LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre I

Généralités sur les (pré)dérivateurs

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX par G. Maltsiniotis. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou les rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

[page 1]

Dérivateurs

1. Préliminaires sur les foncteurs images inverses des préfaisceaux sur des catégories d'indices, et leurs adjoints multiples.

A "catégorie de coefficients",
I "catégorie d'indices",
$A(I) = \underline{\mathsf{Hom}}(I^{\circ}, A)$ préfaisceaux sur I à valeurs dans A.

Si $f : I \to J$, on en déduit :

$$f^* : A(J) \to A(I) \quad ,$$

et on s'intéresse à l'existence des foncteurs adjoints successifs à gauche et à droite. Notation provisoire :

$$f^? \; f_! \; f^* \; f_* \; f^! \quad .$$

Voici les faits principaux :

a) Sous réserve de l'existence des $\varprojlim$ (resp. $\varinjlim$) pertinentes, f_* (resp. $f_!$) existe. Par exemple s'il existe [des] $\varprojlim$ (resp. $\varinjlim$) *finies*, alors f_* (resp. $f_!$) existe si I, J sont des catégories finies.

b) Même si A est une catégorie abélienne, avec $\varprojlim$ et $\varinjlim$ (par exemple Ab), les *biadjoints* n'existent pas toujours. Par exemple, dans le cas particulier où $J = e$ est la catégorie ponctuelle, et I l'ensemble ordonné

$$\begin{tikzcd} & a \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & b \end{tikzcd}$$

(dans le cas de $f^!$), ou l'ensemble ordonné opposé (dans le cas de $f^?$). Même si f est une immersion ouverte, $f^!$ n'existe pas forcément (par exemple elle n'existe pas si I est comme [ci-]dessus, et

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dr] & \\ J = 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & c \\ & b \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad),$$

et si f est une immersion fermée, $f^?$ n'existe pas forcément.

c) Si f est une *immersion fermée*, et A est *ponctuée* (*i.e.* admet un objet à la fois initial et final), alors $f^!$ existe. Si f est une immersion ouverte, $f^?$ existe. (Toujours sous réserve de l'existence dans A des limites pertinentes). Si f est une immersion, f_* et $f_!$ `[sont]` pleinement fidèles *i.e.* f^* `[est]` un foncteur de localisation.

d) Supposons seulement l'existence de l'objet final e dans A (plus au besoin certaines $\varprojlim$ finies). Si

`[page 2]`

$$i : Y \hookrightarrow S$$

est une immersion fermée, de complémentaire U

$$Y \overset{i}{\hookrightarrow} S \overset{j}{\hookleftarrow} U$$

de sorte que j soit une immersion ouverte, alors $A(Y)$ s'identifie par le foncteur i_* à la sous-catégorie pleine de $A(S)$ formée des $F \in \mathsf{Ob}\ A(S)$ tels que $F|U \simeq e_U$ (préfaisceau final). De même, si l'objet initial $\emptyset$ existe dans A, et les $\varinjlim$ pertinentes, alors $A(U)$ s'identifie par $j_!$ à la sous-catégorie pleine de $A(S)$ formée des F tels que $F|Y = \emptyset_Y$ (préfaisceau initial, prenant partout la valeur $\emptyset$).

Si A est même *ponctuée* ($e = \emptyset$), alors on a, pour tout $F \in \mathsf{Ob}\ A(S)$, un carré à la fois cartésien et cocartésien, fonctoriel en F

(1)
$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr, "\mathrm{adj}"] & \\ j_!j^*F \arrow[ur, "\mathrm{adj}"] \arrow[dr] & & i_*i^*F \\ & e \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

Dans le cas A abélienne, ce diagramme prend la forme d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow j_!j^*F \longrightarrow F \longrightarrow i_*i^*F \longrightarrow 0 \quad .$$

e) Mêmes conditions pour i et j. On suppose que A a les $\varprojlim$ pertinentes, dont objet final. On a alors un carré cartésien fonctoriel en $F \in \mathsf{Ob}\ A(S)$ `[il faut supposer la catégorie` A `ponctuée]`

(2)
$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "\mathrm{adj}"'] & i_*i^!F \arrow[l] \arrow[d] \\ j_*j^*F & e \arrow[l] \end{tikzcd}$$

i.e. $i^!F$ s'identifie par le foncteur pleinement fidèle i_* au *noyau* de $F \to j_*j^*F$. Dans le cas abélien, cela prend la forme d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow i_*i^!F \longrightarrow F \longrightarrow j_*j^*F \quad .$$

`[page 3]`

Je me dispense d'écrire le carré cocartésien dual, quand A a les $\varinjlim$ pertinentes, y compris objet initial. Il semble qu'elle n'ait pas servi en pratique. Les foncteurs adjoints et biadjoints classiquement utiles sont inclus ci-dessous (où les "pas utiles" sont entre crochets)

$$\begin{array}{c} [i_!]\ i^*\ i_*\ i^! \\ [j^?]\ j_!\ j^*\ j_* \end{array}$$

i.e. les foncteurs $i_!$ et $j^?$ n'ont pas servi classiquement.

f) Cas des catégories $\mathbf{\Delta}_i$ (simplexes type, $i \in \mathbb{N}$), et des foncteurs entre ceux-ci (applications semi-simpliciales). Il semblerait que pour une telle f, si A est ponctuée, il y ait les *bi-adjoints* à la fois à gauche et à droite. De plus, pour $\mathbf{\Delta}_i$ et $\mathbf{\Delta}_j$ fixés quand on regarde toutes les $f : \mathbf{\Delta}_i \to \mathbf{\Delta}_j$ et toutes les $g : \mathbf{\Delta}_j \to \mathbf{\Delta}_i$, que les suites totales de foncteurs multi-adjoints pour chacun des f^*, g^* correspondants sont toutes les mêmes `[ce n'est pas vrai]`. Ça a l'air vrai du moins si $j = i + 1$ (et je l'ai vérifié pour $i = 0$, $i = 1$), on doit trouver une "suite d'adjonctions" de longueur $2i + 7 = (i + 1) + (i + 2) + 2 + 2$. De façon précise, la suite comporte quatre termes "extrêmes" (les deux premiers, les deux derniers) et les $(i + 1) + (i + 2)$ termes intermédiaires correspondant aux foncteurs de la forme f^* ou g^*, où $f : \mathbf{\Delta}_{i+1} \to \mathbf{\Delta}_i$ est une des $(i + 1)$ applications de dégénérescence, et $g : \mathbf{\Delta}_i \to \mathbf{\Delta}_{i+1}$ une des $i + 2$ applications bord `[ce n'est pas tout à fait vrai; il faut se limiter aux applications qui sont injectives ou surjectives]`.

`[page 4]`

2. Préliminaires heuristiques sur les dérivateurs.

On se donne une sous-catégorie pleine Dia (comme "diagrammes") de $\mathcal{C}at$. Ça peut être tout $\mathcal{C}at$, ou plus petit. Mais on supposera le plus souvent que Dia contient au moins les "catégories ordonnées" (correspondant aux ensembles ordonnés, *i.e.* telles que a) tout morphisme est un mono et b) tout iso est une identité `[ce n'est pas vrai : la catégorie réduite à une double flèche satisfait à ces conditions, mais n'est pas un ensemble ordonné]`). Par abus de langage, on identifie un ensemble ordonné avec la catégorie correspondante (et une catégorie au topos qu'elle définit?). On considère Dia comme une 2-*catégorie.*[1]

Un *dérivateur* $\mathbb{D}$ (sur Dia, comme "*domaine*" du dérivateur) est un 2-foncteur contravariant de Dia dans $\mathcal{C}at$, satisfaisant certaines conditions. Donc

$$\mathbb{D} : \mathsf{Dia}^\circ \longrightarrow \mathcal{C}at \quad .$$

Si $I \in \mathsf{Ob}_0\ \mathsf{Dia}$ est une catégorie (ou un "type de diagramme") du domaine de $\mathbb{D}$, on doit donc avoir une catégorie $\mathbb{D}(I)$. Les objets de $\mathbb{D}(I)$ s'appelleront les *objets-coefficients* (ou *coefficients*) de type $\mathbb{D}$, au dessus de I. Pour

$$f : I \longrightarrow J$$

une 1-flèche de Dia, on doit avoir un foncteur

$$f^*_{\mathbb{D}} \text{ ou } f^* : \mathbb{D}(J) \longrightarrow \mathbb{D}(I) \quad ,$$

dit *"foncteur image inverse"*. Si F est un coefficient de type $\mathbb{D}$ sur J son "*image inverse*" est donc un coefficient de type $\mathbb{D}$ sur I. On suppose (pour simplifier!) que le 2-foncteur $\mathbb{D}$ est *strict*, donc qu'on a transitivité stricte

$$(gf)^* = f^*g^* \ , \qquad \text{si} \qquad I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K \qquad \text{dans } \mathsf{Dia} \ .$$

`[page 5]`

De plus, si on a deux foncteurs $f, g : I \rightrightarrows J$, et un morphisme entre eux

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "f"{name=F}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=G}] & J \arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "u"] \end{tikzcd} \ ,$$

on se donne un morphisme $u^*_{\mathbb{D}}$ ou u^* entre les foncteurs g^* et f^*, d'où

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I) & \mathbb{D}(J) \arrow[l, bend right, "f^*"'{name=F}] \arrow[l, bend left, "g^*"{name=G}] \arrow[from=G, to=F, Rightarrow, "u^*"] \end{tikzcd} \quad .$$

[1]N.B. Il faut des conditions de stabilité pour Dia, au moins la stabilité par $I \times J$ et $I \amalg J$, en fait, nettement plus ...

On doit encore avoir transitivité pour une composition de morphismes de foncteurs :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=60, "h"'] & J \end{tikzcd} \quad \Downarrow u, \ \Downarrow v$$

doit donner

$$(vu)^* = u^* v^*$$

donc

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I) & \mathbb{D}(J) \arrow[l, bend right=60, "f^*"'] \arrow[l, "g^*" description] \arrow[l, bend left=60, "h^*"] \end{tikzcd} \quad \Uparrow u^*, \ \Uparrow v^* \quad .$$

De plus, si f est une identité, f^* aussi

$$(\mathsf{id}_I)^* = \mathsf{id}_{\mathbb{D}(I)} \quad ,$$

et de même si u est une identité

$$(\mathsf{id}_f)^* = \mathsf{id}_{f^*} \quad .$$

[page 6]

J'indique tout de suite l'axiome le plus important sur un dérivateur (au-delà de la donnée d'un 2-contra foncteur strict) :

Der$_1$: Si $f : I \to J$ dans Dia, alors $f^*_{\mathbb{D}} = f^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$ a un adjoint à droite et un adjoint à gauche.

Ces foncteurs seront notés (du moins provisoirement) $f_*^{\mathbb{D}}$ ou f_* , et $f_!^{\mathbb{D}}$ ou $f_!$, soit

$$f_! \, , \, f_* : \mathbb{D}(I) \rightrightarrows \mathbb{D}(J) \quad ,$$

de sorte qu'on trouve une suite de *trois* foncteurs adjoints entre $\mathbb{D}(I)$ et $\mathbb{D}(J)$

$$f_! \, , \; f^*, \; f_* \quad .$$

N.B. Pour la plupart des développements on n'aura pas besoin de l'existence à la fois des $f_!$ et des f_*. Un *dérivateur à gauche* ne suppose que les f_* (adjoints à droite des f^*), et l'existence de $f_!$ seulement quand f est une *immersion ouverte*. Dualement, un *dérivateur à droite* ne suppose que les $f_!$ (adjoints à gauche des f^*), et f_* seulement si f est une *immersion fermée*. Ce sont sans doute les dérivateurs à gauche qui sont les plus importants.

[page 7]

Der$_2$: Si $f : I \to J$ est dans Dia, si c'est une immersion *fermée*, le biadjoint à droite $f^!_{\mathbb{D}}$ ou $f^!$ de f^* existe. Si c'est une immersion ouverte, le biadjoint à gauche $f^?$ existe.[2] Dans

[2] Il n'y a lieu d'exiger les biadjoints que pour un dérivateur ponctué. HOT n'y satisfait pas.

les deux cas, on veut que f^* soit un foncteur de localisation, ce qui équivaut à dire que f_* est pleinement fidèle, ou que $f_!$ est pleinement fidèle.[3]

N.B. Dans le cas d'un dérivateur à gauche, on suppose seulement l'existence de $f^!$ si f est une immersion fermée. Donc pour résumer, pour un tel dérivateur, on suppose l'existence de

$$\begin{cases} f_* \text{ quel que soit } f : I \to J \text{ dans } \mathsf{Dia} \\ f_! \text{ si } f \text{ est une immersion ouverte} \\ f^! \text{ si } f \text{ est une immersion fermée (cas ponctué seulement).} \end{cases}$$

Dualement, pour un dérivateur à droite, on suppose l'existence de

$$\begin{cases} f_! \text{ quel que soit } f : I \to J \text{ dans } \mathsf{Dia} \\ f_* \text{ si } f \text{ est une immersion fermée} \\ f^? \text{ si } f \text{ est une immersion ouverte (cas ponctué seulement).} \end{cases}$$

Je voudrais formuler des axiomes astucieux, pour le cas d'un couple

$$Y \xhookrightarrow{i} I \xhookleftarrow{j} U$$

d'une immersion ouverte j et d'une immersion fermée i dans Dia, complémentaires l'une de l'autre. D'abord une formulation si on suppose $\mathbb{D}$ "*ponctué*", *i.e.* les catégories $\mathbb{D}(I)$ ponctuées, et les foncteurs f^* compatibles avec les ponctuations. On veut "interpréter" le carré (1) page 2 :

[page 8]

(1)
$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr, "\mathrm{adj}"] & \\ j_!j^*F \arrow[ur, "\mathrm{adj}"] \arrow[dr] & & i_*i^*F \\ & e \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad ,$$

[3]Il faut de plus caractériser l'image de f_* si f est une immersion fermée (les F tels que $g^*F \xrightarrow{\sim} e_{\mathbb{D}(U)}$) et celle de $f_!$ si c'est une immersion ouverte (les F tels que $g^*F \simeq \emptyset_{\mathbb{D}(Y)}$), où g est l'immersion complémentaire.

Der$'_2$: Pour tous $I, J \in \mathsf{Dia}$, on a

$$\mathbb{D}(I \amalg J) \xrightarrow[(\alpha^*, \beta^*)]{\sim} \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \quad ,$$

où α, β sont les injections canoniques de I et J dans $I \amalg J$.

carré à la fois cartésien et cocartésien. On cherche donc un carré dans $\mathbb{D}(I)$, mais mieux que ça. Soit $J = \mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_1$ le carré standard

$$\begin{tikzcd}
 & (1,0) \arrow[dl] & \\
(1,1) & & (0,0) \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & (0,1) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

et considérons la catégorie $I \times J$. On a

$$\begin{aligned} J &\longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I, I \times J) \\ j &\longmapsto \big(i \longmapsto (i,j)\big) \end{aligned}$$

D'autre part, par $\mathbb{D}$

$$\underline{\mathsf{Hom}}(I, I \times J)^\circ \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(I \times J), \mathbb{D}(I))$$

d'où un composé

$$J^\circ \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(I \times J), \mathbb{D}(I))$$

ou encore

$$\mathbb{D}(I \times J) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ, \mathbb{D}(I)) \quad .$$

Ceci vaut pour tout $J \in \mathsf{Ob\,Dia}$. On peut donc dire que la donnée d'un "coefficient" Φ sur une catégorie produit $I \times J$ donne naissance à un diagramme de type J° dans la catégorie $\mathbb{D}(I)$ des coefficients sur I. La philosophie

`[page 9]`

des dérivateurs consiste en grande partie, inversement, chaque fois qu'on a un diagramme dans une catégorie de coefficients $\mathbb{D}(I)$ (sur un diagramme I), disons diagramme de type K : $K \to \mathbb{D}(I)$, de se demander s'il ne provient pas "canoniquement" d'un objet de $\mathbb{D}(I \times K^\circ)$ *i.e.* d'un coefficient sur $I \times K^\circ$.

Ainsi pour le carré p. 8. On voudrait qu'il provienne de $\mathbb{D}(I \times J)$, où $J = \mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_1$, et ceci fonctoriellement, donc on désire un foncteur "canonique"

$$\mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}(I \times \mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_1)$$

qui en composant avec

$$\mathbb{D}(I \times \mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_1) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}((\mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_1)^\circ, \mathbb{D}(I))$$

donne le foncteur décrit par le carré (1). De plus, il faut exprimer dans le contexte présent la condition “bicartésienne” du carré (1), dans le contexte de la page 7. Question analogue pour le carré (2) de la page 2 :

(2)
$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr] & \\ i_* i^! F \arrow[ur] \arrow[dr] & & j_* j^* F \\ & e \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad ,$$

où il faut de plus interpréter la condition cartésienne. On va définir en fait un coefficient sur la sous-catégorie ouverte W suivante de $\mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_1$

$$\begin{tikzcd} (1,0) & \\ & (0,0) \arrow[ul] \arrow[dl] \\ (0,1) & \end{tikzcd} \quad ,$$

[page 10]

plus exactement sur $W \times I$, et si α

$$\alpha : W \times I \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_1 \times I$$

est l'inclusion canonique, on définira le carré “cartésien” comme l'image par α_* de ce coefficient. Ceci nous ramène donc au problème de “globaliser” d'abord le diagramme partiel

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr] & \\ & j_* j^* F \\ e \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad .$$

Et de même pour le carré (1) sauf qu'on est embarassé si on choisit de le regarder surtout comme cartésien (ce qui suggère à procéder comme tantôt) ou comme <u>co</u>cartésien (ce qui suggère de procéder de façon duale). Mais les deux coefficients qu'on trouvera par ces deux procédés, produits soit de

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr] & \\ & i_* i^* F \\ e \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad ,$$

soit de

$$\begin{tikzcd} & F \\ j_! j^* F \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & e \end{tikzcd} \quad ,$$

devraient être *canoniquement* isomorphes.

[page 11]

Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur, la catégorie

$$\mathcal{A} = A_{\mathbb{D}} = \mathbb{D}(e)$$

joue un rôle important. On l'appelle la *catégorie de base,* ou *la catégorie fondamentale*, du dérivateur, ces objets sont les *coefficients fondamentaux.* Pour I quelconque dans Dia, on a donc pour $F \in \mathbb{D}(I)$, coefficient sur I

$$I^\circ \longrightarrow \mathcal{A} \quad , \qquad i \longmapsto F_i$$

un diagramme de type I° dans $\mathcal{A}$, fonctoriellement, *i.e.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(I) & \longrightarrow & \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{A}) \\ & & \| \\ & & \mathbb{D}(e) \end{array}$$

(*cf.* page 8).

Der$_3$: Pour tout $I \in \mathsf{Dia}$, ce foncteur est *conservatif,*[4] *i.e.* pour que

$$F \longrightarrow G$$

[4]N.B. Mais ce foncteur n'a aucune envie d'être *fidèle.*

dans $\mathbb{D}(I)$ soit [un] isomorphisme, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$,

$$F_i \longrightarrow G_i$$

le soit.

Corollaire. *Le foncteur canonique (pour I, $J \in \mathsf{Dia}$)*

$$\mathbb{D}(I \times J) \xrightarrow{\theta} \underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ, \mathbb{D}(I))$$

est conservatif.

En effet, si F est dans $\mathbb{D}(I \times J)$, on a pour $(i, j) \in I \times J$

$$F_{i,j} \simeq \theta(F)(j)_i \quad .$$

[page 12]

Intuitivement, on regarde un dérivateur $\mathbb{D}$ comme "étant" la catégorie fondamentale $\mathcal{A}$, avec une "structure" supplémentaire, [à] savoir la donnée des "extensions" de $\mathcal{A}$ (comme catégorie des coefficients ponctuels) aux diagrammes $I \in \mathsf{Dia}$, de façon contravariante en I. Un coefficient F dans $\mathbb{D}(I) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{A}_I$ est regardé comme "étant" le diagramme $(F_i)_{i \in I}$ correspondant d'objets fondamentaux, avec une donnée supplémentaire de "globalisation". Les F_i, ou "fibres" de F en les $i \in I$, sont les caractéristiques locaux, du coefficient "global sur I" F.

Tous les dérivateurs connus sont obtenus de la façon standard suivante. On part d'une "catégorie de modèles"

$$\mathcal{M} \quad , \quad \Sigma$$

munie d'un ensemble de flèches, appelées "équivalences", et satisfaisant aux axiomes pertinents pour le passage à une catégorie des fractions

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}\Sigma^{-1}$$

qui sera la "catégorie fondamentale". On définit pour tout I dans Dia

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_I &= \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}) \\ \Sigma_I &= \{u \in \mathsf{Fl}(\mathcal{M}_I) \mid \forall i \in I, u_i \in \Sigma\} \\ \mathcal{A}_I &= \mathcal{M}_I \Sigma_I^{-1} \end{aligned}$$

[page 13]

Il est clair que $\mathcal{A}_I \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{D}_{\mathcal{M},\Sigma}(I)$ dépend de I de façon fonctorielle contravariante, et même de façon 2-fonctorielle.

Bien entendu, pour avoir vraiment un dérivateur, il faut vérifier les axiomes. Le plus fort est l'existence des $f_!$, f_*. Elle est prouvée par Thomason lorsque $(\mathcal{M}, \Sigma)$ provient d'une "catégorie de modèles" au sens de Quillen. Ce n'est pas clair pour moi qu'alors $(\mathcal{M}_I, \Sigma_I)$ provienne également d'une catégorie de modèles (dont par exemple les fibrations et les cofibrations seraient définies à partir de ces données dans $\mathcal{M}$, comme tantôt pour les équivalences).

Quand on prend pour $(\mathcal{M}, \Sigma)$ une catégorie de modèles pour Hot (par exemple les ensembles semi-simpliciaux $\mathcal{M} = \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathcal{E}ns)$, d'où $\mathcal{M}_I \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ \times I^\circ, \mathcal{E}ns) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \underbrace{\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{E}ns)}_{\widehat{I}})$, catégorie des objets semi-simpliciaux dans le topos $\widehat{I}$, on trouve une description d'un dérivateur (non additif), qui jouera un rôle particulièrement important. Je le désigne par

$$\mathsf{HOT} \quad ,$$

sa catégorie des coefficients fondamentaux est Hot, la catégorie homotopique standard.

[page 14]

La notion de "morphisme de Dérivateurs" est claire, c'est un morphisme entre deux 2-foncteurs stricts

$$\mathsf{Dia}^\circ \longrightarrow \mathcal{C}at$$

Donc

$$u : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$$

est défini par la donnée, pour tout $I \in \mathsf{Dia}$, de

$$u_I : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}'(I)$$

avec commutativité (stricte?) pour $f : I \to J$

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{D}(J) \arrow[r, "f^*_{\mathbb{D}}"] \arrow[d, "u_J"'] & \mathbb{D}(I) \arrow[d, "u_I"] \\ \mathbb{D}'(J) \arrow[r, "f^*_{\mathbb{D}'}"] & \mathbb{D}'(I) \end{tikzcd} \quad .$$

On a

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(I, J)^\circ \arrow[r, "\mathbb{D}_{I,J}"] \arrow[d, "\mathbb{D}'_{I,J}"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(J), \mathbb{D}(I)) \arrow[d, "\phi \mapsto u_I \circ \phi"] \\ \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}'(J), \mathbb{D}'(I)) \arrow[r, "\psi \mapsto \psi \circ u_J"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(J), \mathbb{D}'(I)) \end{tikzcd}$$

et la commutativité de (1) signifie la commutativité de (2) *pour les objets*. Mais bien sûr on la veut aussi pour les flèches, *i.e.* on veut la commutativité du diagramme (2).[5]

Sans doute on veut un peu plus sur les morphismes de dérivateurs - on veut une commutation aux f_* et (?) aux $f_!$ (cette fois seulement à isomorphisme canonique près) ...[6]

[5] Donner l'exemple de morphisme de dérivateurs défini par un foncteur de catégories de modèles $(\mathcal{M}, \Sigma) \to (\mathcal{M}', \Sigma')$.

[6] Commutation à f_* (resp. $f_!$) morphisme *exact à gauche* (resp. *exact à droite*). Les morphismes *exacts* sont ceux à la fois exacts à gauche et à droite.

