LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre II

Cofinalité (à droite et à gauche)

(préliminaire à la cofinalité cohomologique)

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX 2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

[page 1]

1 Cofinalité cohomologique

Soit

$$\alpha : C' \longrightarrow C$$

un foncteur de (petites) catégories, $\mathcal{M}$ une catégorie ayant les $\varprojlim$ pertinentes, F un préfaisceau (donc contravariant en i) sur C à valeurs dans $\mathcal{M}$. On a un homomorphisme canonique dans $\mathcal{M}$

(1) $$\varprojlim_{C} F \longrightarrow \varprojlim_{C'} \underbrace{\alpha^*(F)}_{F \circ \alpha}$$

et on veut des conditions sur α pour que ce soit toujours un isomorphisme ([1]). On est ramené aussitôt au cas où $\mathcal{M} = (\mathrm{Ens})$. Disons qu'une catégorie I est *faiblement filtrante à gauche* si $I \neq \emptyset$ et si $\forall\, i', i'' \in \mathrm{Ob}\, I$, $\exists\, i \in \mathrm{Ob}\, I$ et des flèches

$$\begin{tikzcd} & i' \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & i''. \end{tikzcd}$$

Cela signifie aussi que $\mathrm{Ob}\, I$ en tant qu'ensemble ordonné est filtrant à gauche.

Proposition. *Pour que* (1) *soit toujours un isomorphisme* (α *'anodin pour* $\varprojlim$ *'), il suffit que pour tout* $x_0 \in \mathrm{Ob}\, C$, *la catégorie* $x_0 \backslash C'$ *des couples* (x', u), *avec* $x' \in \mathrm{Ob}\, C'$, $u : \alpha(x') \longrightarrow x$, *soit faiblement filtrante à gauche* ([2], [3]).

Ceci n'implique pas la conclusion plus forte

$$F \underbrace{\xrightarrow{\sim}}_{\text{adj.}} \alpha_* \alpha^* F$$

que le morphisme d'adjonction canonique soit un isomorphisme. Pour qu'il soit ainsi, il suffit que $\forall\, x_0 \in C$, le foncteur $\alpha/x_0 : C'/x_0 \longrightarrow C/x_0$ induit par α soit 'anodin pour les $\varprojlim$ ', ce qui signifie aussi que pour toute flèche $u : x_1 \longrightarrow x_0$ dans C, la catégorie $\underset{u}{\diagdown C' \diagup}$ formée des triples (x', ξ, η) avec $x' \in \mathrm{Ob}\, C'$ et $\xi : x_1 \longrightarrow \alpha(x')$, $\eta : \alpha(x') \longrightarrow x_0$ rendant commutatif

[page 2]

le diagramme

[1] On dit alors que α est *cofinal,* cf. SGA 4, I 8.1, ou 3.3, p. 45.

[2] Cf. amélioration des remarques p. 5.

[3] Cf. 3.2, p. 43-44, pour conditions nécessaires et suffisantes de cofinalité.

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\xi"'] & & x_0 \\ & \alpha(x'), \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

est faiblement filtrante à gauche.

Plus généralement, considérons

$$\begin{tikzcd} X' = C' \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f'"'] & & C = X \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

et posons nous la question quand l'homomorphisme fonctoriel, par rapport à un préfaisceau F variable sur X,

$$f_*(F) \longrightarrow f'_*(\alpha^*(F))$$

est toujours un isomorphisme. (Le cas précédent est celui où $S = X$, $f = \mathrm{id}_X$.) On trouve qu'il suffit que $\forall\, s_0 \in \mathrm{Ob}\, S$, le foncteur

$$\alpha/s_0 : X'/s_0 \longrightarrow X/s_0$$

soit 'anodin pour les $\varprojlim$ ', et pour ceci, il suffit que pour `[tout]` objet (x_0, u_0) de X/s_0 (où

$$f(x_0) \xrightarrow{u_0} s_0)$$

la catégorie $(x_0, u_0)\backslash(X'/s_0)$ soit faiblement filtrante à gauche.

`[page 3]`

Cette catégorie s'interprète comme celle des triples (x', ξ, u) avec

$$\begin{cases} x' \in \mathrm{Ob}\, C' \\ u : g(x') = f(\alpha(x')) \longrightarrow s_0 \\ \xi : x_0 \longrightarrow \alpha(x') \end{cases}$$

`[plutôt` $f'(x')$ `au lieu de` $g(x')$`]` de façon à rendre commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} f(x_0) \arrow[rr, "u_0"] \arrow[dr, "f(\xi)"'] & & s_0 \\ & f(\alpha(x')). \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Je voudrais dégager des variantes de ces énoncés dans le cadre cohomologique, les foncteurs $\varprojlim$ étant remplacés par des $R\Gamma$ (de préfaisceaux abéliens p.ex. - mais on pense aussi aux 'cas non commutatifs', définis par des dérivateurs notamment.)

Si I est une catégorie *ordonnée finie*, la condition [faiblement] filtrante à gauche équivaut à l'existence d'un objet initial, ce qui implique que I est contractile. Dans les énoncés précedents, il se pourrait que la bonne philosophie soit de remplacer partout 'faiblement filtrante à gauche' par 'contractile'. Si p.ex. C est la catégorie finale, alors remplacer la condition que C' soit filtrante à gauche, par l'acyclicité. C'est en tous cas en accord avec l'esprit de l'axiome Der_5 (cas où J est la catégorie finale). En effet, dans le cas où $C = e$, la condition que α soit anodin pour les $\varprojlim$ équivaut visiblement à dire que le foncteur $\alpha^* : \mathcal{M} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(C'^o, \mathcal{M})$, associant à tout $F \in \mathcal{M}$ le préfaisceau constant de valeur F

[page 4]

sur C', donne un morphisme d'adjonction

$$\varprojlim_e F = F \longrightarrow \alpha_*(\alpha^*(F)) = \varprojlim_{C'} \alpha^* F$$

qui est un isomorphisme. Et l'axiome Der_5 assure qu'il doit en être ainsi si C' est contractile.

La condition filtrante dans la proposition est d'ailleurs une condition *suffisante* d'anodinité, mais nullement nécessaire. Si p.ex. C est la catégorie finale, alors la condition d'anodinité pour $C' \longrightarrow C$ est simplement que C' soit connexe non vide, i.e. $\pi_0(C') = \{0\}$. (Condition qui visiblement néglige les π_i supérieurs.)

Soit $\boxed{\alpha : X' \longrightarrow X}$ un foncteur de petites catégories. La condition suggérée par la proposition, que les $x_0\backslash X'$ soient contractiles, signifie que α est une hot-équivalence co-stricte, i.e. que $\alpha^o : X'^o \longrightarrow X^o$ est une hot-équivalence 'localement sur X^o', donc aussi globalement. Si α

[page 5]

lui-même était une hot-équivalence stricte, au lieu de α^o, alors on aurait par Der_5, que pour $F \in \mathbf{D}(X)$, $F \xrightarrow{\sim} \alpha_*\alpha^*F$ ($\mathbf{D}$ dérivateur à gauche), ce qui est bien plus fort que $\Gamma_{\mathbf{D}}(X, F) \xrightarrow[\sim]{\alpha^*} \Gamma_{\mathbf{D}}(X', \alpha^*F)$. La condition duale implique (si $\mathbf{D}$ [est un] dérivateur à droite) $\alpha_!\alpha^*F \xrightarrow{\sim} F$. Mais est-il raisonnable de s'attendre qu'elle implique aussi la condition 'du côté cohomologie, au lieu de l'homologie',

$$\Gamma_{\mathbf{D}}(X, F) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathbf{D}}(X', \alpha^*(F)) \ ?$$

Le premier cas, qui devrait emporter conviction, est celui du dérivateur DerAb, i.e. des catégories dérivées des faisceaux abéliens :

Question. *Soit $\alpha : X' \longrightarrow X$ une* hot-*équivalence co-stricte, F un préfaisceau abélien sur X. A-t-on alors $H^i(X, F) \xrightarrow[\sim]{\alpha^*} H^i(X', \alpha^*(F))$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$?*

Si X admet un objet initial $\emptyset$, alors $\emptyset\backslash X' \simeq X'$, donc X' contractile, donc c'est OK pour F constant.

Remarque. Je m'aperçois que dans la proposition 1, au lieu de la condition que les $x\backslash C'$ soient faiblement filtrantes à gauche, il suffirait qu'elles soient non vides et connexes, i.e.

0-connexes ([4]). Le fait que les $x\backslash C'$ non vide implique que $\varprojlim_{C} \longrightarrow \varprojlim_{C'}$ soit *injectif.* Pour la sujectivité, si $\xi' \in \varprojlim_{C'}$ (cas ensembliste), on définit $\xi \in \varprojlim_{C}$ par les $\xi(x) \in F(x)$ à l'aide de

[page 6]

$$x \xrightarrow{u} \alpha(x')$$

en prenant $u^*(\xi(x'))$ (où $\xi(x') \in (\alpha^*(F))(x') = F(\alpha(x'))$), le point essentiel est de montrer que les $u^*(\xi(x'))$ ne dépendent que de x, pas du choix de $(x', u) \in x\backslash C'$. Or pour (x', u) variable dans $x\backslash C'$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Ob}(x\backslash C') &\longrightarrow F(x) \\ (x', u) &\longmapsto u^*(\xi(x')) \end{aligned}$$

est telle que s'il existe une flèche

$$(x', u) \xrightarrow{u'} (\bar{x}', \bar{u}) \qquad \text{où} \qquad u' : x' \longrightarrow \bar{x}'$$

(donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \alpha(x') \arrow[dd, "\alpha(u')"] \\ x \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "\bar{u}"'] & \\ & \alpha(\bar{x}') \end{tikzcd}$$

est commutatif), alors $\varphi(x', u) = \varphi(\bar{x}', \bar{u})$. Donc φ est constant sur les composantes connexes de $x\backslash C'$, donc constant si $x\backslash C'$ est 0-connexe, d'où $\xi(x)$. On prouve alors aussitôt que pour x variable,

$$\xi \overset{\text{déf}}{=} (\xi(x))_{x \in \mathrm{Ob}\, C} \simeq \varprojlim F, \qquad \texttt{[plutôt} \ \in \varprojlim F, \texttt{]}$$

et que $\alpha^*(\xi) = \xi'$, cqfd.

On peut dire que pour $x_0 \in \mathrm{Ob}\, C_0$ fixé, si on regarde le préfaisceau *constant* sur $x_0\backslash C'$ de valeur $F(x_0)$, soit Φ_{x_0}, l'application

$$(x', u) \longmapsto \xi^*(u') : x_0\backslash C' \longrightarrow F(x_0)$$

peut être regardée comme une section de ce préfaisceau sur $x\backslash C'$, défini par $\xi' \in \varprojlim_{C'} \alpha^* F$, donc on a

$$\varprojlim_{C'} \alpha^* F \xrightarrow{c_{x_0}} \Gamma(x_0\backslash C', \Phi_{x_0}) \qquad (\xleftarrow{\sim} F(x_0) \text{ si } x_0\backslash C \text{ 0-connexe}).$$

Si on a $\boxed{x_0 \xrightarrow{v} x_1}$ dans C', on en déduit

$$x_1\backslash C' \xrightarrow{V} x_0\backslash C'$$

(les $x\backslash C'$ sont les fibres d'une *catégorie fibrée* $C\backslash C'$ sur C …) et on a $F(x_1) \longrightarrow F(x_0)$, d'où $\boxed{\Phi_{x_1} \longrightarrow V^*\Phi_{x_0}}$ pour les faisceaux constants correspondants sur $x_0\backslash C'$ resp. $x_1\backslash C'$

[4] Cela signifie aussi que α est W_0-coasphérique. Pour un traitement ab ovo, cf. prop. 3.2, page 43.

[page 7]

et on a commutativité dans

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim\limits_{C'} \alpha^* F \arrow[r, "c_{x_1}"] \arrow[d, "c_{x_0}"'] & \Gamma(x_0\backslash C', F(x_0)) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_0(x_0\backslash C'), F(x_0)) \arrow[d, "V^*"] \\
\mathrm{Hom}(\pi_0(x_1\backslash C'), F(x_1)) \simeq \Gamma(x_1\backslash C', F(x_1)) \arrow[r, "\underset{(F(x_1) \to F(x_0))}{v^*}"'] & \Gamma(x_1\backslash C', F(x_0)) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_0(x_1\backslash C'), F(x_0))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_0(x_1\backslash C') \arrow[r, "\pi_0(V)"] \arrow[d, dotted] & \pi_0(x_0\backslash C') \arrow[d, dotted] \\
F(x_1) \arrow[r, "F(v)"] & F(x_0)
\end{tikzcd}$$

commutatif.

On considère le préfaisceau d'ensembles

$$x \longmapsto \pi_0(x\backslash C') \qquad \text{sur } C,$$

appelons-le $\pi_0(C'/C)$, on aura un morphisme canonique

$$\boxed{\varprojlim_{C'} \alpha^*(F) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\substack{\text{préfaisceaux} \\ \text{d'ensembles sur } C}}(\pi_0(C'/C), F),}$$

sans doute toujours [un] isomorphisme.

Si on travaille dans la catégorie dérivée des préfaisceaux des k-modules (k un anneau), la formule précédente suggère conjecturalement

$$\boxed{\mathbf{R}\Gamma(C', \alpha^* F) \simeq \mathbf{R}\underbrace{\mathrm{Hom}}_{\text{Hom internes}}(\underbrace{\mathbf{L}\alpha_!(k_{C'})}_{\substack{\text{homologie} \\ \text{relative de} \\ C' \text{ sur } C}}, F).}$$

[page 8]

L'augmentation canonique

$$\mathbf{L}\alpha_!(k_{C'}) \longrightarrow k_C$$

redonne, en prenant les $\mathbf{R}$Hom dans F,

$$\mathbf{R}\Gamma(C, F) \longrightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathbf{L}\alpha_!(k_{C'}), F) \xleftarrow{\ \sim\ } \mathbf{R}\Gamma(C', \alpha^* F)$$

l'homomorphisme canonique de 'contravariance' de la cohomologie.

Si par contre on travaille avec le dérivateur non additif HOT, donc F un 'type d'homotopie relatif' sur C, on doit avoir

$$\boxed{\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{HOT}}(C', \alpha^* F) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbf{R}\Gamma(C, \underbrace{\mathrm{Hom}}_{\substack{\text{Hom interne} \\ \text{de la catégorie des} \\ \text{types d'homotopie} \\ \text{relatifs sur } C}}(\alpha_!(\underbrace{e_{C'}}_{\substack{\text{objet final} \\ \text{de HOT}(C'), \\ \text{type d'homotopie} \\ \text{relatif final} \\ \text{sur } C'}}), F)).}$$

En fait, ces formules sont quasi-tautologiques, si on admet l'existence des foncteurs $\alpha_!$ comme adjoints *à gauche* des α^*. Dans le cas abélien, disons,

[page 9]

l'isomorphie des H^0 des deux membres est la formule d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{C'}(k_{C'}, \alpha^* F) \simeq \mathrm{Hom}_C(\alpha_!(k_{C'}), F),$$

d'où l'isomorphie pour les H^i des deux membres, par décalage. De même dans le cas de HOT, l'isomorphie canonique des π_0 des deux membres est la formule d'adjonction. Pour avoir l'isomorphisme plus fin dans $\mathbf{D}(e)$, la catégorie fondamentale du dérivateur envisagé, en termes de Hom internes, on doit admettre l'existence d'objets unité (les k_X dans un cas, les e_X [plutôt ε_X] dans l'autre), compatibles avec images inverses, de telle façon [que] $\mathrm{Hom\,int}(\varepsilon_X, \underbrace{F}_{\in \mathbf{D}_X}) \simeq F$. On aura

$$\Gamma(C', \alpha^* F) \overset{\text{déf}}{=} f'_*(\alpha^*(F)) \simeq f_*(\alpha_*\alpha^*(F)),$$

et la question est donc de donner une interprétation de $\alpha_*\alpha^* F$ comme

$$\alpha_*\alpha^* F \simeq \mathrm{Hom\,int}(\alpha_!(\varepsilon_{C'}), F) \qquad \text{dans } \mathbf{D}(C).$$

Pour ceci, on va écrire

$$\alpha^*(F) \simeq \mathrm{Hom\,int}(\varepsilon_{C'}, F),$$

et la formule doit résulter d'une 'formule d'adjonction interne'

[page 10]

$$? \qquad \boxed{\alpha_*(\mathrm{Hom\,int}_{C'}(G', \alpha^* F)) \simeq \mathrm{Hom\,int}_C(\alpha_! G', F).}$$

(*Formule d'adjonction 'interne',* pour $\alpha_!$ et α^*, valable en principe pour *tout* $\alpha : C' \longrightarrow C$ dans Diag, tout G' dans $\mathbf{D}(C')$ et tout F dans $\mathbf{D}(C)$.)

Comment prouver cette formule ? En prenant l'opération produit $\otimes$ associé à l'opération Hom int, on est ramené (en prenant les foncteurs contravariants associés) à une formule

$$G \otimes \alpha_! G' \xrightarrow{\sim} \alpha_!(\alpha^* G \otimes G').$$

On trouve par adjonction un homomorphisme canonique, il faut voir s'il est toujours [un] isomorphisme.

[page 11]

2 Les catégories localement filtrantes sont les catégories localement totalement 0-connexes

Soit $\mathcal{T}$ un topos. On dit que $\mathcal{T}$ est *irréductible* si l'ensemble ordonné $\mathrm{Ouv}(\mathcal{T})$ des sous-objets de $e_{\mathcal{T}}$ a la propriété suivante : a) $\mathrm{Ouv}(\mathcal{T})$ n'est pas réduit à un élément, i.e. $\emptyset_{\mathcal{T}} \longrightarrow e_{\mathcal{T}}$ n'est pas un isomorphisme ($\mathcal{T}$ n'est pas identique à son sous-topos vide). b) Si U', U'' sont deux objets 'non vides', i.e. non initiaux, de $\mathrm{Ouv}(\mathcal{T})$, leur intersection est 'non vide'. Il revient au même pour b) de dire que si $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}''$ sont deux sous-topos fermés distinct de $\mathcal{T}$, alors leur supremum $\mathcal{T}' \cup \mathcal{T}''$ est distinct de $\mathcal{T}$, ou encore que tout ouvert de $\mathcal{T}$ est connexe. On dit que $\mathcal{T}$ est *localement irréductible* si a) $\mathcal{T}$ est localement connexe (i.e. chaque faisceau sur $\mathcal{T}$ est somme de faisceaux 0-connexes), et si b) pour tout faisceau 0-connexe U sur $\mathcal{T}$, le topos induit $\mathcal{T}/U$ est irréductible (i.e. l'ensemble ordonné $\mathrm{Ouv}(U)$ des sous-objets de U a la propriété b) ci-dessus (a) signifie simplement que $U \not\simeq \emptyset_{\mathcal{T}}$, i.e. que U n'est pas objet initial dans $\mathcal{T}^\wedge$; ou plus simplement) : tout sous-faisceau d'un faisceau connexe est connexe ([5]) ([6]).

