nous obtenons :

$$\operatorname{Supp} \mathrm{E}_2(h) \subset \{\log x\} \cup \{(\log x) \cdot (\log_2 x)^{-p} : p \in \mathbb{N}^\times\}$$

et $\operatorname{lt} \mathrm{E}_2(h) = \log x$ Puis comme $\log x (\log_2 x)^{-p}$ est infiniment grand pour tout entier p, Nous obtenons que si h tel que $\operatorname{lt} h = \log x$ est une transsérie à support dans

$$\{\log x\} \cup \{(\log x (\log_2 x)^{-p} : p \in \mathbb{N}^\times\}$$

alors $E(h)$ est un monôme. Comme $\mathrm{E}(h)$ est encore infiniment grand, $\mathrm{E}_2(h)$ est aussi un monôme. Donc l'inverse compositionnel de $\sqrt{\log x}$ est de la forme $\mathrm{E}_2(h)$ où $h \in \mathbb{R}((x))^{\mathrm{LE}}$ est tel que

$$\operatorname{Supp} h \subset \{\log x\} \cup \{(\log x (\log_2 x)^{-p} : p \in \mathbb{N}^\times\}$$

et $\operatorname{lm} h = \log x$.

En fait, nous conjecturons que $h = 2 \log x$ (puisque qu'alors l'algorithme donne bien $\mathrm{E}(x^2)$, l'inverse compositionnel de $\sqrt{\log x}$) et que les autres termes se compensent dans le calcul exact que nous n'avons pas fait. Nous voyons donc que l'application algorithmique du calcul de l'inverse compositionnel n'est pas aisée même dans des cas connus.

Nous terminons notre mémoire avec ce dernier exemple qui illustre que le calcul du support de l'inverse compositionnel d'une transsérie simple est relativement aisé par rapport au calcul exact de l'inverse compositionnel.

Exemple 2.65. Trouver m et n comme à la propriété 2.58 peut changer radicalement l'aspect de la transsérie que nous désirons inverser et les transséries obtenues deviennent vite compliquées à manipuler. Prenons l'exemple de

$g = x + \log x$. Nous avons :

$$g \circ \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(x) + x$$

$$\begin{aligned}
\log(x) \circ g \circ \mathrm{E}(x) &= \mathrm{L}\left(\mathrm{E}(x)\left(1 + x\,\mathrm{E}(-x)\right)\right) \\
&= x + \mathrm{L}\left(1 + x\,\mathrm{E}(-x)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log_2(x) \circ g \circ \mathrm{E}_2(x) &= \mathrm{L}\left(\mathrm{E}(x) + \mathrm{L}\left(1 + \mathrm{E}(x)\,\mathrm{E}_2(-x)\right)\right) \\
&= x + \mathrm{L}\left(1 + \mathrm{L}\left(1 + \mathrm{E}(x)\,\mathrm{E}_2(-x)\right)\mathrm{E}(-x)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log_3(x) \circ g \circ \mathrm{E}_3(x) &= x + \mathrm{L}\left[1 + \frac{\mathrm{L}\left(1 + \frac{\mathrm{L}\left(1 + \frac{\mathrm{E}(x)}{\mathrm{E}_2(x)}\right)}{\mathrm{E}_2(x)}\right)}{\mathrm{E}(x)}\right] \\
&= x + \sum_{k\geq 1}\sum_{p\geq 1}\sum_{n\geq 1}((-1)^{p+1})^k((-1)^{n+1})^{pk}\,\frac{(-1)^{k+1}\,\mathrm{E}(x)^{pnk}}{\mathrm{E}(x)^k\,\mathrm{E}_2(x)^{pk+pnk}} \\
&= x + \sum_{k\geq 1}\sum_{p\geq 1}\sum_{n\geq 1}(-1)^{1+kpn}\,\frac{\mathrm{E}(x)^{pn(k-1)}}{\mathrm{E}_2(x)^{pk+pnk}}
\end{aligned}$$

Nous voyons que $\log_3(x) \circ g \circ \mathrm{E}_3(x)$ a la forme $x + \varepsilon$ attendue avec

$$\varepsilon = \sum_{k\geq 1}\sum_{p\geq 1}\sum_{n\geq 1}(-1)^{1+kpn}\,\frac{\mathrm{E}(x)^{pn(k-1)}}{\mathrm{E}_2(x)^{pk+pnk}} \in K_2$$

et $\operatorname{lm}\varepsilon = \mathrm{E}(x)\,\mathrm{E}_2(x)^2 < 1$. L'inverse compositionnel de $x + \log x$ est alors compliqué à trouver. Mais il est possible de déterminer son support. Par récurrence on peut montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \operatorname{Supp}\varepsilon^p \subset \left\{\frac{\mathrm{E}(x)^n}{\mathrm{E}_2(x)^k}\ :\ n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\right\}$$