[page 15]

Par exemple, considérons le dérivateur

$$\mathsf{HOTAB}$$

dont la catégorie fondamentale est Hotab, la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée Der(Ab) de Ab, formée des complexes à cohomologie nulle en degré > 0. On peut décrire HOTAB par la catégorie de modèles $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathsf{Ab})$ des groupes abéliens semi-simpliciaux, avec comme équivalences les quasi-isomorphismes au sens habituel. Le "foncteur abélianisation" canonique

$$\mathsf{Hot} \longrightarrow \mathsf{Hotab}$$

se prolonge en un morphisme de dérivateurs

$$\mathsf{HOT} \longrightarrow \mathsf{HOTAB} \quad .$$

La question de sa compatibilité aux f_* ne semble pas tautologique. Elle impliquerait, par exemple, que si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

est un diagramme cartésien dans $\mathcal{M} = \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathcal{E}ns)$ avec f une fibration (de Thom dans le cadre des espaces topologiques, avec f par exemple fibration localement triviale) alors le diagramme de Hotab

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\Gamma_!(X) \arrow[d] & \mathbb{R}\Gamma_!(X') \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathbb{R}\Gamma_!(Y) & \mathbb{R}\Gamma_!(Y') \arrow[l] \end{tikzcd}$$

est hot-cartésien[7]. Et de même pour une hot-somme amalgamée (carrée hot-cocartésien dans Hot).

[page 16]

Si c'est vrai, et pas connu de plus, ce serait quand même scandaleux!

En procédant comme pour les morphismes de changements de base pour les Rf_*, on trouve en tout cas un morphisme canonique, pour $f : I \to J$

$$u_J f_*^{\mathbb{D}} \longrightarrow f_*^{\mathbb{D}'} u_I$$

[7] C'est faux déjà si Y est l'espace ponctuel : trivialement le $\mathbb{R}\Gamma_!$ ne transforme pas produits en sommes! Ce foncteur est sûrement [pas] "exact à gauche" (comme morphisme de dérivateurs).

et de même

$$f_!^{\mathbb{D}'} u_I \longrightarrow u_J f_!^{\mathbb{D}} \quad ,$$

et la question est de savoir si c'est des isomorphismes. Questions analogues pour les $f^!$, pour f immersion fermée (ou pour $f^?$, pour f immersion ouverte). Comme la notion de morphisme de dérivateurs devrait quand même "coller" à la notion bien connue de morphisme (triangulé) de catégories triangulées[8], donc être exact en un sens convenable, cela montre bien que l'on doit exiger la commutation d'un morphisme de dérivateurs aux f_* et aux $f_!$.[9] Je devrais demander à Thomason s'il a regardé, pour un morphisme

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$$

entre catégories de modèles, qui soit disons *exact à gauche*, et "compatible" avec les équivalences, fibrations (et cofibrations (???)).

NOTATION : DER pour la 2-catégorie des *dérivateurs.*

`[page 17]`

Dualité. Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur, on va définir un dérivateur *dual* $\mathbb{D}^\circ$ par

$$\mathbb{D}^\circ(I) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{D}(I^\circ)^\circ \quad .$$

Les coefficients sur I de type $\mathbb{D}^\circ$ sont les coefficient sur la catégorie opposée I° à I de type $\mathbb{D}$, et en tant que catégorie c'est la catégorie *opposée* de celle des coefficients de type $\mathbb{D}$ sur I°. Pour définir la loi 2-fonctorielle, on note que pour I, J dans Dia on a

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{Hom}}(I,J)^\circ \arrow[r, "\mathbb{D}_{I,J}"] \arrow[d, "\wr"', "\text{dualité}"] & \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(J),\mathbb{D}(I)) \arrow[d, "\wr"', "\text{dualité}"] \\
\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ,J^\circ) \arrow[r, "\theta"] & \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(J)^\circ,\mathbb{D}(I)^\circ)^\circ
\end{tikzcd} \quad ,$$

où θ est l'unique foncteur rendant le diagramme commutatif. Alors θ°est un foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ,J^\circ)^\circ \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(J)^\circ,\mathbb{D}(I)^\circ) \quad ,$$

c'est ça par définition $\mathbb{D}^\circ_{I,J}$ `[plutôt` $\mathbb{D}^\circ_{I^\circ,J^\circ}$ `]`.

Si $\mathbb{D}$ est défini par $(\mathcal{M},\Sigma)$, alors $\mathbb{D}^\circ$ par $(\mathcal{M}^\circ,\Sigma^\circ)$, puisque

$$(\mathcal{M}^\circ)_I \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ,\mathcal{M}^\circ) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{M})^\circ \simeq (\mathcal{M}_{I^\circ})^\circ$$

[8]Non! Le cas des catégories triangulées est "misleading", car pour celles-ci l'exactitude à gauche et à droite revient au même.

[9]N.B. On conçoit qu'un foncteur entre dérivateurs puisse être exact à gauche ou exact à droite ou les deux.

et ${\Sigma^\circ}_I$ est déduit de Σ_{I°, d'où

$$(\mathcal{M}^\circ)_I({\Sigma^\circ}_I)^{-1} \simeq (\mathcal{M}_{I^\circ}\Sigma_{I^\circ}^{-1})^\circ = \mathbb{D}(I^\circ)^\circ \quad .$$

[page 18]

Philosophie. Chaque fois qu'on a un foncteur

$$\mathcal{A} \xrightarrow{u_0} \mathcal{A}'$$

entre deux catégories qui peuvent s'interpréter naturellement comme les catégories fondamentales de deux dérivateurs $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}'$, il se pose la question d'interpréter u_0 comme provenant d'un morphisme de dérivateurs

$$\mathbb{D} \xrightarrow{u} \mathbb{D}' \quad .$$

Celui-ci est, en pratique, toujours déterminé canoniquement, à isomorphisme canonique près. (Mais je doute pourtant que le foncteur restriction aux catégories fondamentales

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}, \mathbb{D}') \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$$

soit pleinement fidèle ...)

On va appliquer cette philosophie aux foncteurs f^*, $f_!$, f_* (et éventuellement $f^!$, $f^?$), pour $f : I \to J$, donc pour les foncteurs entre $\mathbb{D}(I)$ et $\mathbb{D}(J)$. Cela nous amène donc à regarder $\mathbb{D}(I)$ et $\mathbb{D}(J)$ comme des catégories fondamentales de dérivateurs convenables.

Dérivateur induit par un dérivateur $\mathbb{D}$, sur une catégorie d'indices $I \in \mathsf{Dia}$. C'est un dérivateur $\mathbb{D}_I$ défini par

$$\mathbb{D}_I(J) = \mathbb{D}(I \times J) \quad .$$

Le foncteur associé à $\mathbb{D}_I$, pour deux catégories J, $J' \in \mathsf{Dia}$

[page 19]

$$\underline{\mathsf{Hom}}(J, J')^\circ \xrightarrow{(\mathbb{D}_I)_{J,J'}} \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}_I(J'), \mathbb{D}_I(J)) = \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(I \times J'), \mathbb{D}(I \times J))$$

est le composé

$$\underline{\mathsf{Hom}}(J, J')^\circ \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I \times J, I \times J')^\circ \xrightarrow{\mathbb{D}_{I\times J, I\times J'}} \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(I \times J'), \mathbb{D}(I \times J)) \quad ,$$

où la première flèche est le foncteur

$$f \longmapsto \mathsf{id}_I \times f \quad .$$

En d'autres termes, $\mathbb{D}_I$ est le composé

$$\begin{aligned} \mathsf{Dia}^\circ \longrightarrow \mathsf{Dia}^\circ &\xrightarrow{\mathbb{D}} \mathcal{C}at \\ J \longmapsto I \times J & \quad . \end{aligned}$$

On a

$$f^*_{\mathbb{D}_I} = (\mathsf{id} \times f)^*_{\mathbb{D}} \quad .$$

Si les f_* (resp. les $f_!$) existent pour $\mathbb{D}$, ils existent pour $\mathbb{D}_I$. (De même pour toute espèce de multiadjoints.) Comme $J \mapsto I \times J$ transforme immersion fermée (resp. ouverte) en itou, l'axiome $\mathbf{Der}_2$ (plus précisément, chacun de ces ingrédients, *cf.* annotations marginales p. 7) est stable par passage de $\mathbb{D}$ à $\mathbb{D}_I$. De même pour $\mathbf{Der}_3$. (Pour chaque nouvel axiome qu'on dégagera, il faudra vérifier la stabilité.)

[page 20]

Soit

$$f : I \longrightarrow I' \quad .$$

Considérons entre $\mathbb{D}(I)$, $\mathbb{D}(I')$ les foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I) \arrow[r, shift left=8, "f_!"] \arrow[r, shift right=8, "f_*"'] & \mathbb{D}(I') \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

(sous réserve d'existence des f_* resp. $f_!$). Peut on les interpréter en termes de morphismes de dérivateurs

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}_I \arrow[r, shift left=8, "\overline{f_!}"] \arrow[r, shift right=8, "\overline{f_*}"'] & \mathbb{D}_{I'} \arrow[l, "\overline{f^*}"'] \end{tikzcd} \qquad ?$$

Donc il faut définir, pour J dans Dia, des foncteurs correspondants entre $\mathbb{D}_I(J)$ et $\mathbb{D}_{I'}(J)$, *i.e.* entre $\mathbb{D}(I \times J)$ et $\mathbb{D}(I' \times J)$. Or on a bien

$$f \times \mathsf{id}_J : I \times J \longrightarrow I' \times J$$

et on posera (sous réserve d'existence des deux derniers)

$$\begin{cases} \overline{f^*}(J) = (f \times \mathsf{id}_J)^*_{\mathbb{D}} \\ \overline{f_!}(J) = (f \times \mathsf{id}_J)^{\mathbb{D}}_! \\ \overline{f_*}(J) = (f \times \mathsf{id}_J)^{\mathbb{D}}_* \quad . \end{cases}$$

[page 21]

Autrement dit, on peut considérer

$$\mathsf{Dia} \ni I \longmapsto \mathbb{D}_I \quad , \qquad \mathbb{D} \in \mathsf{DER} \quad ,$$

comme fonctoriel en I de trois façons (une contravariante, les deux autres covariantes), suivant qu'on utilise les f^*, les $f_!$ (s'ils existent) ou les f_* (s'ils existent). On désignera par

$$f^{\mathbb{D}}_! \quad , \qquad f^*_{\mathbb{D}} \quad , \qquad f^{\mathbb{D}}_*$$

indifféremment les foncteurs entre $\mathbb{D}(I)$ et $\mathbb{D}(I')$ ou (de façon plus fine) entre $\mathbb{D}_I$ et $\mathbb{D}_{I'}$, dont les précédents se déduisent en passant aux catégories fondamentales correspondantes. De même pour $f^!$ ou pour $f^?$ sous réserve d'existence. Par exemple, si on suppose que les $f^!$ existent pour $\mathbb{D}$, quel que soit f immersion fermée, alors on trouve pour un tel f un morphisme de dérivateurs

$$\mathbb{D}_I \xleftarrow{f^!_{\mathbb{D}}} \mathbb{D}_{I'} \quad .$$

Il s'impose de regarder si tous ces morphismes de dérivateurs sont exacts, *i.e.* si pour

$$g : J \longrightarrow J'$$

dans Dia, ils commutent à $g_!$, g_*.

`[page 22 vide]`

`[page 23]`

Pour expliciter cette question, on est amenés à regarder le diagramme de catégories

$$\begin{tikzcd} I \times J \arrow[r, "G = \mathsf{id}_I \times g"] \arrow[d, "F = f \times \mathsf{id}_J"'] & I \times J' \arrow[d, "F' = f \times \mathsf{id}_{J'}"] \\ I' \times J \arrow[r, "G' = \mathsf{id}_{I'} \times g"] & I' \times J' \end{tikzcd} \quad ,$$

qui est d'ailleurs un carré cartésien dans $\mathcal{C}at$. La commutativité de $f^*_{\mathbb{D}}$ aux g_* s'explicite alors par la commutativité dans

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I \times J) \arrow[r, "G_*"] & \mathbb{D}(I \times J') \\ \mathbb{D}(I' \times J) \arrow[u, "F^*"] \arrow[r, "G'_*"] & \mathbb{D}(I' \times J') \arrow[u, "F'^*"'] \arrow[ul, phantom, "\text{iso?}"] \end{tikzcd} \quad .$$

Cette commutativité sera assurée par des axiomes ultérieures sur les dérivateurs. (cf. plus bas page 59). Ainsi, $f^*_{\mathbb{D}}$ est exact à droite `[plutôt à gauche]`, et dualement, il doit être aussi exact à gauche `[plutôt à droite]`. Donc $f^*_D : \mathbb{D}_{I'} \to \mathbb{D}_I$ est *exact.* Considérons $f^{\mathbb{D}}_*$, cette fois c'est la commutativité de

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I \times J) \arrow[r, "G_*"] \arrow[d, "F_*"'] & \mathbb{D}(I \times J') \arrow[d, "F'_*"] \\ \mathbb{D}(I' \times J) \arrow[r, "G'_*"] & \mathbb{D}(I' \times J') \end{tikzcd} \quad ,$$

c'est trivial (à isomorphisme canonique près). Ainsi, on

`[page 24]`

trouve que $f^{\mathbb{D}}_* : \mathbb{D}_I \to \mathbb{D}_{I'}$ est *exact à gauche*, et dualement $f^{\mathbb{D}}_!$ est *exact à droite.* Mais est-ce que $f^{\mathbb{D}}_*$ est aussi exact à *droite*? Cela signifie donc commutativité de

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(I \times J) \arrow[r, "G_!"] \arrow[d, "F_*"'] & \mathbb{D}(I \times J') \arrow[d, "F'_*"] \\ \mathbb{D}(I' \times J) \arrow[r, "G'_!"] \arrow[ur, phantom, ""] & \mathbb{D}(I' \times J') \end{tikzcd} \quad .$$

On arrive bien à définir

$$G'_!F_* \xrightarrow{?} F'_*G_!$$

ou ce qui revient au même par adjonction

$$F_* \xrightarrow{?} G'^*F'_*G_!$$

en utilisant le morphisme de changement de base

$$G'^*F'_* \xrightarrow[\sim]{\alpha} F_*G^*$$

qui est [un] *isomorphisme* (on l'a vu), d'où

$$\begin{tikzcd}
& G'^*F'_*G_! \arrow[dd, "\wr"', "\alpha * G_!"] \\
F_* \arrow[ur, "?"] \arrow[dr, "F_* * \beta"'] & \\
& F_*G^*G_!
\end{tikzcd}$$

où $\beta : \mathsf{id} \to G^*G_!$ est le morphisme d'adjonction, d'où le morphisme voulu. (On peut aussi chercher $F'^*(G'_!F_*) \to G_!$, et utiliser la commutation $G_!F^* \xrightarrow{\sim} F'^*G'_!$, *i.e.* l'exactitude à *droite* de $f^*_{\mathbb{D}}$.)

[page 25]

Mais ce morphisme est-il un isomorphisme? Je pense que dans le cas additif ça peut être raisonnable, mais dans le cas non additif ça n'a aucune raison d'être vrai. On voit en tout cas que si pour tout $f : I \to I'$ dans Dia, $f^{\mathbb{D}}_* : \mathbb{D}_I \to \mathbb{D}_{I'}$ est (non seulement exact à gauche mais aussi) exact à droite, alors pour tout $g : J \to J'$ dans Dia, $g^{\mathbb{D}}_!$ est (non seulement exact à droite mais même) exacte à gauche.

Prenons le dérivateur des préfaisceaux d'ensembles sur des I variables, sa catégorie fondamentale est $\mathcal{E}ns$. C'est un dérivateur non ponctué. Considérons $I \to I'$ une immersion fermée non surjective, $f_* : \mathbb{D}(I) \to \mathbb{D}(I')$. Si $f^{\mathbb{D}}_*$ était exact à droite f_* devrait transformer objet initial de $\mathbb{D}(I)$ en objet initial de $\mathbb{D}(I')$, sauf erreur (*cf.* plus bas). Or il n'en est rien, puisque pour tout $F \in \mathsf{Im}\big(f^{\mathbb{D}}_* : \mathbb{D}(I) \to \mathbb{D}(I')\big)$ la restriction de F à $I' \setminus I$ est le faisceau final $e_U = (i \mapsto e)$, et non le faisceau initial $\emptyset_U = (i \mapsto \emptyset)$.

On va prouver ceci :

Proposition. *Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur à gauche (à droite), alors les produits finis (sommes finies) existent dans les $\mathbb{D}(I)$. Tout morphisme $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ de dérivateurs qui est exact à gauche (à droite) commute aux dits produits (sommes), chaque I donnant $\varphi(I) : \mathbb{D}(I) \to \mathbb{D}'(I)$. En particulier, il transforme objet final (initial) en itou.*

[page 26]

Dire que les produits finis indexés par l'ensemble fini I existent dans la catégorie $\mathcal{A} = \mathbb{D}(e)$ (disons) équivaut à dire que le foncteur diagonal

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{A}^I$$

admet un adjoint à gauche. Or si

$$f : I \to e$$

est la projection de I (considéré comme ensemble ordonné discret) sur l'ensemble ordonné ponctuel e, le foncteur Δ s'identifie à $f^* : \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(I)$ (grâce à l'axiome $\mathbf{Der}_2$ sur le comportement du dérivateur pour une somme discrète de catégories d'indices). Donc l'existence du produit revient à celle de l'adjoint à droite f_* de f^*, OK pour dérivateur à gauche. Et un homomorphisme exact à gauche de dérivateurs à gauche, comme il commute aux f_*, commute aux produits finis. Itou pour les sommes finies, et les dérivateurs à droite.

L'exemple précédent utilise le fait que le dérivateur envisagé n'est pas ponctué. Mais même pour un dérivateur ponctué $\mathbb{D}$, un morphisme $f_*^{\mathbb{D}} : \mathbb{D}_I \to \mathbb{D}_{I'}$ n'est pas forcément exact à droite. Si on prend le dérivateur associé à une catégorie $\mathcal{M}$ quelconque (avec $\Sigma = \emptyset$),

$$\mathbb{D}_{\mathcal{M}}(I) = \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{M}(I)$$

alors le dérivateur induit

$$(\mathbb{D}_{\mathcal{M}})_I = \{J \mapsto \mathbb{D}_{\mathcal{M}}(I \times J) = \underline{\mathsf{Hom}}((I \times J)^\circ, \mathcal{M}) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ, \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}))\}$$

[page 27]

s'identifie à

$$\mathbb{D}_{\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M})} = \mathbb{D}_{\mathcal{M}(I)}$$

i.e.

$$(\mathbb{D}_{\mathcal{M}})_I = \mathbb{D}_{\mathcal{M}(I)}$$

N.B. Ici $\mathcal{M}$ et $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$ se déterminent mutuellement et le foncteur

$$\mathcal{M} \longmapsto \mathbb{D}_{\mathcal{M}}$$

$$\mathcal{C}at \longrightarrow \mathsf{DER}$$

est 2-fidèle, *i.e.* si $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ sont deux catégories

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Hom}(\mathbb{D}_{\mathcal{M}}, \mathbb{D}_{\mathcal{M}'})$$

est une équivalence de catégories. D'autre part, on vérifie tout de suite que $u : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ est exact à gauche (ou à droite) si et seulement si $\mathbb{D}_u : \mathbb{D}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{D}_{\mathcal{M}'}$ l'est.

Ainsi, pour voir si un morphisme de dérivateurs de la forme

$$\begin{array}{ccc} f_*^{\mathbb{D}} : (\mathbb{D}_{\mathcal{M}})_I & \longrightarrow & (\mathbb{D}_{\mathcal{M}})_{I'} \\ \| & & \| \\ \mathbb{D}_{\mathcal{M}(I)} & & \mathbb{D}_{\mathcal{M}(I')} \end{array}$$

est exact à *droite,* il revient au même de dire

[page 28]

que le foncteur pour les catégories fondamentales associées

$$\mathcal{M}(I) \xrightarrow{f_*^{\mathcal{M}}} \mathcal{M}(I')$$

est exact à droite. Or ici c'est un foncteur image directe de préfaisceaux ordinaires, et ce foncteur n'a aucune envie d'être exact à *droite.* (Même si $\mathcal{M}$ est *abélienne*, d'ailleurs!) Prenons par exemple pour $f : I \hookrightarrow I'$ une immersion ouverte avec $I' = \mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_1$, $I = I' - \{c\}$, c objet final de I'

$$I' = \begin{array}{ccc} c & \longleftarrow & b \\ \uparrow & & \uparrow \\ a & \longleftarrow & 0 \end{array} \qquad\qquad I = \begin{array}{ccc} & & b \\ & & \uparrow \\ a & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Le foncteur f_* est celui qui associe à un diagramme

$$F = \left\{ \begin{array}{ccc} & & F_b \\ & & \downarrow \\ F_a & \longrightarrow & F_0 \end{array} \right\}$$

le carré cartésien complété

$$\overline{F} = \left\{ \begin{array}{ccc} F_a \times_{F_0} F_b & \longrightarrow & F_b \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ F_a & \xrightarrow{\alpha} & F_0 \end{array} \right\}$$

Or si $F \mapsto \overline{F}$ était exact à droite, $F \mapsto F_a \times_{F_0} F_b$ le serait aussi. Or $F_a \times_{F_0} F_b = K(F) = \mathsf{Ker}(F_a \times F_b \xrightarrow{\alpha pr_1 - \beta pr_2} F_0)$, en tant que foncteur additif en F, n'est pas exact à droite, par exemple il ne transforme pas nécessairement épimorphisme en épimorphisme. Prenons par exemple

$$F' = \left\{ \begin{array}{ccc} & & F_b \\ & & \downarrow \\ F_a & \longrightarrow & 0 \end{array} \right\}$$

et l'homomorphisme évident $F \to F'$ qui est l'identité sur

[page 29]

F_a et sur F_b. C'est un épimorphisme et l'homomorphisme correspondant $\overline{F} \to \overline{F'}$ est l'inclusion

$$F_a \times_{F_0} F_b \longrightarrow F_a \times F_b$$

qui n'est un épimorphisme que si $\alpha = \beta = 0$.

Perplexité : On devrait pouvoir définir une notion de dérivateur (additif) "*triangulé*" (qui correspondrait à l'intuition des catégories triangulées; c'est un dérivateur satisfaisant à des axiomes assez forts), de sorte que pour les morphismes entre ceux-ci l'exactitude à gauche et l'exactitude à droite soient *équivalentes.*

"Théorème de changement de base" pour dérivateurs. Soit $\mathbb{D}$ dérivateur à gauche (existence de f_*) et considérons

$$f : I \longrightarrow J \qquad \text{dans } \mathsf{Dia} \quad ,$$

soit $j_0 \in \mathsf{Ob}\ J$, on se propose de "calculer" le foncteur

$$F \mapsto f_*(F)_{j_0} = \alpha_{j_0}^*(f_*(F)) \quad ,$$

où

$$\alpha_{j_0} : e \longrightarrow J$$

est l'inclusion de la catégorie ponctuelle e dans J, de valeur j_0.

`[page 30]`

Considérons le diagramme

(1)
$$\begin{tikzcd} I/j_0 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\gamma"] & I \arrow[d, "f"] \\ e \arrow[r, "p = \alpha_{j_0}"'] & J \end{tikzcd} \quad ,$$

où I/j_0 est la catégorie $I \times_J J/j_0$ des couples

$$\{(i, \varphi) \mid i \in \mathsf{Ob}\ I,\ \varphi : f(i) \to j_0\}$$

et q est le foncteur $(i, \varphi) \mapsto i$. Ce diagramme n'est pas commutatif, mais il y a un foncteur `[plutôt morphisme de foncteurs]` canonique

$$fq \xrightarrow{\gamma} pf' \quad ,$$

où fq est le foncteur $(i, \varphi) \mapsto f(i)$ et pf' le foncteur constant $(i, \varphi) \mapsto j_0$ et où $\gamma(i, \varphi) : f(i) \to j_0$ est défini par $\gamma(i, \varphi) = \varphi$.

Plus généralement, considérons un diagramme dans Dia

(2)
$$\begin{tikzcd} I' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\gamma"] & I \arrow[d, "f"] \\ J' \arrow[r, "p"'] & J \end{tikzcd} \quad ,$$

avec $\gamma : fq \to pf'$. On définit alors un *morphisme de changement de base pour les images directes* relatif à ce diagramme

$$p^* f_* \xrightarrow{c_\gamma} f'_* q^*$$

[page 31]

de deux façons, qui donnent le même résultat (histoire générale de foncteurs adjoints à expliciter une bonne fois, en termes d'un diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} X' & X \arrow[l, "q^*"'] \\ Y' \arrow[u, "f'^*"] \arrow[ur, dashed] & Y \arrow[l, "p^*"] \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

en supposant que les foncteurs adjoints à gauche f'_*, f_* des deux foncteurs verticaux existent). Un cas intéressant est celui où

$$pf' = fq \quad , \qquad \gamma = \mathrm{id}_{fq}$$

et où on pose $c_\gamma = c$.