Quand $\mathcal{T}$ est de la forme $\mathrm{Top}(T)$, où T est un espace topologique, alors $\mathcal{T}$ irréductible signifie que T est irréductible (car alors $\mathrm{Ouv}(\mathcal{T}) \simeq \mathrm{Ouv}(T)$). Cela implique déjà trivialement que T est localement connexe (tout ouvert est somme disjoint d'ouverts connexes), donc $\mathrm{Top}(\mathcal{T})$ est localement connexe. De plus, cela implique aussi que $\mathrm{Top}(T)$ est localement irréductible ([7]). (**NB** Les objets 0-connexes

[page 12]

de $\mathrm{Top}(T)^\wedge$, i.e. les faisceaux d'ensembles 0-connexes sur T, sont ceux dont la 'fibre générique' a exactement un point ...) Aussi $\mathcal{T} = \mathrm{Top}(T)$ est localement irréductible si et seulement si T [est] localement connexe, et les composantes connexes de T sont irréductibles, i.e. si et seulement si $T = \coprod_i T_i$, les T_i irréductibles.

Si $\mathcal{T}$ est de la forme $\mathrm{Top}(X)$, X une catégorie, on sait que $\mathcal{T}$ est localement connexe (et même localement ∞-connexe). On voit d'autre part que $\mathcal{T}$ est irréductible si et seulement si $\mathrm{Esp}(X)$ (l'espace topologique associé, dont l'ensemble sous-jacent est $\mathrm{Ob}\,X$) est irréductible ([8]) ; et on dit alors que X est irréductible ([9]). Comme les composantes connexes de X et celles de $\mathrm{Esp}(X)$ ou $\mathrm{Top}(X) = \mathcal{T}$ se correspondent, on voit donc que les conditions suivantes sont équivalentes : a) le topos $\mathrm{Top}(X)$ est localement irréductible, b)

[5] **NB** Irréductible n'implique pas localement irréductible, pas plus que connexe n'implique pas localement connexe etc.

[6] $\mathcal{T}$ est localement irréductible si et seulement s'il a un ensemble des générateurs (U_α), avec les U_α irréductibles (donc 0-connexes, donc $\mathcal{T}$ est localement connexe).

[7] expliciter la démonstration.

[8] car les ouverts de $\mathrm{Top}(X)$, ceux de $\mathrm{Esp}(X)$ et ceux de X se correspondent.

[9] Cela signifie aussi que pour x, y dans X, $\exists\, z$ avec $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & x \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & y \end{tikzcd}$, i.e. $\mathrm{Ord}(X)$ est filtrant à gauche.

Esp(X) est localement irréductible, c) les composantes connexes de X sont irréductibles, d) les X/x `[sont]` irréductibles. On dit alors que X est localement irréductible ([10]).

Cela implique donc que pour tout X' étale sur X, avec X' 0-connexe, X' est irréductible.

Dire conditions équivalentes.

a) Top(X) est localement irréductible.

b) Les X/x `[sont]` irréductibles.

c) Tout objet 0-connexe de $X^\wedge$ est irréductible.

d) Les composantes connexes de X sont faiblement cofiltrantes (i.e. faiblement filtrantes à gauche).

e) Condition PS 1_g de SGA 4, I 2.

Si X est `[une]` catégorie, X irréductible signifie aussi que $X \neq \emptyset$ et $\forall\, x, y \in \operatorname{Ob} X$, `[il]` existe `[un]` s avec $s \begin{smallmatrix} \nearrow x \\ \searrow y \end{smallmatrix}$. (Cela signifie aussi que X est *faiblement filtrante* ([11]) à gauche, ou faiblement cofiltrante.) X localement irreductible signifie que pour x, y *appartenant à une même composante connexe,* `[il]` existe `[un]` s avec $s \begin{smallmatrix} \nearrow x \\ \searrow y \end{smallmatrix}$,

`[page 13]`

i.e. $X/[x] \cap X/[y] \neq \emptyset$ (où $[x]$ est considéré comme élément de l'ensemble ordonné $\operatorname{Ob} X$). Il revient encore au même de dire que les catégories induites X/x sont irréductibles ([12]).

Exemple. Une catégorie *ayant un objet initiale,* ou seulement un 'plus petit objet', est irréductible. Inversement, si l'ensemble *ordonné* Ord(X) associé à X (quotient de Ob(X) par la relation d'équivalence associé à son préordre) est fini, p.ex. X fini, ou seulement localement fini, p.ex. X localement fini (i.e. les catégories X/x finies), alors si X est irréductible, $\operatorname{Ob} X$ a un plus petit élément, i.e. X a un plus petit objet. C'est vrai plus généralement encore, si Ord(X) est artinien, i.e. toute suite décroissante dans Ord(X) est stationnaire.

Mais la condition intéressante est la condition topossique de *locale* irréductibilité, qui équivaut : I pseudo-filtrante à gauche, i.e. les composantes connexes de I filtrantes, i.e. les conditions PS 1, PS 2

PS 1 Tout diagramme $\begin{smallmatrix} x \searrow \\ y \nearrow \end{smallmatrix} s$ se complète en $z \begin{smallmatrix} \nearrow x \searrow \\ \searrow y \nearrow \end{smallmatrix} s$ *commutatif.*

PS 2 Pour toute double flèche $x \rightrightarrows y$, `[il]` existe un égalisateur $z \longrightarrow x \rightrightarrows y$.

[10] Faux, on a (a $\Longleftrightarrow$ d) $\Longrightarrow$ (b $\Longleftrightarrow$ c) X irréductible n'implique *pas* que les X/x le soient, exemple $X = (0 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 1)$ $(\alpha \neq \beta)$, on a $X/1 = \begin{smallmatrix} 0' \searrow \\ 0'' \nearrow \end{smallmatrix} 1$, qui n'est *pas* irréductible, ni localement irréductible puisqu'il est connexe. Pourtant il est étale sur X.

[11] Il est mieux l'appeler *pseudo-filtrante,* et réservons faiblement filtrante à : localement faiblement filtrante + connexe.

[12] faux, cf. annotation marginale plus haut.

`[page 14]`

En résumé, on a la

Proposition 2.1. *Soit X un objet de* Cat. *Conditions équivalentes :*

a) Le topos associé $\mathrm{Top}(X)$ *est localement irréductible, i.e. (étant localement connexe) pour tout objet F de $X^\wedge$ et tout sous-objet F' de F, si F est connexe, F' l'est.*

a′) Pour tout X' étale sur X, si X' est connexe, tout ouvert de X' est connexe.

a″) Tout ouvert d'une catégorie localisée X/a ($a \in \mathrm{Ob}\,X$) est connexe (i.e. X/a est une catégorie irréductible, i.e. le topos $\mathrm{Top}(X/a)$ *l'est).*

b) Pour tout objet a de X, $\mathrm{Esp}(X/a)$ *est un espace topologique irréductible.*

c) Les catégories X/a sont faiblement filtrantes à gauche (ou faiblement cofiltrantes), i.e. pour deux objets ξ, η d'une telle catégorie, `[il]` *existe un objet ζ et deux flèches*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \xi \\ \zeta \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \eta \end{tikzcd}$$

(i.e. l'ensemble ordonné Ord(X/a) associé à X/a est filtrant à gauche)

c′) Pour tout diagramme en traits pleins dans X,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[dr] & \\ z \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & & s \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

, on peut le compléter en un carré commutatif *comme indiqué. (Condition* PS 1 *des catégories localement filtrantes.)*

Ces conditions impliquent que toute composante connexe X_α de X est irréductible, ou ce qui revient au même, que $\mathrm{Esp}(X_\alpha)$ est irréductible,

`[page 15]`

mais ne sont pas impliquées par celle-ci.

Contrexemple, la catégorie 0-connexe $0 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 1$, avec $\alpha \neq \beta$. On a $X/1 \simeq \begin{smallmatrix} 0 & \searrow \\ & & 1 \\ 0' & \nearrow \end{smallmatrix}$, qui n'est *pas* irréductible, puisque $\Phi\backslash\{1\} \simeq \varepsilon$ est un ouvert disconnexe `[`$\Phi = X/1$`,` $\varepsilon = \bullet\ \bullet$`]`.

J'aimerais une condition 'topossique' sur X, équivalente à X 'pseudo-filtrante à gauche', i.e. les composantes connexes filtrantes, i.e. PS 1^{opp} (condition c′) ci-dessus) + PS 2^{opp} (condition de la double flèche), et qui de plus implique que tout objet 0-connexe de $X^\wedge$ (i.e. tout objet X' de Cat étale sur X et 0-connexe) soit W_∞-asphérique. Et je songe à la notion de 'totale asphéricité' de Pursuing Stacks.

Définition 2.2. ([13]) Soit X une catégorie.

a) On dit que X est *faiblement filtrante* ([14]) si $X \neq \emptyset$, et si pour $a, b \in \mathrm{Ob}\,X$, $\exists\ c$ et des flèches $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & a \\ c \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & b \end{tikzcd}$, i.e. $X/[a] \cap X/[b] \neq \emptyset$. (**NB** X est faiblement filtrante ([15]) à gauche si et seulement si Ord(X) l'est, i.e. est filtrante à gauche. **ReNB** X faiblement filtrante $\Longrightarrow$ X 0-connexe.)

[13] Cf. tableau récapitulatif pages 97, 98 et surtout 99.

[14] dire plutôt *pseudo-filtrante*, réserver 'faiblement filtrante' à 'localement faiblement filtrante' (ou *irréductible*) + connexe, condition PS $1'_{\mathrm{g}}$.

[15] pseudo-filtrante.

b) On dit que X est *localement faiblement filtrante à gauche* ou plus simplement préfiltrante à gauche si les catégories X/x ($x \in \mathrm{Ob}\, X$) sont faiblement filtrantes à gauche, i.e. si X satisfait la condition : $\forall$ diagrammes $\begin{tikzcd}[row sep=small] a \arrow[dr] & \\ & x \\ b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$, $\exists$ c dans X et des flèches de c dans a, b rendant *commutatif* le carré

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & a \arrow[dr] & \\ c \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & & x \\ & b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

([16]). (**NB** Cette condition implique que $\mathrm{Ord}(X)$ est localement faiblement filtrant, mais n'équivaut pas à cette dernière. Exemple, $X = 0 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 1$, $X/1 = \begin{tikzcd}[row sep=tiny] 0' \arrow[dr] & \\ & 1 \\ 0'' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ n'est pas faiblement filtrante à gauche.)

[page 16]

NB Si X localement faiblement filtrante à gauche, tout X' étale sur X itou.

NB ([17]) X localement faiblement filtrante à gauche $\Longleftrightarrow$ les composantes connexes sont faiblement filtrantes à gauche, ou encore si X est 0-connexe, X localement faiblement filtrante à gauche $\Longleftrightarrow$ X est faiblement filtrante ([18]) à gauche. On a en effet $\Longleftarrow$ tautologiquement ([19]), et $\Longrightarrow$ en montrant que si PS 1 [est] satisfait, alors $PS(a,b)$ défini par $X/[a] \cap X/[b] \neq \emptyset$ est une relation d'équivalence, impliquée par la relation $C(a,b)$: $\{\mathrm{Hom}(a,b) \neq \emptyset$ *ou* $\mathrm{Hom}(b,a) \neq \emptyset\}$, donc la relation d'équivalence (homotopie) engendrée par $C(a,b)$ est plus fine que $PS(a,b)$.

c) On dit que X est *filtrante à gauche*, ou *cofiltrante,* si elle est faiblement filtrante ([20]) à gauche (donc *non vide*), et satisfait (en plus de la condition PS $1'_{\mathrm{g}}$ de a)) la condition PS 2_{g} suivante :

Pour toute double flèche $a \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} b$, [il] existe [une] flèche $c \xrightarrow{w} a$ telle que $uw = vw$ ([21]).

Il revient au même de dire que X satisfait les trois conditions a$'$) X est 0-connexe (plus forte que $X \neq \emptyset$), b$'$) PS 1, i.e. X localement faiblement filtrante à gauche et c$'$) PS 2 comme avant.

d) On dit que X est *localement filtrante à gauche* si les composantes connexes sont filtrantes à gauche, i.e. si X satisfait les conditions PS 1 et PS 2 ('pseudo-cofiltrante' dans la terminologie de SGA 4). **NB** Si X est localement filtrante à gauche, il en est de même de tout X' étale sur X, car c'est évident pour PS 1 qui concerne les X/x, et pour PS 2 cela résulte du fait que $X' \longrightarrow X$ est fidèle. Donc si X est localement cofiltrante, les X/a sont filtrantes, mais la réciproque est fausse.

---

[16] Condition PS 1_{g}.

[17] **Faux.**

[18] pseudo-filtrante.

[19] **faux,** ainsi $0 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 1$ est 0-connexe et faiblement filtrante à gauche, mais non pas localement faiblement filtrante à gauche car $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] 0 \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & 1 \\ 0 \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$ ne se complète pas en un carré *commutatif.*

[20] pseudo-filtrante.

[21] i.e. trois conditions a) $X \neq \emptyset$ b) PS $1'$ habituelle c) PS 2 (double flèche).

On a les notions duales : *faiblement filtrante à droite* (ou simplement faiblement filtrante), et *filtrante à droite* ou simplement filtrante. (Notions duales de a), c) ci-dessus.) Pour la notion duale de b), savoir que les $x\backslash X$ soient faiblement filtrantes, on ne peut plus l'appeler 'localement faiblement filtrante', mais ce serait *co*localement faiblement filtrante.

Exemple. $X = \left(0 \xrightarrow{\gamma} 1 \overset{\alpha'}{\underset{\beta'}{\rightrightarrows}} 2 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 3\right)$ avec $(\alpha\alpha' = \beta\beta') \neq (\alpha\beta' = \beta\alpha')$.

[page 17]

Seule la notion a) (faiblement filtrante ([22]) à gauche) ne dépend que de $\mathrm{Ord}\, X$ - mais bien sûr si X est *pré*ordonnée, toutes trois ne dépendent que de $\mathrm{Ord}\, X$. Notons que dire que ça ne dépend que de $\mathrm{Ord}\, X$, ou que de $\mathrm{Esp\,sep} X$, revient au même, puisque les deux se déterminent mutuellement. La condition a) signifie que $\mathrm{Esp}\, X$, ou aussi $\mathrm{Top}(X)$, est *irréductible.* On dira que X est *irréductible* (au lieu de pseudo-filtrante). Les trois autres notions ne peuvent s'exprimer en termes de $\mathrm{Esp}\, X$ ou de $\mathrm{Ord}\, X$ seul, mais elles s'expriment en termes du Topos X. La condition b) (X localement faiblement filtrante) signifie que $\mathrm{Top}(X)$ est *localement irréductible,* et on dira aussi que X est *localement irréductible* (au lieu de localement faiblement filtrante). Ça signifie que pour tout X' étale sur X et 0-connexe, X' est faiblement filtrante à gauche, i.e. est irréductible.

Reste à exprimer la condition filtrante elle-même en termes de $\mathrm{Top}\, X$. Je rappelle à ce propos :

Proposition 2.3. *Les conditions suivantes sur un topos $\mathcal{X}$ sont équivalentes (quand S (comme 'site') désigne une partie génératrice de* $\mathrm{Fais}(\mathcal{X}) = S^\wedge$, formée d'objets 0-connexes ([23]).*)*

a) Si U, V sont deux objets 0*-connexes de* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{X}$*, $U \times V$ est* 0*-connexe.*

b) Si U est un objet 0*-connexe de $\mathcal{X}^\wedge$, alors $U \longrightarrow e$ est 'W_0-asphérique', i.e. pour tout V, la projection $V \times U \longrightarrow V$ induit $\pi_0(U \times V) \xrightarrow{\sim} \pi_0(U)$.*

c) Si U, V [sont] *dans $\mathcal{X}^\wedge$, alors*

$$\pi_0(U \times V) \xrightarrow{\sim} \pi_0(U) \times \pi_0(V).$$

d) Comme a), avec U, V dans S. (Mais on suppose les objets de S 0*-connexes.)*

([24]).

[page 18]

De plus, ces conditions impliquent que $\mathcal{X}$ est connexe, donc 0-connexe si $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Cela implique de plus que $\mathcal{X}$ est W_∞-asphérique, cf. Pursuing Stacks §35 (Corollary p. 52) ([25]).

C'est essentiellement Proposition 1 de Pursuing Stacks §65, cf. loc. cit. p. 170-171 ([26]). Cf. aussi Pursuing Stacks, §35, pages 50-55.

[22] pseudo-filtrant.
[23] donc $\mathcal{X}$ est localement 0-connexe.
[24] Il faudrait expliciter la démonstation avec celle de 2.9 ci-dessous (p. 25).
[25] **Faux,** loc. cit. ne dit rien de tel.
[26] Mais je m'y borne aux topos de la forme $\mathrm{Top}(A)$, avec A dans Cat.

Définition 2.4. On dit que $\mathcal{X}$ est *totalement* 0-*connexe* s'il est localement connexe, non vide et satisfait les conditions équivalentes de 2.3. (NB c'est un cas particulier de la notion 'totalement W-asphérique' de loc. cit. On a ainsi la notion de totalement n-connexe.)

Notons que pour un objet X de Cat, dire que $\mathrm{Top}(X)$ est totalement 0-connexe revient à dire que $X \neq \emptyset$, et que pour $x, y \in \mathrm{Ob}\, X$, $x \times y$ dans $X^\wedge$ est 0-connexe, i.e. $X/x \times y$ est 0-connexe ([27]). C'est une condition très forte. On dira aussi que X est *totalement* 0-*connexe.* Notons ici

Proposition 2.5. *Soit $\mathcal{X}$ un topos. Si $\mathcal{X}$ est totalement* 0-*connexe, alors $\mathcal{X}$ est irréductible. (En fait la conclusion vaut, tautologiquement, en supposant seulement que le produit de deux objets* 0-*connexes de $\mathcal{X}^\wedge$ est non vide, et il suffit même de le supposer pour des sous-objets de l'objet final $e_{\mathcal{X}}$.) En particulier, si $\mathcal{X} = Top(X)$, où X est dans* Cat*, alors X est faiblement filtrante à gauche.*

Mais bien sûr, cela n'implique *pas* que $\mathcal{X}$ soit localement irréductible.