Puis en posant $P_\varepsilon : \delta \mapsto \sum_{p\geq 1}\frac{\delta^{(p)}}{p!}\varepsilon^p$, on peut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{Supp}[(P_\varepsilon)^n(-\varepsilon)] \subset \left\{\frac{\mathrm{E}(x)^n}{\mathrm{E}_2(x)^k}\ :\ n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\right\}$$

Donc, si $\delta := \sum_{n\geq 0}(-1)^n(P_\varepsilon)^n(-\varepsilon)$, nous avons

$$\operatorname{Supp}(x+\delta) \subset \{x\} \cup \left\{ \frac{\mathrm{E}(x)^n}{\mathrm{E}_2(x)^k} \;:\; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} \right\}$$

En posant $h = ((x+\delta)\circ \log_3(x))$, l'inverse compositionnel de $x + \log x$ est alors $\mathrm{E}_3(x) \circ h$. Nous avons

$$\operatorname{Supp}((x+\delta)\circ \log_3(x)) \subset \{\log_3 x\} \cup \left\{ \frac{(\log_2 x)^n}{(\log x)^k} \;:\; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} \right\}$$

Avec en suivant la même méthode qu'avec l'inverse compositionnel de $\sqrt{\log x}$ nous avons

$$\operatorname{Supp}\mathrm{E}(h) \subset \{\log_2 x\} \cup \left\{ \frac{(\log_2 x)^{n+1}}{(\log x)^k} \;:\; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} \right\}$$

Puis comme $\frac{(\log_2 x)^{n+1}}{(\log x)^k}$ est infinitésimal pour tout entiers $n \geq 0$ et $k \geq 2$,

$$\operatorname{Supp}\mathrm{E}_2(h) \subset \{\log x\} \cup \left\{ \frac{(\log_2 x)^{n+1}}{(\log x)^k} \;:\; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\}$$

Puis en itérant à nouveau,

$$\operatorname{Supp}\mathrm{E}_3(h) \subset \{x\} \cup \left\{ \frac{x(\log_2 x)^{n+1}}{(\log x)^k} \;:\; n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\}$$

et $\operatorname{lt}\mathrm{E}_3\, h = x$. En outre, le lecteur pourra montrer que les coefficients de l'inverse compositionnel de $x + \log x$ sont rationnels.

Références

[1] Emil Artin. *Geometric algebra*. Courier Dover Publications, 2016.

[2] Matthias Aschenbrenner and Lou van den Dries. Asymptotic differential algebra. *Contemporary Mathematics*, 373 :49–86, 2005.

[3] Matthias Aschenbrenner, Lou Van den Dries, and Joris van der Hoeven. *Asymptotic differential algebra and model theory of transseries*, volume 358. Princeton University Press, 2017.

[4] Jean Dieudonné. Calcul infinitésimal, hermann, paris, 1968. *MR*, 37 :2557, 1992.

[5] Jean Esterle. Solution d'un problème d'erdős, gillman ethenriksen et application a l'étude des homomorphismes de c. *Acta Mathematica Hungarica*, 30(1-2) :113–127, 1977.

[6] Joseph Liouville. *Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique*. Impr. Royale, 1833.

[7] Joseph Liouville. *Second mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique*. Impr. Royale, 1833.

[8] David Marker. *Model theory : an introduction*, volume 217. Springer Science & Business Media, 2006.

[9] Bernhard Hermann Neumann. On ordered division rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 66 :202–252, 1949.

[10] Paulo Ribenboim. Fields : algebraically closed and others. *Manuscripta Mathematica*, 75(1) :115–150, 1992.

[11] Maxwell Rosenlicht. Differential valuations. *Pacific Journal of Mathematics*, 86 :301–319, 1980.

[12] Lou van den Dries, Angus Macintyre, and David Marker. Logarithmic-exponential series. *Annals of Pure and Applied Logic*, 111 :61 – 113, 2001.

[13] Joris Van der Hoeven. *Transseries and real differential algebra*, volume 1888. Springer, 2006.