Ici

$$p^* f_* \xrightarrow{?} f'_* q^*$$

revient à

$$\begin{tikzcd} f_* \arrow[r, "?"] & p_* f'_* q^* \simeq (pf')_* q^* \\ & (fq)_* q^* \simeq (f_* q_*) q^* = f_*(q_* q^*) \arrow[u, "\gamma_* * q^*"'] \end{tikzcd} .$$

Or on a

$$\mathrm{id} \xrightarrow{\alpha} q_* q^* \qquad \text{(adjonction)} \quad ,$$

d'où

$$f_* \xrightarrow{f_* * \alpha} f_*(q_* q^*)$$

et en composant avec $\gamma * q^*$, on trouve ce qu'on veut. Et on peut au lieu de ceci chercher

$$\begin{tikzcd} f'^*(p^* f_*) \arrow[r, "?"] \arrow[d, equal] & q^* \\ (pf')^* f_* \arrow[d, "\gamma^* * f_*"] & \\ (fq)^* f_* \simeq q^*(f^* f_*) \arrow[r, "q^* * \gamma'"] & q^* \end{tikzcd} ,$$

où $\gamma' : f^* f_* \to \mathrm{id}$ est l'adjonction.

[page 32]

Der$_4$: Le morphisme de changement de base pour images directes f_* associé à un diagramme (1) est toujours un isomorphisme (dérivateurs à gauche). Condition duale pour dérivateurs à droite et le changement de base pour images directes $f_!$, pour le diagramme

$$(1') \qquad \begin{tikzcd} j_0\backslash I \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[d, "f"] \\ e \arrow[r, "p = \alpha_{j_0}"'] \arrow[ur, dashed, "\gamma"] & J \end{tikzcd}$$

associé à $f : I \to J$ dans Dia, et $j_0 \in \mathsf{Ob}\ J$.

Der$_5$[10] : Soit $f : I \to J$ une *hot-équivalence stricte, i.e.* $\forall j_0 \in \mathsf{Ob}\ J$, I/j_0 est contractile. Alors f^* est pleinement fidèle, *i.e.* le morphisme d'adjonction

$$\mathsf{id}_{\mathbb{D}(J)} \longrightarrow f_* f^*$$

est un isomorphisme ($\mathbb{D}$ dérivateur à gauche). Dualement, si f est une équivalence co-stricte, *i.e.* $f^\circ : I^\circ \to J^\circ$ est une équivalence stricte, *i.e.* $\forall j_0 \in \mathsf{Ob}\ J$, $j_0\backslash I$ est contractile, alors (si $\mathbb{D}$ est un dérivateur à droite) le foncteur f^* est pleinement fidèle, *i.e.* le morphisme d'adjonction

$$f_! f^* \longrightarrow \mathsf{id}_{\mathbb{D}(J)}$$

est un isomorphisme.

N.B. Donc les foncteurs f_* (resp. $f_!$) sont des foncteurs de localisation.

N.B. Les pages 33 à 40 ont été suprimées, car canulées.

[page 41]

Je vais reprendre la terminologie et les axiomes relatifs aux dérivateurs.

Un *prédérivateur* est un 2-foncteur

$$\mathsf{Dia}^\circ \xrightarrow{\mathbb{D}} \mathcal{C}at \quad ,$$

où Dia est une 2-sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$.[11] On suppose tout au moins que Dia contient les *ensembles ordonnés finis,* que Dia est stable par $\varprojlim$ finies, par sommes finies. Qu'avec toute catégorie C et toute sous-catégorie strictement pleine ouverte (resp. fermée) elle contienne la sous-catégorie complémentaire.[12]

[10] Totalement canulé, devient raisonnable que pour coefficients constants sur F.

[11] Dia *domaine* du dérivateur. Les objets sont les *catégories d'indices* pour $\mathbb{D}$. Les $\mathbb{D}(I)$ sont les catégories de coefficients pour $\mathbb{D}$, les objets de $\mathbb{D}(I)$ les "coeficients de type $\mathbb{D}$ sur I".

[12] Notation f^* : image inverse des coefficients.

[page 42]

On définit le prédérivateur $\mathbb{D}_{\mathcal{M},\Sigma}$ associé à un système

$$(\mathcal{M},\Sigma) \qquad \mathcal{M} \text{ Catégorie}, \quad \Sigma \subset \mathsf{Fl}(\mathcal{M}) \quad .$$

Si $\Sigma = \emptyset$, on écrit $\mathbb{D}_{\mathcal{M}}$.

Les prédérivateurs forment une 2- catégorie PREDER, et

$$(\mathcal{M},\Sigma) \longmapsto \mathbb{D}_{\mathcal{M},\Sigma}$$

est un 2-foncteur

$$\mathsf{PREMOD}\left(\begin{array}{c}\text{“Catégorie des catégories}\\ \text{de modèles” (faibles)}\end{array}\right) \longrightarrow \mathsf{PREDER} \quad .$$

Pour $\mathbb{D}$ donné, on définit le dérivateur induit ($I \in \mathsf{Dia}$)

$$\mathbb{D}_I = \big(J \longmapsto \mathbb{D}(I \times J)\big) \quad ,$$

dépendant de I de façon contravariante, d'où un 2-foncteur

$$\begin{gathered}\mathsf{Dia}^\circ \longrightarrow \mathsf{PREDER}\\ I \longmapsto \mathbb{D}_I\end{gathered}$$

ou encore un bi-2-foncteur

$$\begin{gathered}\mathsf{PREDER} \times \mathsf{Dia}^\circ \longrightarrow \mathsf{PREDER}\\ (\mathbb{D}, I) \longmapsto \mathbb{D}_I \quad .\end{gathered}$$

Si $\mathbb{D}$ est défini par $(\mathcal{M},\Sigma)$, alors $\mathbb{D}_I$ est défini par $(\mathcal{M}(I),\Sigma(I))$:

$$(\mathbb{D}_{\mathcal{M},\Sigma})_I \simeq \mathbb{D}_{\mathcal{M}(I),\Sigma(I)} \quad ,$$

[page 43]

où $\mathcal{M}(I) = \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ,\mathcal{M})$ (préfaisceaux sur I à valeurs dans $\mathcal{M}$), et $\Sigma(I) \subset \mathsf{Fl}\,\mathcal{M}(I)$ est déduit de Σ en regardant fibre par fibre (supposant maintenant Σ saturé).

Pour tous axiomes qu'on dégagera pour certains prédérivateurs, il faudra vérifier qu'il sont stables par passage aux prédérivateurs induits $\mathbb{D}_I$, et aussi comment ils se comportent par dualité (passage de $\mathbb{D}$ à $\mathbb{D}^\circ$).

Définition du prédérivateur dual $\mathbb{D}^\circ$

$$\mathbb{D}^\circ(I) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{D}(I^\circ)^\circ \qquad\qquad \textit{etc.}$$

Der 1 (Premier axiome de localisation) : *a*) Si I, $J \in \mathsf{Dia}$, alors

$$\mathbb{D}(I \amalg J) \longrightarrow \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J)$$

est une équivalence de catégories.

b) $\mathbb{D}(\emptyset)$ est la catégorie finale.

Stable par passage aux prédérivateurs induits, et passage au dual.

Corollaire. *Soit* $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ [une] *famille finie de catégories de* Dia, $I = \coprod_{\alpha\in A} I_\alpha$. *Alors*

$$\mathbb{D}(I) \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} \mathbb{D}(I_\alpha)$$

est une équivalence de catégories.

Der 2 (Deuxième axiome de localisation) : Pour tout $I \in \mathsf{Dia}$, le foncteur canonique

$$\mathbb{D}(I) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{A}_\mathbb{D}) \quad ,$$

$\mathcal{A}_\mathbb{D} = \mathbb{D}(e)$ catégorie fondamentale pour le dérivateur $\mathbb{D}$, est conservatif.
Stable par induction, et par dualité.

`[page 44]`

Un prédérivateur est appelé un *dérivateur à gauche* s'il satisfait **Der 1** et **Der 2**, et de plus les axiomes suivants (dont voici le premier).

Der 3 (g) (Existence des images directes) : Pour tout $f : I \to J$ dans Dia, le foncteur $f^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$ admet un *adjoint à droite* f_*.
Stable par induction.

On appelle f_* le foncteur image directe (cohomologique) pour f. L'objet $f_*(F) \in \mathbb{D}(J)$ (pour $F \in \mathbb{D}(I)$) s'appelle aussi l'objet de "*cohomologie relative*" de I sur J (par f), à coefficients dans F. On a des isomorphismes canoniques

$$(gf)_* \simeq g_* f_* \quad .$$

Corollaire. *Les catégories* $\mathbb{D}(I)$ *ont des produits finis, les foncteurs* f^* *et* f_* *y commutent.*

Utilise **Der 1** pour $I = \emptyset$ et $I = e \amalg e$, et **Der 3** pour $I \xrightarrow{f} e$.

On a un axiome dual :

Der 3 (d) : existence des adjoints à gauche $f_!$ des f^*, le foncteur $f_!$ s'appelle "image directe homologique" par f, et on a une notion d'*homologie relative* de I sur J (pour f), à coefficients dans F.

Par la suite, la mention (g) ou (d) à coté de la désignation **Der** n d'un axiome, signifie qu'il s'applique aux dérivateurs à gauche, respectivement à droite. De même pour les énoncés, définitions *etc.*

`[page 45]`

Der 4$_0$ (g)[13] : Soit $U \overset{j}{\hookrightarrow} X \overset{i}{\hookleftarrow} Y$ dans Dia, immersions ouverte et fermée complémentaires l'une de l'autre. Alors le morphisme d'adjonction dans $\mathbb{D}(Y)$

$$i^* i_*(F_Y) \longrightarrow F_Y$$

est un isomorphisme, donc

$$i_* : \mathbb{D}(Y) \longrightarrow \mathbb{D}(X)$$

est pleinement fidèle, et $i^* : \mathbb{D}(X) \to \mathbb{D}(Y)$ est un foncteur de localisation. L'image essentielle de i_* est formée des objets F de $\mathbb{D}(X)$ tels que $j^*(F)$ soit l'objet final de $\mathbb{D}(U)$.

[13]Inutile comme axiome, va devenir un théorème (résulte des autres axiomes).

Der 4_0 (d) : Avec les notations précédentes pour i, j, le morphisme d'adjonction dans $\mathbb{D}(U)$

$$F_U \longrightarrow j^* j_! F_U$$

est un isomorphisme, - $j_!$ est pleinement fidèle, j^* un foncteur de localisation. L'image essentielle de $j_!$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbb{D}(X)$ formée des F tels que $i^*(F)$ soit objet initial de $\mathbb{D}(Y)$.

Il y a les deux carrés de la page 8 et 9, mais pour interpréter la condition cartésienne ou cocartésienne c'est prématuré ici.

`[page 46]`

Axiomes de changement de base.

Der 4 (g) (Fibres d'une image directe) : Soient $f : X \to Y$ dans Dia, $y \in Y$, considérons le diagramme connu

$$\begin{tikzcd} X/y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ e \arrow[r, "p = \alpha_y"'] & Y \end{tikzcd}$$

et le morphisme de changement de base correspondant

$$f_*(F)_y \overset{\text{déf}}{=} p^* f_*(F) \longrightarrow f'_*(q^*(F)) (\overset{\text{déf}}{=} \Gamma_{\mathbb{D}}(X/y, q^*(F))) \quad .$$

C'est toujours un isomorphisme.

`[page 47]`

Der 5 (g) (Axiome de cofinalité pour la cohomologie)[14] : Soit $\alpha : X' \to X$ dans Dia "cohomologiquement cofinal" *i.e.* les $x\backslash X'$ sont contractiles ($x \in X$) *i.e.* $\alpha^\circ : X'^\circ \to X^\circ$ est une hot-équivalence "localement sur X°". Alors $\forall F \in \mathbb{D}(X)$, l'homomorphisme

$$\Gamma_{\mathbb{D}}(X, F) \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{D}}(X', \alpha^* F)$$

est un isomorphisme (dans $\mathcal{A} = \mathbb{D}(e)$).

N.B. Si $f : X \to e$, on pose $\Gamma_{\mathbb{D}}(X, F) = f_*(F)$ (cohomologie "absolue" de X, à coefficients dans F).

Même chose[15] si α est "homologiquement cofinal", i.e. les X'/x sont contractiles `[phrase barrée]`.

[14] Il est conséquence d'énoncés plus faibles.
[15] Faux!

Remarque. On devrait pouvoir renforcer considérablement cet axiome, en exigeant que

$$\alpha_!(\varepsilon_{X'}) \xrightarrow{\sim} \varepsilon_X \qquad \text{dans} \quad \mathsf{HOT}(X) \quad ,$$

où $\varepsilon_{X'}$, ε_X `[sont]` les objets finaux de $\mathsf{HOT}(X')$, $\mathsf{HOT}(X)$, et où $\alpha_!(\varepsilon_{X'}) \to \varepsilon_X$ est l'homomorphisme d'adjonction, compte tenu que $\varepsilon_{X'} \simeq \alpha^*(\varepsilon_X)$. On dit que X' est *homotopiquement trivial sur* X. (Et si la condition duale est satisfaite dans $\mathsf{HOT}(X^\circ)$, on dit que X' est cohomotopiquement trivial sur X.) Cette condition n'est sans doute pas autoduale. Elle est vérifiée aussi bien si α est cohomologiquement cofinal, que s'il est homologiquement cofinal (hot-équivalence costricte ou stricte).

N.B. Pour $f : X \to e$, dire que f est cohomologiquement cofinal, homologiquement cofinal, ou que X est contractile, est équivalent.

Corollaire 1 (g) (Théorème d'asphéricité pour les coefficients constants en cohomologie). *Soit $f : X \to e$ dans* Dia*, X contractile, $M \in \mathbb{D}(e)$. Alors l'homomorphisme d'adjonction*

$$M \xrightarrow{\sim} f_* f^*(M) \quad \big(\overset{\text{déf}}{=} \Gamma(X, f^*(M))\big)$$

est un isomorphisme.

Corollaire 2 (g)[16] *Soit $f : X \to Y$* `[une]` *hot-équivalence stricte (i.e. $\forall y \in Y$, X/y contractile). Alors pour $F \in \mathsf{Ob}\,\mathbb{D}(Y)$*

$$F \overset{\text{adj}}{\xrightarrow{\sim}} f_* f^* F$$

`[est un]` *isomorphisme.* `[Ce corollaire est barré, mais pas sa démonstration.]`

`[page 48]`

On applique **Der 2**, **Der 4** (g), pour se ramener à regarder, pour $y_0 \in Y$, l'homomorphisme α du diagramme (commutatif!) suivant :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\{y_0\}, F_{y_0}) = F_{y_0} \arrow[r, "\alpha"] & \Gamma_{\mathbb{D}}(X/y_0, f^*(F)) \\ \Gamma(Y/y_0, F) \arrow[u, "\varphi\,\wr"] \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd} \quad ,$$

où α' est déduit du foncteur induit par f

$$X/y_0 \longrightarrow Y/y_0$$

et où φ est déduit du foncteur

$$\{y_0\} \longrightarrow Y/y_0 \qquad \text{(objet final)}.$$

[16] Faux, sauf pour coefficients constants.

Donc φ est un isomorphisme par **Der 5** (g)[17] (N.B. Si $z \in Z$, d'où $\{z\} \to Z$, ce foncteur est cohomologiquement cofinal si et seulement si z est objet final, homologiquement final `[plutôt cofinal]` si et seulement si z est objet initial). Donc la conclusion du corollaire équivaut à dire que α' est un isomorphisme. Mais $X/y_0 \to Y/y_0$ est aussi homologiquement cofinal, car si $u : y_1 \to y_0$ est dans Y/y_0, on a un isomorphisme canonique

$$(X/y_0)/(y_1, u) \simeq X/y_1$$

qui est contractile. Donc par la deuxième partie de **Der 5** (g),[18] on gagne.

`[page 49]`

Corollaire 4 (g) (critère de changement de base pour images directes cohomologiques). *Soit*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \\ Y' \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

dans Dia (*cf.* page 30), *d'où l'homomorphisme de changement de base*

$$p^* f_*(F) \longrightarrow f'_* q^*(F) \qquad (F \in \mathsf{Ob}\ \mathbb{D}(X)) \quad .$$

Pour que ce soit un isomorphisme pour tous F, *il suffit que pour tout* $y' \in \mathsf{Ob}\ Y'$, *le foncteur induit par* (p. 9)

$$X'/y' \longrightarrow X/p(y')$$

soit une hot-équivalence stricte (ou costricte);[19] *cela signifie aussi (dans le cas strict) que pour*

$$y'_0 \in \mathsf{Ob}\ Y', \ x_0 \in \mathsf{Ob}\ X, \ u_0 : f(x_0) \longrightarrow p(y'_0)$$

la catégorie $K(y'_0, x_0, u_0)$ *des objets de la forme*

$$(x', v', u) \mid x' \in \mathsf{Ob}\ X', \ v' : f'(x') \to y'_0, \ u : q(x') \overset{\dashleftarrow}{\longrightarrow} x_0$$

rendant commutatif le carré dans Y'

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} f(q(x')) \arrow[r, "\gamma(x')"] \arrow[d, shift right, "f(u)"'] \arrow[dr, phantom, "\leftarrow \text{cas de hot-équivalence costricte}"] & p(f'(x')) \arrow[d, "p(v')"] \\ f(x_0) \arrow[r, "u_0"'] \arrow[u, dashed, shift right] & p(y'_0) \end{tikzcd}$$

est contractile.

[17] *cf.* corollaire 3, page 50, qu'on devrait remonter ici.

[18] (qui est fausse)

[19] Faux pour “stricte”, ne marche que pour “costricte”.

N.B. Dans le cas de la hot équivalence costricte, c'est la même description de

$$K = (x_0, u_0)\backslash(X'/y'_0) \quad ,$$

sauf que la flèche u est en sens inverse $x_0 \to q(x')$ et itou dans le diagramme commutatif $(*)$. On applique **Der 2**, **Der 4** (g) et corollaire 1 [plutôt **Der 5** (g)].

[page 50]

Corollaire 5 (g). *Soit $f : X \to Y$ pleinement fidèle dans* Dia, *et $F \in \mathbb{D}(X)$. Alors l'homomorphisme d'adjonction*

$$f^* f_*(F) \longrightarrow F$$

est un isomorphisme.

En efffet, il suffit de le vérifier fibre par fibre (**Der 2**). Soit $x \in X$, $y = f(x) \in Y$, alors

$$f^* f_*(F)_x \simeq f_*(F)_y \simeq \Gamma_{\mathbb{D}}(X/y, F)$$

or à cause de la pleine fidélité $X/y \simeq X/x$.

Corollaire 3 (remonter page 48).[20] *Soit $Z \in$ Dia, supposons que Z a un objet final e_Z. Soit $p : e \to Z$ le foncteur correspondant. Alors l'homomorphisme canonique (pour F dans $\mathbb{D}(Z)$)*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, shift left, "f"] \\ e \arrow[u, shift left, "p"] \end{tikzcd} \qquad\qquad f_*(F) \longrightarrow p^*(F)$$

est un isomorphisme.[21]

Cet homomorphisme est [un] cas particulier de celui-ci, pour

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f'"'] & & Z \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

(en faisant $Z' = S = e$, $f' = \mathsf{id}_e$),

$$f_*(F) \longrightarrow f'_*(p^*(F)) \quad , \qquad (F \in \mathsf{Ob}\, \mathbb{D}(Z)) \quad ,$$

et c'est un cas particulier[22] des morphismes de

[20] Va résulter de **Der 6** (g) plus fort ci-dessous.
[21] Axiome de la catégorie d'indices à objet final (coefficient quelconque).
[22] déjà envisagé dans cor. 2, p. 47

`[page 51]`

changement de base pour

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f'"'] & Z \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r, "\mathsf{id}"] & S \end{tikzcd} \quad .$$

Remarque : On retrouve le fait que $i^*i_*(F_Y) \xrightarrow{\sim} F_Y$ est `[un]` isomorphisme, pour i une immersion fermée. De plus, avec les notations de **Der 4** (g), $j^*(i_*(F_Y))$ se calcule par le théorème de changement de base (corollaire 2 `[plutôt 4]` ci-dessus), qui s'applique dans toute situation commutative

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

quand p est une immersion ouverte (et $\gamma = \mathsf{id}$) (alors $X'/y' \to X/p(y')$ est même un isomorphisme!), et on trouve, revenant aux notations de **Der 4** (g),

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, hook, "i"] \\ U \arrow[r, hook, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

i.e. $j^*(i_*(F_Y)) \simeq f'_*(\varphi)$, où $\varphi = q^*(F_Y)$ est l'unique élément de la catégorie (équivalente à une catégorie ponctuelle, par **Der 1**) $\mathbb{D}(\emptyset)$. D'autre part, f'_* transforme objet final en objet final, d'où $j^*i_*(F_Y)$ est objet final.

Inversement, soit F dans $\mathbb{D}(X)$, tel que $j^*(F) = e_{\mathbb{D}(U)}$. Considérons

$$F \xrightarrow{u} i_*i^*F \qquad \text{(adjonction) ;}$$

je dis que c'est un isomorphisme. En effet, par l'axiome

`[page 52]`

de localisation **Der 2**, il suffit de prouver que $i^*(u)$ et $j^*(u)$ sont `[des]` isomorphismes. Pour $i^*(u)$ cela résulte du fait que i^* soit foncteur de localisation, et pour j^* du fait que $j^*(F)$ et $j^*(i_*i^*(F))$ sont des objets finaux dans $\mathbb{D}(U)$.

[page 53]

Morphismes homotopiquement propres, homotopiquement lisses.

Soit $f : X \to Y$ [un] morphisme de catégories, considérons $y_0 \in \mathsf{Ob}\, Y$, et le foncteur canonique

$$(1) \qquad X_{y_0} \xrightarrow{\varphi} X/y_0 \qquad\qquad \varphi(x) = (x, \mathsf{id}_{f(x)})$$

(X_{y_0} fibre de X en y_0). Soit $(x_0, u_0) \in \mathsf{Ob}\, X/y_0$ donc $x_0 \in \mathsf{Ob}\, X$, $u_0 : f(x_0) \to y_0$. Considérons la catégorie coinduite par φ sur (x_0, u_0)

$$(x_0, u_0)\backslash(X_{y_0}) \quad ,$$

pour tester si φ est une hot-équivalence costricte *i.e.* homologiquement [plutôt cohomologiquement] cofinal. On va l'interpréter via le foncteur induit par f

$$x_0\backslash X \xrightarrow{\psi} f(x_0)\backslash Y$$

allant de la catégorie des spécialisations de x_0 dans X vers celle des spécialisations de $f(x_0)$ dans Y. On trouve alors un isomorphisme canonique de la catégorie coinduite $(x_0, u_0)\backslash X_{y_0}$ par X_{y_0} au dessus de l'objet (x_0, u_0) de X/y_0 et de la catégorie fibre $(x_0\backslash X)_{u_0}$ de $x_0\backslash X$ au dessus de $f(x_0)\backslash Y$ en u_0. Donc

Proposition. *Pour que les foncteurs $\varphi : X_{y_0} \to X/y_0$ ($y_0 \in \mathsf{Ob}\, Y$) soient des hot-équivalences costrictes, il faut et il suffit que les fibres des foncteurs $x_0\backslash X \to f(x_0)\backslash Y$ induits par f soient contractiles.*

[page 54]

On dit alors que f est *homotopiquement propre.* La notion duale s'exprime, soit par la condition que les foncteurs induits par f

$$X_{y_0} \longrightarrow y_0\backslash Y$$

soient des hot-équivalences strictes *i.e.* qu'ils soient cohomologiquement [plutôt homologiquement] cofinaux, soit que les fibres des morphismes induits sur les "catégories localisées" (catégories des générisations)

$$X/x_0 \longrightarrow Y/f(x_0)$$

soient contractiles. (N.B. On utilise ici qu'une catégorie Z est contractile si et seulement si Z° l'est.) On dit alors que f est *homotopiquement lisse.*

Proposition. *La notion de foncteur propre (resp. lisse) est stable par changement de base, par composition. Les isomorphismes, et plus généralement, les immersions fermées sont propres. L'image d'un morphisme propre est une sous-catégorie fermée.*[23]

N.B. Le foncteur $X \to e$ est toujours propre et lisse, car les catégories $x_0\backslash X$ et X/x_0 sont contractiles (ayant objet initial ou objet final). Donc tout foncteur de projection $X \times Y \xrightarrow{pr_2} Y$ est à la fois propre et lisse.

[23] Attention, une équivalence de catégories n'est pas propre! Si $X' \hookrightarrow X$ [est] une inclusion d'une sous-catégorie de X, elle n'est propre que si c'est une immersion fermée.