[page 19]

Par exemple la catégorie $\mathbf{\Delta}$, ou toute petite catégorie stable par produits binaires, est totalement 0-connexe, mais $\mathbf{\Delta}$ n'est pas localement irréductible (les catégories induites $\mathbf{\Delta}/\mathbf{\Delta}^n$, pour $n > 0$, ne sont visiblement *pas* irréductibles). (Mais rappelons que si $\mathcal{X} = \mathrm{Top}(T)$, T un espace topologique, alors T irréductible implique que $\mathcal{X}$ est aussi *localement* irréductible. Donc T totalement 0-connexe implique $\mathrm{Top}(T)$ globalement *et* localement irréductible, i.e. pour tout T' étale sur T, et 0-connexe, T' est irréductible.)

Théorème 2.6. *Soit $\mathcal{X}$ un topos localement connexe, $S \subseteq \mathcal{X}^\wedge$ une petite partie génératrice formée d'objets* 0-*connexes. Conditions équivalentes (*sauf *c, c′, qui semblent* ([28]) *plus faibles, cf. démonstration).)*

- *a) Tout topos induit $\mathcal{X}/U$ sur U* 0-*connexe dans $\mathcal{X}^\wedge$ est totalement* 0-*connexe.*
- *a′) Tout produit fibré $U \times_W V$ d'objets* 0-*connexes dans $\mathcal{X}^\wedge$ est* 0-*connexe.*
- *b) $\mathcal{X}$ est localement irréductible, et ses composantes connexes sont totalement* 0-*connexes.*
- *c) Comme a), avec U dans S, i.e. les $\mathcal{X}/U$ ($U \in \mathrm{Ob}\, S$) sont totalement* 0-*connexes.*
- *c′) Comme a′), avec U, V, W dans S.*
- *d) S est localement filtrante à gauche, i.e. S satisfait les deux conditions*

PS* 1 *Tout diagramme* $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] a \arrow[dr] & \\ & x \\ b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ *dans S s'insère dans* $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & a \arrow[dr] & \\ c \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & & x \\ & b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ *commutatif.*

PS* 2 *Tout diagramme $a \rightrightarrows b$ s'insère dans un diagramme commutatif $c \longrightarrow a \rightrightarrows b$.*

([29]).

[27] Cela signifie aussi que $\mathrm{diag}_X : X \longrightarrow X \times X$ est co-cofinale, i.e. $X^o \longrightarrow X^o \times X^o$ est cofinale, et implique qu'il en est de même de $X \longrightarrow X^E$ pour tout ensemble *fini* E.

[28] **sont.**

[29] NB On a équivalence de a), a′), b), d), qui impliquent c), c′), lesquels sont équivalents. Mais il semble ([30]) que c), c′) soient strictement plus faible. Cf. cependant les variantes e), e′) dans 2.12 (p. 28, 29).

[30] Il s'avère. C'est bien vrai, c) et c′) n'impliquent *pas* les autres conditions, cf. annotation marginale

[page 20]

Ces conditions impliquent que les objets 0-connexes de $\mathcal{X}^\wedge$ (en particulier les éléments de S) sont ∞-connexes.

Corollaire 2.7 (de l'équivalence b $\Longleftrightarrow$ d). *Soit X un objet de* Cat. *Pour que X soit filtrant à gauche il faut et il suffit que Top(X) soit totalement* 0*-connexe et localement (et donc aussi globalement) irréductible (ou encore que X soit totalement* 0*-connexe et que pour tout $x \in \mathrm{Ob}\, X$, la catégorie localisée X/x soit irréductible (elle est même totalement* 0*-connexe), ou encore que pour deux objets a, b dans X, $a \times b \in X^\wedge$ soit* 0*-connexe, et pour* $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] a \arrow[dr] & \\ & x \\ b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ *dans X, $a \times_x b$ (dans $X^\wedge$) soit* 0*-connexe)* ([31]).

Démonstration de 2.6. On a le diagramme d'implications $\pm$ tautologiques

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{a} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dl, Rightarrow, "\substack{\text{par}\\ 2.5}"'] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{a}' \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathrm{b} \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{c} \arrow[r, Leftrightarrow, "(\Leftarrow \text{ par } 2.3.)"] & \mathrm{c}' \arrow[dll, Rightarrow] \\
\mathrm{PS\ 1.} & &
\end{tikzcd}$$

Montrons quand même les deux implications c$'$) $\Longrightarrow$ PS 1 et b $\Longrightarrow$ PS 1.

[page 21]

C'est contenu dans le

Corollaire 2.8. *Soient $\mathcal{X}$, S comme dans 2.6. Conditions équivalentes :*

- *a) $\mathcal{X}$ est localement irréductible, i.e. les topos induits $\mathcal{X}/U$, où U est* 0*-connexe, sont irréductibles.*
- *b) Tout produit fibré $U \times_W V$ d'objets* 0*-connexes U, V est 'non vide'.*
- *b$'$) Tout produit fibré $U \times_W V$, avec U, V 'non vide', W* 0*-connexe, est non vide.*
- *c) Les $\mathcal{X}/x$ avec $x \in S$ sont irréductibles.*
- *d) Comme b), avec U, V, W dans S.*
- *e) S est localement faiblement filtrante à gauche, i.e. satisfait PS* 1.*

Ici les implications $\pm$ évidentes sont

---

p. 28 (cas de $X = B_G$).

[31]Exemple de X totalement 0-connexe, mais non cofiltrant, i.e. non localement irréductible ? La catégorie $\mathbf{\Delta}$ des simplexes type est totalement 0-connexe, mais n'est pas cofiltrante car $\mathbf{\Delta}^0 = e \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} \mathbf{\Delta}^1$ ne peut être égalisé ! Donc `[la catégorie opposée]` $\mathbf{\Delta}^\circ = I$ est telle que $I \longrightarrow I^E$ soit cofinal pour tout ensemble fini E, mais I non filtrante.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{b}' \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{b} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \mathrm{a} \arrow[d, Rightarrow] \\
& \mathrm{d} \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathrm{e} \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathrm{c}.
\end{tikzcd}$$

Prouvons les implications de la ligne du bas. Considérons d). Si $\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small] a \arrow[dr] & \\ & x \\ b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ [est] dans S, dire que le produit fibré dans $\mathcal{X}$ est 'non vide' signifie, puisque S est un système de générateurs et en particulier *non vide,* qu'il existe c dans S et $c \longrightarrow a \times_x b$, ou ce qui revient au même, $\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small] & a \\ c \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\ & b \end{tikzcd}$, rendant commutatif le diagramme $\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small] & a \arrow[dr] & \\ c \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & & x \\ & b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$. Donc d) équivaut à PS 1, i.e. à e) ($\mathcal{X}$ localement faiblement filtrant à gauche). Considérons la condition c) : les $\mathcal{X}/a = (S/a)^{\sim}$ sont irréductibles. Cela signifie que pour deux sous-objets *non vides* $U, V \subseteq a$ dans $\mathcal{X}^\wedge$, on a $U \cap V \neq \emptyset$, ou encore que pour deux cribles

[page 22]

$\underline{U}$, $\underline{V}$ de S/x, si $\underline{U}$, $\underline{V}$ non vides (ce qui signifie que les sous-objets de x dans $\mathcal{X}^\wedge$ qu'ils définissent sont 'non vides', ou que les objets de S sont 'non vides' dans $\mathcal{X}^\wedge$), alors $\underline{U} \cap \underline{V}$ est non vide. On peut supposer que $\underline{U}$, $\underline{V}$ est engendré chacun par une seule flèche $a \xrightarrow{u} x$, $b \xrightarrow{v} x$. Le crible intersection est formé des objets $c \longrightarrow x$ de S/x tels que $c \longrightarrow x$ se factorise par un $\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small] & a \\ c \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\ & b \end{tikzcd}$, donc dire que ce crible n'est pas vide, signifie que PS 1 est satisfait pour les deux flèches données u, v. Donc c) équivaut à la condition PS 1[, i.e. à] e.

Ainsi on a établi

$$\mathrm{b}' \Longrightarrow \mathrm{b} \Longrightarrow \mathrm{a} \Longrightarrow (\mathrm{c} \Longleftrightarrow \mathrm{d} \Longleftrightarrow \mathrm{e}),$$

reste à prouver que c $\Longrightarrow$ b′. Soit donc $\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small] U \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\ & W & \end{tikzcd}$ un diagramme d'objets 'non vides', avec W 0-connexe, il faut prouver que le produit fibré est non vide. Considérant $a \longrightarrow U$ et $b \longrightarrow V$ avec $a, b \in S$, on est ramené au cas où $U = a$, $V = b$ dans S. Prouvons que si $a \times_W b$ est 'vide', alors W est disconnexe. Pour ceci, considérons la sous-catégorie C de S/W formée des $x \longrightarrow W$ tels que $a \times_W x$ soit 'non vide'. Désignant par $w(a)$, $w(x)$ l'image de a, x dans W, cela signifie que $w(a) \cap w(x) \neq \emptyset$.

[page 23]

Notons que tout quotient dans $\mathcal{X}^\wedge$ d'un objet irréductible est irréductible, donc $w(a)$, $w(x)$ sont des objets irréductibles. Cela montre que pour x dans C et x' dans S/W, on a x' dans C, i.e. $w(a) \cap w(x') \neq \emptyset$ si et seulement si $w(x) \cap w(x') \neq \emptyset$. (Lemme direct : dans un objet W d'un topos $\mathcal{X}$, si on a [des] sous-objets W_1, W_2, W_3 irréductibles, si l'un des deux [plutôt trois] rencontre les deux autres, ceux-ci se rencontrent.) Cela montre que C est un crible, puisque $x' \longrightarrow x$ implique $w(x') \subseteq w(x)$, donc $w(x')$ rencontre $w(x)$, donc aussi $w(a)$. Mais alors le co-crible $C' = (S/W) \backslash C$ est également un crible, car si c

est dans C', i.e. `[si]` $w(c)$ ne rencontre pas $w(x)$, a fortiori pas tout x' au-dessus de x, pour lequel on aura $w(x') \subseteq w(x)$. Ainsi, S/W est décomposé en somme de deux ouverts C, C', non vides puisque l'un contient a, l'autre b. Par suite, W est décomposé en somme de deux sous-objets non vides, donc W est non 0-connexe.

On a prouvé 2.8, donc aussi (revenant à 2.6) les implications vers PS 1 dans le diagramme page 20. Il reste à prouver

$$\begin{cases} \text{b} \Longrightarrow \text{PS 2, c}' \Longrightarrow \text{PS 2} \\ \text{PS 1 + PS 2 (i.e. d)} \Longrightarrow \text{a}' \end{cases}$$

([32]).

`[page 24]`

Nous nous plaçons donc dans l'hypothèse où PS 1 est satisfait (puisque b), c′) et d) impliquent PS 1), donc où on est sous les conditions équivalentes de 2.8 - $\mathcal{X}$ est localement irréductible. Considérons alors la condition PS 2, et prouvons qu'elle est impliquée tant par b), que par c′), et qu'elle implique a′). Elle signifie que pour une double flèche $a \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} b$ dans S, le conoyau `[plutôt noyau]` dans $S^\wedge$, ou, ce qui revient au même, dans $\mathcal{X}^\wedge = S^\sim \subseteq S^\wedge$, est 'non vide'. On peut l'écrire sous la forme d'un produit fibré

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "{(u,v)}"] & b \times b \\ \mathrm{Ker}(u,v) \arrow[u] \arrow[r] & b. \arrow[u, "\mathrm{diag}"'] \end{tikzcd}$$

Ici par hypothèse a et b sont des objets 0-connexes de $\mathcal{X}^\wedge$ (ceux de S l'étant), c) est vérifié (($\mathcal{X}$ localement irréductible et) ses composantes connexes `[sont]` totalement 0-connexes), alors $b \times b$ est 0-connexe comme produit de deux objets 0-connexes sur une *même composante connexe,* laquelle est totalement 0-connexe. Comme $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ est localement irréductible, il s'ensuit que le produit fibré est non vide (2.8), donc b) $\Longrightarrow$ d). Prouvons d) $\Longrightarrow$ a), i.e. si

`[page 25]`

S est localement cofiltrante, alors les topos induits $\mathcal{X}/W$, où W est 0-connexe, sont totalement 0-connexes. Ce topos induit est décrit par le site S/W, i.e. S/W est un système de générateurs. Or si S est localement filtrante, S/W (étale sur S) l'est aussi. Donc on peut supposer $W = e$, et à prouver que si S est localement cofiltrante et $\mathcal{X}$ 0-connexe, alors $\mathcal{X}$ est totalement 0-connexe. Notons que $\mathcal{X}$ 0-connexe équivaut à S 0-connexe - il faudrait quand même l'expliciter :

Lemme 2.9. *Soit $\mathcal{X}$ un topos, $S \subseteq \mathcal{X}^\wedge$ une sous-catégorie pleine génératrice formée d'objets* 0-connexes. *Alors $\mathcal{X}$ est* 0*-connexe si et seulement si S l'est - plus généralement, l'ensemble ordonné des sous-objets à la fois ouverts et fermés de S dans* Cat *(ou encore des*

[32]NB finalement on ne prouve pas c′ $\Longrightarrow$ PS 2.

sous-objets ouverts = cribles de S qui sont aussi fermés, i.e. des cocribles) est isomorphe à celui des sommandes directs de $\mathcal{X}$.

Je l'ai utilisé tacitement dans la démonstration de 2.8, pour le topos induit $\mathcal{X}/W$. Je n'explicite pas la démonstration.

Ainsi (revenant à la démonstration de d) $\Longrightarrow$ c) dans 2.6.) S étant 0-connexe et localement cofiltrante,

`[page 26]`

`[elle]` est en fait cofiltrante. Donc pour deux objets a, b de S, $\exists$ c avec $c \longrightarrow a$, $c \longrightarrow b$ (condition PS 1$'$, plus forte que PS 1). Pour prouver que $\mathcal{X}$ est totalement 0-connexe, on est réduit à prouver par 2.3 que les $a \times b$ dans $\mathcal{X}^\wedge$ sont 0-connexes. Par 2.9, il revient au même de prouver qu'ils sont 0-connexes dans $S^\wedge$. Donc on est ramené à prouver le

Lemme 2.10. *Soit S une catégorie cofiltrante. Si a, b sont deux objets de S, $a \times b$ est un objet 0-connexe de $S^\wedge$.*

On voit de suite qu'il suffit de prouver (et en fait il revient au même, compte tenu que $a \times b$ est localement irréductible) que si on a deux flèches

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & a \times b \\ & y, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

alors $x \times_{a\times b} y \neq \emptyset$, i.e. $\exists$ z dans S rendant commutatif

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & a \times b \\ z \arrow[u] \arrow[r] & y. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Or par PS 1$'$ il existe bien un z s'envoyant dans x et dans y, mais les deux flèches composées

$$z \rightrightarrows a \times b,$$

i.e. chacune des double flèches

$(*)$ $$z \rightrightarrows a$$

$(*')$ $$z \rightrightarrows b$$

peuvent n'être pas égales. Mais par PS 2,

`[page 27]`

on peut trouver

$$z' \longrightarrow z$$

égalisant la double flèche $(*)$, donc on peut supposer que celle-ci est déjà triviale. Appliquant encore une fois PS 2, par un $z'' \longrightarrow z'$, on égalise de même la double flèche $(*')$, et on gagne. On a donc prouvé, finalement,

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{a} & \Longleftrightarrow & \mathrm{a}' & \Longrightarrow & \mathrm{b} & \Longleftrightarrow & \mathrm{d}\ (= \mathrm{PS}\ 1 + \mathrm{PS}\ 2) \\
\Big\Downarrow & & & & & & \\
\mathrm{c} & \Longleftrightarrow & \mathrm{c}', & & & &
\end{array}$$

mais pas l'implication inverse. En d'autres termes, si les topos induits $\mathcal{X}/a$, pour a dans S, sont totalement 0-connexes, je n'ai pas prouvé qu'il en est de même des $\mathcal{X}/W$, W un objet 0-connexe *quelconque* de $\mathcal{X}^\wedge$. Ainsi, on en est au point suivant

Perplexité 2.11. *Soit X dans* Cat*. Si X est localement filtrante à gauche, alors les produits fibrés $a \times_x b$ d'objets dans X sont des objets* 0*-connexes de $X^\wedge$, et cette condition à son tour implique PS 1, i.e. que X est localement irréductible. Mais en présence de cette hypothèse PS 1, ou X localement irréductible, la condition sur les produits fibrés $a \times_x b$ équivaut à la suivante : pour tout diagramme* `[en]` *traits pleins*

`[page 28]`

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r] & a \times_x b \\
e \arrow[u, dotted] \arrow[r, dotted] & d, \arrow[u]
\end{tikzcd} \qquad \textit{avec } x,\ a,\ b,\ c,\ d \textit{ dans } X,$$

on peut compléter en un diagramme commutatif, *avec e dans X. En d'autre termes, tout diagramme commutatif à traits pleins ci-dessous se complète en y rajoutant un 'objet initial' e*

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r] \arrow[dr] & a \arrow[dr] & \\
e \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & & & x \\
 & d \arrow[r] \arrow[ur] & b \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

([33]).

Cette condition est donc impliquée par X localement cofiltrante, et elle est satisfaite aussi par ce qui précède plus généralement si et seulement si ([34]) les X/x sont cofiltrantes ([35]). Mais la réciproque est-elle vraie - cette condition de totale 0-connexité des X/x implique-t-elle que X soit totalement 0-connexe ? Mais je n'ai pas construit d'exemple où les X/x

[33]Il suffit d'exiger pour e la commutativité des deux carrés $(e\ c\ b\ d)$ et $(e\ d\ a\ c)$.

[34]si et seulement si ?