[page 55]

DÉMONSTRATION. Stabilité par changement de base :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{cart}"] & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd} \quad ,$$

d'où pour $x' \in \mathsf{Ob}\, X'$

$$\begin{tikzcd} X/x \arrow[d] & X'/x' \arrow[l] \arrow[d] \\ Y/y & Y'/y' \arrow[l] \end{tikzcd} \quad ,$$

où x, y', y sont les images de x' dans X, Y', Y. On vérifie que ce diagramme est *cartésien*, donc les fibres de $X'/x' \longrightarrow Y'/y'$ sont isomorphes à des fibres de $X/x \longrightarrow Y/y$, donc contractiles si celles-ci le sont.

Dans un cas $X \xrightarrow{f} Y$ on vérifie que pour un foncteur bilocalisé de f

$$X/x \xrightarrow{\varphi = f/x} Y/y \quad ,$$

tout "bilocalisé"

$$(X/x)/\xi \longrightarrow (Y/y)/\eta \qquad\qquad (\xi : x' \to x\,, \quad \eta : y' \to y)$$

de φ s'identifie encore à un bilocalisé de f

$$X/x' \longrightarrow Y/y' \quad .$$

Donc si f est lisse, les bilocalisés f/x ($x \in \mathsf{Ob}\, X$) le sont aussi. Notons d'autre part.

Proposition.[24] *Tout morphisme propre (ou dualement lisse) à fibres contractiles est une hot-équivalence.*

[page 56]

Cela provient du fait que pour un tel foncteur propre, si F est un préfaisceau, ou complexe de préfaisceaux abéliens sur X, la formation des $Rf_*(F)$ commute au passage aux fibres, et de même pour $R^1 f_*(F)$ si F est un préfaisceau en groupes (pas même abéliens).

Corollaire 1. *Si $f : X \to Y$ est cohomologiquement propre à fibres contractiles, alors Y est contractile si et seulement si X l'est.*

Grâce à ceci, on trouve que le composé de deux foncteurs propres (lisses) est propre (lisse).

[24] *cf.* amélioration dans cor. 2, page suivante.

N.B. Contrairement à ce qui a lieu en topologie pour la notion de propreté, si gf est propre et g propre, f ne l'est pas nécessairement, *i.e.* un S-morphisme de S-catégories X, Y propres sur S n'est pas nécessairement propre. Ainsi une section de X/S, pour X propre sur S, n'est pas nécessairement propre, *i.e.* n'est pas nécessairement une immersion fermée. C'est déjà faux si $S = e$ (auquel cas $f : X \to e$ est toujours propre).

Corollaire 2. *Un morphisme propre ou lisse, à fibres contractiles est à la fois une hot-équivalence stricte et costricte.*

En effet, on applique le corollaire 1 à $X/y \to Y/y$ ou $y\backslash X \to y\backslash Y$.

Théorème (g) *Soit une situation de changement de base dans* Dia

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart}"] & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd} \quad , \qquad p^* f_*(F) \xrightarrow{c} f'_* q^*(F)$$

($F \in \mathbb{D}(X)$), $\mathbb{D}$ dérivateur exact à gauche. Si f est (homotopiquement) propre ou p homotopiquement lisse, alors c est un isomorphisme.

`[page 57]`

La question c'est si pour tout $y' \in Y'$, posant $y = p(y')$ et considérant le foncteur induit par q

$$X/y \longleftarrow X'/y'$$

le morphisme correspondant

$$\Gamma_{\mathbb{D}}(X/y, F) \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{D}}(X'/y', q^*F)$$

est `[un]` isomorphisme. Dans le cas f propre, on considère

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[d, "\sim\ \text{costricte}"'] & X_{y'} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\sim\ \text{costricte}"] \\ X/y & X'/y' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

d'où la conclusion, puisque par **Der 5** (g), dans

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X_y) \arrow[r] & \Gamma(X_{y'}) \\ \Gamma(X/y) \arrow[u] \arrow[r] & \Gamma(X'/y') \arrow[u] \end{tikzcd}$$

les flèches verticales et l'horizontale supérieure sont `[des]` isomorphismes, donc aussi l'horizontale inférieure.

Dans le cas p lisse, considérons du coté Y, Y' le carré de changement de base

$$\begin{tikzcd}
Y & Y' \arrow[l] \\
Y/y \arrow[u] & Y'/y' \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

[page 58]

d'où le diagramme contigu

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd] & & X' \arrow[ll] \arrow[dd] & \\
& X/y \arrow[ul] \arrow[dd] & & X'/y' \arrow[ll, "\kappa"] \arrow[ul] \arrow[dd] \\
Y & & Y' \arrow[ll] & \\
& Y/y \arrow[ul] & & Y'/y' \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[ul]
\end{tikzcd} \qquad ,$$

où les carrés latéraux (verticaux) sont cartésiens. On note que π est lisse et à fibres contractiles (car p est lisse) donc κ aussi. Donc κ est une hot-équivalence costricte, donc $\Gamma(X/y) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X'/y')$, on gagne encore.

N.B. Sauf erreur, on a une réciproque du théorème, [à] savoir : Si $f : X \to Y$ est tel que le théorème de changement de base pour $f_*(F)$ est vrai pour *tout* dérivateur (il suffit sans doute de HOTAB et HOT) et pour tout $Y' \to Y$, alors f est homotopiquement propre. D'autre part, si $g : Y' \to Y$ est tel que le théorème de changement de base pour g est vrai pout tout $X \to Y$ et tout $F \in \mathbb{D}(X)$ ($\mathbb{D}$ dérivateur exact à droite quelconque), alors g est homotopiquement lisse.

Du côté homologique les foncteurs lisses f sont exactement ceux pour lesquels $f_!$ commute à tout changement de base. Les foncteurs propres g sont exactement ceux pour lesquels le changement de base par g commute à $f_!$, pour tout $f : X \to Y$ et tout $\mathbb{D}$ dérivateur exact à gauche.

[page 59]

Ainsi, les foncteurs propres $f : X \to Y$ se caractérisent de *quatre* façons remarquables

a) f_* commute à tout changement de base ($\forall$ dérivateur $\mathbb{D}$ exact à gauche);

b) le changement de base f^* commute à tout $g_!$ ($g : Y' \to Y$, $\mathbb{D}$ dérivateur exact à droite);

c) $\forall y \in \mathsf{Ob}\, Y$, $X_y \to X/y$ est une hot-équivalence costricte *i.e.* est un foncteur homologiquement [plutôt cohomologiquement] cofinal;

d) $\forall x \in \mathsf{Ob}\ X$ le foncteur induit sur les colocalisés

$$x\backslash X \longrightarrow f(x)\backslash Y$$

est à fibres contractiles.

Autre situation standard où le changement de base marche (mais où les foncteurs qui interviennent n'ont aucune raison d'être propres ou lisses).

Soient

$$f : I \longrightarrow I' \quad , \qquad g : J \longrightarrow J'$$

dans Dia, d'où le diagramme (comparer page 23)

$$\begin{tikzcd} X' = I \times J \arrow[r, "G'"] \arrow[d, "F'"'] & I \times J' = X \arrow[d, "F"] \\ Y' = I' \times J \arrow[r, "G"] & I' \times J' = Y \end{tikzcd} \quad .$$

Ce diagramme est tel que pour tout dérivateur à gauche

`[page 60]`

on a le changement de base

$$G^* F_* \simeq F'_* G'^* \quad ,$$

la raison ici étant que les foncteurs induits

$$X'/y' \longrightarrow X/y$$

sont des hot-équivalences <u>co</u>strictes, *i.e.* que les catégories K (page 49) sont contractiles. En effet, si $x_0 = (i_0, j'_0) \in \mathsf{Ob}\, X$, $y'_0 = (i'_0, j_0) \in \mathsf{Ob}\, Y'$, $u_0 = (u'_0, v'_0) : F(x_0) \to G(y'_0)$, où $u'_0 : f(i_0) \to i'_0$, $v'_0 : j'_0 \to g(j_0)$ sont donnés, on vérifie que la catégorie K cherchée est isomorphe simplement à $(i_0, u'_0)\backslash(I/i'_0) \times (j_0, v'_0)\backslash(J/j'_0)$ qui est contractile ayant un objet initial `[plutôt` $(i_0, u'_0)\backslash(I/i'_0) \times (j'_0\backslash J)/(j_0, v'_0)$ `qui est contractile étant produit d'une catégorie ayant un objet initial et d'une catégorie ayant un objet final]`. Ouf!

Je m'aperçois d'un très gros canular. Je croyais me rappeler que pour $f : X \to Y$ qui est une hot-équivalence stricte, on avait pour tout $F \in \mathbb{D}(Y)$, $F \xrightarrow{\sim} f_* f^* F$ (par exemple pour $\mathbb{D} = \mathsf{Der}(Ab)$, ou $\mathbb{D} = \mathsf{Hot}$), *i.e.* f^* pleinement fidèle, d'où aussi que $\Gamma_{\mathbb{D}}(Y, F) \to \Gamma_{\mathbb{D}}(X, f^* F)$ est `[un]` isomorphisme. Mais ce n'est vrai que si F est un coefficient *constant* sur Y, *i.e.* de la forme $q^*(M)$ $(q : Y \to e,\ M \in \mathbb{D}(e) = \mathcal{A}_{\mathbb{D}})$. C'est faux, pour F général, déjà dans le cas de l'immersion $f : \{\varphi\} \to Y$, où φ est un objet initial. Alors, f est toujours une hot-équivalence stricte, mais l'homomorphisme $\Gamma(Y, F) \to \Gamma(X, f^* F)$ n'est en général pas un isomorphisme.

[page 61]

Notions de $\mathbb{D}$-équivalence et de $\mathbb{D}$-contractibilité.

On va donc reprendre les questions d'acyclicité et de changement de base.

Définition 1. Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur, et soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & e & \end{tikzcd}$$

dans Dia. On dit que f est une $\mathbb{D}$-*équivalence* si le foncteur

$$F \longmapsto f^*F \quad , \qquad \mathbb{D}(Y) \longrightarrow \mathbb{D}(X)$$

induit un foncteur pleinement fidèle sur la sous-catégorie de $\mathbb{D}(Y)$ formée des $\mathbb{D}$-coefficients *constants*, *i.e.* si pour tous $M, N \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{A} = \mathbb{D}(e)$ ("coefficients absolus"), on a

$$(1) \qquad \mathsf{Hom}(q^*M, q^*N) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}(p^*M, p^*N) \quad .$$

Supposons que p_* et q_* existent. On posera, pour un faisceau F sur X

$$H^*_{\mathbb{D}}(X, F) \overset{\text{déf}}{=} p_*(F) \qquad (\text{et de même } \; H_*^{\mathbb{D}}(X, F) = p_!(F)\ ).$$

N.B. Et si $F = p^*M$, $M \in \mathcal{A}$, on note simplement $H^*_{\mathbb{D}}(X, M)$, $H_*^{\mathbb{D}}(X, M)$.
L'homomorphisme (1) s'interprète par adjonction comme

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hom}(M, q_*q^*N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathsf{Hom}(M, p_*p^*N) \arrow[d, equal] \\ \mathsf{Hom}(M, H^*_{\mathbb{D}}(Y, q^*N)) \arrow[r] & \mathsf{Hom}(M, H^*_{\mathbb{D}}(X, p^*N)) \end{tikzcd}$$

déduit de l'homomorphisme

$$(2) \qquad q_*q^*N \longrightarrow p_*p^*N \quad , \qquad i.e. \quad H^*_{\mathbb{D}}(Y, N) \longrightarrow H^*_{\mathbb{D}}(X, N) \quad .$$

Donc dire que (1) est un isomorphisme pour tous M, N signifie que (2) est un isomorphisme pour tout N. De même, si $p_!$, $q_!$ existent cela équivaut à dire que

$$(2') \qquad p_!p^*N \longrightarrow q_!q^*N \quad , \qquad i.e. \quad H_*^{\mathbb{D}}(X, N) \longrightarrow H_*^{\mathbb{D}}(Y, N)$$

est un isomorphisme dans $\mathcal{A}$ pour tout $N \in \mathcal{A}$.

[page 62]

En résumé :

Proposition 1. *Si p_* et q_* existent, i.e. si $H^*_{\mathbb{D}}(X,\bullet)$ et $H^*_{\mathbb{D}}(Y,\bullet)$ existent (il suffit même que ça existe pour des coefficients constants), alors f est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si f induit un isomorphisme pour les $\mathbb{D}$-cohomologies à coefficients constants de X et Y. Si $p_!$ et $q_!$ existent, i.e. si $H_*^{\mathbb{D}}(X,\bullet)$ et $H_*^{\mathbb{D}}(Y,\bullet)$ existent, f est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si f induit un isomorphisme pour les $\mathbb{D}$-homologies à coefficients constants de X et Y.*

Remarque 1. Pour que f soit [une] $\mathbb{D}$-équivalence, il *suffit* que pour tout F *constant* sur Y le morphisme d'adjonction $F \to f_*f^*F$ soit [un] isomorphisme.

Remarque 2. Si f, $f' : X \to Y$ sont dans une même composante connexe de $\underline{\mathsf{Hom}}(X,Y)$, alors f est $\mathbb{D}$-équivalence $\Leftrightarrow$ f' $\mathbb{D}$-équivalence.

Proposition 2. *Les isomorphismes sont des $\mathbb{D}$-équivalences. Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, si deux parmis f, g, gf sont des $\mathbb{D}$-équivalences, le troisième aussi.*

Définition 2. On dit que X dans Dia est $\mathbb{D}$-*asphérique* (ou $\mathbb{D}$-*contractile*, ou $\mathbb{D}$-*trivial*) si $X \xrightarrow{p} e$ est une $\mathbb{D}$-équivalence, *i.e.* si p^* est pleinement fidèle.

Si p_* existe, cela signifie donc que pour $M \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$

$$M \xrightarrow[\sim]{\text{adj}} p_*p^*M \quad , \qquad i.e. \quad M \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(X,M) \quad ,$$

et si $p_!$ existe, cela signifie que pour tout M

$$p_!p^*M \xrightarrow[\sim]{\text{adj}} M \quad , \qquad i.e. \quad H_*^{\mathbb{D}}(X,M) \xrightarrow{\sim} M \quad .$$

Corollaire. *Si Y* (resp. X) *est contractile, alors $f : X \to Y$ est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si X* (resp. Y) *est contractile.*

Exemple. Prenons $\mathbb{D} = \mathsf{HOT}$. (On peut prendre Dia = catégorie des petites catégories). Alors, pour $M \in \mathcal{A} = \mathsf{Hot}$ et X petite catégorie, on a

$$H^*_{\mathsf{HOT}}(X,M) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathsf{hot}(X),M) \quad ,$$

où

$$\mathsf{hot} : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{A} = \mathsf{Hot}$$

est le foncteur canonique qui associe à tout X son “type d'homotopie”. On a

$$H_*^{\mathsf{HOT}}(X,M) = \mathsf{hot}(X) \times M \quad .$$

[page 63]

On en déduit que $f : X \to Y$ est une HOT-équivalence (au sens de la définition 1) si et seulement si c'est une hot-équivalence (ou “équivalence faible”) *i.e.* si et seulement si

$$\mathsf{hot}(f) : \mathsf{hot}(X) \xrightarrow{\sim} \mathsf{hot}(Y)$$

est un isomorphisme.

Proposition 2. *Soit $f : X \to Y$. Conditions équivalentes (si* $\mathbb{D}$ `[est un]` *dérivateur* à gauche).

a) *f est une $\mathbb{D}$-équivalence, et le reste après tout changement de base $Y' \to Y$ qui est un isomorphisme local (par exemple pour $Y/F \to Y$, $F \in \mathsf{Ob}\,\widehat{Y}$).*

b) *Pour tout $y \in \mathsf{Ob}\,Y$, le foncteur induit $X/y \to Y/y$ est une $\mathbb{D}$-équivalence.*

c) *Pour tout $y \in \mathsf{Ob}\,Y$, X/y est $\mathbb{D}$-contractile.*[25]

N.B. On dit que $g : Z \to Y$ est un *isomorphisme local* si pour tout $z \in \mathsf{Ob}\,Z$, posons $y = g(z)$, le morphisme induit sur les catégories localisées en z et y

$$Z/z \xrightarrow{\sim} Y/y$$

est un isomorphisme. Par exemple toute immersion ouverte, tout foncteur induit $Y/y \to Y$ (foncteur de localisation) sont des isomorphismes locaux.

Il en résulte a) $\Rightarrow$ b) trivialement.

b) $\Leftrightarrow$ c). Résulte du corollaire de la page précédente, si l'on sait que Y/y est $\mathbb{D}$-contractile[26]. Cela résultera de **Der 5** ci-dessous.

`[page 64]`

c) $\Rightarrow$ a) "Passage du local au global". Comme l'hypothèse c) est stable par changement de base par immersion ouverte, il suffit de prouver que c) implique que f est une $\mathbb{D}$-équivalence, *i.e.* que pour tout $F = M_Y$ ($M \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{A}$), coefficient constant sur Y, l'homomorphisme d'adjonction

$$M_Y \longrightarrow f_* f^* M_Y = f_* M_X$$

est `[un]` isomorphisme. Il suffit de prouver que c'est un isomorphisme fibre par fibre (**Der 2**), donc que pour tout $y \in Y$,

$$M_y \longrightarrow f_*(M_X)_y$$

est un isomorphisme. Par **Der 4** (g), on a

$$f_*(M_X)_y \xrightarrow{\sim} \Gamma(X/y, M) \quad ,$$

et l'hypothèse que X/y est $\mathbb{D}$-contractile donne ce qu'on veut.

Proposition 2$'$. *Dualement, si $\mathbb{D}$ est un dérivateur à gauche* `[plutôt à droite]`, *conditions équivalentes sur $f : X \to Y$:*

a) *f $\mathbb{D}$-équivalence,* `[et]` *le reste par tout changement de base $g : Y' \to Y$ qui est un "isomorphisme colocal" (i.e. pour tout $y' \in \mathsf{Ob}\,Y'$, le foncteur induit sur les catégories "colocalisées" $y'\backslash Y' \xrightarrow{\sim} y\backslash Y$ (où $y = g(y')$)* `[est un isomorphisme]`*).*

b) *Pour tout $y \in Y$, le foncteur induit $y\backslash X \to y\backslash Y$ est une $\mathbb{D}$-équivalence.*

c) *Pour tout $y \in Y$, $y\backslash Y$ est $\mathbb{D}$-contractile.*

Pour le prouver, on doit utiliser que les $y\backslash Y$ sont $\mathbb{D}$-contractiles (cf. cor. 1 de **Der 5** (d)).

[25] Autres conditions équivalentes :

d) *Pour tout faisceau* <u>*constant*</u> *M_Y sur Y, on a $M_Y \xrightarrow{\sim} f_* f^* M_Y$.*

d$'$) *Comme* d) *avec faisceau* <u>*localement*</u> *constant.*

[26] Cf. cor. 1 de **Der 5** (g)

`[page 65]`

Définition 3. Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur (peut-être même un dérivateur à gauche ou à droite). On dit que f est une $\mathbb{D}$-équivalence *stricte* si f satisfait la condition a) de `[la]` proposition 2. On dit que c'est une $\mathbb{D}$-équivalence *costricte* si f satisfait celle de `[la]` proposition $2'$; on dit aussi parfois que f est $\mathbb{D}$-cofinal. (La condition duale, *i.e.* $\mathbb{D}$-équivalence stricte, s'appelerait co-$\mathbb{D}$-cofinal!)[27]

Proposition 3. *Soit* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. *Si* f, g *sont des* $\mathbb{D}$*-équivalences strictes, alors* gf *aussi. Si* gf *et* f *sont des* $\mathbb{D}$*-équivalences strictes, alors* g *aussi. Si* $\mathbb{D}$ `[est un]` *dérivateur à gauche ou à droite, toute équivalence* `[de catégories]` *est une* $\mathbb{D}$*-équivalence stricte.* (Car elle a un adjoint à droite.)

On utilise le fait que la notion d'isomorphisme local est stable par changement de base.

`[page 66]`

Proposition 4. *Soient* $\mathbb{D}$ *un dérivateur à droite,* $f : X \to Y$ *un foncteur dans* Dia*, tel que pour* $y \in Y$*,* $y\backslash X$ *soit* $\mathbb{D}$*-contractile (donc* f *une* $\mathbb{D}$*-équivalence costricte, sous réserve que* $\mathbb{D}$ *soit un dérivateur à droite ...). Alors pour tout* F *dans* $\mathbb{D}(Y)$ *(pas nécessairement à coefficients constant) on a*

$$H^*_{\mathbb{D}}(Y, F) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(X, f^*(F))$$

est un isomorphisme. Réciproquement, si la condition est vraie pour tout F*, alors les* $y\backslash X$ *sont* $\mathbb{D}$*-contractiles.*

Démonstration. Il revient au même de dire que pour tout $M \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{A} = \mathbb{D}(e)$, on a

$$\mathsf{Hom}(M, H^*_{\mathbb{D}}(Y, F)) \xrightarrow{\text{iso}} \mathsf{Hom}(M, H^*_{\mathbb{D}}(X, f^*(F))) \ .$$

Mais par adjonction, cette flèche s'interprète comme

$$(*) \qquad \mathsf{Hom}(M_Y, F) \longrightarrow \mathsf{Hom}(M_X, f^*F)$$

D'autre part, si $f_!$ existe, on a

$$\mathsf{Hom}(M_X, f^*F) = \mathsf{Hom}(f_!(M_X), F) \ ,$$

et l'homomorphisme $(*)$ est déduit de l'homomorphisme d'adjonction

$$(**) \qquad f_!(M_X) = f_!(f^*(M_Y)) \longrightarrow M_Y \ ,$$

en prenant les Hom dans F. Donc la condition équivaut à dire que cet homomorphisme est `[un]` isomorphisme, quel que soit le coefficient constant M_Y sur Y. Pour voir si c'est un isomorphisme, on regarde fibre par fibre (**Der 2**), or les fibres s'interprètent comme $H^{\mathbb{D}}_*(y\backslash X, M_X)$ (par **Der 4** (d)) et comme M.

[27]Meilleure terminologie : f est $\mathbb{D}$-*asphérique* ($\mathbb{D}$-équivalence stricte), $\mathbb{D}$-*coasphérique* ($\mathbb{D}$-équivalence co-stricte).

[page 67]

Donc la flèche envisagée $(**)$ s'interprète comme

$$H_*^{\mathbb{D}}(y\backslash X, M_X) \longrightarrow M$$

et c'est l'homomorphisme d'adjonction $p_!(p^*(M)) \to M$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & e & \end{tikzcd}$$

Donc c'est un isomorphisme pour tout M si et seulement si $y\backslash X$ est $\mathbb{D}$-contractile.

On va énoncer ce qu'on a prouvé.

Théorème 1. *Soit*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & e & \end{tikzcd}$$

dans Dia. *On suppose que* $\mathbb{D}$ *est un prédérivateur satisfaisant* **Der 2**, *que* p_*, q_* *et* $f_!$ *existent, que* $f_!$ *satisfait à* **Der 4** (d) *pour le calcul des fibres. Conditions équivalentes :*

a) f *est une* $\mathbb{D}$*-équivalence costricte, i.e.* (prop. 2) *pour tout* $y \in \mathsf{Ob}\, Y$, $y\backslash X$ *est* $\mathbb{D}$*-contractile ;*

b) *pour tout* $F \in \mathsf{Ob}\, \mathbb{D}(Y)$, *l'homomorphisme suivant est* [un] *isomorphisme*

$$H^*_{\mathbb{D}}(Y, F) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(X, f^*(F)) \ ;$$

c) *pour tout* $M \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A} = \mathbb{D}(e))$, *l'homomorphisme d'adjonction est* [un] *isomorphisme*

$$f_!(M_X) = f_!(f^*(M_Y)) \xrightarrow{\sim} M_Y \ .$$

Je vais renuméroter les axiomes sur le prédérivateurs.

Der 1, **Der 2** comme avant (p. 45).

Der 3[28] : Soit X dans Dia, $p : X \to e$. Supposons X contractile.[29] Alors

$$p^* : M \longmapsto M_X \quad , \qquad p^* : \mathcal{A} = \mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}(X)$$

est pleinement fidèle.

[28]Axiome des catégories d'indices asphériques, *cf.* variantes **Der 3** a) b) c) page 97, et surtout pages 111-112.

[29]N.B. Il suffit de supposer que X a un objet final. Mais ce n'est pas un axiome autodual.

[page 68]

Der 4 (g) : existence des f_*.

Der 4 (d) : existence des $f_!$.

Der 5 (g) Calcul des fibres de $f_*(F)$.

Der 5 (d) Calcul des fibres de $f_!(F)$.

L'ancien axiome **Der 5** (g) résulte de **Der 2**, **Der 3**, **Der 4** (g,d), **Der 5** (d), grâce au théorème précédent.