[35]Elle signifie que X satisfait PS 1, et la condition

PS$'$ 2 Tout diagramme commutatif

$$a \rightrightarrows b \longrightarrow x$$

sont cofiltrantes sans que X soit localement cofiltrante (ou ce qui revient au même, de X 0-connexe avec les X/x cofiltrantes sans que X en soit cofiltrante)([36]) ; ni d'exemple où les X/x sont totalement 0-connexes, sans que les X/x soient cofiltrantes. Mais notons le

Corollaire 2.12 : *Les conditions équivalentes a), a′), b), d) (à l'exclusion de c), c′), plus faibles apparemment) du théorème 2.6*

`[page 29]`

équivalent encore à la suivante

e) $\forall\, x$ dans S, le topos induit $\mathcal{X}/x$ et le topos induit $\mathcal{X}/x \times x$ est irréductible ([37]),

où encore à la suivante

e′) $\forall\, x$ dans S, $S^\wedge/x$ et $S^\wedge/x \times x$ sont irréductibles, i.e. S/x et $S/x \times x$ sont irréductibles ([38]).

C'est la forme 'topologique' la plus faible en apparence que je peux trouver pour la condition S localement cofiltrante, i.e. $\mathcal{X}$ (ou $\mathrm{Top}(S)$, au choix) localement totalement 0-connexe.

Définition 2.13. On dit qu'un topos $\mathcal{X}$ est *localement totalement 0-connexe* s'il satisfait aux conditions équivalentes a, a′, b, d du théorème 2.6, i.e. si $\mathcal{X}$ est localement connexe et si de plus tout topos induit 0-connexe est totalement 0-connexe - le produit fibré de deux objets 0-connexes sur un troisième est 0-connexe. Il revient au même de dire que toute (ou que une) sous-catégorie pleine génératrice S de $\mathcal{X}^\wedge$ formée d'objets 0-connexes est localement cofiltrante (en supposant toujours $\mathcal{X}$ localement connexe, ou ce qui revient au même, l'existence d'un S formé d'objets 0-connexes).

On n'a pas terminé encore la démonstration de 2.6 - il reste à prouver que si $\mathcal{X}$ (supposé localement totalement 0-connexe) est 0-connexe, il est ∞-connexe - ou encore que les composantes connexes de $\mathcal{X}$, supposé localement totalement 0-connexe, sont ∞-connexes, i.e. W_∞-asphériques.

`[page 30]`

Corollaire 2.14. *Notons quand même que si $\mathcal{X}$ est de la forme $Top(T)$, T un espace topologique, alors $\mathcal{X}$ est localement totalement 0-connexe si et seulement si il est localement irréductible, i.e. si et seulement si T est localement irréductible.*

---

s'insère dans un diagramme commutatif

$$y \longrightarrow a \rightrightarrows b \longrightarrow x.$$

[36] Mais il y a un *contre-exemple* évident, si X est un groupoïde 0-connexe, les X/x sont $\approx e$, donc cofiltrantes, mais X n'est cofiltrant (i.e. `[mot(s) illisible(s)]`) que si X est 1-connexe. P.ex. si C est un groupoïde $\neq 1$, alors $X = B_G$ est tel que les X/x sont cofiltrantes, mais X non cofiltrant.

[37] NB $\mathcal{X}/x$ inutile.

[38] S/x inutile, car $x \xrightarrow{\text{diag}} x \times x$ est une immersion ouverte non vide, donc si $x \times x$ est irréductible, x l'est aussi. Mais il revient au même de dire que les S/x sont irréductibles (condition PS* 1, cf. 2.8, p. 21) *et* que les $x \xrightarrow{\text{diag}} x \times x$ sont dominants (ce que implique en effet que $x \times x$ est irréductible). Ceci redonne immédiatement la forme PS* 2 de la condition cofiltrante.

On est ramené à prouver que cette dernière condition implique la condition d) de 2.6, et on peut prendre pour S l'ensemble ordonné des ouverts connexes non vides de S, cela devient alors évident.

Ceci dit, il faut se rappeler que la théorie cohomologique des espaces topologiques irréductibles n'est nullement triviale - comme nous le montre FAC de SERRE ! D'autre part, c'est SERRE qui m'avait fait observer que pour des coefficients *constants,* la cohomologie d'un espace irréductible est triviale.

Dans le cas actuel, prouvons déjà, si $\mathcal{X}$ est 0-connexe et localement totalement 0-connexe, que tout revêtement de l'objet final de $\mathcal{X}$ est trivial. Il suffit de voir que si U est 0-connexe, $U \longrightarrow e$ est un isomorphisme. Mais considérons $U \hookrightarrow U \times U$, on sait que c'est un sommande direct, et comme $U \times U$ est connexe, c'est un isomorphisme. Donc $U \longrightarrow e$ `[est un]` monomorphisme, donc sommande direct, et comme $U \neq \emptyset$, on a $U \longrightarrow e$ isomorphisme.

Reste à prouver que pour tout faisceau

`[page 31]`

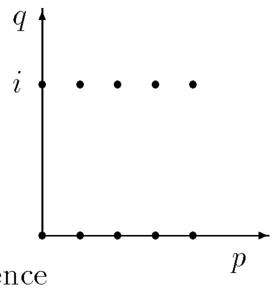
abélien constant F sur $\mathcal{X}$, on a $H^i(X, F) = 0$ pour $i > 0$. On procède par récurrence sur i, c'est déjà fait pour $i = 1$. Supposons que ce soit prouvé pour les $j < i$ (i fixé) pour tout topos *totalement* 0*-connexe.* Soit $\xi \in H^i(\mathcal{X}, F)$, soit $U \longrightarrow e$ `[un]` épimorphisme tel que $\xi | U = 0$, et considérons la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(C(U^*, \mathcal{H}^q(F))) \Longrightarrow H^*(\mathcal{X}, F).$$

On a par hypothèse totalement 0-connexe

$$(*) \qquad \pi_0(U^q) \simeq \pi_0(U)^q,$$

et les composantes connexes de U^q sont totalement 0-asphériques,



donc par hypothèse de récurrence

$$E_1^{pq} = 0 \qquad \text{si } 0 < q < i,$$

donc on trouve une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^i(C(U^*, F)) \longrightarrow H^i(\mathcal{X}, F) \longrightarrow H^0(\underbrace{H^i(U^*, F)}_{\substack{\text{complexe}\\ \text{co-semisimplicial}\\ \text{pour } i\\ \text{variable}}}) = \mathrm{Ker}(H^i(U, F) \rightrightarrows H^i(U^2, F)).$$

Par hypothèse sur U, l'image de ξ dans le troisième terme est nulle, donc ξ appartient au premier terme. Mais pour $(*)$, le complexe $C(U^*, F)$ est le complexe *trivial* des puissances de $I = \pi_0(U)$, à coefficients dans M (si $F = M_X$). Sa cohomologie

[page 32]

en degrés > 0 est nulle, donc $\xi = 0$, q.e.d.

Proposition 2.15. ([39]) *Soit X un objet de* Cat. *Conditions équivalentes :*

a) X est filtrant, i.e. X est 0-connexe et X^o satisfait les conditions équivalentes du théorème 2.6 ($X^{o,\wedge}$ est localement totalement 0-connexe).

b) L'objet final de $X^\wedge$ est ind-représentable.

DÉMONSTRATION. On sait qu'on a

$$e_{X^\wedge} \simeq \varinjlim_{x \in X} x, \tag{2.15.1}$$

limite inductive prise dans $X^\wedge$. En effet, cela signifie aussi que pour tout objet a dans X, on a

$$\varinjlim_{x\in X} \underbrace{x(a)}_{\mathrm{Hom}_X(a,x)} \xrightarrow{\sim} e \qquad \text{(ensemble ponctuel)}$$

Mais considérons l'objet $X' = a\backslash X \longrightarrow X$ coétale sur X, qui est donc Cat-cofibré sur X, on sait que l'on a

$$\pi_0(X') \simeq \varinjlim_{x\in X} \pi_0(X'_x),$$

où $X'_x = \mathrm{Hom}(a,x)$, donc on trouve

$$\varinjlim_{x\in X} \mathrm{Hom}(a,x) = \pi_0(a\backslash X) = e$$

car $a\backslash X$ est 0-connexe.

La formule (2.15.1) montre que si

[page 33]

X est filtrant, $e_{X^\wedge}$ est limite inductive filtrante de foncteurs représentables. On sait d'ailleurs qu'on peut réindexer par une catégorie *ordonnée* filtrante (cf. SGA 4, I 8.1.6 (c'est dû à P. DELIGNE !)).

On a prouvé a $\Longrightarrow$ b, prouvons b $\Longrightarrow$ a. Supposons donc

$$e_{X^\wedge} = \varinjlim_{i\in I} x_i,$$

où I est un (petit) ensemble ordonné filtrant, et $I \longrightarrow X$ un foncteur. Prouvons PS 1′ (forme droite), i.e. pour a, b dans X, [il] existe $\begin{smallmatrix} a \searrow \\ \quad x \\ b \nearrow \end{smallmatrix}$. En effet, comme $\varinjlim_I \mathrm{Hom}(a,x_i) = e$, il s'ensuit que $\mathrm{Hom}(a,x_i) \neq \emptyset$ pour i grand, de même $\mathrm{Hom}(b,x_i) \neq \emptyset$, donc il suffit de prendre $\begin{smallmatrix} a \searrow \\ \quad x_i \\ b \nearrow \end{smallmatrix}$. Prouvons PS 2_{d}, i.e. que pour [une] double flèche $a \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} b$, [il] existe $b \longrightarrow x$ qui égalise.

[39] C'est déjà dans SGA 4, I 8.

`[page 34]`

Soit ξ_{i_0} dans $\mathrm{Hom}(b, x_{i_0})$, ses deux images dans $\mathrm{Hom}(a, x_{i_0})$ ne sont pas nécessairement égales, mais le deviennent dans la limite inductive, réduite à e, donc deviennent égales en composant avec $x_{i_0} \longrightarrow x_i$ pour i assez grand, donc le composé $b \longrightarrow x_{i_0} \longrightarrow x_i$

$$a \rightrightarrows b \longrightarrow x_{i_0} \longrightarrow x_i$$

égalise la double flèche.

Corollaire 2.16. *Soit W un localiseur fondamental satisfaisant l'axiome des limites* Loc (8). *Si X dans* Cat *est une catégorie filtrante ou cofiltrante, alors X est W-asphérique.*

Plus généralement et agréablement :

Corollaire 2.17. *Soit W comme dans 2.16. Alors toute catégorie filtrante est* totalement W-asphérique ([40]), *i.e. pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans* Cat, *l'objet $f_!(e_X)$ de e_Y (défini aussi comme $y \longmapsto \pi_0(y\backslash X)$, et intervenant dans la factorisation canonique de f en ip, avec p étale et les cofibres* `[?]` *de p 0-connexes)*

`[page 35]`

est W-asphérique. En fait, $Y/f_!(e_{X^\wedge})$ est même une catégorie filtrante.

En effet, le foncteur $f_!$ commute aux limites inductives, donc $f_! e_{X^\wedge}$ est limite inductive filtrante des $f_!(x_i) = f(x_i)$. Donc $Y/f_!(e_{X^\wedge})$ est limite inductive filtrante des $Y/f(x_i)$. Donc c'est même une catégorie filtrante, a fortiori elle est W-asphérique.

Donc finalement, on trouve des exemples non triviaux de catégories totalement W-asphériques, i.e. des exemples donc des catégories sans objet final.

Corollaire 2.18. ([41]) *Soit X dans* Cat, *F dans $X^\wedge$. Pour que F soit ind-représentable il faut et il suffit que X/F soit filtrante.*

En effet, par (2.15), X/F est filtrante si et seulement si l'objet final F de X/F provient d'un ind-objet de X/F, mais cela signifie aussi que F est la limite inductive dans $X^\wedge$ d'un ind-objet de X, i.e. que F est ind-représentable.

`[page 36]`

Question. *Si X dans* Cat *est totalement W_∞-asphérique, i.e. les $f_!(e_{X^\wedge})$ sont W_∞-asphériques pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans* Cat, *ou encore pour toute telle flèche, avec les $y\backslash Y$ 0-connexes ($y \in \mathrm{Ob}\, Y$), Y est W_∞-asphérique - cela implique-t-il que X soit filtrante ?* Ça ne m'étonnerait pas - et même en supposant seulement les $f_!(e_{X^\wedge})$ 1-connexes ([42]) (ils sont 0-connexes, dès que X l'est). Mais je ne veux pas m'attarder à présent sur cette question.

La réponse à la question précédente est négative, comme on voit par la :

[40] cf. XII, §V pour cette notion, que j'ai beaucoup peiné à dégager et à comprendre !

[41] déjà dans SGA 4, I 8.

[42] Ils le sont toujours (cf. XII, p. 101), c'est 2-*connexe* qu'il faut lire ici !

Proposition 2.19. ([43]) *Soit X dans* Cat *telle que $diag_X : X \longrightarrow X \times X$ soit cofinal* ([44]), *i.e. telle que X^o soit totalement* 0*-connexe. Alors X est totalement W_∞-asphérique (donc aussi totalement W-asphérique pour tout localiseur fondamental W tel que $W \supseteq W_\infty$).*

Soit en effet un foncteur cofinal $f : X \longrightarrow Y$, il faut prouver que Y est W_∞-asphérique. Or on sait que totalement 0-connexe implique W_∞-asphérique ([45]) (cf. proposition 2.3, p. 17-18), donc il suffit de voir que Y^o est totalement 0-connexe, i.e. $Y \xrightarrow{d_Y} Y \times Y$ cofinal. Or on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d_X"] \arrow[d, "f"'] & X \times X \arrow[d, "f \times f"] \\ Y \arrow[r, "d_Y"] & Y \times Y, \end{tikzcd}$$

où par hypothèse f, donc aussi $f \times f$, et d_X sont cofinaux. Donc $\varphi = (f \times f) \circ p_X$ `[plutôt` $\varphi = (f \times f) \circ d_X$`]` est cofinal, et comme $\varphi = d_Y f$ et f est aussi cofinal, on conclut que d_Y l'est, q.e.d.

Corollaire. $\mathbf{\Delta}$ *étant totalement* 0*-connexe,* $\mathbf{\Delta}^o$ *est totalement W_∞-asphérique, pourtant elle n'est pas filtrante.*

Question. *X totalement W_∞-asphérique $\Longrightarrow$ X^o totalement* 0*-connexe ? Ou du moins implique PS 1′ ?*

`[page 36bis]`

Contrexemple 2.20 à la proposition fausse 2.19.

Soit X un objet de Cat, rajoutons-lui la catégorie finale e comme fermé, i.e. considérons un objet X' de Cat dans lequel X soit un sous-objet ouvert, e le fermé complémentaire :

$$X \overset{i}{\hookrightarrow} X' \overset{j}{\hookleftarrow} e.$$

On sait (cf. XII) qu'une telle opération est déterminée, à isomorphisme près, par la donnée d'un objet

$$H \in \operatorname{Ob} X^\wedge$$

en posant

$$H(x) = \operatorname{Hom}_{X'}(x, e),$$

la catégorie X/e s'identifiant (à isomorphisme près) à X/H. Elle est donc 0-connexe si et seulement si l'objet H de $X^\wedge$ est 0-connexe. Cela signifie aussi que le morphisme i est cocofinal, i.e. que $i^o : X^o \longrightarrow X'^o$ est cofinal. Supposons maintenant X W_∞-asphérique et totalement 0-connexe, i.e. l'actuel Loc (6), cf. XVI. La proposition 2.19 affirme que, sous ces conditions, X' (qui est lui aussi totalement 0-connexe) est même W-asphérique. Il s'ensuivrait donc que $i \in W_\infty$. Mais par XII, th. 4, cor. 4 (p. 149), il s'ensuivrait que

[43] **Faux.**
[44] cf. définition 3.3, p. 45.
[45] C'est **faux.**

`[page 36ter]`

X/e est W_∞-asphérique, i.e. H W_∞-asphérique. Ainsi, si X est totalement 0-asphérique, tout objet 0-connexe de $X^\wedge$ serait ∞-connexe. Mais c'est manifestement faux, p.ex. si on prend pour X une catégorie-test pour W_∞, p.ex. $X = \mathbf{\Delta}$.

Cela me fait soupçonner que la conjecture

$$X \text{ totalement } W_\infty\text{-asphérique} \Longrightarrow X \text{ filtrante}$$

pourrait être valable.

[page 37]

3 Retour sur la cofinalité

Il est instructif de relier les questions de cofinalité (pour une flèche $u : I' \longrightarrow I$ dans Cat) au dérivateur HOT_{W_0}, où $W_0 \subseteq \mathrm{Fl}\,\mathrm{Cat}$ est le plus grossier des localiseurs dans Cat satisfaisant l'axiome de connexité Loc 5, i.e.

$$W_0 = \{f \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{Cat} \mid \pi_0(f) \text{ bijectif}\}. \tag{3.1}$$

On trouve alors, pour I dans Cat, une équivalence canonique, 2-fonctorielle en I,

$$\mathrm{HOT}_{W_0}(I) \xrightarrow{\simeq} I^\wedge \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(I, (\mathrm{Ens})), \quad \texttt{[plutôt } \underline{\mathrm{Hom}}(I^o, \mathrm{Ens})\texttt{]} \tag{3.2}$$

en d'autres termes, on a une équivalence

$$\mathrm{HOT}_{W_0} \simeq \mathbf{D}_{(\mathrm{Ens})}. \tag{3.3}$$

Quand HOT_{W_0} est défini par localisation à partir de la catégorie $\mathrm{Cat}(I) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(I^o, \mathrm{Cat})$, la flèche (3.2) est celle déduite, par localisation, de la flèche

$$\begin{aligned} \pi_0^I : \underline{\mathrm{Hom}}(I^o, \mathrm{Cat}) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(I^o, (\mathrm{Ens})) \\ X &\longmapsto \pi_0 \circ X, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où

$$\pi_0 : \mathrm{Cat} \longrightarrow (\mathrm{Ens}) \tag{3.5}$$

est le foncteur 'composantes connexes'. Si on décrit $\mathrm{HOT}_{W_0}(I)$ comme localisée de Cat/I, (3.2) est déduit de la flèche

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{Cat}/I &\longrightarrow I^\wedge = \underline{\mathrm{Hom}}(I^o, (\mathrm{Ens})) \\ X &\longmapsto \pi_0(X/I) = (i \longmapsto \pi_0(i\backslash X)). \end{aligned} \right. \tag{3.6}$$

[page 38]

Ainsi, les foncteurs familiers, pour une flèche

$$u : I' \longrightarrow I$$

dans Cat

$$\left\{ \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{u_!} & \\ I'^\wedge & \xleftarrow{u^*} & I^\wedge, \\ & \xrightarrow{u_*} & \end{array} \right. \tag{3.7}$$

s'interprètent comme les foncteurs de même nom pour le dérivateur HOT_{W_0}, ou plus directement, pour le dérivateur (qu'on pourrait faussement considérer comme canularesque) $\mathbf{D}_{(\mathrm{Ens})}$.