Un aspect intéressant du théorème précédent, si on l'envisage comme énonçant l'équivalence de a) et b), c'est que cet énoncé ne fait pas appel à des notions homologiques, mais que sa démonstration y fait appel, sous une forme relativement forte (calcul des fibres de $f_!(F)$). Pour les théorèmes de changement de base pour la $\mathbb{D}$-cohomologie relative, *i.e.* pour les $f_*^{\mathbb{D}}$, on a besoin aussi constamment du calcul des fibres des $f_*(F)$. Donc il semble qu'on ne peut se passer d'aucun des axiomes précédents, y compris **Der 4** (d) et **Der 5** (d), même si on ne veut s'intéresser qu'au formalisme des f^*, f_* (aspect cohomologique). Par la suite, on va donc supposer ces axiomes satisfaits.

Théorème 2. *Soit $f : X \to Y$ dans Dia. Conditions équivalentes :*

a) *Pour tout $y_0 \in \mathsf{Ob}\, Y$, le foncteur canonique*

$$X_{y_0} \xrightarrow{\varphi} X/y_0 \quad (\simeq X \times_Y Y/y_0)\ ,$$

où X_{y_0} désigne la fibre en y_0, est une $\mathbb{D}$-équivalence co-stricte.

b) *Pour tout $x_0 \in \mathsf{Ob}\, X$, le foncteur induit sur les catégories colocalisées en x_0 et en $y_0 = f(x_0)$*

$$x_0\backslash X \longrightarrow y_0\backslash Y$$

est à fibres $\mathbb{D}$-contractiles.

[page 69]

c) *La formation des f_*F (F dans $\mathbb{D}(X)$) commute à tout changement de base $Y' \to Y$, et ça reste vrai après tout changement de base – i.e. si on a $Y'' \to Y' \to Y$, d'où*

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y'' \arrow[r, "p'"'] & Y' \arrow[r, "p"'] & Y \end{tikzcd}$$

le "théorème de changement de base" est vrai pour f'_* et p'^*.

c′) *La formation des $f_*(F)$ ($F \in \mathsf{Ob}\, \mathbb{D}(X)$) commute au passage aux fibres et ceci reste vrai après tout changement de base $p : Y' \to Y$.*

c″) *Comme* c′) *avec $Y' \to Y$ un morphisme de localisation $Y/y \to Y$.*

d) *Si $Y'' \xrightarrow{p} Y' \to Y$, avec p coasphérique, alors $q : X'' = X \times_Y Y'' \to X' = X \times_Y Y'$ est coasphérique.*

d′) *Comme* d) *avec* $Y'' = e$ (donc Y' est catégorie avec objet final e).

d″) *Comme* d) *avec* $Y'' = \{1\}$, $Y' = \mathbf{\Delta}_1$.

.

DÉMONSTRATION. a) ⇔ b) cf. proposition page 53. Montrons que ces conditions impliquent c). Comme elles sont stables par changement de base (*cf.* démonstration immédiate page 55) donc par **Der 2** on est ramené à prouver que $H^*_{\mathbb{D}}(X/y, F) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(Y_y, F)$ ($F \in \mathsf{Ob}\, \mathbb{D}(Y)$), ce qui résulte du théorème 1.[30] (Cf. démonstration du théorème page 56, qui marche avec des hypothèses plus générales.)

On a c) ⇔ c′) ⇒ c″) (l'équivalence c) ⇔ c′) par **Der 2**).

Prouvons c″) ⇒ a).

[page 70]

Considérons le diagramme à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} X_{y_0} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & X/y_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & X \arrow[d, "f"] \\ \{y_0\} \arrow[r] & Y/y_0 \arrow[r] & Y \end{tikzcd} .$$

L'hypothèse c″) prouve que pour tout F dans $\mathbb{D}(X/y_0)$, on a $H^*_{\mathbb{D}}(X/y_0, F) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(X_{y_0}, F)$. Par le théorème 1, ceci implique que f est un $\mathbb{D}$-équivalence co-stricte.

Corollaire 1. Énoncé dual du théorème, pour les foncteurs $X_{y_0} \to y_0\backslash X$, $X/x_0 \to Y/y_0$, et le changement de base des $j_!(F)$ …

Définition 4. Sous les conditions équivalentes du théorème 1, on dit que f est $\mathbb{D}$-*propre.* La condition duale s'appelle f $\mathbb{D}$-*lisse.*

Corollaire 2. *Soit $f : X \to Y$ dans* Dia. *Si f est $\mathbb{D}$-propre ou $\mathbb{D}$-lisse, et à fibres $\mathbb{D}$-contractiles, alors f est une $\mathbb{D}$-équivalence stricte et costricte. Mieux, f est une $\mathbb{D}$-équivalence* universelle *i.e. est une $\mathbb{D}$-équivalence et le reste après tout changement de base.*[31]

---

[30]Donc on utilise **Der 5** (d).

[31]Se généralise : **Corollaire 2′.** *Soit*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

avec X, Y, $\mathbb{D}$-propres sur S. Si f induit une $\mathbb{D}$-équivalence sur les fibres c'est une $\mathbb{D}$-équivalence. Itou dans le cas lisse.

C'est la proposition 6 ci-dessous.

`[page 71]`

Il suffit de prouver que f est une $\mathbb{D}$-équivalence. Supposons par exemple f $\mathbb{D}$-propre. Il suffit de prouver que si Y est $\mathbb{D}$-contractile, alors X l'est (quitte à l'appliquer aux Y/y_0 après changement de base, pour montrer que les X/y_0 sont contractiles). Pour ceci, il suffit de prouver que f est une $\mathbb{D}$-équivalence, et on sait que ceci est le cas si pour tout F *constant* sur Y, l'homomorphisme $F \xrightarrow{\text{adj}} f_* f^* F$ est `[un]` isomorphisme. En fait, c'est vrai pour *tout* F.

Corollaire 3. *Si $f : X \to Y$ est $\mathbb{D}$-propre ou $\mathbb{D}$-lisse, à fibres $\mathbb{D}$-contractiles, alors $f^* : \mathbb{D}(Y) \to \mathbb{D}(X)$ est pleinement fidèle, i.e. les homomorphismes d'adjonction*

$$F \longrightarrow f_* f^* F \quad , \qquad f_! f^* F \longrightarrow F$$

dans $\mathbb{D}(Y)$ sont des isomorphismes.

Il suffit de le voir pour f propre, et cela résulte du calcul des fibres de $f_* f^* F$ ...

Proposition 5. *La notion de foncteur $\mathbb{D}$-propre* (resp. $\mathbb{D}$-*lisse*) *est stable par changement de base,* (trivial), *et par composition* (utiliser `[le]` corollaire 2). *Toute immersion fermée est $\mathbb{D}$-propre, toute immersion ouverte $\mathbb{D}$-lisse. Plus généralement, tout isomorphisme local est $\mathbb{D}$-lisse, tout co-isomorphisme local est $\mathbb{D}$-propre.*

Proposition 6. *Soient X, Y sur S, $f : X \to Y$ un S-morphisme. Supposons X, Y propres sur S, ou X et Y lisses sur S, et que pour tout $s \in \mathsf{Ob}\, S$, $f_s : X_s \to Y_s$ soit une $\mathbb{D}$-équivalence, alors f aussi.*[32]

`[page 72]`

Théorème 3. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\ q\ } & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow{\ p\ } & Y' \end{array}$$

cartésien dans Dia. *Alors le morphisme de changement de base*

$$p^* f_* \longrightarrow f'_* q^*$$

est un isomorphisme si f est $\mathbb{D}$-propre, ou p $\mathbb{D}$-lisse.

Le cas $\mathbb{D}$-propre déjà prouvé. Le cas $\mathbb{D}$-lisse : la démonstration p. 56 est OK.

---

[32] Démonstration. On prouvera même que sur la sous-catégorie des coefficients sur Y qui proviennent de $\mathbb{D}(Y)$ `[plutôt de` $\mathbb{D}(S)$`]`, $f^* : \mathbb{D}(Y) \to \mathbb{D}(X)$ induit un foncteur pleinement fidèle. Si f `[est]` propre, je l'interprète comme $q_* q^* F \xrightarrow{\sim} p_* p^* F$ pour tout F, et cela résulte du calcul de p_*, q_* par passage aux fibres (propre), et de l'hypothèse sur les f_s. OK.

Comparaison de X et X°.

Soit X `[une]` catégorie, on définit une catégorie $\Phi(X)$ et des foncteurs

$$
\begin{tikzcd}
& \Phi(X) \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "q_X"] & \\
X & & X^\circ
\end{tikzcd}
$$

$\mathcal{C}at$-cofibrant (donc propre) $\leftarrow p_X$; $q_X \rightarrow$ $\mathcal{C}at$-fibrant (donc lisse) `[plutôt` $\mathcal{C}at$`-cofibrant (donc propre)]`

qui seront des hot-équivalences, et des $\mathbb{D}$-équivalences si $\mathbb{D}$ est un dérivateur dont le domaine contient X et $\Phi(X)$. On pose

$$\mathsf{Ob}\ \Phi(X) = \mathsf{Fl}(X) \quad ,$$

donc mêmes objets que $\mathcal{F}\ell(X) = \underline{\mathsf{Hom}}(\mathbf{\Delta}_1, X)$, mais les morphismes sont différents :

`[page 73]`

$$
\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "u"] & Y_0 \arrow[d, "v_0"] \\
Y_1' \arrow[u, "v_1"] \arrow[r, "u'"'] & Y_0'
\end{tikzcd}
$$

un morphisme de u dans u' est un couple $v_0 : Y_0 \to Y_0'$, $v_1 : Y_1' \to Y_1$ tel que $v_0 u v_1 = u'$. Ainsi source et but $s(u)$ et $b(u)$ sont l'une contravariante, l'autre covariant en u. On prend pour q le foncteur source, pour p le foncteur but.

Si on applique ceci à X°, on trouve

$$
\begin{tikzcd}
& \Phi(X^\circ) \arrow[dl, "p_{X^\circ}"'] \arrow[dr, "q_{X^\circ}"] & \\
X^\circ & & (X^\circ)^\circ = X
\end{tikzcd}
$$

On a $\mathsf{Ob}\ \Phi(X^\circ) = \mathsf{Fl}(X^\circ) \simeq \mathsf{Fl}(X)$

$$
\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "u"] & Y_0 \arrow[d, "v_1"] & \text{dans } X \\
Y_1' \arrow[u, "v_0"] \arrow[r, "u'"'] & Y_0' & \text{dans } X
\end{tikzcd}
$$

et mêmes homomorphismes au sens de $\Phi(X)$ et au sens de $\Phi(X^\circ)$. Donc

$$\begin{cases} \Phi(X^\circ) = \Phi(X) \\ p_{X^\circ} = q_X \\ q_{X^\circ} = p_X \quad , \end{cases}$$

le passage de X à X° revient à échanger p_X et q_X. La fibre de $\Phi(X)$ en $x \in \mathsf{Ob}\ X$ est $\simeq (X/x)^\circ$, celle en $y^\circ \in \mathsf{Ob}\ X^\circ$ est $\simeq y\backslash X$

$$\begin{cases} p_X^{-1}(\{x\}) \simeq (X/x)^\circ \\ q_X^{-1}(\{y^\circ\}) \simeq y\backslash X \end{cases}$$

N.B. : p_X est W-lisse `[plutôt` W`-propre]` à fibres W-asphériques, donc dans W^u `[`W^u = `ensemble des morphismes qui sont dans` W `et le restent après tout changement de base]`, q_X est W-propre à fibres W-asphériques, donc dans W^u.

`[page 74]`

On vérifie

$$\begin{cases} \Phi(X)/x \simeq \Phi(X/x) & x \in \mathsf{Ob}\ X \\ \Phi(X)/x^\circ \simeq \Phi(x\backslash X) & x^\circ \in \mathsf{Ob}\ X^\circ \end{cases}$$

Je dis que p_X, q_X sont des $\mathbb{D}$-*équivalences strictes* et *costrictes.* Par les formules précédentes, cela signifie que les $\Phi(X/x)$, $\Phi(x\backslash X)$ sont $\mathbb{D}$-contractiles. Donc que si Z a un objet final, $\Phi(Z)$ est $\mathbb{D}$-contractile. Mais considérons

$$\begin{tikzcd} \Phi(Z) \arrow[dr, "q_Z"] & \\ & Z^\circ \end{tikzcd} \quad ;$$

il suffit de prouver que c'est une $\mathbb{D}$-équivalence stricte (puisque Z°, ayant un objet initial, est $\mathbb{D}$-contractil), donc que les $z_0\backslash\Phi(Z)$ sont $\mathbb{D}$-contractiles. On a par les formules précédentes

$$z_0\backslash\Phi(Z) \simeq \Phi(z_0\backslash Z) = \Phi(T) \quad ,$$

où cette fois T a un objet initial $\emptyset$ et un objet final e. Considérons alors l'objet

$$\emptyset \longrightarrow e$$

de $\Phi(T)$, c'est un objet final, car pour tout $x \to y$ dans $\Phi(T)$, il y a une unique flèche

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & y \arrow[d] \\ \emptyset \arrow[u] \arrow[r] & e \end{tikzcd}$$

[page 75]

Pour résumer

Proposition 1 : *p_X et q_X sont des* hot-*équivalences strictes,* i.e. Hot-*asphériques (donc aussi des $\mathbb{D}$-équivalences strictes si $\Phi(X)$ est dans le domaine de $\mathbb{D}$) à fibres les $(X/x)^\circ$ et $y\backslash X$ respectivement (donc à fibres contractiles).*

Corollaire 1. *Pour que X soit $\mathbb{D}$-contractile, il faut et il suffit que X° le soit.*

Plus généralement :

Corollaire 2. *Soit $f : X \to Y$. Pour que f soit une $\mathbb{D}$-équivalence, il faut et il suffit que f° le soit.*

On utilisera que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \Phi(X) \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "q_X"] & \\ X & & X^\circ \end{tikzcd}$$

est fonctoriel en X. On a donc

$$\begin{tikzcd} & \Phi(X) \arrow[rr, "\Phi(f)"] \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dd, "q_X"' near end] & & \Phi(Y) \arrow[dl, "p_Y"] \arrow[dd, "q_Y"] \\ X \arrow[rr, "f" near end, crossing over] & & Y & \\ & X^\circ \arrow[rr, "f^\circ"'] & & Y^\circ \end{tikzcd}$$

les deux carrés commutatifs. Comme p_X et p_Y sont des $\mathbb{D}$-équivalences, f est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si $\Phi(f)$ l'est, et de même pour f°. Ces raisonnements supposent que si X est dans le domaine de $\mathbb{D}$, $\Phi(X)$ aussi. C'est le cas si Dia est formé des catégories ordonnées finies.

`[page 76]`

$\mathbb{D}$-fibrations

Proposition 1. *Soit $f : X \to Y$ dans* Dia*, conditions équivalentes :*

a) *Pour tout $y \in Y$, l'inclusion $X_y \to X/y$ est une $\mathbb{D}$-équivalence, et pour toute flèche $y_1 \to y_0$ de Y, $X/y_1 \to X/y_0$ est une $\mathbb{D}$-équivalence.*

b) *Pour tout coefficient* constant *F sur Y, f_*f^*F est localement constant,*[33] *et "se calcule fibre par fibre"* i.e. *l'homomorphisme canonique*

$$f_*f^*(F)_y \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(X_y, F|X_y)$$

`[est un isomorphisme]`.

Ces conditions sont équivalentes, et impliquent les conditions de (b) pour tout F *localement* constant sur Y.

La première condition dans (a) signifie que pour tout $y \in Y$, et tout $M \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{A}$,

$$H^*_{\mathbb{D}}(X/y, M) \longrightarrow H^*_{\mathbb{D}}(X_y, M)$$

est un isomorphisme. Or cette flèche s'interprète comme

$$f_*(M_X)_y \longrightarrow H^*_{\mathbb{D}}(X_y, M)$$

est un isomorphisme, *i.e.* que $f_*(M_X)$ se calcule fibre par fibre. Comme $M_X \simeq f^*(M_Y)$, c'est la deuxième condition (b). La deuxième condition dans (a), pour $y_1 \to y_0$ signifie que pour M dans $\mathcal{A}$,

$$H^*_{\mathbb{D}}(X/y_0, M) \longrightarrow H^*_{\mathbb{D}}(X/y_1, M)$$

est `[un]` isomorphisme, or cette flèche s'interprète comme

$$f_*(M_X)_{y_0} \longrightarrow f_*(M_X)_{y_1} \quad ,$$

que ce soit toujours un isomorphisme, c'est la première condition (b). Que (b) soit valable aussi pour F localement constant sur Y est immédiat, car c'est une condition de nature locale par rapport à Y.

`[page 77]`

La proposition duale fait appel aux foncteurs

$$y_0\backslash X \longrightarrow y_1\backslash X \qquad \text{et} \qquad X_y \longrightarrow y\backslash X \quad ,$$

et aux faisceaux $f_!f^*M$, pour M constant, ou localement constant sur Y.

---

[33] Par là on entend que pour tout $u : y \to y'$ dans Y, $G_{y'} \to G_y$ est `[un]` isomorphisme. Sans axiomes supplémentaires sur $\mathbb{D}$, il n'est pas clair que cela implique que les "restrictions" de G aux Y/y ou $y\backslash Y$, soient isomorphes à des coefficients constants. Voir cependant l'axiome **Der 3** a$'$), page 97, qui assure que c'est pareil.

Définition 1. Si les conditions équivalentes de la proposition 1 sont satisfaites, on dit que f est une $\mathbb{D}$-*fibration cohomologique* (ou $\mathbb{D}$-*fibration gauche*). Si les conditions duales sont satisfaites, on dit que c'est une $\mathbb{D}$-*fibration homologique* (ou $\mathbb{D}$-*fibration droite*).

N.B. Les $\mathbb{D}$-fibrations cohomologiques sont stables par tout changement de base qui est un isomorphisme local. Les $\mathbb{D}$-fibrations homologiques par tout changement de base qui est un co-isomorphisme local. Mais ce ne sont pas des notions stables par *tout* changement de base[34]. Mais la notion de $\mathbb{D}$-fibration cohomologique est stable par changement de base $\mathbb{D}$-lisse, et celle de $\mathbb{D}$-fibration homologique par changement de base $\mathbb{D}$-propre.

Je vais essayer de construire un exemple où le changement de base canule, en posant $Y = \mathbf{\Delta}_1$. Se donner X sur $\mathbf{\Delta}_1$ revient à se donner une sous-catégorie ouverte X_0, et son complémentaire fermé X_1

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X_1 \arrow[ur, hook] \arrow[d, dashed, no head] & & X_0 \arrow[ul, hook'] \arrow[d, dashed, no head] \\
1 & & 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd} .$$

Dire que $X \to Y = \mathbf{\Delta}_1$ est une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique signifie simplement

[page 78]

que les restrictions

$$X_0 \xrightarrow{j} X \quad , \qquad X_1 \xrightarrow{i} X$$

sont des $\mathbb{D}$-équivalences. Prenons un changement de base $Y' \to Y = \mathbf{\Delta}_1$, *i.e.* un Y' avec Y'_0, Y'_1

$$\begin{tikzcd}
 & Y' & \\
Y'_1 \arrow[ur, hook] \arrow[d, dashed, no head] & & Y'_0 \arrow[ul, hook'] \arrow[d, dashed, no head] \\
1 & & 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd} .$$

On voit que la condition Y' lisse sur $\mathbf{\Delta}_1$ signifie que pour tout $y'_1 \in \mathsf{Ob}\, Y'_1$, la catégorie Y'_0/y'_1 des objets y_0 de Y'_0 au dessus de y'_1 (*i.e.* munis de $y_0 \to y'_1$) est contractile. On voit que si $Y'_1 \neq \emptyset$ alors $Y'_0 \neq \emptyset$ – mais un exemple avec $Y'_0 = \emptyset$, où $Y'_1 = \emptyset$, n'est pas intéressant

[34]? donner exemple!

(car une projection $I \times J \to I$ est toujours une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique). Prenons par exemple pour Y'

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & a \arrow[dl] \\ b & \\ & a' \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{}_{Y'_1} \qquad \underbrace{}_{Y'_0} \qquad ,$$

somme amalgamée de deux copies de $Y = \mathbf{\Delta}_1$, donc $X' = X \times_Y Y'$ peut se voir comme somme amalgamée $X \amalg_{X_1} X$. Mais ça semble *pas* être un contre-exemple. Il faudrait que $X_1 \to X'$ ne soit *pas* une $\mathbb{D}$-équivalence.

[page 79]

Proposition 2. *Soit $f : X \to Y$ dans* Dia. *Conditions équivalentes :*

a) *Pour tout $Y'' \xrightarrow{p} Y' \to Y$, d'où*

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "q"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cart}"] & X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cart}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y'' \arrow[r, "p"'] & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \quad ,$$

si p est une $\mathbb{D}$-équivalence, [alors] *q aussi.*[35]

b) *f est une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique "universelle"*, i.e. *est une fibration cohomologique, et le reste après tout changement de base.*

b′) *Condition duale de* (b) : *f est une $\mathbb{D}$-fibration homologique universelle.*[36]

a) $\Rightarrow$ *b*) : Supposons *a*), soit $Y' \to Y$ changement de base, d'où

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \quad .$$

[35] Il faut supposer Y', Y'' Hot-asphériques, cf. page 96, et supposer vérifié l'axiome Der 3 a') de la page 97.

[36] b) $\Rightarrow$ a) canulée, *cf.* annotation marginale,[37] *cf.* contre-exemple page 89. Mais ça marche pour les dérivateurs $\mathbb{D}_i$ ($i \in \mathbb{N}$) associés aux "localisateurs fondamentaux" W_i, *i.e.* à la théorie des i-types d'homotopie.

[37] L'implication b) $\Rightarrow$ a) pas prouvée, seulement sous forme plus faible :

a′) si Y'', Y' sont $\mathbb{D}$-asphériques et 1-connexes, alors $X'' \to X'$ est une $\mathbb{D}$-équivalence. (Il suffit même de le supposer pour Y', Y'' ayant des objets finaux (pour impliquer b) ou ayant des objets initiaux (pour impliquer b′).)

Pour prouver que f' est une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique, on regarde au dessus de Y' les foncteurs de la forme $\{y'\} \to Y'/y'$ ($y' \in \mathsf{Ob}\, Y'$) et $Y'/y'_1 \to Y'/y'_0$ (si $u' : y'_1 \to y'_0$ flèche de Y'), et on voit que les flèches dans $\mathcal{C}at/Y'$ déduites de ceux-ci par le changement de base $X' \xrightarrow{f'} Y'$ restent des $\mathbb{D}$-équivalences

[page 80]

$$\begin{tikzcd} X'_1 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f'_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart}"] & X'_0 \arrow[r] \arrow[d, "f'_0"] \arrow[dr, phantom, "\text{cart}"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\text{cart}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y'_1 \arrow[r, "p"'] & Y'_0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd} .$$

Comme p est une $\mathbb{D}$-équivalence, cela résulte bien de a).

$b) \Rightarrow a)$: Comme la condition $b)$ est évidemment stable par changement de base, on est ramené à prouver que si f satisfait $b)$, et si on a

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart}"] & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

si p est une $\mathbb{D}$-équivalence, alors q aussi, *i.e.*

$$\begin{array}{ccc} H^*_{\mathbb{D}}(X, M) & \xrightarrow{\ \sim\ } & H^*_{\mathbb{D}}(X', M) \\ \wr\| & & \wr\| \\ H^*_{\mathbb{D}}(Y, f_*(M_X)) & & H^*_{\mathbb{D}}(Y', f'_*(M_{X'})) \end{array}$$

pour tout M dans $\mathcal{A} = \mathbb{D}(e)$. Mais $F = f_*(M_X)$ est localement constant et se calcule “fibre par fibre”, de même pour $F' = f'_*(M_{X'})$.

[page 81]

L'équivalence $a) \Leftrightarrow b')$ se déduit de $a) \Leftrightarrow b)$ par dualité (la condition $a)$ étant autoduale), ou en reprenant le même raisonnement pour $a) \Rightarrow b')$, et pour $b') \Rightarrow a)$ aussi (en remplaçant la cohomologie par l'homologie).

Définition 2. Si les conditions équivalentes de la proposition 2 sont satisfaites, on dit que f est une $\mathbb{D}$-*fibration*.

N.B. C'est une notion *à la fois* locale et “colocale” sur Y (alors que fibration gauche est locale, fibration droite colocale).

Proposition 3. a) *La notion de $\mathbb{D}$-fibration est stable par changement de base et par composition.*[38]

b) *Soient*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & {} \arrow[d, phantom, "\text{comm}"] & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

avec p, p' des $\mathbb{D}$-fibrations (il suffit que p, p' soient des $\mathbb{D}$-fibrations cohomologiques, ou que ce soient des $\mathbb{D}$-fibrations homologiques, ou que p, p' soient propres, ou p, p' lisses). Si f induit des $\mathbb{D}$-équivalences dans les fibres, alors f est une $\mathbb{D}$-équivalence.[39]

Démonstration. $a)$ est immédiat sous la condition $a)$ (prop. 2) de la notion de $\mathbb{D}$-fibration. Pour $b)$, supposons que f induise des $\mathbb{D}$-équivalences sur les fibres. On veux prouver que

$$H^*_{\mathbb{D}}(X, M) \longrightarrow H^*_{\mathbb{D}}(X', M)$$

est un isomorphisme, pour tout M dans $\mathcal{A}$, mais cette flèche s'identifie à

$$H^*_{\mathbb{D}}(Y, p_*(M_X)) \longrightarrow H^*_{\mathbb{D}}(Y, p'_*(M_{X'}))$$

déduite de

$$p_*(M_X) \longrightarrow p'_*(M_{X'}) \qquad\qquad (\text{NB} \quad M_X \simeq f^* M_{X'})$$

[page 82]

et il suffit de prouver que cette flèche est un isomorphisme. Pour ceci, on regarde fibre par fibre, et on utilise le fait que "les images directes se calculent fibre par fibre".

Question. Soit $f : X \to Y$ une $\mathbb{D}$-fibration, et soit $F \in \mathbb{D}(Y)$. Alors $f_* f^* F$ se calcule-t-il par passage aux fibres? Même question pour $f_! f^* F$. Pour la première propriété, concernant f_*, on montre que cela marche si F est de la forme $p_*(M_Y)$, où $p : Y' \to Y$ est $\mathbb{D}$-*propre,* et $M \in \mathsf{Ob}\, \mathcal{A}$. D'autre part, la sous-catégorie pleine C de $\mathbb{D}(Y)$ formée des F pour lesquels ça marche est (sauf erreur) "stable par $\mathbb{D}$-hot-$\varprojlim$" en le sens suivant : si on a une catégorie I avec objet final e formant une sous-catégorie fermée (*i.e.* $e \to x \Rightarrow x = e$), et si on a $\mathcal{F} \in \mathbb{D}(Y \times I)$, d'où $I^\circ \to \mathbb{D}(Y)$, $i \mapsto \mathcal{F}_i$ (diagramme squelettique), si les $\mathcal{F}_i$ pour $i \neq e$ sont dans C, et si $\mathcal{F}$ est dans l'image essentielle de j_*, où $j : Y \times (I \setminus \{e\}) \hookrightarrow Y \times I$ est l'inclusion, alors $\mathcal{F}_e$ est aussi dans C.

On peut cependant considérer que si on veux que $f : X \to Y$ satisfasse à toutes les propriétés cohomologiques et homologiques qui s'attachent à la notion d'une "fibration" ("localement triviale"), on devrait mettre dans les conditions que f est *lisse*, et *propre*, pour que les changements de base par f commutent aux foncteurs g_*, $g_!$.

[38] La stabilité par composition *n'est* pas claire.

[39] Peut se préciser considérablement dans le cas où p, p' sont des $\mathbb{D}$-fibrations, *cf.* prop. 6, page 84.

`[page 83]`

Signalons :

Proposition 4. *Soit* $f : X \to Y$ propre. *Pour que* f *soit une* $\mathbb{D}$*-fibration, il faut et il suffit que pour tout* $y_1 \to y_0$ *dans* Y*, le foncteur* $X/y_1 \to X/y_0$ *induit soit une* $\mathbb{D}$*-équivalence* (i.e. *que* f *soit une* $\mathbb{D}$*-fibration* cohomologique). *Dualement, si* f *est* $\mathbb{D}$*-lisse, pour que ce soit une* $\mathbb{D}$*-fibration, il faut et il suffit que pour tout* $y_1 \to y_0$ *dans* Y*,* $y_0\backslash X \to y_1\backslash X$ *soit une* $\mathbb{D}$*-équivalence.*

On pourrait appeler $\mathbb{D}$-fibrations *parfaites* les foncteurs à la fois propres et lisses qui sont des $\mathbb{D}$-fibrations cohomologiques (ou ce qui revient au même des $\mathbb{D}$-fibrations homologiques).

Corollaire. *Supposons* f *Cat-cofibration (donc propre). Pour que* f *soit une* $\mathbb{D}$*-fibration, il faut et il suffit que les foncteurs* $X_{y_0} \to X_{y_1}$ *(pour* $y_0 \to u_1$ *dans* Y*) soient des* $\mathbb{D}$*-équivalences. Duallement, pour Cat-fibration (donc lisse).*

Proposition 5. *Soit* $f : X \to Y$ *dans* Dia*. Conditions équivalentes :*

a) *f est une $\mathbb{D}$-équivalence, et le reste par tout changement de base ;*

b) *f est une $\mathbb{D}$-fibration à fibres $\mathbb{D}$-contractiles.*

Démonstration. *a)* $\Rightarrow$ *b)* : Que *a)* implique que f soit une $\mathbb{D}$-fibration est immédiat sur la définition de celle-ci (condition *a)* de la proposition 2), et que les fibres sont contractiles est tautologique.

b) $\Rightarrow$ *a)* : Il suffit de montrer que *b)* implique que f est une $\mathbb{D}$-équivalence. Mais c'est un cas particulier de la proposition 3 *b)* (en y prenant $X' = Y$).

`[page 84]`

Quand ces conditions sont satisfaites, on s'attend à ce que le foncteur

$$f^* : \mathbb{D}(Y) \longrightarrow \mathbb{D}(X)$$

soit pleinement fidèle, *i.e.* que les morphisme d'adjonction

$$F \longrightarrow f_* f^* F \quad , \qquad f_! f^* \longrightarrow F$$

dans $\mathbb{D}(Y)$ soient des isomorphismes. (C'est vrai si f est $\mathbb{D}$-propre ou $\mathbb{D}$-lisse, cf. cor. 3, p.71.) Cela revient encore à dire que les $f_* f^* F$ se calculent par passage aux fibres, ou encore itou pour les $f_! f^* F$. Cela nous ramène à la question de la page 82.

Définition 3. On dit alors que f est une $\mathbb{D}$-fibration *triviale*.

Proposition 6 (précise prop. 3 page 81). *Considérons un triangle commutatif dans* Dia

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & S & \end{tikzcd} .$$

a) *Supposons que p et p' soient des $\mathbb{D}$-fibrations gauches, ou que p et p' soient des $\mathbb{D}$-fibrations droites. Soit S_0 une partie de S qui rencontre toute composante connexe de S. Pour que f soit une $\mathbb{D}$-équivalence, il* suffit *que pour tout $s_0 \in S_0$, f induise une $\mathbb{D}$-équivalence $X_{s_0} \to Y_{s_0}$.*

b) *Cette condition est aussi nécessaire*[40] *si p et p' sont des $\mathbb{D}$-fibrations. Donc dans ce cas, f est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si f induit des $\mathbb{D}$-équivalences fibre par fibre.*

[page 85]

Démonstration. a) Il suffit, en vertu de la proposition 3, de montrer que l'hypothèse implique que pour *tout* $s \in S$, f induit une $\mathbb{D}$-équivalence $f_s : X_s \to X'_s$. Cela résulte aussitôt du lemme :

Lemme. *Si p et p' sont toutes deux soit des $\mathbb{D}$-fibrations gauches, soit des $\mathbb{D}$-fibrations droites, et si $s_1 \to s_0$ est une flèche dans S, alors f_{s_1} est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si f_{s_0} l'est. (Donc l'ensemble $S' \subset \mathsf{Ob}\, S$ des $s \in S$ tels que f_s soit une $\mathbb{D}$-équivalence est une réunion de composantes connexes de S.)*

Supposons par exemple que p, p' soient des $\mathbb{D}$-fibrations gauches. Considérons, pour $s \in S$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d] & X'_s \arrow[d] \\ X/s \arrow[r, "f/s"'] & X'/s \end{tikzcd} .$$

Les flèches verticales sont des $\mathbb{D}$-équivalences par l'hypothèse sur p, p', donc f_s est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si f/s l'est. Considérons maintenant

$$\begin{tikzcd} X/s_1 \arrow[r, "f/s_1"] \arrow[d] & X'/s_1 \arrow[d] \\ X/s_0 \arrow[r, "f/s_0"'] & X'/s_0 \end{tikzcd} .$$

Ici encore, l'hypothèse sur p, p' implique que les flèches verticales sont des $\mathbb{D}$-équivalences, donc f_{s_1} est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si f_{s_0} l'est.

[page 86]

Si $Y' = S$, l'énoncé (non prouvé) dit que si $f : X \to S$ est une $\mathbb{D}$-fibration et une $\mathbb{D}$-équivalence, alors les fibres sont $\mathbb{D}$-contractiles. Ce n'est pas sûr même pour une projection $X = T \times S \to S$. Si $\eta = hot_0(S)$, $\xi = hot_0(T)$, la question se réduit à celle-ci : Si pour tout M dans $\mathcal{A}$, on a : l'homomorphisme

$$\alpha_M : \xi \times_{\mathbb{D}} M \longrightarrow M$$

[40] Pas prouvé![41] Même si $X' = S$, ce n'est pas clair, même si $\mathbb{D} = \mathsf{HOTAB}$, f propre et lisse. Mais OK si S est $\mathbb{D}$-contractile.

[41] Faux, *cf.* contre-exemple, p. 87.

satisfait

$$\eta \times_{\mathbb{D}} \alpha_M : \eta \times_{\mathbb{D}} (\xi \times_{\mathbb{D}} M) \xrightarrow{\sim} \eta \times_{\mathbb{D}} M$$

est un isomorphisme, alors α_M est lui même un isomorphisme.

`[page 87]`

Voici un *contre-exemple*[42] que je donne d'abord dans le contexte des espaces topologiques, au lieu de $\mathcal{C}at$. Je vais construire une fibration localement triviale et non triviale

$$\begin{array}{c} X \supset S^1 \\ f \big\downarrow \quad \\ S = S^1 \end{array} \quad ,$$

de fibre S^1, telle que f soit une $\mathbb{D}$-équivalence pour tout $\mathbb{D} = \mathsf{Der}(k\text{-}\mathsf{Mod})$, k étant un anneau où 2 est inversible. Cela signifie que

$$H_*(X, k) \longrightarrow H_*(S, k)$$

est un isomorphisme modulo 2-torsion (noyau et conoyau sont annulés par une puissance de 2 - en fait par 2 ici), ou encore $H_*(X, k) \xrightarrow{\sim} H_*(S, k)$ si 2 inversible dans k. Mais la fibre S^1 n'est pas $\mathbb{D}$-contractile (sauf si $k = 0$!).[43]

La fibration est donnée à isomorphisme unique près, en se fixant un point $s \in S$, et en se donnant un automorphisme u de la fibre X_s ("monodromie"). (La classe d'isomorphie du fibré ne dépend que de la classe d'isotopie de u). Je prend pour u la symétrie (inversant l'orientation) $z \mapsto z^{-1}$ du cercle standard $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Cette fibration "se réalise" par des ensembles ordonés $X \to S$, S^1 étant représenté (sur la base, comme sur les fibres) par

$$S \;=\; \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & a & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0' \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & b & \end{tikzcd} \;=\; S' \amalg_R S'' \quad ,$$

où R est la catégorie discrète ayant deux éléments a, b. On définit X comme $X' \amalg_Y X''$, où $X' = X|S'$, $X'' = X|S''$, $Y = X|R$.[44]

---

[42] Voir un contre-exemple encore plus simple pages 93, 94. (Mais il a l'inconvenient de ne pas être à fibres connexes.)

[43] Exemple beaucoup plus simple encore : on prend $X = S^1$, et $X \to S$ le revêtement à deux feuillets. Si on prend le revêtement à n feuillets, c'est aussi OK si k anneau où n est inversible.

[44] N.B. S', S'', $R = S' \cap S''$ fermés dans S, X', X'', $Y = X' \cap X''$ fermés dans X.

[page 88]

On pose

$$X' = S' \times \bar{S} \qquad\qquad X'' = S'' \times \bar{S}$$

($\bar{S}$ copie conforme de S, cf ci-dessous) et il faut, pour recoller X' et X'', se donner un isomorphisme entre $X'|R \simeq R \times \bar{S} = \bar{S} \amalg \bar{S}$ et $X''|R \simeq R \times \bar{S} = \bar{S} \amalg \bar{S}$ qui soit un R-foncteur, *i.e.* qui provient de deux isomorphismes

$$\begin{gathered} \bar{S} \xrightarrow{u_a} \bar{S} \\ \bar{S} \xrightarrow{u_b} \bar{S} \qquad . \end{gathered}$$

On prend

$$\begin{aligned} u_a &= \mathsf{id}_{\bar{S}} \\ u_b &= \text{symétrie par rapport à l'axe } \bar{0}, \bar{0}' \ \textit{i.e.} \\ &\qquad u_b \text{ laisse fixes } \bar{0}, \bar{0}' \text{ et intervertit } \bar{a} \text{ et } \bar{b}. \end{aligned}$$

(C'est plus clair si on désidentifie la base et la fibre, en prenant fibre

$$\bar{S} \ = \ \begin{tikzcd} & \bar{a} & \\ \bar{0} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bar{0}' \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & \bar{b} & \end{tikzcd} \qquad).$$

Pour voir que X est une $\mathbb{D}$-fibration sur S (quelque soit $\mathbb{D}$) prouvons qu'il est *propre*[45] sur S - on est ramenés à voir que $X' \to S'$ et $X'' \to S''$ sont propres, ce qui est trivial. Pour voir que c'est une $\mathbb{D}$-fibration, on est ramenés également au cas de $X' \to S'$ et $X'' \to S''$, où c'est aussi trivial. On a utilisé le :

Lemme. *Soient $f : X \to S$, $(S_i)_{i \in I}$ une famille de sous-catégories fermées recouvrant S. Pour tout i, soit $X_i = X \times_S S_i \xrightarrow{f_i} S_i$. Pour que f soit propre, il faut et il suffit que les f_i le soient. Pour que f soit une $\mathbb{D}$-fibration propre il faut et il suffit que les f_i le soient.*

[page 89]

Voici le petit calcul qui montre que $f : X \to S$ est une $\mathbb{D}$-équivalence. On fait le calcul en cohomologie.[46] On doit prouver que

$$(*) \qquad\qquad H^*(S,k) \longrightarrow H^*(X,k)$$

[45] N.B. $f : X \to S$ est également *lisse*, car c'est un fibré trivial (un produit) au dessus de deux ouverts $S - \{a\}$, $S - \{b\}$ qui recouvrent S. Mieux : f est à la fois $\mathcal{C}at$-fibrant et $\mathcal{C}at$-cofibrant (car cette condition n'utilise que les propriétés des $X \times_S \mathbf{\Delta}_2 \to \mathbf{\Delta}_2$, pour $\mathbf{\Delta}_2 \to S$).

[46] Mais dans le cas du revêtement à 2 feuillets de S, il n'y a pas même de calcul à faire!

est un isomorphisme (et de même pour tout coefficient constant M sur S). Or

$$H^*(X,k) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}\Gamma_X(k_X) = \mathbb{R}\Gamma_S(\mathbb{R}f_*(k_X)) \quad ,$$

et $(*)$ est induit par

$$i : k_S \longrightarrow \mathbb{R}f_* k_X \quad .$$

Or on a

$$\mathbb{R}f_* k_X \simeq \underbrace{k_S}_{=\mathsf{Im}(i)} \quad \oplus \quad \underbrace{k_S[1]}_{k_S \text{ en degré } 1}{}^{\underline{\text{tordu}}}$$

savoir “tordu” par l'action de monodromie sur $S = S^1$, laquelle est la symétrie $\lambda \mapsto -\lambda$. On a

$$\mathbb{R}\Gamma_S(k_S[1]^{\text{tordu}}) = H^1(\underbrace{\pi_1(S)}_{=\mathbb{Z}}\, , k_S^{\text{tordu}}) = k_{(\mathbb{Z})} = k/(u - \mathsf{id})k = k/2k = 0 \ ,$$

d'où le résultat.

Notons que si on regarde

$$X' = X \times_S X \xrightarrow{f'} S \quad ,$$

on a par Künneth relatif

$$\mathbb{R}f'_*(k_{X'}) \simeq \mathbb{R}f_*(k_X) \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{R}f_*(k_X) \simeq k_S \oplus k_S[1]^t \oplus k_S[1]^t \oplus \underbrace{k_S[1]^t \otimes k_S[1]^t}_{\simeq k_S[2]\ \text{non tordu}} \ ,$$

d'où

$$H^*_{\mathbb{D}}(X',k) \simeq \mathbb{R}\Gamma_{X'}(k_{X'}) \simeq \mathbb{R}\Gamma_S(\mathbb{R}f'_*(k_{X'})) \simeq \mathbb{R}\Gamma_S(k_S) \oplus \mathbb{R}\Gamma_S(k_S)[2]$$

et

$$H^*_{\mathbb{D}}(S,k) \longrightarrow H^*_{\mathbb{D}}(X',k)$$

n'est *pas* un isomorphisme.

[page 90]

Ainsi $f : X \to S$ qui est une $\mathbb{D}$ fibration (propre et lisse) satisfait bien les conditions équivalentes b), b') de la proposition 2 (page 79), mais pas la condition a), puisque le changement de base

$$\begin{tikzcd} X' = X \times_S X \arrow[r, "q = pr_1"] \arrow[d, "f' = pr_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' = X \arrow[r, "p = f"'] & S \end{tikzcd}$$

est une $\mathbb{D}$-équivalence $S' \to S$, alors que $X' \to X$ ne l'est pas.

Voici un autre contre-exemple, sur le même principe mais un peu plus simple. Soit G un groupe fini (par exemple $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), faisons le opérer sur un objet Z de $\mathcal{C}at$, soit $S = [G] = B_G$ la catégorie réduite à un objet a, avec $G = \mathsf{End}(a)$. Soit E_G la catégorie (isomorphe à $(B_G)/a$)

$$\mathsf{Ob}\ E_G = G \quad , \qquad \mathsf{Hom}_{E_G}(g, g') = \{h \in G \mid g = g'h\} \quad ,$$

composition évidente - alors E_G est un groupoïde trivial (1-connexe). Le goupe G y opère à gauche librement par translations, et $B_G = E_G/G$.

[page 91]

Si G opère à gauche sur Z, on peut alors l'utiliser pour tordre Z, par

$$X = E_G \times_G Z = (E_G \times Z)/\text{opérations "diagonales" de G} \quad .$$

Donc on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[d, equal] & X'' \arrow[d, equal] \\
X \arrow[d, "f"'] & Z \times E_G \arrow[l] \arrow[d, "pr_2"] & Z \arrow[l, dashed, "\overset{\mathbb{D}}{\sim}"'] \arrow[d] \\
B_G \arrow[d, equal] & E_G \arrow[l] \arrow[d, equal] & e \arrow[l, dashed, "\overset{\mathbb{D}}{\sim}"'] \arrow[d, equal] \\
S & S' & S''
\end{tikzcd}$$

Comme le changement de base $S' = E_G = (B_G)/a \to B_G = S$ transforme X sur B_G en un produit (lequel est un $\mathbb{D}$-fibré propre et lisse sur S'), on voit que X sur B_G est un $\mathbb{D}$-fibré propre et lisse (car c'est là une condition locale sur B_G).

On suppose maintenant que G est fini d'ordre $n > 1$, et soit k un anneau où n est invesible, $\mathbb{D} = \mathsf{Der}(k - \mathsf{Mod})$. Alors $E_G \to B_G$ est une $\mathbb{D}$-équivalence, ou ce qui revient au même $e \to B_G$ l'est.[47] Pourtant, après changement de base soit par $S' = E_G$, soit par $S'' = e$, $X' \to X$ (ou ce qui revient au même, $X'' \to X$) n'a guère de raison d'en être aussi. On a en cohomologie

$$\mathbb{R}\Gamma_X(k_X) \simeq \mathbb{R}\Gamma_{BG}(f_*(k_X)) \simeq \mathbb{R}\Gamma_G(G, H^*(Z,k))$$

[page 92]

donc (n étant inversible dans k) :

$$H^*(X,k) = \mathbb{R}\Gamma_X(k_X) \simeq H^*(Z,k)^G \longrightarrow H^*(Z,k) \quad ,$$

ce n'est pas en général un isomorphisme. On peut prendre par exemple $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $Z \sim S^1$ comme avant, et G opérant par symétrie de S^1 comme précédemment.

Cet exemple est particulièrement convainquant, car c'est un exemple *avec* S, S' $\mathbb{D}$-*asphériques,* et $S' \to S$ un isomorphisme local (en fait, un revêtement principal de S). C'est aussi un exemple d'un $\mathbb{D}$-fibré lisse et propre $X \to S$, sur une base *asphérique* S, et tel que l'inclusion d'une fibre dans X

$$X_s \longrightarrow X$$

ne soit *pas* une $\mathbb{D}$-équivalence.

Le seul reproche qu'on puisse faire à cet exemple, en comparaison avec le précédent, c'est que les catégories X, S ne sont pas des ensembles ordonnés. Et S ne peut être un ensemble ordonné fini, car l'espace classifiant d'un groupe fini a de la cohomologie en toutes dimensions (sauf erreur).

[47] En fait, e, E_G, B_G sont $\mathbb{D}$-asphériques.

[page 93]

Mais on peut s'inspirer de cet exemple pour le modifier de façon qu'il se transpose à des ensembles ordonnés. Il suffit de réaliser, pour G donné :

a) Une opération *libre* de G sur un objet E de $\mathcal{C}at$, telle que $H^*(E,k)^G \simeq k$, *i.e.* $B = E/G$ soit $\mathbb{D}$-asphérique.

b) Une opération de G sur un objet Z, telle que l'inclusion

$$H^*(Z,k)^G \longrightarrow H^*(Z,k)^G$$

ne soit pas [un] isomorphisme.

c) Choisir pour E, Z des ensembles ordonnés, et s'assurer que $B = E/G$ est également représenté par une catégorie ordonnée. Sauf erreur, il en sera de même pour $X = E \times Z/G$. On aura en tout les cas

$$\begin{tikzcd}
 & Z \times E \arrow[d, equal] & \\
X \arrow[d] & X' \arrow[l] \arrow[d] & Z \arrow[l] \arrow[d] \\
S \arrow[d, equal] & S' \arrow[l] \arrow[d, equal] & S'' = \{s\}\,, \quad s \in E\,. \arrow[l] \\
\underset{\text{asph}}{E/G} & \underset{\substack{\text{asph} \\ \text{si on peut}}}{E} & \text{asph}
\end{tikzcd}$$

Cela donne encore un exemple avec X $\mathbb{D}$-fibré propre et lisse, sur une base S $\mathbb{D}$-asphérique, tel que l'inclusion d'une fibre X_s dans X ne soit pas une $\mathbb{D}$-équivalence. On peut même se débrouiller pour que $H^*(Z,k)^G \simeq k$ ce qui implique

[page 94]

que X est lui aussi asphérique (mais les fibres de $X \to S$ ne sont pas $\mathbb{D}$-asphériques). Cela donne donc un autre contre-exemple au b) de la prop. 6 (p. 84).

Voici la façon la plus économique, je crois, de réaliser la situation que j'ai dite. Topologiquement, je prend

$G = \{\pm 1\}$	
$E = S^2$	sphère euclidienne, sur laquelle $\{\pm 1\}$ opère par antipodisme $x \mapsto -x$
$B = S^2/\{\pm 1\}$	plan projectif réel
$Z = S^1$	où G opère comme précédemment par la symétrie.

C'est donc un exemple très proche de celui du début (p. 87), où on pouvait aussi considérer la base ($B = S^1$) comme quotient d'un E ($= S^1$) par $G = \{\pm 1\}$ opérant librement (par l'antipodisme $z \mapsto -z$ dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$). Mais dans cet exemple, la base n'était pas $\mathbb{D}$-asphérique.