Cela donne un sens à la cohorte des notions cohomologiques associées à un dérivateur, ou plus particulièrement, à un localiseur fondamental W sur Cat (donnant naissance au dérivateur HOT_W). On les désignera par le nom de W_0-fourbi (au lieu de HOT_{W_0}-fourbi, ou $\mathbf{D}_{(\mathrm{Ens})}$-fourbi), notamment pour une flèche $u : I' \longrightarrow I$ de Cat telle la notion

(3.8)

W_0-équivalence	$\Big(\iff$	$\pi_0(u)$ bijectif.$\Big)$
W_0-asphérique	$\Big(\iff$	les I'/i pour $i \in \mathrm{Ob}\, I$ sont 0-connexes.$\Big)$
W_0-coasphérique	$\Big(\iff$	les $i\backslash I'$ pour $i \in \mathrm{Ob}\, I$ sont 0-connexes.$\Big)$
W_0-propre ([46])	$\Big(\iff$	les inclusions $I'_i \longrightarrow I'/i$ $(i \in \mathrm{Ob}\, I)$ sont W_0-coasphériques, i.e. les fibres des colocalisées $i'\backslash I' \longrightarrow i\backslash I$ $(i' = u(i))$ `[plutôt` $(i = u(i'))$`]` sont 0-connexes.$\Big)$
`[page 39]`		
W_0-lisse ([47])	$\Big(\iff$	les inclusions $I'_i \longrightarrow i\backslash I'$ sont W_0-asphériques, i.e. les fibres des flèches localisées $I'/i' \longrightarrow I/i$ $(i = u(i'))$ sont 0-connexes.$\Big)$
W_0-parfait	$\Big(\iff$	W_0-propre et W_0-lisse.$\Big)$
W_0-équivalence universelle ([48])	$\Big(\iff$	π_0 bijectif et le reste par tout changement de base. Ce sont aussi les W_0-fibrations (ou W_0-fibrations faibles à fibres W_0-asphériques, i.e. 0-connexes.$\Big)$
W_0-fibration	$\Big(\iff$	$u^* : \mathrm{Cat}/I \longrightarrow \mathrm{Cat}/I'$ transforme W_0-équivalences en W_0-équivalences.$\Big)$
W_0-fibration faible ([49])	$\Big(\iff$	le changement de base $u^* : \mathrm{Cat}/I \longrightarrow \mathrm{Cat}/I'$ transforme homotopismes $J_1 \longrightarrow J_2$ en W_0-équivalences - et il suffit de l'exiger pour l'inclusion d'un objet final (ou au choix initial) et pour l'inclusion d'un point dans $\mathbf{\Delta}^1$.$\Big)$

`[Nous avons une]` implication *stricte* (et comment)

$$W_0\text{-équivalence universelle} \Longrightarrow W_0\text{-fibration}$$

`[et une]` implication *stricte* (et comment !) ([50])

$$W_0\text{-fibration} \Longrightarrow W_0\text{-fibration faible.}$$

Signalons, comme exemple d'utilisation de ces notions, que pour un diagramme cartésien dans Cat

(3.9)
$$\begin{tikzcd} I' \arrow[d, "u"'] & J' \arrow[l, "p'"'] \arrow[d, "v"] \\ I & J, \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

la flèche de changement de base pour u_*, v_* pour les préfaisceaux est `[un]` isomorphisme si u est W_0-propre, ou p W_0-lisse, et la flèche de changement de base pour $u_!$, $v_!$ est `[un]` isomorphisme si u est W_0-lisse ou p W_0 propre ([51]). Je signale à ce propos que ces énoncés, qui a priori se formulent pour les préfaisceaux à valeurs dans (Ens), restent valables

`[page 40]`

pour des préfaisceaux à valeurs dans une catégorie $\mathcal{M}$ quelconque (sous réserve d'existence des operations d'images directes cohomologiques ou homologiques envisagées). Cela se voit p.ex. en notant que

(3.10) $$W_0\text{-équivalence} \Longrightarrow \mathbf{D}_{\mathcal{M}}\text{-équivalence}$$

pour toute $\mathcal{U}$-catégorie $\mathcal{M}$, d'où résulte que toute ([52]) 'W_0-notion' implique la $\mathbf{D}_{\mathcal{M}}$-notion correspondante, et permet donc d'appliquer à $\mathbf{D}_{\mathcal{M}}$ les résultats le concernant. (Il y a bien sûr un argument direct, moins savant, consistant à se ramener au cas où $\mathcal{M}$ est petite, et à utiliser alors le plongement pleinement fidèle $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}^\wedge$ resp. $\mathcal{M} \hookrightarrow ((\mathcal{M}^o)^\wedge)^o$.)

Je rappelle pour mémoire une (troisième ?) caractérisation des flèches $u : I' \longrightarrow I$ W_0-propres (resp. W_0-lisses) : ce sont celles pour lesquelles le foncteur changement de base $u^* : \mathrm{Cat}/I \longrightarrow \mathrm{Cat}/I'$ transforme flèches W_0-coasphériques (resp. W_0-asphériques) en itou. Cela gagne en intérêt, du fait que la notion de foncteur W_0-coasphérique (resp. W_0-asphérique) s'interprète comme celle de foncteur cofinal (resp. co-cofinal), cf. plus bas.

[46] Exemple : les Cat-cofibrations.

[47] Exemple : les Cat-fibrations.

[48] Exemple : les flèches W_0-lisses ou W_0-propres, à fibres 0-connexes.

[49] Exemple : les flèches W_0-lisses telles que $\pi_0(I'/I) = (i \longmapsto \pi_0(i\backslash I')) = u_!(e_{I'^\wedge})$ soit localement constant sur I, i.e. $\underline{\pi_0}(I'/I)$ soit un *revêtement* étale de I, ou si u^{opp} satisfait cette condition.

[50] Mais si les fibres sont 0-connexes, les deux notions de W_0-fibrations sont équivalentes et signifient qu'on a une W_0-équivalence universelle ...

[51] Sauf erreur, ca donne *deux caractérisations* des morphismes W_0-propres, ou des morphismes W_0-lisses.

[52] Pas tout à fait exacte pour *toute* 'W_0-notion', il faut excepter les deux notions de W_0-fibration forte, et faible.

`[page 41]`

La notion de W_0-fibration apparaît comme extrêmement forte - beaucoup plus forte à certains égards que celle (disons) de W_∞-fibration ou de W_ω-fibration. Elle équivaut à ceci (comme on voit aussitôt) : pour toute composante connexe I'_α de I', désignant par I_α la composante connexe correspondante de I, et pour tout J_α 0-connexe et au dessus de I_α, le produit fibré $I'_\alpha \times_{I_\alpha} J_\alpha$ est encore 0-connexe. (Ça ressemble aux histoires de totale 0-connexité d'un topos !) Mais cela signifie aussi que $I'_\alpha \longrightarrow I_\alpha$ est une W_0-équivalence universelle. Cela implique que ses fibres sont 0-connexes, et la réciproque est vraie si $u : I' \longrightarrow I$ est W_0-propre ou W_0-lisse. Ainsi, la condition essentielle pour une W_0-fibration est celle que les fibres des flèches induites $I'_\alpha \longrightarrow I_{u(\alpha)}$ `[plutôt` $I'_\alpha \longrightarrow I_\alpha$`]` soient 0-connexes. En fait, on a ceci

Proposition 3.1. *Soit $u : I' \longrightarrow I$ une flèche dans* Cat.

a) Pour que ce soit une W_0-équivalence universelle, il faut et il suffit que pour toute $\mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow I$, i.e. toute flèche α de I, la catégorie $I' \times_I \mathbf{\Delta}^1 \overset{\text{déf}}{=} I'|\alpha$ soit 0-connexe, ou encore que les fibres de I soient 0-connexes, et que pour toute flèche non identique *α de I, $I'|\alpha$ soit 0-connexe.*

b) Pour que $u : I' \longrightarrow I$ soit une W_0-fibration, il faut et il suffit que pour toute composante connexe $I'_{\alpha'}$ de

`[page 42]`

I', posant $\alpha = u(\alpha')$, la flèche induite $I'_{\alpha'} \longrightarrow I_\alpha$ soit une W_0-équivalence universelle (cf. critère a) pour cette notion).

c) Pour que ce soit une W_0-fibration faible, il faut *que $\forall\, i \in I$, l'inclusion $I'_i \hookrightarrow i\backslash I'$ soit une W_0-équivalence, i.e. $\pi_0(I'_i) \xrightarrow{\sim} \pi_0(i\backslash I')$ soit bijectif,* et *que $i \longmapsto \pi_0(i\backslash I')$ soit un préfaisceau localement constant sur I (i.e. $\underline{\pi_0}(I'/I)$ soit un* revêtement *étale de I). Cette condition est aussi suffisante, si u est W_0-lisse. De plus (pour mémoire) u est une W_0-fibration faible si et seulement si u^{opp} l'est.*

La plus grande différence entre la notion de W_0-fibration, et celle de W_0-fibration faible, me paraît que les morphismes W_0-parfaits (i.e. W_0-lisses et W_0-propres), et a fortiori les W-parfaits pour un localiseur fondamental $W \subseteq W_0$, sont forcément des W-fibrations faibles, mais (*même si $W = W_\omega$,* le plus fin de tous les localiseurs fondamentaux) ne sont pas des W-fibrations. L'exemple le plus frappant à cet égard est sans doute celui des revêtements étales, qui sont W_ω-parfaits (donc

`[page 43]`

des W_ω-fibrations faibles et a fortiori des W_0-fibrations faibles), mais pas des W_0-fibrations ; car dans le cas où I', I sont 0-connexes, il faudrait que les fibres soient 0-connexes (cf. b) ci-dessus), i.e. que u soit un isomorphisme !

Une propriété sympathique des morphismes W_0-lisses (resp. W_0-propres), c'est que ce sont des applications *ouvertes* (resp. fermées) pour les espaces topologiques sous-jacents, ce qui signifie en effet que les fibres locales, i.e. des flèches localisées en haut $I'/i' \longrightarrow I/i$ (resp. colocales, i.e. les flèches colocalisées en bas $i'\backslash I' \longrightarrow i\backslash I$), sont surjectives, i.e. à fibres non-vides (ce qui est impliqué par la condition que celles-ci soient 0-connexes).

Dans tout ça je n'ai encore guère parlé des flèches W_0-asphériques resp. co-asphériques, qui pourtant sont ici une motivation principale pour introduire W_0 !

Proposition 3.2. *Conditions équivalentes sur la flèche* $u : I' \longrightarrow I$ *dans* Cat :

a) *Pour toute* $\mathcal{U}$*-catégorie* $\mathcal{M}$ *et tout foncteur* $F : I \longrightarrow \mathcal{M}$*, la flèche canonique (sous réserve que les petites limites inductives soient représentables dans* $\mathcal{M}$*),*

$$\varinjlim_{I'} u^*(F) \longrightarrow \varinjlim_{I} F \tag{3.2.1}$$

[page 44]

est [un] *isomorphisme.*

a′) *Pour toute* $\mathcal{U}$*-catégorie* $\mathcal{M}$ *où les petites limites projectives sont représentables et tout* $F \in \mathcal{M}(I) = \underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M})$*, i.e. tout préfaisceau sur* I *à valeurs dans* $\mathcal{M}$*, la flèche canonique*

$$\varprojlim_{I} F \longrightarrow \varprojlim_{I'} u^*(F) \tag{3.2.2}$$

est [un] *isomorphisme.*

a″) ([53]) *Comme a′, avec* $\mathcal{M} = (\mathrm{Ens})$*, i.e.* $F \in \mathrm{Ob}\, I^\wedge$*.*

([54]).

b) *La flèche* u *est* W_0*-coasphérique, i.e. pour tout* $i \in I$*,* $i\backslash I'$ *est* 0*-connexe.*

L' équivalence de a, a′, a″ est ± tautologique en termes des définitions (cf. SGA 4, I, 8...). La forme a″ s'écrit, posant $\mathbf{D} = \mathrm{HOT}_{W_0}$, que $\forall\, F \in \mathbf{D}(I)$, on veut que

$$\underbrace{H^\bullet_{\mathbf{D}}(I,F)}_{\overset{\text{déf}}{=}\, p_{I,*}(F)} \longrightarrow \underbrace{H^\bullet_{\mathbf{D}}(I',u^*F)}_{\overset{\text{déf}}{=}\, p_{I',*}(F)} \qquad \texttt{[plutôt}\quad \underbrace{H^\bullet_{\mathbf{D}}(I',u^*F)}_{\overset{\text{déf}}{=}\, p_{I',*}(u^*F)}\texttt{]} \tag{3.2.3}$$

($p_I : I \longrightarrow e$ et $p_{I'} : I' \longrightarrow e$ les foncteurs canoniques) soit [un] isomorphisme. On sait que cela équivaut à u $\mathbf{D}$-coasphérique. La démonstration est un jeu amusant entre $u_!$, u^*, u_* à la fois. Il faut exprimer que le Hom d'un objet M de $\mathbf{D}(e)$ (= (Ens) en l'occurence) dans la flèche (3.2.3) est bijective. Ici, il

[53] C'est une condition sur les morphismes de topos, savoir que si F [est] dans $\mathcal{X}^\wedge$, on a

$$H^0(\mathcal{X},F) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{X}',u^*F).$$

Il y a [une] notion similaire pour les H^i $(i \leq n)$, à dégager. Notion de morphismes W_0-coasphériques de topos ! C'est dans la nature d'une condition de 0-connexité relative, duale de la notion W_0-asphérique, qui signifie simplement que pour U 0-connexe dans $U^\wedge$ [plutôt $\mathcal{X}^\wedge$], $f^*(U)$ [plutôt $u^*(U)$] est 0-connexe. De même, on a sans doute des notions ('duales' des précédentes) de W_n-coasphéricité (bien comprise en principe si $\mathcal{X}$ est localement n-asphérique) (La W_n-coasphéricité, étant celle évoquée plus haut.)

[54] **NB** On peut introduire

a‴) Comme a), mais avec $\mathcal{M} = (\mathrm{Ens})$.

a^{IV}) Comme a), avec le foncteur canonique $I' \longrightarrow I'^\wedge$.

[page 45]

est plus naturel de prendre $M = e$ (ensemble ponctuel) et d'interpréter la flèche (3.2.3) comme

$$\text{Hom}(e_I, F) \longrightarrow \text{Hom}(e_{I'}, u^*F) \tag{3.2.4}$$

et par adjonction de $u_!$, u^* le deuxième membre s'interprète comme $\text{Hom}(u_!(e_{I'}), F)$, et la flèche est déduite de

$$u_!e_{I'} = u_!u^*(e_I) \xrightarrow{\text{adj.}} e_I \tag{3.2.5}$$

en prenant le Hom dans F. Donc dire que (3.2.4) est [un] isomorphisme pour tout F signifie que (3.2.5) est [un] isomorphisme. Passant aux valeurs des deux membres en i, on trouve $\pi_0(i\backslash I') \xrightarrow{\sim} 1$, i.e. que $i\backslash I'$ est 0-connexe, q.e.d.

Définition 3.3.

a) Quand les conditions équivalentes de 3.2 sont satisfaites, donc quand les $i\backslash I'$ ($i \in \text{Ob}\, I$) sont 0-connexes, on dit que $u : I' \longrightarrow I$ est un foncteur *cofinal.* On dit que u est *co-cofinal* si $u^o : I'^o \longrightarrow I^o$ est cofinal, i.e. si les localisées I'/i de I' sur I ($i \in \text{Ob}\, I$) sont 0-connexes.

b) Si I' est une *sous-catégorie* de I, on dit que I' *est cofinale dans* I si le foncteur d'inclusion est cofinal, *co-cofinale* si ce foncteur est co-cofinal.

Corollaire 3.4. ([55])

a) Pour que u soit cofinal, il faut *que les catégories colocalisées $i\backslash I'$ soient non-vides, i.e. qu'on ait*

[page 46]

F 0) $\pi_0(f)$ [plutôt $\pi_0(u)$] *est bijectif.*

F 1) Pour tout $i \in \text{Ob}\, I$, [il] *existe* [un] *$i' \in I'$ et une flèche $i \longrightarrow u(i')$ dans I.*

([56]).

b) Si I' est faiblement filtrante, pour que u soit cofinale, il suffit *qu'elle satisfasse F 1, ainsi que la condition :*

F 2) Pour toute double flèche $i \overset{\beta}{\underset{\gamma}{\rightrightarrows}} u(i')$ (avec $i \in \text{Ob}\, I$, $i' \in \text{Ob}\, I'$), [il] *existe une flèche $i' \xrightarrow{\alpha'} j'$ dans I', de telle façon que $u(\alpha')$ égalise (β, γ), i.e. $u(\alpha')\beta = u(\alpha')\gamma$.*

et ces conditions F 1, F 2 impliquent que les $i\backslash I'$ sont faiblement filtrantes, et I aussi ([57]).

[55] **NB** Pour un énoncé complémentaire de cofinalité, cf. XVIII prop. 4.9.6.3 (p. 224-225, 228-242). Il faudrait un énoncé qui coiffe les deux.

[56] **NB** F 1 implique déjà [la] surjectivité de π_0, donc sa bijectivité si I' est 0-connexe - dans ce cas F 0 résulte de F 1.

[57] Si I' est localement faiblement filtrante (= préfiltrante), alors pour la cofinalité de u, il suffit qu'on ait F 0, F 1, F 2, et alors les $i\backslash I'$ sont faiblement filtrantes, et I est préfiltrante tout comme I'.

c) *Si I' est filtrante, alors u est cofinal* si et seulement s'*il satisfait les deux conditions F1, F2, ou encore si et seulement si les $i\backslash I'$ sont* filtrantes *(et non seulement* 0-*connexes). Et cela implique que I' est également filtrante* ([58]).

d) *Si I est préfiltrante (= localement faiblement filtrante, i.e. PS 1), et u* pleinement fidèle, *pour que u soit cofinal, il* faut *et il* suffit *que u satisfasse la condition F 1 plus haut. Et alors I' est également préfiltrante, et les $i\backslash I'$ sont faiblement filtrantes. Si de plus I est filtrante, les $i\backslash I'$ et I' le sont également. (Comparer SGA 4, I 8.1.3.)*

`[page 47]`

DÉMONSTRATION. a) F 1 est évident, car 0-connexe $\Longrightarrow$ non vide. F 0 car W_0-coasphérique $\Longrightarrow$ W_0-équivalence, i.e. $\pi_0(u)$ bijectif.