La façon la plus économique de réaliser la sphère S^2 par un ensemble ordonné est sans doute par sa décomposition "globulaire" par trois paires de cellules de dimension 0, 1, 2, donnant l'ensemble ordonné

$$
I \quad = \quad
\begin{tikzcd}
S_2^- & S_2^+ \\
S_1^- \arrow[u] \arrow[ur] & S_1^+ \arrow[u] \arrow[ul] \\
S_0^- \arrow[u] \arrow[ur] & S_0^+ \arrow[u] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

et l'antipodisme échange S_i^- et S_i^+, mais le quotient n'est pas ordonné, c'est la catégorie (importante pour la théorie des 2-catégories) :

`[page 95]`

$$
\begin{tikzcd}
S_2 \\
S_1 \arrow[u, shift left, "p_1^-"] \arrow[u, shift right, "p_1^+"'] \\
S_0 \arrow[u, shift left, "p_0^-"] \arrow[u, shift right, "p_0^+"']
\end{tikzcd}
\qquad \text{avec} \qquad
\begin{cases}
p_1^- p_0^- = p_1^- p_0^+ \\
p_1^+ p_0^- = p_1^+ p_0^+
\end{cases}
$$

Mais prenons la subdivision barycentrique de la décomposition cellulaire précédente de S dont les sommets correspondent aux éléments de $\mathsf{Ob}\, I$, les simplexes aux parties totalement ordonnés de $\mathsf{Ob}\, I$. On trouve l'octaèdre, ayant 6 sommets, 12 arêtes, 8 faces, et G opère librement sur l'ensemble des simplexes, donc le quotient : 3 sommets, 6 arêtes, 4 faces, décomposition cellulaire du plan projectif. (Sa décomposition par trois droites.) On présente S^1 par l'ensemble ordonné (comme au début)

$$
\begin{tikzcd}
S_1^- & S_1^+ \\
S_0^- \arrow[u] \arrow[ur] & S_0^+ \arrow[u] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad i.e. \qquad
\begin{tikzcd}
 & S_1^+ & \\
0 = S_0^- \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_0^+ = 0' \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & S_1^- &
\end{tikzcd}
$$

et G y opère par symétrie échangeant S_1^- et S_1^+. Donc l'ensemble ordonné X aura $4 \times 13 = 52$ sommets et c'est modeste ...

`[page 96]`

Finalement, il semble qu'il ne reste plus rien de la proposition 2 (p.79) introduisant la notion de $\mathbb{D}$-fibration – pas même l'équivalence des deux conditions $b)$ et $b')$ ($\mathbb{D}$-fibration à gauche universelle, $\mathbb{D}$-fibration à droite universelle). On songe à leur relation à une condition $a)$ modifiée ainsi (pour $f : X \to Y$) :

$a)$ Pour tout $Y'' \to Y' \to Y$, avec Y' et Y'' Hot-<u>asphériques</u> (et pas seulement $\mathbb{D}$-asphériques) $X'' = X \times_Y Y'' \to X' = X \times_Y Y'$ est une $\mathbb{D}$-équivalence. (Quand on suppose que Y'' et Y' ont des éléments finaux, c'est la condition que f soit une $\mathbb{D}$-fibration à gauche universelle ; quand on suppose que Y'' et Y' ont des éléments initiaux, c'est la condition $\mathbb{D}$-fibration à droite universelle.)[48]

On a évidemment $a) \Rightarrow b)$ et $a) \Rightarrow b')$ et on aimerait que ce soient des équivalences. Voici un axiome intéressant[49] sur $\mathbb{D}$, qui semble vérifié dans tous les cas connus, qui assure l'équivalence souhaitée. Je vais en même temps reformuler **Der 3** en trois volets (*cf.* p. 67).

`[page 97]`

Der 3 $a)$ Si $Z \in \mathsf{Dia}$ est Hot-asphérique, alors $p : Z \to e$ est une $\mathbb{D}$-équivalence, *i.e.* par exemple $p^* : \mathcal{A} = \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(Z)$ est pleinement fidèle.

$b)$ Soit $f : Z \to Z'$ une flèche dans Dia. Si f est une Hot-équivalence, c'est une $\mathbb{D}$-équivalence (*i.e.* $f^* : \mathbb{D}(Z') \to \mathbb{D}(Z)$ induit une <u>équivalence</u> entre les sous-catégories de Z, Z' `[plutôt de` $\mathbb{D}(Z)$`,` $\mathbb{D}(Z')$`]` formées des objets constants).

$a')$ (Précise considérablement a). Si $Z \in \mathsf{Dia}$ est Hot-asphérique, alors on a $a)$, et l'image essentielle de $\mathbb{D}(e) = \mathcal{A}$ dans $\mathbb{D}(Z)$ est formée des objets <u>localement</u> <u>constants</u> de Z, *i.e.* des objets tels que le foncteur

$$Z^{\circ} \longrightarrow \mathcal{A} \qquad z \longmapsto F_z$$

soit localement constant (*i.e.* transforme toute flèche en isomorphisme) donc isomorphe à un foncteur constant (puisque Z est Hot-asphérique, donc 1-connexe).

Il faut bien noter que dans $a')$, il ne suffit <u>pas</u> de supposer que Z soit $\mathbb{D}$-asphérique, au lieu de Hot-asphérique. Dès que la $\mathbb{D}$-équivalence est strictement plus faible que Hot, il semble que $a')$ devient toujours faux, en tant que condition sur $\mathbb{D}$, si on y suppose seulement que Z soit $\mathbb{D}$-asphérique. Par exemple, même si $\mathbb{D} = \mathbb{D}_i$ (théorie des i-types d'homotopie relative), la catégorie

`[page 98]`

des objets localement constants sur Z s'exprime en termes du $(i+1)$-type d'homotopie, mais pas en termes de son i-type d'homotopie seul.

Il semble bien que ce soit l'axiome **Der** 3 (a') qui assure l'existence d'une bonne notion ("bilatère") de $\mathbb{D}$-fibration, qui soit stable par changement de base, et qui se réduise soit

---

[48] Il faut expliciter le raisonnement. Il suffit de tester même sur $Y'' \to Y'$, où Y'' est <u>ponctuelle</u>, et où Y' a un objet final (resp. initial).

[49] *cf.* **Der 3** $a')$ page suivante.

à "$\mathbb{D}$-fibration à gauche universelle" soit à "$\mathbb{D}$-fibration à droite universelle" et donc qui soit en plus une condition vérifiable pratiquement. Dans le cas où f est propre ou lisse, le critère est particulièrement simple, puisque il se borne à la condition que les $f_* f^* a_Y$, ou les $f_! f^* a_Y$ (pour $a \in \mathcal{A}$), soient des objets localements constants sur Y (donc constants si Y est $\underline{\underline{\mathsf{Hot}}}$-asphérique, en vertu de **Der** 3 (a').

Je vais également introduire une variante renforcée de **Der** 3 b) :

Der 3 b') Soit $Z' \to Z$ une Hot-équivalence dans Dia. Alors $f^* : \mathbb{D}(Z) \to \mathbb{D}(Z')$ induit une équivalence entre les catégories des coefficients localements constants sur Z et sur Z'.[50]

[page 99]

Dans certaines questions il suffit de savoir que le dit foncteur est pleinement fidèle. Cela implique que

$$H^*_{\mathbb{D}}(Z, F) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(Z', f^*F)$$

quand F est localement constant sur Z[51] (mais il n'est pas clair que cette condition implique toujours la pleine fidélité[52]) et de même pour l'homologie

$$H_*^{\mathbb{D}}(Z', f^*F) \longrightarrow H_*^{\mathbb{D}}(Z, F) \quad .$$

Moyennant cette condition, on a la :

Proposition : *On suppose* **Der** 3 b$'$) *satisfait. Soit $f : X \to Y$ dans* Dia. *Pour que f soit une $\mathbb{D}$-fibration, il faut et il suffit que pour $Y'' \to Y'$ sur Y qui soit une* Hot-*équivalence, $X'' = X \times_Y Y'' \to X' = X \times_Y Y'$ soit une $\mathbb{D}$-équivalence.*

À vrai dire, on peut énoncer quelque chose de raisonnable, sans supposer l'axiome **Der** 3 b'). On doit introduire la :

Définition : Soit $f : Z' \to Z$ dans Dia. On dit que f et une $\mathbb{D}$-équivalence 1-*complète* si le foncteur $f^* : \mathbb{D}(Z) \to \mathbb{D}(Z')$ est pleinement fidèle sur la sous-catégorie pleine de $\mathbb{D}(Z)$ formée des coefficients localement constants. On dit que f est une $\mathbb{D}$-équivalence 2-*complète* si elle induit une équivalence entre les catégories des coefficients localement constants.

[page 100]

On dit que Z est *complètement $\mathbb{D}$-asphérique*, si $Z \to e$ est une $\mathbb{D}$-équivalence 2-complète.

---

[50] **Der** 3 b'_0) : le foncteur est fidèle
b'_1) : le foncteur est pleinement fidèle
b'_2) : le foncteur est une équivalence

[51] On pourra dire que $f : Z' \to Z$ est une $\mathbb{D}$-équivalence 0-*complète à gauche,* et 0-*complète à droite* dans le cas homologique.

[52] Mais c'est OK si on a des $\underline{\mathsf{Hom}}$ internes dans $\mathbb{D}(Z)_{\text{loc.const.}}$ satisfaisant

$$\mathsf{Hom}(F, G) \simeq \mathsf{Hom}(e_Z, \underline{\mathsf{Hom}}(F, G)) \quad ,$$

où e est l'élément final de $\mathcal{A}$, les $\underline{\mathsf{Hom}}$ étant compatibles aux images inverses.

Ainsi, l'axiome **Der** 3 a') peut se reformuler, en disant que si Z est Hot-asphérique, alors Z est complètement $\mathbb{D}$-asphérique. Et de même, **Der** 3 b') en disant que si $f : X \to Y$ dans Dia est une Hot-équivalence, alors f est une $\mathbb{D}$-équivalence 2-complète. Nous allons donner une variante affaiblie, de **Der** 3 a'), qui suffit pour donner une notion raisonnable de $\mathbb{D}$-fibration :

Der 3 a'') Tout Z dans Dia qui a soit un objet final, soit un objet initial, est complètement $\mathbb{D}$-asphérique.

Définition. On dit que $f : X \to Y$ dans Dia est une $\mathbb{D}$-fibration, si pour

$$Y'' \longrightarrow Y' \longrightarrow Y$$

avec $Y'' \to Y'$ une $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète (par exemple Y' et Y'' complètement $\mathbb{D}$-asphèriques), $X'' = X \times_Y Y'' \longrightarrow X' = X \times_Y Y'$ est une $\mathbb{D}$-équivalence.

Cela équivaut à chacune des conditions b), b') de la prop. 2 (page 79), *i.e.* que f soit universellement une $\mathbb{D}$ fibration à gauche, ou universellement une $\mathbb{D}$-fibration à droite (grâce à **Der 3** b'' `[plutôt` a''`]`).

`[page 101]`

Définition 1. $f : X \to Y$ dans Dia est appelé $\mathbb{D}$-*équivalence cohomologique* (sous-entendu : *complète*) si pour tout $F \in \mathsf{Ob}\ \mathbb{D}(Y)$, F <u>localement</u> <u>constant</u>, on a

$$H^*_{\mathbb{D}}(Y, F) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(X, f^*(F)) \quad .$$

Notion duale $\mathbb{D}$-*équivalence homologique*

$$H_*^{\mathbb{D}}(X, f^*(F)) \xrightarrow{\sim} H_*^{\mathbb{D}}(Y, F) \quad .$$

Si Y est complètement $\mathbb{D}$-asphérique, alors les coefficients localement constants sur Y sont constants, et f est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique (resp. homologique) si et seulement si c'est une $\mathbb{D}$-équivalence *i.e.* si X est $\mathbb{D}$-asphérique.[53]

Proposition 1 (Soritale). *Soient* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. *Si* f *et* g *sont des* $\mathbb{D}$-*équivalences cohomologiques, alors* gf *aussi. Si* gf *et* f *sont des* $\mathbb{D}$-*équivalences cohomologiques, alors* g *aussi. Si* gf *est une* $\mathbb{D}$-*équivalence cohomologique, et si* g *est une* $\mathbb{D}$-*équivalence* <u>*2-complète*</u> (donc tout F localement constant sur Y provient d'un G localement constant sur Z), *alors* f *est une* $\mathbb{D}$-*équivalence cohomologique.*

Définition 2. 1°) $f : X \to Y$ dans Dia est appelé une $\mathbb{D}$-*fibration cohomologique complète,* je dis bien <u>complète</u>, si

a) Pour tout $y \in \mathsf{Ob}\ Y$, $X_y \to X/y$ est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique (complète).

b) Pour tout $y' \to y$ dans Y, $X/y' \to X/y$ est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique (complète).

[53] L'axiome **Der** 3 b'_1) implique que toute Hot-équivalence est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique.

[page 102]

c) Ces conditions restent satisfaites après tout changement de base $Y' \to Y$.

2°) Notion duale de fibration homologique complète.

EXEMPLE. Si f est Hot-propre, les flèches des a) et b) sont des Hot-équivalences, donc en vertu de **Der 3** b'_1) (qu'il faut admettre), ce sont des $\mathbb{D}$-équivalences cohomologiques. Cela signifie que a) et b) sont valables, et c) aussi, car la notion de flèche Hot-propre est stable par changement de base.

Proposition 2. *Soient $f : X \to Y$ $\mathbb{D}$-fibration cohomologique complète, $F \in \mathsf{Ob}\, \mathbb{D}(X)$ localement constant sur X. Alors $f_*(F)$ est localement constant, sa formation commute à tout changement de base, et en particulier se calcule fibre par fibre.*[54]

Corollaire 1. *Soit un diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[from=u, "f"'] & Y' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd} \quad .$$

On suppose f $\mathbb{D}$-fibration cohomologique et p une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique. Alors q est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique.

[page 103]

En effet, on a pour F localement constant sur X

$$H^*_{\mathbb{D}}(X, F) \simeq H^*_{\mathbb{D}}(Y, f_*F) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(Y', p^*f_*F) \simeq H^*_{\mathbb{D}}(Y', f'_*q^*F) \simeq H^*_{\mathbb{D}}(X', q^*F)$$

qed.

Proposition 3. *La notion de $\mathbb{D}$-fibration cohomologique complète est stable par changement de base* (trivial) *et par composition.*

Pour la stabilité par composition, il suffit de noter le corollaire suivant de la proposition 2.

Corollaire 2 (de prop. 2). *Soit $f : X \to Y$. Pour que f soit une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique complète, il faut et il suffit que pour tout $Y'' \xrightarrow{p} Y' \to Y$ sur Y, avec p une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique, la flèche correspondante $X'' = X \times_Y Y'' \longrightarrow X' = X \times_Y Y'$ soit aussi une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique.*

C'est nécessaire par le corollaire 1, compte tenu que $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ est aussi une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique. C'est suffisant, car il suffit de l'appliquer aux cas $\{y\} \to Y/\{y\}$, $Y/y \to Y/y'$, qui sont des $\mathbb{D}$-équivalences cohomologiques en

[page 104]

vertu de **Der** 3 b'_1) (ou seulement **Der** 3 a')).

[54] Il y a une réciproque *cf.* prop. $3'$.

Proposition 4. *On suppose que* **Der** 3 a$'$) *est satisfait* (*i.e.* tout Z dans Dia qui est Hot-asphérique, est complètement $\mathbb{D}$-asphérique). *Soit* $f : X \to Y$ *dans* Dia. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

1°) *f est une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique* <u>*complète*</u> (conditions a), b), c) de [la] définition 2, page 101).

2°) *Pour tout $F \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{D}(X)$, localement constant, $f_*(F)$ est localement constant, se calcule fibre par fibre; et ça reste vrai après tout changement de base $Y' \to Y$ (avec F' localement constant sur $X' = X \times_Y Y'$). (Alors la formation de $f_*(F)$ commute à* <u>*tout*</u> *changement de base).*

3°) *Pour tout $Y'' \xrightarrow{p} Y'$ sur Y, si p est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique, alors $X'' = X \times_Y Y'' \longrightarrow X' = X \times_Y Y'$ aussi.*

3$'$) *Comme* 3, *en supposant que Y'' est la catégorie ponctuelle, et que Y' a un élément final : il faut que $X'' \to X'$ soit une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique.*

[page 105]

Définition 3. On dit que $f : X \to Y$ dans Dia est une $\mathbb{D}$-*fibration complète* si c'est une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique complète et une $\mathbb{D}$-fibration homologique complète.

C'est stable par changement de base, par composition.

La définition 3 équivaut à ceci : pour tout $p : Y'' \to Y'$ sur Y, avec Y'' et Y' Hot-asphériques, le morphisme correspondant $X'' \to X'$ est <u>à</u> <u>la</u> <u>fois</u> une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique, et une $\mathbb{D}$-équivalence homologique. (Et il suffit même de le supposer pour $Y'' = e$ et pour Y' avec objet final ou objet initial.) On peut songer à renforcer encore cette condition en exigeant (sans regarder à gauche ni à droite) que $X'' \to X'$ soit une $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète. Mais il n'est pas clair que cette notion renforcée soit stable par composition – à moins de la renforcer encore, en exigeant que si $Y'' \to Y'$ est une $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète, alors $X'' \to X'$ l'est aussi. L'ennui avec cette définition renforcée, c'est que faute d'avoir une description cohomologique ou homologique de la notion de

[page 106]

$\mathbb{D}$-équivalence 1-complète, je ne me sens pas capable de donner des exemples intéressants (non totalement triviaux) de $\mathbb{D}$-fibrations en ce sens très fort. Sauf les Hot-fibrations triviales (*i.e.* à fibres Hot-asphériques) – mais ce n'est pas drôle!

Mais quand on a des produits $*$ associatifs et unitaires et des <u>Hom</u> internes correspondants dans les $\mathbb{D}(X)_{\text{loc. const.}}$, compatibles avec [les] images inverses, donc on aura sur X si F et G sont localement constants dans $\mathbb{D}(X)$, et si ε_X désigne l'unité pour $*$ dans $\mathbb{D}(X)$,

$$\mathsf{Hom}(F,G) \simeq \mathsf{Hom}(\varepsilon_X * F, G) \simeq \mathsf{Hom}(\varepsilon_X, \underline{\mathsf{Hom}}(F,G)) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(\varepsilon_e, p_* \underline{\mathsf{Hom}}(F,G)) ,$$

car $\varepsilon_X = p^*(\varepsilon_e)$, où $p : X \to e$, donc dans ce cas une flèche $f : X \to Y$ dans Dia est une $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète si (et seulement si) c'est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique. Donc dans ce cas, si f est une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique complète, c'est aussi une $\mathbb{D}$-fibration homologique complète, donc aussi une $\mathbb{D}$-fibration complète (définition 3). (Et même au sens soit-disant renforcé de tantôt : si $Y'' \to Y'$ sur Y est une $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète ($\Leftrightarrow$ une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique!) alors $X'' \to X'$ aussi.

[page 107]

Il se pose la question de trouver des f qui soient des $\mathbb{D}$-fibrations cohomologiques, ou homologiques. Je ne sais si je serai capable d'en trouver, qui ne soient déjà des HOT-fibrations cohomologiques, ou homologiques (cela revient maintenant au même[55]), car pratiquement je ne sais guère dire qu'une flèche $Z' \to Z$ dans $\mathcal{C}at$ est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique complète, que si cette flèche est une HOT-équivalence (et en admettant l'axiome **Der** 3 b_1'), ou sa variante affaiblie cohomologique).

Je vais donc chercher les HOT-fibrations, *i.e.* les $f : X \to Y$ tels que pour tout $Y'' \to Y' \to Y$, avec Y'' et Y' asphériques (sous-entendu : pour HOT), $X'' \to X'$ est une Hot-équivalence. (Il suffit même de supposer Y'' réduit à un point, Y' avec objet final ...)

Supposons par exemple f propre (*i.e.* HOT-propre), donc la condition a) de la définition 2, p. 101 satisfaite et de même après tout changement de base. Suffit-il de vérifier de plus la condition b), *i.e.* que

$$X/y \longrightarrow X/y' \quad , \qquad \text{pour } y \to y' \text{ dans } Y \ ,$$

sont des Hot-équivalences? (J'entends en restant sur Y, sans supposer aussi d'avoir la même chose après changement de base).

[page 108]

Mais cela reste-il vrai après tout changement de base?

La situation semble ici meilleur pour f lisse (au lieu de propre), en interprétant les conditions a) et b) sous forme homologique, comme signifiant que $f_!(e_X)$ est un objet <u>localement</u> <u>constant</u> de $\mathsf{HOT}(Y)$, qui se calcule fibre par fibre. Comme f lisse implique que $f_!$ commute à tout changement de base, cette hypothèse sur f (que f soit une HOT-fibration cohomologique, peut-être pas complète) est stable par changement de base, donc implique que c'est une HOT-fibration cohomologique complète. Mais cet argument utilise les propriétés générales des dérivateurs pour HOT, que je n'ai pas encore établies - surtout pas dans le domaine $\mathcal{C}at$ tout entier! Donc il est sain de me méfier. Je préfère tâter la difficulté en restant d'abord dans le cadre du formalisme <u>cohomologique</u> (non commutatif), dont j'ai une certaine maîtrise. Je suppose donc f propre à nouveau, et que les

$$X_y \longrightarrow X/y \quad , \qquad X/y \longrightarrow X/y'$$

[page 109]

soient des HOT-équivalences, je veux prouver la même chose après tout changement de base, au moins que dans la situation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"'] & X'' \arrow[l, "q'"'] \arrow[d, "f''"] \\ Y & Y' \arrow[l, "p"] & Y'' \arrow[l, "p'"] \end{tikzcd}$$

[55] Les HOT-équivalences cohomologiques = HOT-équivalences homologiques = HOT-équivalences sans plus.

si Y', Y'' sont asphériques, alors q' est une Hot-équivalence. Si je veux l'établir par critère cohomologique, je dois commencer par prendre sur X' un faisceau d'*ensembles* localement constant F, et prouver que $\Gamma(X', F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X'', q'^* F)$. Comme ce faisceau ne provient pas de X, je suis ennuyé pour appliquer l'hypothèse sur f, qui concerne à priori des faisceaux d'ensembles constants sur X, ou sur les X/y. Mais on devrait avoir ceci :

Lemme. *Soit $f : X'' \to X'$. Alors f est une* HOT*-équivalence* i.e.

$$H^*_{\mathsf{HOT}}(X', a_{X'}) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathsf{HOT}}(X'', a_{X''})$$

est `[un]` *isomorphisme pour tout $a \in \mathsf{Hot} = \mathsf{HOT}(e)$, si et seulement si f est une* Hot*-équivalence,*[56] *et alors f est même une* HOT*-équivalence 2-complète* (j'ai besoin seulement de : HOT-équivalence cohomologique et homologique complète) i.e. *pour tout $\xi \in \mathbb{D}(X')$ <u>localement</u> <u>constant</u> sur X', on a*[57]

$$H^*_{\mathsf{HOT}}(X', \xi) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathsf{HOT}}(X'', q'^*(\xi)) \quad .$$

`[page 110]`

La première assertion doit résulter des formules

$$(*) \qquad H^*_{\mathsf{HOT}}(Z, a_Z) \simeq \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}}(\mathsf{hot}(Z), a)$$

$$(\text{et aussi} \qquad H_*^{\mathsf{HOT}}(Z, a_Z) \simeq \mathsf{hot}(Z) \times a \qquad)$$

donc si

$$(**) \qquad \mathsf{hot}(X'') \xrightarrow{\sim} \mathsf{hot}(X')$$

est `[un]` isomorphisme, alors

$$H^*_{\mathsf{HOT}}(X', a_{X'}) \longrightarrow H^*_{\mathsf{HOT}}(X'', a_{X''})$$

est `[un]` isomorphisme, puisque c'est déduit de $(*)$ en prenant $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}}(\,.\,, a)$. Inversement, si $(*)$ est toujours `[un]` isomorphisme, exprimant les deux membres `[mot illisible]` de $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathsf{Hot}}(\,.\,, a)$ et prenant les π_0, on trouve que

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}}(\mathsf{hot}(X'), a) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\mathsf{Hot}}(\mathsf{hot}(X''), a)$$

est un isomorphisme pour tout a, donc $(**)$ est un isomorphisme.

Mais le fait que ça implique que f'' soit une HOT-équivalence cohomologique complète, *i.e.* que la relation $(*)$ reste vraie pour un $\xi \in \mathbb{D}(X')$ <u>localement</u> <u>constant</u> sur X', me paraît une propriété délicate du dérivateur HOT, sur laquelle il me faudra revenir.

Donc le lemme est loin d'être établi, faute d'avoir seulement construit le dérivateur HOT, sans même parler d'en établir les propriétés spéciales délicates! Mais je n'ai aucune raison de douter du lemme, il fait partie de la kyrielle des intuitions de base que je voudrais fonder solidement.

[56] Attention ici `[mot illisible]` la distinction entre HOT-équivalence et Hot-équivalence.
[57] Est-ce vrai aussi pour les dérivateurs $\mathbb{D}_i$?

[page 111]

Le lemme implique qu'une $\mathbb{D} = \mathsf{HOT}$-fibration (au sens de la définition 2 page 81, revue et corrigée à la page 96-97) est en fait déjà une HOT-fibration cohomologique et homologique complète. Or on a vu que si f est propre, f est une $\mathbb{D}$-fibration si et seulement si les conditions précédentes sur Y (sans changement de base) sont satisfaites. Et dualement pour f lisse.