Pour *prouver* b), il suffit de prouver que F 1, F 2 (si I' est faiblement filtrante) impliquent que les $i\backslash I'$ sont faiblement filtrantes (a fortiori 0-connexes) et de plus que I l'est également. On sait déjà qu'ils sont non vides par F 1, reste à voir que si (i',α), (j',β) sont dans $i\backslash I'$, alors ils sont 'majorés' par un troisième objet de $i\backslash I'$. Comme I' est faiblement filtrante, on trouve $\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small] i' \arrow[dr, "r"] & \\ & k' \\ j' \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$, d'où $u(r)$, $u(s)$ dans I (cf. diagramme)

$$\begin{tikzcd}
& i' \arrow[rr, "r"] \arrow[dd, dash] & & k' \arrow[r, dotted, "t"] \arrow[dd, dash] & l' \arrow[dd, dash] \\
& & j' \arrow[ur, "s"] \arrow[dd, dash] & & \\
& u(i') \arrow[rr, "u(r)"] & & u(k') \arrow[r, dotted, "u(t)"] & u(l') \\
i \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\beta"'] & & u(j'), \arrow[ur, "u(s)"'] & &
\end{tikzcd}$$

appliquant F 2 à la double flèche $u(r)\alpha, u(s)\beta : i \rightrightarrows u(k')$, on trouve $k' \xrightarrow{t} l'$ (en pointillés sur `[le]` diagramme) telle que $(u(t)u(r))\alpha = (u(t)u(s))\beta$, soit γ, ce qui montre que l'objet $(l', \gamma : i \longrightarrow u(l'))$ majore (i',α) et (j',β).

La démonstration que si I' est faiblement filtrante et u satisfait F 1, alors I est faiblement filtrante, est immédiate.

Prouvons c). Il reste à prouver que si I' est *filtrante* (non seulement faiblement filtrante), alors si u `[est]` cofinal, alors F 2 est vérifiée, et de plus les $i\backslash I'$ et I sont filtrantes (pas seulement faiblement filtrantes). Mais notons tout de suite que $i\backslash I' \longrightarrow I'$ est coétale, donc I' filtrante, donc localement filtrante implique que $i\backslash I'$ est aussi localement filtrante ; comme par hypothèse les $i\backslash I'$ sont 0-connexes, ils sont donc filtrantes. La condition F 2 sort facilement à présent :

[58]Si I' est localement filtrante, u est cofinal si et seulement si elle satisfait F 0, F 1, F 2, i.e. si et seulement si les $i\backslash I'$ sont filtrantes, et alors I est localement filtrante.

`[page 48]`

$$\begin{tikzcd}
 & i' \arrow[rr, "r"] \arrow[dd, dash] & & j' \arrow[r, dotted, "t"] \arrow[dd, dash] & k' \arrow[dd, dash] \\
 & & i' \arrow[ur, "s"] \arrow[dd, dash] & & \\
 & u(i') \arrow[rr, "u(r)"] & & u(j') \arrow[r, dotted, "u(t)"] & u(k') \\
i \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\beta"'] & & u(i'). \arrow[ur, "u(s)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Comme $i\backslash I'$ est filtrante, donc faiblement filtrante (PS 1), on peut trouver $i' \underset{s}{\overset{r}{\rightrightarrows}} j'$ telles que

$$u(r)\alpha = u(s)\beta,$$

et comme I' est filtrante, on peut trouver $t : j' \longrightarrow k'$ qui égalise la double flèche (r, s) :

$$tr = ts(\overset{\text{déf}}{=} \tau),$$

alors

$$\underbrace{u(t)u(r)}_{u(tr)}\alpha = \underbrace{u(t)u(s)}_{u(ts)}\beta \qquad \text{i.e.} \qquad u(\tau)\alpha = u(\tau)\beta,$$

i.e. on a vérifié F 2.

Reste à prouver que I est filtrante (si I' l'est et `[si]` $u : I' \longrightarrow I$ est cofinal). On sait déjà que I est faiblement filtrante par b), reste à vérifier la condition de la double flèche

$$i \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} j$$

(PS 2). Soit i' dans I' et $j \longrightarrow u(i')$, et considérons

$$i \underset{\gamma\beta}{\overset{\gamma\alpha}{\rightrightarrows}} u(i'),$$

par hypothèse F 2 $\exists\ r : i' \longrightarrow j'$ dans I' telle que

`[page 49]`

$u(r)(\gamma\alpha) = u(r)(\gamma\beta)$, donc $u(r)\gamma$ égalise (α, β), q.e.d.

La vérification de d) par AQT `[abréviation dont le sens échappe aux éditeurs]`.

4 Foncteurs biasphériques

Soit encore

$$u : I' \longrightarrow I$$

une flèche de Cat, soit $\mathcal{M}$ une catégorie, d'où

(4.1) $$u^* : \mathcal{M}(I) \longrightarrow \mathcal{M}(I');$$

nous cherchons des conditions sur u, $\mathcal{M}$ pour que ce foncteur soit pleinement fidèle. Si le foncteur adjoint à gauche $u_!$ (resp. adjoint à droite u_*) existe, on sait qu'il revient au même de dire que le morphisme d'adjonction

(4.2) $$u_! u^* F \longrightarrow F$$

resp.
(4.2 bis) $$u_* u^* F \longleftarrow F$$

soit `[un]` isomorphisme pour tout F dans $\mathcal{M}(I)$. Disons alors que u est $\mathcal{M}$-connexe, ou $\mathcal{M}$-biasphérique, cette terminologie sous-entendant que c'est là une propriété qui se réfère au dérivateur $\mathbf{D}_{\mathcal{M}} = (S \longmapsto \mathcal{M}(S))$ sur Cat défini par $\mathcal{M}$. Notons que

(4.3) Si u est $\mathcal{M}$-connexe, alors il est aussi $\mathcal{M}(S)$-connexe, pour tout S dans Cat, puisque $\mathcal{M}(S)(I) \simeq \mathcal{M}(I)(S) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Hom}}(S^o, \mathcal{M}(I))$,

`[page 50]`

et

(4.4) Si $\mathcal{M}' \hookrightarrow \mathcal{M}$ est pleinement fidèle, alors $\mathcal{M}$-connexe implique $\mathcal{M}'$-connexe,

enfin, inversement,

(4.5) pour que u soit $\mathcal{M}$-connexe, il faut et il suffit que pour toute *petite* sous-catégorie pleine $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$, u soit $\mathcal{M}'$-connexe.

Comme toute petite $\mathcal{M}'$ se plonge dans $\mathcal{M}'^{\wedge} = \mathrm{Ens}(\mathcal{M}')$, il résulte de (4.3), (4.4), (4.5) que
(4.6) Si u est Ens-connexe, il est $\mathcal{M}$-connexe pour toute catégorie $\mathcal{M}$,

car c'est le cas si $\mathcal{M}$ est petite par (4.3), donc pour tout $\mathcal{M}$ par (4.5).

Disons qu'un foncteur u dans Cat est $\mathcal{M}$-*cofinal* ou $\mathcal{M}$-coasphérique si l'homomorphisme fonctoriel
(4.7) $$\varprojlim_{I} F \longrightarrow \varprojlim_{I'} u^*(F)$$

(flèche dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}(I), \mathcal{M})$ si les $\varprojlim$ de types I, I' existent dans $\mathcal{M}$, sinon flèche dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}(I), \mathcal{M}^{\wedge})$) est un isomorphisme. En se ramenant au cas de petites catégories $\mathcal{M}$, chacune plongée dans $\mathcal{M}^{\wedge}$, on voit par le critère (4.2 bis) que

(4.8) $$u \text{ est } \mathcal{M}\text{-connexe si pour tout } i \in \mathrm{Ob}\, I,$$

[page 51]

le foncteur induit $I'/i \longrightarrow I/i$ est $\mathcal{M}$-cofinal. La réciproque n'est pas claire, car u est $\mathcal{M}$-connexe si et seulement si pour tout $i \in \mathrm{Ob}\, I$ et tout $\mathcal{M}$-préfaisceau F_i sur I/i *induit par un préfaisceau F sur I,* l'homomorphisme $\varprojlim_{I/i} F_i \longrightarrow \varprojlim_{I'/i} (u/i)^*(F/i)$ est [un] isomorphisme. On ne peut donc affirmer d'emblée que cela implique itou pour *tout* F_i sur I/i, que si on sait que $(u/i)^* : \mathcal{M}(I) \longrightarrow \mathcal{M}(I/i)$ est essentiellement surjectif. Il en est ainsi pour tout i quand I est *ordonné,* car alors $I/i \longrightarrow I$ est pleinement fidèle, donc $\mathcal{M}(I/i) \longrightarrow \mathcal{M}(I)$ [est] pleinement fidèle, donc $\mathcal{M}(I) \longrightarrow \mathcal{M}(I/i)$ [est] un foncteur de localisation, en particulier essentiellement surjectif.

[page 52]

Mais quand $\mathcal{M} = (\mathrm{Ens})$, cette perplexité disparaît. On trouve la

Proposition 4.1. *Soit $u : I' \longrightarrow I$ une flèche dans* Cat. *Conditions équivalentes :*

a) Pour toute catégorie $\mathcal{M}$, $u^*_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(I) \longrightarrow \mathcal{M}(I')$ est pleinement fidèle (i.e. u est $\mathcal{M}$-connexe).

a') Pour toute catégorie $\mathcal{M}$ où les limites inductives de type I, I' existent, la flèche d'adjonction pour F dans $\mathcal{M}(I)$

$$u_! u^* F \xrightarrow{\simeq} F$$

est [un] *isomorphisme.*

a'') Dual de a'), avec [la] *flèche d'adjonction*

$$u_* u^* \xleftarrow{\simeq} F.$$

b) b') b'') Comme a) a') a''), avec $\mathcal{M} = (\mathrm{Ens})$.

c) Comme b'), avec F représentable, i.e. de la forme $j \longmapsto \mathrm{Hom}_I(j, i)$.

d) Pour tout I dans I, $I'/i \longrightarrow I/i$ est cofinal.

d') Pour tout i dans I, $i\backslash I' \longrightarrow i\backslash I$ est cofinal.

d'') Pour toute flèche $i_0 \xrightarrow{\alpha} i_1$ dans I, la catégorie $i_0\backslash \underset{\alpha}{I'}/i_1 \overset{\text{déf}}{=} I' \times_I \underbrace{i_0\backslash \underset{\alpha}{I}/i_1}_{\substack{\text{catégorie biïnduite} \\ (i_0,\alpha)\backslash(I/i_1) \simeq (i_0\backslash I)/(i_1,\alpha)}}$ est 0-connexe.

[page 53]

Démonstration. On sait déjà, par les préliminaires, l'équivalence de a, a′, a″, b, b′, b″, soit A cette condition - nous dirons que u est *W_0-connexe* ou *W_0-biasphérique,* si ces conditions équivalentes sont satisfaites. On a de plus l'autodualité

$$u \text{ est } W_0\text{-connexe si et seulement si } u^o \text{ l'est,} \tag{4.8}$$

car on a évidemment

$$u \text{ est } \mathcal{M}\text{-connexe si et seulement si } u^o \text{ est } \mathcal{M}^o\text{-connexe.} \tag{4.9}$$

Ceci montre l'équivalence de d, d$'$, qui se voit aussi par l'equivalence de chacune de ces deux conditions avec d$''$, par le critère de cofinalité du paragraphe précedent. Soit D cette condition sur u. On a par (4.8) D $\Longrightarrow$ A, donc

$$\mathrm{D} \Longrightarrow \mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{c},$$

il reste à prouver que c $\Longrightarrow$ D, plus précisément c $\Longrightarrow$ d$''$ et c$'$ $\Longrightarrow$ d$''$ [c$'$?]. Explicitons le morphisme d'adjonction (pour i dans I)

$$u_! \underbrace{u^* i} \longrightarrow i,$$

i.e. pour j dans I

$$\underbrace{(u_! u^* i)(j)}_{\pi_0(j\backslash(I'/u^*(i)))} \longrightarrow i(j) = \mathrm{Hom}(j,i).$$

[page 54]

Or $I'/u^*(i) \simeq I'/i$, donc on a la flèche

$$(u_! u^*(i))(j) \simeq \pi_0(j\backslash(I'/i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_I(j,i). \tag{4.10}$$

Or on voit aussitôt que pour $\alpha : j \longrightarrow i$ dans $\mathrm{Hom}(j,i)$, la fibre de (4.10) en u s'identifie à $\pi_0(j\backslash \underset{\alpha}{I'}/i\ )$, de façon plus précise, $j\backslash \underset{\alpha}{I'}/i$ est la sous-catégorie ouverte et fermée de $J = j\backslash(I'/i)$ correspondant à la partie du $\pi_0(J)$ qui est au dessus de α dans (4.10). Cela achève la démonstration de 4.1.

NB Une autre façon de prouver que c $\Longrightarrow$ A c'est de noter que les deux membres dans le morphisme d'adjonction $u_! u^* F \longrightarrow F$ dans $I^\wedge$ sont des foncteurs $I^\wedge \longrightarrow I^\wedge$ qui commutent aux $\varinjlim$ quelconques. Donc pour vérifier que c'est [un] isomorphisme, il suffit de le vérifier pour F dans I, puisque I engendre $I^\wedge$ par $\varinjlim$. Par contre, un argument de ce type ne semble pas prouver que pour vérifier que l'on a un *isomorphisme* $F \longrightarrow u_* u^* F$, il suffise de le faire pour F représentable, i.e. de vérifier b$''$ pour F représentable.

Il resterait à voir si c$'$ $\Longrightarrow$ d$''$ [c$'$?].

[page 55]

Explicitons le morphisme d'adjonction

$$i \longrightarrow u_* u^* i$$

(pour $i \in \mathrm{Ob}\, I$) par ses valeurs sur j

$$\underbrace{i(j)}_{\mathrm{Hom}(j,i)} \longrightarrow \Gamma(I'/j, u^* i). \tag{$*$}$$

Soit donc

$$u_j : I'/j \longrightarrow I,$$

on a

$$\Gamma(I'/j, \underbrace{u^*(i)|I'/j}_{u_j^*(i)}) \simeq \mathrm{Hom}(e_{I'/j}, u^*(i)) \overset{\mathrm{adj}}{\simeq} \mathrm{Hom}(u_{j,!}e_{I'/j}, i),$$

et la flèche $(*)$, fonctorielle en i, est déduite d'une flèche

$$(**) \qquad u_{j,!}(e_{I'/j}) \longrightarrow j.$$

On voit tout de suite, comme ci-dessus, que $(**)$ est [un] isomorphisme si et seulement si pour tout $\alpha : k \longrightarrow j$, la catégorie $k\underset{\alpha}{\backslash} I'/j$ est 0-connexe, et si on l'exige pour tout j, k, α, c'est la condition d$''$. Mais il n'est pas clair que pour qu'on ait $(**)$ isomorphisme, il suffise que le Hom des deux membres à valeurs dans tout i dans I (et non tout F dans $I^\wedge$) soit [un] isomorphisme. La difficulté provient du fait que $u_{j,!}(e_{I'/j})$ n'est pas forcément représentable, et qu'un F quelconque dans $I^\wedge$

[page 56]

n'est pas forcément $\varinjlim$ de foncteurs représentables. Donc il est douteux que c$'$ [c$'$?] suffise à entraîner que u est W_0-connexe.

Corollaire 4.2. *Pour que u soit W_0-connexe, il* suffit *qu'il soit une W_0-équivalence universelle, i.e. (cf. 3.1) que les fibres soient 0-connexes, et que pour toute flèche non identique dans I, définissant $\mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow I$, $I' \times_I \mathbf{\Delta}^1$ soit 0-connexe.*

4.3. Cette condition de W_0-équivalence universelle est cependant *strictement* plus forte que la W_0-connexité, comme on le voit sur l'exemple où u est une *équivalence de catégories* non surjective sur les objets (p.ex. l'inclusion d'un sommet dans un groupoïde 1-connexe ayant plus d'un objet). Plus généralement, tout foncteur de localisation est W_0-connexe, alors que ses fibres ne sont pas forcément connexes, et a fortiori ce n'est pas une W_0-équivalence universelle.

Cependant, si tout endomorphisme p d'un i dans I, tel que $p^2 = p$ (projecteur) est l'identité, et si

[page 57]

$I' \longrightarrow I$ est 'transportable', p.ex. si dans I tout isomorphisme est une identité, alors u W_0-connexe implique que les fibres de u sont 0-connexes, comme on voit en exprimant d$''$ pour α flèche identique. Les conditions envisagées sur I sont satisfaites si I est ordonnée. Mais même si I' et I sont toutes deux ordonnées, u peut être W_0-connexe, sans être une W_0-équivalence universelle. Voici un exemple avec $I = \mathbf{\Delta}^2$:

$$\begin{array}{c} I' = \left\{ \begin{array}{ccc} & 1' & \longrightarrow 2 \\ & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & 1 & \end{array} \right\} \\ \Big\downarrow \\ I = \left\{ \; 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \; \right\}. \end{array}$$

Les catégories bilocalisées de I sont les trois sommets $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, et les trois segments $[0,1]$, $[1,2]$ et $[0,2]=I$, les images inverses sont respectivement

$$\bullet\ ,\quad \begin{tikzcd} {} \arrow[d] \\ {} \end{tikzcd} ,\quad \bullet\ ,\quad \begin{tikzcd} & {} \arrow[d] \\ {} \arrow[r] & {} \end{tikzcd} ,\quad \begin{tikzcd} & {} \arrow[r] & {} \\ {} \arrow[d] & & \\ {} & & \end{tikzcd} ,\quad I' \quad ,$$

elles sont toutes 0-connexes, i.e. W_0-asphériques, et même contractiles donc W_ω-asphériques (donc u est même W_ω-connexe, i.e. W_ω-biasphérique). Mais ce n'est pas une W_0-équivalence universelle, car l'image inverse de I' par $\mathbf{\Delta}^1 \xrightarrow{\partial} \mathbf{\Delta}^2$, $\partial(0)=0$, $\partial(1)=2$,

[page 58]

est la catégorie disconnexe $\varepsilon = \{\bullet\ \ \bullet\}$.