11.11.90

Je sens le besoin de revoir les notions de $\mathbb{D}$-fibrations en tous genres (p. 76 ff). D'abord les diverses variantes utiles de l'axiome **Der** 3 sur les dérivateurs :

Der 3 a)[58] Si $Z \in \mathsf{Dia}$ est Hot-asphérique, il est $\mathbb{D}$-asphérique *i.e.* $\mathcal{A} = \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(Z)$ est pleinement fidèle.

a') Comme a), avec en plus la caractérisation de l'image essentielle de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{D}(Z)$, comme formée des $\mathbb{D}$-coefficients localements constants.

Der 3 b) Si $f : Z' \to Z$ dans Dia est une Hot-équivalence, alors c'est une $\mathbb{D}$-équivalence, *i.e.* le foncteur $f^* : \mathbb{D}(Z) \to \mathbb{D}(Z')$ induit une équivalence entre les sous-catégories formées des coefficients constants (ou encore un foncteur pleinement fidèle $\mathbb{D}(Z)_{\text{loc. const.}} \longrightarrow \mathbb{D}(Z')$).

b'_1) Si f comme ci-dessus, alors f est une $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète, *i.e.* le foncteur $f^* : \mathbb{D}(Z) \to \mathbb{D}(Z')$ induit un foncteur pleinement fidèle

[page 112]

entre les sous-catégories pleines formées des objets localement constants.

b'_2) Comme b'_1), mais avec $\mathbb{D}$-équivalence 2-complète au lieu de 1-complète, *i.e.* f^* induit une équivalence entre les sous-catégories formées des coefficients localement constants.

b''_{coh}) Si $f : Z' \to Z$ dans Dia est une Hot-équivalence, alors c'est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique complète, *i.e.* pour tout $F \in \mathsf{Ob}\ \mathbb{D}(Z)$ qui est localement constant, on a

$$H^*_{\mathbb{D}}(Z, F) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(Z', f^*F) \quad .$$

b''_{hom}) Si $f : Z' \to Z$ dans Dia est une Hot-équivalence, c'est une $\mathbb{D}$-équivalence homologique complète, *i.e.* pour tout $F \in \mathsf{Ob}\ \mathbb{D}(Z)$ qui est localement constant, on a[59]

$$H_*^{\mathbb{D}}(Z', f^*F) \xrightarrow{\sim} H_*^{\mathbb{D}}(Z, F) \quad .$$

[58] *cf.* aussi la série **Der** 3 c . . . , page 124 ff.
[59] *cf.* variante ± spéciale pour HOT pages 124-125.

On a le diagramme d'implications tautologiques pour les variantes de **Der** 3 :

$$\begin{tikzcd}
 & b'_2 \arrow[d, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] & & a' \arrow[ddd, Rightarrow] \\
 & b'_1 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & & \\
b''_{\mathrm{coh}} \arrow[dr, Rightarrow] & & b''_{\mathrm{hom}} \arrow[dl, Rightarrow] & \\
 & b \arrow[rr, Rightarrow] & & a
\end{tikzcd} \quad .$$

Dans tous les cas à ma connaissance, les dérivateurs satisfont la condition la plus forte **Der** 3 b'_2.

[page 113]

Je rappelle aussi la :

Définition 1 : Soit $f : X \to Y$ dans Dia. On dit que f est une $\mathbb{D}$-*équivalence cohomologique* (sous-entendu : "*complète*") si pour tout $\mathbb{D}$-coefficient F <u>localement</u> <u>constant</u> sur Y,

$$H^*_{\mathbb{D}}(Y, F) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(X, f^*F) \quad ;$$

on dit que f est une $\mathbb{D}$-*équivalence homologique* ("*complète*") si pour tout F comme [ci-]dessus,

$$H^{\mathbb{D}}_*(X, f^*F) \xrightarrow{\sim} H^{\mathbb{D}}_*(Y, F) \quad .$$

On dit que f est une $\mathbb{D}$-*équivalence* 1-*complète* (resp. 2-*complète*) si le foncteur

$$f^* : \mathbb{D}(Y)_{\text{loc. const.}} \longrightarrow \mathbb{D}(X)_{\text{loc. const.}}$$

est pleinement fidèle (resp. une équivalence).

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{D}\text{-équivalence 2-complète} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \mathbb{D}\text{-équivalence 1-complète} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\mathbb{D}\text{-équivalence cohomologique} \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathbb{D}\text{-équivalence homologique} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \mathbb{D}\text{-équivalence} &
\end{tikzcd} \quad .$$

Si dans les sous-catégories $\mathbb{D}(X)_{\text{loc. const.}}$ il y a une loi $*$ (associative, unitaire, commutative) et des <u>Hom</u> internes associés, préservés par les images inverses, alors les $\mathbb{D}$-équivalences cohomologiques sont déjà 1-complètes et sont donc des $\mathbb{D}$-équivalences homologiques, donc dans ce cas particulier

[page 114 vide]

[page 115]

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{D}\text{-équivalence 2-complète} & & \\
\Big\Downarrow & & \\
\mathbb{D}\text{-équivalence 1-complète} & \Longleftrightarrow & \mathbb{D}\text{-équivalence cohomologique} \\
& & \Big\Downarrow \\
& & \mathbb{D}\text{-équivalence homologique} \\
& & \Big\Downarrow \\
& & \mathbb{D}\text{-équivalence} \quad .
\end{array}$$

Dans $\mathbb{D} = \mathsf{HOT}$, toutes ces notions devraient être équivalentes, et équivalentes à la condition encore plus faible en apparence, que $f : X \to Y$ soit une Hot-équivalence. Mais je ne connais que HOT comme dérivateur où la $\mathbb{D}$-équivalence d'une flèche $f : X \to Y$ dans Dia implique déjà la $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique (complète), ou la $\mathbb{D}$-équivalence homologique (complète), voire même la $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète. (Je reviendrai là-dessus tantôt.)

Proposition 1. *Soit $f : X \to Y$ dans Dia. Conditions équivalentes :*

a) *Pour tout $y \in \mathsf{Ob}\, Y$, l'inclusion $X_y \to X/y$ est une $\mathbb{D}$-équivalence, et pour toute flèche $y' \to y$ dans Y, $X/y' \to X/y$ est une $\mathbb{D}$-équivalence.*

b) *Pour tout coefficient <u>constant</u> F sur Y, $f_* f^* F$ est localement constant, et se calcule "fibre par fibre".*

(C'est la prop. 1, p. 76).

Proposition 1′. Dual.

[page 116]

Définition 2. Sous les conditions équivalentes de la proposition 1, on dit que f est une $\mathbb{D}$-*fibration cohomologique faible.* Sous les conditions duales, que f est une $\mathbb{D}$-*fibration homologique faible.*

C'est ce que dans la définition 1, p. 77 j'appelais "$\mathbb{D}$-fibration cohomologique" ou "$\mathbb{D}$-fibration à gauche", et dualement. Maintenant la notion me paraît trop faible pour mériter ce nom, que je réserve pour le cas "complet".

Proposition 2. *Les $\mathbb{D}$-fibrations cohomologiques faibles sont stables par changements de base lisses, les $\mathbb{D}$-fibrations homologiques faibles stables par changements de base propres.*

Je devrais construire un exemple où f est une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique faible, et ne l'est plus après changement de base.

Proposition 3. *Soit*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

dans Dia*, avec p et p' des $\mathbb{D}$-fibrations cohomologiques faibles* (resp. *des $\mathbb{D}$-fibrations homologiques faibles*)*, soit $S_0 \subset S$ tel que $\pi_0(S_0) \to \pi_0(S)$ soit surjective. Pour que f soit une $\mathbb{D}$-équivalence, il suffit que les $f_s : X_s \to X'_s$, pour $s \in S_0$, le soient.*

Proposition 4. *Si $f : X \to Y$ dans* Dia *est $\mathbb{D}$-propre* (resp. *$\mathbb{D}$-lisse*)*, alors f est une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique* (resp. *homologique*) *faible si et seulement si pour tout F constant sur Y, $f_* f^* F$* (resp. *$f_! f^* F$*) *est localement constant sur Y. Et s'il en est ainsi, pour tout $Y' \to Y$ dans* Dia*, $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ est encore une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique* (resp. *homologique*) *faible.*

Immédiat sur le critère b) de la proposition 1.

[page 117]

Proposition 5. *Soit $f : X \to Y$ dans* Dia*. Considérons les conditions suivantes :*

a) *Pour tout $Y'' \to Y'$ sur Y dans* Dia*, si Y'' et Y' sont* Hot*-asphériques, alors*

$$X'' = X \times_Y Y'' \longrightarrow X' = X \times_Y Y'$$

est une $\mathbb{D}$-équivalence.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & X' \arrow[l] \arrow[d] & X'' \arrow[l] \arrow[d] \\ Y & Y' \arrow[l] & Y'' \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

a$'$) *Comme* a)*, mais en supposant $p : Y'' \to Y'$ une* Hot*-équivalence (au lieu de supposer Y', Y''* Hot*-asphériques).*

a$_1$) *Comme* a)*, mais en supposant (au lieu de l'asphéricité) que Y' a un objet final, et Y'' est la catégorie unité.*

a$_2$) *Comme* a)*, mais en supposant que Y' a un objet cofinal, et Y'' est la catégorie unité.*

b$_1$) *f est une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique faible, et le reste après tout changement de base.*

b$_2$) *f est une $\mathbb{D}$-fibration homologique faible, et le reste après tout changement de base.*

On a alors le diagramme d'implications tautologiques

$$\begin{tikzcd} & & a' \arrow[d, Rightarrow] & & \\ & & a \arrow[dll, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & \\ a_1 \arrow[r, Leftrightarrow] & b_1 & & b_2 \arrow[r, Leftrightarrow] & a_2 \end{tikzcd} \quad .$$

Lorsque $\mathbb{D}$ *satisfait à l'axiome* **Der** 3 a′ (p. 111), *alors toutes ces conditions, sauf* a′), *sont équivalentes. Lorsque* $\mathbb{D}$ *satisfait à l'axiome* **Der** 3 b'_1 *(ou seulement* **Der** 3 $\mathrm{b}''_{\mathrm{coh}}$ ou $\mathrm{b}''_{\mathrm{hom}}$*), alors toutes les conditions (y inclus* a′*) sont équivalentes.*

Pour simplifier, on va par la suite supposer que l'axiome **Der** 3 a') est satisfait.

Définition 3. Sous les conditions équivalentes a, a_1, b_1, a_2, b_2 de la proposition 4, on dit que f est une $\mathbb{D}$-*fibration.*

[page 118]

Proposition 6. *Supposons que* $f : X \to Y$ *dans* Dia *soit* $\mathbb{D}$-*propre* (resp. $\mathbb{D}$-*lisse*). *Conditions équivalentes :*

a) f *est une* $\mathbb{D}$-*fibration.*

b) f *est une* $\mathbb{D}$-*fibration cohomologique* (resp. *homologique*) *faible.*

c) *Pour tout* $y' \to y$ *dans* Y, $X/y' \to X/y$ (resp. $y\backslash X \to y'\backslash X$) *est une* $\mathbb{D}$-*équivalence.*

d) *Pour tout* F *constant sur* Y, $f_* f^* F$ (resp. $f_! f^* F$) *est localement constant sur* Y.

d′) *Pour tout* F *localement constant sur* Y, $f_* f^* F$ (resp. $f_! f^* F$) *est localement constant sur* Y.

Cela résulte formellement de Prop. 4 et Prop. 5.

Corollaire. *Supposons* $f : X \to Y$ $\mathcal{C}at$*-fibrant* (resp. $\mathcal{C}at$-*cofibrant*). *Pour que* f *soit une* $\mathbb{D}$-*fibration, il faut et il suffit que pour tout* $u : y \to y'$ *dans* Y, $u^* : X_{y'} \to X_y$ (resp. $u_* : X_y \to X_{y'}$) *soit une* $\mathbb{D}$-*équivalence.*

Il est immédiat que la notion de $\mathbb{D}$-fibration est stable par changement de base, mais il est douteux qu'elle le soit par composition.[60] (Ici encore, j'ai omis de faire un contre-exemple, avec des dérivateurs $\mathbb{D} = \mathsf{Der}(k\text{-}\mathsf{Mod})$ disons.) Autre lacune de la notion : il n'est pas clair, si f est une $\mathbb{D}$-fibration et F un $\mathbb{D}$-coefficient sur Y, si

$$f_* f^* F \qquad \text{et} \qquad f_! f^* F$$

[60] N.B. Si les $\mathbb{D}$-équivalences sont déjà des Hot-équivalences, alors la notion coïncide avec celle de Hot-fibration, et elle est stable par composition. Également, si les $\mathbb{D}$-équivalences sont au sens des $\mathbb{D}$-équivalences cohomologiques, ou homologiques, alors la notion coïncide avec celle des $\mathbb{D}$-fibrations cohomologiques (resp. homologiques) ci-dessous, et est également stable par composition.

se calculent "fibre par fibre", comme on s'attendrait dans le cas d'un "fibré".

Par contre, voici un résultat sympa :

[page 119]

Proposition 7. *Soit* $f : X \to Y$ *dans* Dia. *Conditions équivalentes :*

a) f *est une* $\mathbb{D}$*-équivalence "universelle"*, i.e. *pour tout* $Y' \to Y$ *dans* Dia, $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ *est une* $\mathbb{D}$*-équivalence.*

b) f *est une* $\mathbb{D}$*-fibration à fibres* $\mathbb{D}$*-asphériques.*

Définition 4. Sous les conditions équivalentes de la proposition 7, on dit que f est une $\mathbb{D}$-fibration *triviale.*

Mais attention, f peut-être une $\mathbb{D}$-fibration et une $\mathbb{D}$-équivalence, sans que la $\mathbb{D}$-fibration soit triviale *i.e.* sans que les fibres soient $\mathbb{D}$-asphériques, cf. p. 87 et suivantes. Et également (devrait remonter) même si $\mathbb{D}$ satisfait **Der** 3 b_2 (la plus forte des variantes de **Der** 3), donc quand <u>toutes</u> les conditions de la proposition 5, y inclus a'), sont équivalentes, celles-ci (*i.e.* que f soit une $\mathbb{D}$-fibration) n'impliquent pourtant pas, en général, que dans la condition a') on puisse se borner à $p : Y'' \to Y'$ une $\mathbb{D}$-équivalence (au lieu d'une Hot-équivalence). En d'autres termes, si on a un diagramme cartésien dans Dia

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[from=u, "f"'] & Y' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd} ,$$

avec f une $\mathbb{D}$-fibration, et p une $\mathbb{D}$-équivalence, il ne s'ensuit pas forcément que q soit une $\mathbb{D}$-équivalence. (Mais ce sera pourtant le cas, "bien sûr", si $\mathbb{D} = \mathsf{HOT}$.)

[page 120]

Par contre, on a :

Proposition 8. *Soit* $f : X \to Y$ *dans* Dia. *Conditions équivalentes :*

a) f *est une* $\mathbb{D}$*-fibration.*

b) *Pour tout* $p : Y'' \to Y'$ *sur* Y, *si* p *est une* $\mathbb{D}$*-équivalence* 1*-complète* (déf. 1, p. 113), *alors* $q : X'' \to X'$ *est une* $\mathbb{D}$*-équivalence.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l] \arrow[d, "f'"'] & X'' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f''"] \\ Y & Y' \arrow[l] & Y'' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

Corollaire. *Supposons que dans* Dia, *toute* $\mathbb{D}$*-équivalence soit* 1*-complète.* (N.B. Je ne connais que le dérivateur HOT pour satisfaire à cette condition, qui paraît quasiment caractéristique de HOT.) *Alors* $f : X \to Y$ *est une* $\mathbb{D}$*-fibration si et seulement si pour tout* $p : Y'' \to Y'$ *sur* Y, *si* p *est une* $\mathbb{D}$*-équivalence, alors* $q : X'' \to X'$ *aussi. Dans ce cas exceptionnel parmi les dérivateurs, la notion de* $\mathbb{D}$*-fibration est stable par composition* (ce qui est tautologique sur le critère que je viens de donner.)

On va renforcer la notion de $\mathbb{D}$-fibration, pour la rendre plus souple, et notamment stable par composition.

Proposition 9. *Soit $f : X \to Y$ dans* Dia. *Conditions équivalentes :*

a) *Pour tout $y \in Y$, $X_y \to X/y$ est une $\mathbb{D}$-<u>équivalence</u> <u>cohomologique</u>* (déf. 1, p. 113), *et de même pour $X/y \to X/y'$ pour toute flèche $y \to y'$ dans Y. Et ces conditions sur f restent valables après tout changement de base* (N.B. il suffit que la première de ces conditions le reste).

[page 121]

b) *pour tout $F \in \mathsf{Ob}\,\mathbb{D}(X)$ <u>localement</u> <u>constant</u>, f_*F est localement constant sur Y et se calcule "fibre par fibre" – et itou après tout changement de base.*

c) *Pour tout $p : Y'' \to Y'$ sur Y, si p est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique, alors il en est de même de $q : X'' \to X'$.*

c′) *Comme* c, *mais en supposant comme hypothèse sur p que Y'' soit la catégorie finale, et Y' ait un objet final.*

Démonstration. Dans l'ordre ($\pm$ tautologique)

$$\mathrm{a} \Longrightarrow \mathrm{b} \Longrightarrow \mathrm{c} \Longrightarrow \mathrm{c}' \Longrightarrow \mathrm{a} \quad .$$

Définition 5. Sous les conditions équivalentes de la proposition 9, on dit que f est une $\mathbb{D}$-*fibration cohomologique*. Sous les conditions duales, on dit que f est une $\mathbb{D}$-*fibration homologique*. On dit que f est une $\mathbb{D}$-*fibration forte*, si c'est à la fois une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique et une $\mathbb{D}$-fibration homologique.

Ces notions renforcent la notion de $\mathbb{D}$-fibration. Elles ont l'avantage de plus d'être <u>stables</u> <u>par</u> <u>composition</u>, non seulement par changement de base.

[page 122]

La notion de $\mathbb{D}$-fibration forte a été choisie pour coiffer les deux notions duales de $\mathbb{D}$-fibration cohomologique et homologique (à défaut d'une meilleur notion) tout en restant stable par composition. On pourrait exiger que pour tout

$$Y'' \longrightarrow Y'$$

sur Y, avec Y', Y'' Hot-asphériques, $q : X'' \to X'$ soit une $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète (voire même 2-complète), appeler ça les $\mathbb{D}$-*fibrations* 1-*complètes* (resp. 2-*complètes*). Ça renforce de façon assez élégante la notion de $\mathbb{D}$-fibration forte, mais a le grand tort de ne pas être stable par composition (que je sache!), sauf dans le cas particulier où on a des <u>Hom</u> internes sympas (cf. bas de la page 113), auquel cas la notion de $\mathbb{D}$-équivalence implique déjà celle de $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète,

`[page 123]`

donc aussi celle de $\mathbb{D}$-équivalence homologique. Donc dans ce cas

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}\text{-fibration cohomologique} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbb{D}\text{-fibration 1-complète} \\ \mathbb{D}\text{-fibration homologique} & , \end{tikzcd}$$

et il n'y a pas à chercher plus loin que les $\mathbb{D}$-fibrations cohomologiques.

On pourrait songer, il est vrai, à définir (dans le cas général) une notion plus forte, en exigeant que pour tout $p : Y'' \to Y'$ sur Y qui soit une $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète, $q : X'' \to X'$ soit aussi une $\mathbb{D}$-équivalence 1-complète. Cette fois-ci, la notion est stable par composition, mais elle me paraît néanmoins inutilisable (en dehors du cas qu'on vient de dire, où elle coïncide avec la notion de $\mathbb{D}$-fibration cohomologique, ou encore de $\mathbb{D}$-fibration forte), car n'étant pas en mesure de décrire les $\mathbb{D}$-équivalences 1-complètes, je suis aussi incapable de donner des exemples non triviaux de $\mathbb{D}$-fibrations "strictement 1-complètes".

Pour vérifier qu'une $f : X \to Y$ dans Dia est une $\mathbb{D}$-fibration cohomologique, il faut

`[page 124]`

savoir vérifier que des flèches $q : Z' \to Z$ dans Dia sont des $\mathbb{D}$-équivalences cohomologiques, donc que $H^*_{\mathbb{D}}(Z, F) \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathbb{D}}(Z', q^*(F))$ est `[un]` isomorphisme pour tout $F \in \mathsf{Ob}\ \mathbb{D}(Z)$ qui est localement constant sur Z. Or je ne sais vérifier un énoncé de cette nature (en dehors du cas où je sais d'avance que Z est complètement $\mathbb{D}$-asphérique, *i.e.* que les coefficients localement constants sur Z sont en fait constant) <u>que</u> si q est déjà une Hot-équivalence. C'est dire que je ne sais exhiber des $\mathbb{D}$-fibrations cohomologiques, que quand ce sont déjà des HOT-fibrations cohomologiques. Je veux, dans la suite, donner des critères utilisables pour des HOT-fibrations. Mais on va axiomatiser ces développements, en gardant un $\mathbb{D}$ général, sur lequel je vais faire une hypothèse si draconienne que pratiquement, je ne connais que le dérivateur HOT qui y satisfait. Il s'agit de c_1 ci dessous.

Der 3 c_1) Toute $\mathbb{D}$-équivalence est une $\mathbb{D}$-équivalence cohomologique.

c_2) Toute $\mathbb{D}$-équivalence est une $\mathbb{D}$-équivalence homologique.

`[page 125]`

c') Toute $\mathbb{D}$-équivalence est 1-complète.

c'') Toute $\mathbb{D}$-équivalence est 2-complète.

N.B. On a

$$\begin{tikzcd} & c'' \arrow[d, Rightarrow] & \\ & c' \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ c_1 & & c_2 \end{tikzcd}$$

tautologiquement. Je ne connais que HOT pour satisfaire l'ensemble des deux plus faibles conditions c_1, c_2. Et en fait, sous réserve d'écrire la théorie du dérivateur HOT, il doit être vrai qu'elle satisfait même la forme la plus forte c''. (Et les HOT-équivalences doivent être simplement les Hot-équivalences.) (Cf. le "lemme" p. 109.)

La proposition suivante est une tautologie.

Proposition 10. *Supposons que* $\mathbb{D}$ *satisfasse la condition* **Der** 3 c_1 (p. 124), *par exemple* $\mathbb{D} = \mathsf{HOT}$. *Alors la notion de* $\mathbb{D}$*-fibration coïncide avec celle de* $\mathbb{D}$*-fibration cohomologique. Elle est donc stable par composition. Pour que* $f : X \to Y$ *soit une* $\mathbb{D}$*-fibration, il faut et il suffit que pour* $p : Y'' \to Y'$ *sur* Y*, si* p *est une* $\mathbb{D}$*-équivalence, il en est de même de* $q : X'' \to X'$.

Corollaire 1. *Si* $f : X \to Y$ *dans* Dia *est* $\mathbb{D}$*-propre, alors* f *est une* $\mathbb{D}$*-fibration cohomologique si et seulement si pour toute flèche* $y' \to y$ *dans* Y, $X/y' \to X/y$ *est une* $\mathbb{D}$*-équivalence* (i.e. *si et seulement si* f *est une* $\mathbb{D}$*-fibration cohomologique faible*).

Appliquer le critère c) de [1a] prop. 6.

[page 126]

Corollaire 2. *Supposons que* $\mathbb{D}$ *satisfasse* **Der** 3 $(\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2)$ (par exemple $\mathbb{D} = \mathsf{HOT}$). *Alors pour une flèche* $f : X \to Y$ *dans* Dia, *il revient au même que* f *soit une* $\mathbb{D}$*-fibration, une* $\mathbb{D}$*-fibration cohomologique, ou une* $\mathbb{D}$*-fibration homologique. Si* f *est propre* (resp. *lisse*), *il revient au même de dire que* f *est une* $\mathbb{D}$*-fibration cohomologique* (resp. *homologique*), *faible.*

On voit donc que dans $\mathcal{C}at$, on doit avoir une seule notion raisonnable de HOT-fibration, qui coïncidera avec celle de HOT-fibration cohomologique ou homologique. Mais pour que cette notion soit dès à présent disponible, il faudrait que le dérivateur HOT soit déjà construit sur le domaine Dia $= \mathcal{C}at$ tout entier. Or ce n'est pas chose faite encore (et il n'a donc pas pu être question de prouver les propriétés de HOT dont il vient d'être question, disons la plus forte **Der** 3 c'').

Néanmoins, je voudrais développer de façon directe ("élémentaire") la notion de Hot-fibration, sans me réferer à la théorie du dérivateur HOT, et aux développements théoriques précédents.