J'avais espéré un moment que les foncteurs W_0-connexes $I' \xrightarrow{u} I$ seraient ceux qui se factorisent en $I' \xrightarrow{u_0} I'' \xrightarrow{v} I$, avec u_0 une équivalence, et v une W_0-équivalence universelle. Mais l'exemple précédent le met en défaut, avec u même W_ω-connexe. En effet, I'' serait déduit d'un ensemble préordonné, et v se factoriserait par l'ensemble ordonné correspondant, savoir I', donc serait de la forme

$$I'' \longrightarrow I' \xrightarrow{u} I,$$

où $I'' \longrightarrow I'$ est un passage au quotient, et l'image inverse de $\mathbf{\Delta}^1 \xrightarrow{\partial} I$ serait encore disconnexe (un π_0 de cardinal 2). Donc c'est vraiment sans espoir.

Cependant

Corollaire 4.3. *Supposons que u soit W_0-lisse, ou W_0-propre, ou une W_0-fibration faible. Alors u est W_0-connexe si et seulement si c'est une W_0-équivalence universelle, i.e. si et seulement si a) ses fibres sont* 0*-connexes et b) $I' \times_I \mathbf{\Delta}^1$* [est] 0*-connexe pour tout $\mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow I$ (correspondant à une flèche non identique).*

[page 59]

Dans les trois cas on sait que u est une W_0-équivalence universelle si et seulement si ses fibres sont W_0-connexes. Or la W_0-lissité implique que $\forall i \in \operatorname{Ob} I$, l'inclusion

$$I'_i \longrightarrow i\backslash I'$$

est une W_0-équivalence, d'autre part $i\backslash I' \longrightarrow i\backslash I$ étant W_0-asphérique, donc une W_0-équivalence par hypothèse, $i\backslash I'$ est 0-connexe, donc I'_i aussi. Le cas u W_0-propre est dual. Dans le cas [où] u [est] une W_0-fibration faible, on sait encore que $I'_i \longrightarrow i\backslash I'$ est une W_0-équivalence, et on conclut comme dans le cas lisse (ou, au choix, via $I'_i \longrightarrow I'/i$).

Mais l'idée me vient que les foncteurs W_0-connexes pourraient être exactement les foncteurs de localisation ? Il revient au même de dire qu'un foncteur $u : I' \longrightarrow I$ *conservatif* (i.e. $u(\alpha)$ isomorphisme $\Longrightarrow$ α isomorphisme) qui est W_0-connexe, est une équivalence. Mais c'est faux, comme on voit en prenant $I = e$, I' un groupoïde 0-connexe et non 1-connexe : $I' \longrightarrow e$ est W_0-connexe (et même une W_0-équivalence universelle), mais ce n'est pas une équivalence (et pas un foncteur de localisation).

[page 60]

Je voudrais généraliser la notion de flèche W_0-biasphérique au cas d'un dérivateur $\mathbf{D}$ quelconque.

Proposition 4.4. *Soit* $\mathbf{D}$ *un dérivateur sur* Diag*, et* $u : I' \longrightarrow I$ *une flèche dans* Diag*. Supposons que* u_* *et* $u_!$ *existent, et se calculent de façon standard, pour tout flèche* u *dans* Diag*. (En fait, il suffit que ce soit le cas pour* u *et ses localisées* $u/i : I'/i \longrightarrow I/i$*, ou* u *et ses colocalisées* $i\backslash u : i\backslash I' \longrightarrow i\backslash I$*.) Considérons les conditions :*

a) $u^* : \mathbf{D}(I) \longrightarrow \mathbf{D}(I')$ [est] *pleinement fidèle.*

a′) $\forall\ F$ *dans* $\mathbf{D}(I)$*, la flèche*

$$u_! u^* F \longrightarrow F$$

est un isomorphisme.

a″) $\forall\ F$ *dans* $\mathbf{D}(I)$*, la flèche*

$$u_* u^* F \longleftarrow F$$

est un isomorphisme.

b) $\forall\ i$ *dans* I*, la flèche* $i\backslash I' \longrightarrow i\backslash I$ *est* $\mathbf{D}$*-asphérique.*

b′) $\forall\ i$ *dans* I*, la flèche* $I'/i \longrightarrow I/i$ *est* $\mathbf{D}$*-coasphérique.*

b″) $\forall\ \alpha : i_0 \longrightarrow i_1$ *dans* I*, la catégorie* $i_0\backslash \underset{\alpha}{I'}/i_1$ *est* $\mathbf{D}$*-asphérique.*

On a alors les implications

$$(b \Longleftrightarrow b' \Longleftrightarrow b'') \Longrightarrow (a \Longleftrightarrow a' \Longleftrightarrow a'').$$

On a $a \Longrightarrow b$ *(i.e. toutes les conditions licites envisagées sont équivalentes)*

[page 61]

dans chacun des cas suivants.

1° *I est préordonné.*

2° $\forall\ i$ *dans* I*,* $\alpha_i^* : \mathbf{D}(I) \longrightarrow \mathbf{D}(I/i)$ *est essentiellement surjectif.*

3° $\forall\ i$ *dans* I*, considérant* $\alpha_i : I/i \longrightarrow I$*, le foncteur* $\alpha_{i,!} : \mathbf{D}(I/i) \longrightarrow \mathbf{D}(I)$ *est conservatif.*

4° $\mathcal{D} = \mathrm{HOT}_{W_0} \approx \mathbf{D}_{\mathbf{Ens}}$.

Démonstration. L'équivalence de a, a′, a″ est claire, soit A. De même l'equivalence de b, b′, b″, soit B.

Prouvons

$$B \Longrightarrow A$$

en supposant p.ex. l'existence de u_*. On admet tacitement, avec l'existence de u_* : $\mathbf{D}(I') \longrightarrow \mathbf{D}(I)$, le mode de calcul des fibres de $u_*(-)$. Donc A, via a″, équivaut à

$$H^\bullet_{\mathbf{D}}(I'/i, u^*F) \xleftarrow{iso} H^\bullet_{\mathbf{D}}(I/i, F) \simeq F(i)$$

pour tout F dans $\mathbf{D}(I)$, tout i dans I.

Soit

$$\alpha_i : I/i \longrightarrow F, \qquad F_i = \alpha_i^*(F),$$

on doit donc exprimer que pour tout F_i provenant d'un F, on a

$$(*) \qquad H^\bullet_{\mathbf{D}}(I/i, F_i) \xrightarrow{\text{iso}} H^\bullet_{\mathbf{D}}(I'/i, (u/i)^*(F_i)).$$

Or sous réserve d'existence de $(u/i)_!$, dire que $(*)$ est `[un]` isomorphisme pour *tout* F_i de $\mathbf{D}(I/i)$, signifie que

$$u/i : I'/i \longrightarrow I/i$$

`[page 62]`

est $\mathbf{D}$-coasphérique, d'où b$'$ $\Longrightarrow$ a$''$. Il est clair que l'implication inverse est valable si α_i^* est essentiellement surjectif, c'est le cas 2^o. Or 2^o est satisfait si I est préordonné, d'où le cas 1^o. Le cas 4^o a déjà été traité (4.1). Il faut encore traiter le cas 3^o, qui contient d'ailleurs le cas 2^o, donc le cas 1^o (et aussi le cas 4^o, cf. plus bas).

Il faut exprimer l'isomorphie de la flèche $(*)$ pour F_i de la forme $\alpha_i^*(F)$. Soit ξ `[un]` objet de $\mathcal{A} = \mathcal{D}(e)$, il faut exprimer l'isomorphie de $\mathrm{Hom}(\xi, -)$ dans les deux membres de $(*)$, i.e. de

$$(**) \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(I/i, F_i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\xi'_{I'/i}, (u/i)^*(F_i)) \\ & \overset{\text{adj.}}{\simeq} & \mathrm{Hom}((u/i)_!(\xi'_{I'/i}), F_i), \end{array}$$

`[plutôt` $\xi_{I'/i}$`]` flèche qui se déduit de

$$(***) \qquad (u/i)_!(u/i)^*(\xi_{I'/i}) \xrightarrow{\text{adj.}} \xi_{I'/i}$$

en prenant le Hom dans F_i. La condition u/i coasphérique (i.e. b$'$) signifie que $(***)$ est un isomorphisme pour tout ξ dans $\mathcal{A}$. *Suffit*-il pour ceci que son Hom dans un F_i soit bijectif, quand on restreint F_i dans $\mathbf{D}(I/i)$ à être dans l'image de $\mathbf{D}(I)$ par α_i^* ? Or cette flèche $(**)$, pour $F_i = \alpha_i^* F$, s'explicite par la formule d'adjonction relative

`[page 63]`

au foncteur α_i, comme

$$\mathrm{Hom}(\alpha_{i,!}(\xi_{I/i}), F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\alpha_{i,!}(\ldots), F).$$

Dire que c'est un isomorphisme pour tout F, signifie donc *exactement* que la transformée de la flèche $(***)$ par $\alpha_!$ est un isomorphisme. Pour en conclure que $(***)$ elle-même est `[un]` isomorphisme, la condition naturelle à imposer est donc que $\alpha_{i,!} : \mathbf{D}(I/i) \longrightarrow \mathbf{D}(I)$ soit conservatif. C'est le cas 3^o. Cela achève la démonstration de 4.4.

4.5. Montrons que la condition 3^o sur I n'est pas toujours satisfaite, dans le cas de $\mathbf{D} = (\mathrm{HOT}_{W_0})^{\mathrm{opp}} \approx (\mathbf{D}_{\mathrm{Ens}})^{\mathrm{opp}}$, bien que dans ce cas, il soit pourtant vrai que pour toute I' sur

I satisfaisant la condition a$''$ (autoduale), la condition b$'$ (elle aussi autoduale) est aussi satisfaite (par cas 4^o ci-dessus). Je dis donc qu'il existe I et i dans I, tels que

$$\beta_{i,*} : (i\backslash I)^\wedge \longrightarrow I^\wedge$$

ne soit pas conservatif. (**NB** Par contre $\alpha_{i,!} : (I/i)^\wedge \longrightarrow I^\wedge$ est toujours conservatif, ce qui redonne le cas 4^o comme cas particulier de 3^o). Comme $\beta_i : i\backslash I \longrightarrow I$ est W_0-propre (et même W_ω-propre !), $\beta_{i,*}$ 'se calcule fibre par fibre', donc on a

`[page 64]`

$$\beta_{i,*}(G)(j) \simeq \prod_{\alpha\in \mathrm{Hom}(i,j)} G(\alpha),$$

la fibre en question en j étant discrète. Prenons

$$I = 0 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 1, \qquad \text{avec } \alpha \neq \beta,$$

alors $0\backslash I$ est $\Psi = 0 \begin{smallmatrix} \nearrow^{\alpha'} 1 \\ \searrow_{\beta'} 1' \end{smallmatrix}$, et $\Psi^\wedge$ est la catégorie des diagrammes d'ensembles $G = G_0 \begin{smallmatrix} \swarrow^{\lambda} G_1 \\ \nwarrow_{\mu} G_{1'} \end{smallmatrix}$. Le foncteur β_* déduit de $\beta : i\backslash I \longrightarrow I$ transforme ce diagramme en

$$G_1 \times G_{1'} \overset{\lambda\,\mathrm{pr}_1}{\underset{\lambda\,\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} G_0.$$

`[plutôt` $\mu\,\mathrm{pr}_2$`]`. Si on se borne aux diagrammes G pour lesquels $G_{1'} = \emptyset$, β_* sur ceux-ci donne

$$\emptyset \rightrightarrows G_0,$$

donc la restriction de β_* à cette sous-catégorie (équivalente à $(\mathbf{\Delta}^1)^\wedge$) n'est pas fidèle, ni conservative, ne tenant compte que de la composante G_0, et non pas de G_1.

`[page 63bis]`

Definition 4.6. *On dit que* $u : I' \longrightarrow I$ *dans* Diag *est* **D**-biasphérique *si elle satisfait les conditions équivalentes b, b$'$, b$''$ de 4.4,* **D**-connexe *si elle satisfait la condition a, ou encore (sous réserve d'existence de $u_!$ resp. de u_*) les conditions équivalentes a$'$, a$''$.*

Ainsi, **D**-biasphérique implique **D**-connexe, et la réciproque est vraie quand I satisfait (par rapport à **D**) la condition 3^o de 4.4 (donc aussi, si elle satisfait l'une des conditions plus faibles 2^o, 1^o), ou la condition duale de celle-ci (vu que les notions **D**-biasphérique, **D**-connexe sont autoduales). À cet égard, notons le

Corollaire 4.7. *Supposons que* $\mathcal{A} = \mathbf{D}(e)$ *satisfasse la condition suivante : le foncteur*

$$\begin{cases} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ (\xi\ ,\ \eta) \longrightarrow \xi \amalg \eta \end{cases}$$

est conservatif (resp. fidèle). Alors pour toute flèche étale $u : J \longrightarrow I$ dans Diag *(et en particulier pour $I/i \longrightarrow I$), le foncteur $u_! : \mathbf{D}(J) \longrightarrow \mathbf{D}(I)$ est conservatif (resp. fidèle)* ([59]). *Si cette condition, ou la condition duale,*

[59]**NB** Cette condition est satisfaite si $\forall\, \xi, \eta \in \mathcal{A}$ on a $\mathrm{Hom}(\xi,\eta) \neq \emptyset$, (car on se ramène à ceci : si u_1,

`[page 64bis]`

impliquant les produits $\xi \times \eta$ *(*ξ, η *dans* $\mathcal{A}$*), est satisfaite, alors pour toute flèche* $u : I' \longrightarrow I$ *dans* Diag*,* u *est* **D***-connexe si et seulement si* u *est* **D***-biasphérique.*

Démonstration. L'hypothèse de conservativité, ou de fidélité se transporte aux sommes indexées par un ensemble quelconque (sous réserve d'existence), comme on voit en écrivant $\coprod_{\lambda} \xi_\lambda = \xi_{\lambda_0} \amalg \coprod_{\lambda \neq \lambda_0} \xi_\lambda$. L'assertion faite sur $u_!$ résulte alors du calcul de $u_!$ fibre par fibre (qui est valable vu que u est étale donc lisse), en tenant compte que les fibres sont discrètes.

Je ne connais pas d'exemple d'un couple $(\mathbf{D}, u)$ d'un dérivateur $\mathbf{D}$ et d'une flèche u dans Diag, pour lesquels u soit $\mathbf{D}$-connexe sans être $\mathbf{D}$-asphérique. On a donné des conditions sur $\mathbf{D}$, qui assurent équivalence des deux notions. Si $\mathbf{D}$ est de la forme $\mathbf{D}_{\mathcal{M}}$, et si $\mathcal{M}$ satisfait la condition dite dans 4.7 ou sa duale, alors par 4.7 c'est OK. Donc un contrexemple avec un $\mathbf{D}_{\mathcal{M}}$ devrait en tenir compte. Je ne vais pas m'obstiner pour tirer au clair ce qui en est.

`[page 65]`

Corollaire 4.8. *Une flèche* u *de* Diag *qui est une* **D***-équivalence universelle est* **D***-biasphérique, et a fortiori* **D***-connexe. Inversement, si* u *est soit* **D***-lisse, soit* **D***-propre, soit une* **D***-fibration faible, et si* u *est* **D***-biasphérique, c'est une* **D***-équivalence universelle.*

La démonstration est celle du cas particulier 4.3. On a donc un diagramme d'implications :

$$
\begin{tikzcd}
\text{Cat-équivalence} \arrow[dr, Rightarrow] & \mathbf{D}\text{-équivalence universelle } (W_{\mathrm{univ}}) \arrow[d, Rightarrow, "\substack{\text{implication stricte ; équivalence} \\ \text{dans le cas où } u \text{ est soit } \mathbf{D}\text{-propre,} \\ \text{soit } \mathbf{D}\text{-lisse, soit une } \mathbf{D}\text{-fibration faible.}}"] & \\
& \mathbf{D}\text{-biasphérique} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, "\substack{\text{équivalence} \\ \text{dans tous les} \\ \text{cas connus}}"] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\mathbf{D}\text{-asphérique} \arrow[dr, Rightarrow] & \mathbf{D}\text{-connexe} \arrow[d, Rightarrow] & \mathbf{D}\text{-coasphérique} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \mathbf{D}\text{-équivalences } (W) &
\end{tikzcd}
$$

([60]). Rappelons que pour $u : I' \longrightarrow I$ donné

a) u est $\mathbf{D}$-asphérique si et seulement si $\forall\, F$ *constant* dans $\mathbf{D}(I)$

$$(*) \qquad F \xrightarrow[\sim]{\text{adj.}} u_* u^* F \qquad \text{est `[un]` isomorphisme.}$$

---

u_2 sont deux flèches dans Ens entre ensembles *non vides,* et si $u_1 \times u_2$ est `[un]` isomorphisme, u_1, u_2 sont `[des]` isomorphismes). Cela s'applique en particulier si $\mathcal{A}$ admet un objet neutre, p.ex. si $\mathcal{A}$ est additive.

[60]**NB** Ces sept classes de morphismes dans Cat sont stables par composition sauf la notion de $\mathbf{D}$-connexité, toutes ces notions ne dépendent que de l'ensemble $W = W_{\mathbf{D}}$ des $\mathbf{D}$-équivalences.

b) u est $\mathbf{D}$-coasphérique si et seulement si $\forall\, F$ *constant* dans $\mathbf{D}(I)$

$$(**)\qquad F \xleftarrow[\sim]{\text{adj.}} u_! u^* F \qquad \text{est [un] isomorphisme.}$$

c) u est $\mathbf{D}$-connexe si et seulement si pour *tout* F dans $\mathbf{D}(I)$ (pas forcément constant, ni localement constant), $(*)$ est [un] isomorphisme, ou ce qui revient au même, pour tout F $(**)$ est [un] isomorphisme.

[page 66]

Rappelons que la classe W_{asph} [des] flèches W-asphériques et celle, Liss_W, des flèches W-lisses, se déterminent mutuellement, ainsi

$$(4.10)\quad \begin{cases} (f : X \longrightarrow Y) \in W_{\text{asph}} \iff & \forall\,(Y' \xrightarrow{u} Y) \in \text{Liss}_W, \\ & X' = X \times_Y Y' \longrightarrow X' \text{ est } \in W. \\ (f : Y' \longrightarrow Y) \in \text{Liss}_W \iff & \text{Le foncteur } X \longmapsto X' = X \times_Y Y' \\ & \text{de } \text{Cat}/Y \text{ dans } \text{Cat}/Y' \text{ transforme} \\ & \text{flèches dans } W_{\text{asph}} \text{ dans [plutôt en]} \\ & \text{flèches dans } W_{\text{asph}}. \end{cases}$$

Pour toute partie A de $\text{Fl}(\text{Cat})$ stable par isomorphismes, on peut associer une partie $\mathbf{L}(A)$ de $\text{Fl}(\text{Cat})$, par la relation

$$(4.11)\qquad (u : Y' \longrightarrow Y) \in \mathbf{L}(A) \iff \begin{array}{l} u^* : \text{Cat}/Y \longrightarrow \text{Cat}/Y' \\ \text{transforme flèches} \\ \in A \text{ en flèches} \in A. \end{array}$$

On voit que $\mathbf{L}(A)$ contient les isomorphismes, est stable par composition, et est stable aussi par changement de base (comme c'est le cas de Liss_W). Inversement, à une partie L de $\text{Fl}(\text{Cat})$, stable par isomorphismes, on associe une partie $\mathbf{A}_W(L)$ par

$$(4.12)\qquad (f : X \longrightarrow Y) \in \mathbf{A}_W(L) \iff \begin{array}{l} \forall\,(Y' \longrightarrow Y) \text{ dans } L, \\ X' = X \times_Y Y' \longrightarrow Y' \\ \text{est dans } W. \end{array}$$

Si L est stable par changement de base, alors $\mathbf{A}_W(L)$ est stable par composition. Il contient les isomorphismes (car W les contient), est contenu dans W si L contient les identités. Mais

[page 67]

aucune raison qu'il soit stable par changement de base quelconque (et en fait, W_{asph} ne l'est pas).

([61]). On a, pour un $A \subseteq W \subseteq \text{Fl}(\text{Cat})$ donné, stable par isomorphismes,

$$(4.13)\qquad A \subseteq \mathbf{A}_W(\mathbf{L}(A)) \overset{\text{déf}}{=} A^{\natural} \subseteq W, \qquad \begin{array}{l} \text{partie stable par composition,} \\ \text{contient [les] isomorphismes,} \end{array}$$

[61] Canulé [jusqu'à la fin du §4], cf. §6.

et pour toute partie L de Fl(Cat) qui est stable par changement de base, et par composition

(4.14) $$L \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{A}_W(L)) \overset{\text{déf}}{=} L^\flat,$$ partie de Fl Cat stable par composition et par changement de base, contenant les isomorphismes.

On a

$$\begin{cases} A^{\natural\natural} &= A^\natural, \quad \text{car } \mathbf{A}_W(L)^\natural = \mathbf{A}_W(L) \\ L^{\flat\flat} &= L^\flat, \quad \text{car } \mathbf{L}(A)^\flat = \mathbf{L}(A). \end{cases}$$

Exemples :

1°) $L = \text{Ét}$, $\mathbf{A}_W(L) = W_{\text{asph}}$, $\mathbf{L}(\mathbf{A}_W(L)) = L^\flat = \text{Liss}_W$.

2°) $L = \text{Coét}$, $\mathbf{A}_W(L) = W_{\text{coas}}$, $\mathbf{L}(\mathbf{A}_W(L)) = L^\flat = \text{Prop}_W$.

3°) $A = W$, $\mathbf{L}(A) = \text{Fib}_W$, $A^\natural = W$.

4°) $L = \text{Fl Cat}$, $\mathbf{A}_W(L) = W_{\text{univ}}$, $L^\flat = L$.

`[page 68 vide]`

[page 69]

5 Dualité formelle

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ deux ensembles ordonnés. J'essaye de dégager une notion de 'dualité' (formelle) reliant $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Ce sera une relation entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \tag{5.1}$$

ayant les propriétés suivantes

(D) Pour toute partie A de $\mathcal{P}$, l'ensemble

$$A^{\cup} \overset{\text{déf}}{=} \{q \in \mathcal{Q} \mid (p,q) \in \mathcal{R} \text{ pour tout } p \in A, \text{ i.e. } A \times \{q\} \subseteq \mathbf{R}\}$$

est une partie ouverte de $\mathcal{Q}$ ayant un plus grand élément $\beta(A)$: $A^{\cup} = \mathcal{Q}/\beta(A)$. Dualement, pour toute partie B de $\mathcal{Q}$, l'ensemble

$$B^{\cap} \overset{\text{déf}}{=} \{p \in \mathcal{P} \mid (p,q) \in \mathcal{R} \text{ pour tout } q \in B, \text{ i.e. } \{p\} \times B \subseteq \mathcal{R}\}$$

est une partie ouverte de $\mathcal{P}$ ayant un plus grand élément $\alpha(B)$, i.e. $B^{\cap} = \mathcal{P}/\alpha(B)$.

Le plus souvent, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ seront stables par sup quelconques (donc aussi par inf quelconques). Dans ce cas, (D) équivaut, du côté des $A^{\cup}$ (pour $A \in \mathfrak{P}(\mathcal{P})$) à ceci :

(D_0) Pour tout $p \in \mathcal{P}$, $\mathcal{R}(p) = \{q \in Q \mid (p,q) \in \mathcal{R}\}$ est une partie ouverte *filtrante* de $\mathcal{Q}$, ou ce qui revient au même, une partie non vide ($\Longleftrightarrow$ contenant le plus petit élément $\emptyset_{\mathcal{Q}}$ de $\mathcal{Q}$) stable par sup de deux éléments. De plus, $\mathcal{R}(p)$ est stable par sup filtrants, ou ce qui revient au même (étant lui-même filtrant), il contient un plus grand élément. Il revient

[page 70]

au même de dire que $\mathcal{R}(p)$ est un *ouvert* de $\mathcal{Q}$ stable par sup quelconques (ce qui implique qu'il contient $\emptyset_{\mathcal{Q}}$). Dualement, pour tout $q \in \mathcal{Q}$, ${}^{s}\mathcal{R}(q) = \{p \in \mathcal{P} \mid (p,q) \in \mathcal{R}\}$ est une partie *ouverte* de $\mathcal{P}$, stable par sup quelconques, i.e. une partie ouverte ayant un plus grand élément.

En d'autres termes, quand on postule la condition (D) pour A resp. B réduit à un élément, alors elle reste vérifiée pour toute partie. Cela provient des formules

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\bigcup_i A_i)^{\cup} & = & \bigcap_i A_i^{\cup} \\ (\bigcup_j B_j)^{\cap} & = & \bigcap_j B_j^{\cap}, \end{array}\right. \tag{5.2}$$

et du fait que l'intersection de parties ouvertes de la forme $\mathcal{P}/\alpha_i$ dans $\mathcal{P}$ est de la forme $\mathcal{P}/\alpha$, où $\alpha = \inf_i \alpha_i$, et de même dans $\mathcal{Q}$. Ainsi on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta(\bigcup_i A_i) & = & \inf_i \beta(A_i) \\ \alpha(\bigcup_j B_j) & = & \inf_j \alpha(B_j). \end{array}\right. \tag{5.3}$$

On posera, pour une partie A de $\mathcal{P}$ resp. B de $\mathcal{Q}$

$$A^\natural = (A^\cup)^\cap, \qquad B^\flat = (B^\cap)^\cup \tag{5.4}$$

de sorte qu'on aura

$$A \subseteq A^\natural, \qquad B \subseteq B^\flat \tag{5.5}$$

On dira que A est $\mathcal{R}$-*clos* si $A = A^\natural$ (ou encore si A est de la forme $B'^\cap$ pour $B' \subseteq \mathcal{Q}$, cf. 5.6), que

[page 71]

B est $\mathcal{R}$-*clos* si $B = B^\flat$. On aura pour tout $A \subseteq \mathcal{P}$, $B \subseteq \mathcal{Q}$

$$\begin{cases} (A^\cup)^\flat &= A^\cup, \quad \text{i.e. } A^\cup \text{ est } \mathcal{R}\text{-clos,} \\ (B^\cap)^\natural &= B^\cap, \quad \text{i.e. } B^\cap \text{ est } \mathcal{R}\text{-clos.} \end{cases} \tag{5.6}$$

En particulier

$$(A^\natural)^\natural = A^\natural, \qquad (B^\flat)^\flat = B^\flat, \tag{5.7}$$

i.e. la $\mathcal{R}$-clôture $A^\natural$ de $A \subseteq \mathcal{P}$ est $\mathcal{R}$-clos, et de même la $\mathcal{R}$-cloture $B^\flat$ de $B \subseteq \mathcal{Q}$.

En fait, je m'aperçois que je suis en train de mélanger deux espèces de faits différents. Les relations (5.2), et (5.4) à (5.7), ne dépendent pas de la donné de relations d'ordre sur $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ni d'axiomes reliant celles-ci à la relation donnée $\mathcal{R}$, mais seulement de cette relation, laquelle n'a pas à être soumise à aucune condition. Notons que

$$\emptyset^\cup = \mathcal{Q}, \qquad \emptyset^\cap = \mathcal{P}, \tag{5.8}$$

tandis que

$$\emptyset^\natural = \mathcal{Q}^\cap, \qquad \emptyset^\flat = \mathcal{P}^\cup \tag{5.9}$$

sont respectivement la plus petite partie $\mathcal{R}$-close de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$.

L'application

$$A \longmapsto A^\natural \tag{5.10}$$

est une application *croissante* (et *idempotente*) de $\mathfrak{P}(\mathcal{P})$ dans lui-même, ayant donc la propriété

[page 72]

$$(\bigcup_i A_i)^\natural = (\bigcup_i A_i^\natural)^\natural.$$

Pour tout $A \subseteq \mathcal{P}$, $A^{\natural}$ est la plus petite partie $\mathcal{R}$-close de $\mathcal{P}$ contenant A, et de même pour tout $B \subseteq \mathcal{Q}$, $B^{\flat}$ est la plus petite partie $\mathcal{R}$-close de Q contentant B. On a de plus (c'était même à dire avant de dire que $A \longmapsto A^{\natural}$ est croissante)

$$(5.11) \qquad \begin{cases} A \subseteq A' \implies A'^{\cup} \subseteq A^{\cup} \\ B \subseteq B' \implies B'^{\cap} \subseteq B^{\cap}, \end{cases}$$

i.e. les applications

$$(5.12) \qquad \mathfrak{P}(\mathcal{P}) \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} \mathfrak{P}(\mathcal{Q}) \qquad \begin{matrix} A \longmapsto A^{\cup} \\ B \longmapsto B^{\cap} \end{matrix}$$

sont décroissantes (ce qui implique que les deux composés $\alpha\beta = (A \longmapsto A^{\natural})$ et $\beta\alpha = (B \longmapsto B^{\flat})$ sont croissantes). Leurs restrictions aux sous-ensembles $\mathfrak{P}_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})$ et $\mathfrak{P}_{{}^s\mathcal{R}}(\mathcal{Q})$ des parties $\mathcal{R}$-closes de $\mathcal{P}$ resp. de $\mathcal{Q}$, sont, par définition de celles-ci comme

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}) &= \{A \subseteq \mathcal{P} \mid A^{\natural}\ (\overset{\text{déf}}{=} \alpha\beta(A)) = A\} \\ \mathfrak{P}_{{}^s\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) &= \{B \subseteq \mathcal{Q} \mid B^{\flat}\ (\overset{\text{déf}}{=} \beta\alpha(B)) = B\}, \end{aligned}$$

inverse l'une de l'autre. On trouve ainsi

Proposition 5.1. *Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ deux ensembles, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ une relation. Alors les applications α, β de (5.12) induisent des bijections inverses l'*

[page 73]

une de l'autre, entre l'ensemble $Cl_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})$ des parties $\mathcal{R}$-closes de $\mathcal{P}$, et l'ensemble $Cl_{{}^s\mathcal{R}}(\mathcal{Q})$ des parties ${}^s\mathcal{R}$-closes (nous dirons $\mathcal{R}$-closes par abus de langage) de $\mathcal{Q}$. Ces bijections sont décroissantes, donc des antiisomorphismes pour les relations d'ordre naturelles (d'inclusion).

Corollaire 5.2. *Soit $(A_i)_i$ une famille de parties $\mathcal{R}$-closes de $\mathcal{P}$. Alors $\bigcap A_i$ est une partie $\mathcal{R}$-close de $\mathcal{P}$, et*

$$(5.2.1) \qquad (\bigcap_i A_i)^{\cup} = \underbrace{(\bigcup_i A_i^{\cup})^{\flat}}_{\substack{\text{sup des} \\ \text{parties } \mathcal{R}\text{-closes} \\ A_i^{\cup} \text{ de } \mathcal{Q}}} .$$

Mais la relation $\mathcal{R}$ se 'prolonge' en une relation $\bar{\mathcal{R}}$ entre

$$(5.13) \qquad \bar{\mathcal{P}} = \mathfrak{P}(\mathcal{P}), \qquad \bar{\mathcal{Q}} = \mathfrak{P}(\mathcal{Q})$$

par la prescription

$$(5.14) \qquad \underbrace{\bar{\mathcal{R}}}_{\subseteq \bar{\mathcal{P}} \times \bar{\mathcal{Q}}} = \{(A, B) \in \bar{\mathcal{P}} \times \bar{\mathcal{Q}} \mid B \subseteq A^{\cup}, \text{ i.e. } A \subseteq B^{\cap}, \text{ i.e. } A \times B \subseteq \mathcal{R}\}.$$

Les ensembles $\bar{\mathcal{P}}$, $\bar{\mathcal{Q}}$ sont stables par sup quelconques (réunion de parties de $\mathcal{P}$ resp. $\mathcal{Q}$), et la relation $\bar{\mathcal{R}}$ sur ces ensembles ordonnés satisfait à la condition (D_0)

`[page 74]`

ci-dessus (p. 69), de façon évidente : pour A fixé, les B tels que $(A, B) \in \bar{\mathcal{R}}$ sont ceux qui sont contenus dans $A^{\cup}$, donc l'ensemble $\bar{\mathcal{R}}(A)$ n'est autre que $\bar{\mathcal{Q}}/A^{\cup}$, et dualement ${}^{\mathrm{s}}\bar{\mathcal{R}}(B)$ n'est autre que $\bar{\mathcal{P}}/B^{\cap}$. Ainsi

$$\beta(A) = A^{\cup}, \qquad \alpha(B) = B^{\cap}. \tag{5.14}$$

Si j'ai songé à introduire l'axiome (D_0), pour un couple d'ensembles ordonnés quelconques, c'est à cause des cas où ceux-ci ne sont *pas* de la forme $\mathfrak{P}(\mathcal{P})$, $\mathfrak{P}(\mathcal{Q})$, et (alors même qu'ils le seraient) où la relation de base n'est pas déduite comme ci-dessus d'une relation quelconque entre ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$.

Je reviens donc à l'axiomatique du début, avec $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ ordonnés, et $\mathcal{R}$ satisfaisant (D). Dans tous les cas auxquels je peux songer, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont stables par sup quelconques, donc (D) équivaut à (D_0). Notons que l'application

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{P}), \qquad p \longmapsto \mathcal{P}/p$$

est injective, et de même pour $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathcal{Q})$. Ainsi, la connaisance de $A \longmapsto A^{\cup}$ équivaut à celle de

$$\begin{array}{rcl} A & \longmapsto & \beta(A) \\ \beta : \mathfrak{P}(\mathcal{P}) & \longrightarrow & \mathcal{Q}, \end{array}$$

et de même celle de $B \longmapsto B^{\cap}$ équivaut à

`[page 75]`

celle de

$$\alpha : \mathfrak{P}(\mathcal{Q}) \longrightarrow \mathcal{P}.$$

En fait, il suffit de se donner

$$\begin{array}{rcccl} \beta_0 : & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \quad \text{applications} \\ \alpha_0 : & \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathcal{P} & \quad \textit{décroissantes} \end{array} \tag{5.15}$$

définies par

$$\begin{cases} \beta_0(p) & = & \beta(\{p\}) \\ \alpha_0(q) & = & \alpha(\{q\}), \end{cases}$$

puisqu'on en déduit β, α par

$$\begin{cases} \beta(A) & = & \inf_{p \in A} \beta_0(p) \\ \alpha(B) & = & \inf_{q \in B} \alpha_0(q). \end{cases} \tag{5.16}$$

La relation $\mathcal{R}$ se déduit de la donnée de β_0, ou au choix de α_0, par

$$(p, q) \in \mathcal{R} \iff q \leq \beta_0(p) \iff p \leq \alpha_0(q). \tag{5.17}$$

Cela implique donc que α_0, β_0 se déterminent mutuellement, par les formules

$$(5.18) \qquad \begin{cases} \alpha_0(q) &= \sup \underbrace{\{p \in \mathcal{P} \mid q \leq \beta_0(p)\}}_{\{q\}^\cap} \\ \beta_0(p) &= \sup \underbrace{\{q \in \mathcal{Q} \mid p \leq \alpha_0(q)\}}_{\{p\}^\cup}. \end{cases}$$

Reste à se demander quelles sont les applications $\alpha_0 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$, ou $\beta_0 : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{P}$, qui correspondent à une *'relation dualisante'*

[page 76]

$\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$. Voici les conditions sur $\beta_0 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$:

a) β_0 est *décroissante,*

ce qui implique que la relation

$$\underbrace{\mathcal{R}_{\beta_0}}_{\subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{Q}} = \{(p, q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \mid q \leq \beta_0(p)\}$$

satisfait à la condition (D_0) du côté gauche, et il faut encore la vérifier du côté droit, i.e. regarder, pour q fixé, l'ensemble

$$\{q\}^\cap = \{p \in \mathcal{P} \mid q \leq \beta_0(p)\}.$$

Comme β_0 est décroissant, on voit que $p \in \{q\}^\cap$, et $p' \leq p \implies p' \in \{q\}^\cap$, i.e. $\{q\}^\cap$ est *ouvert.* On doit vérifier encore (supposant l'existence des sup quelconques dans $\mathcal{P}$) que cet ensemble est stable par sup quelconques - il en résultera qu'il est de la forme $\mathcal{P}/\alpha(q)$. Cela équivaut à la condition

b) β_0 transforme sup quelconques dans $\mathcal{P}$ en inf dans $\mathcal{Q}$.

Si on regarde β_0 comme un foncteur contravariant $\mathcal{P}^o \longrightarrow \mathcal{Q}$, cela signifie qu'il commute aux limites projectives, ou encore qu'il a un adjoint à gauche $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{P}^o$, lequel commute aux limites inductives, et correspond

[page 77]

à l'application décroissante $\alpha_0 : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{P}$, transformant sup en inf.

Ici il est commode de considérer $\natural$ et $\flat$ comme des opérations sur $\mathcal{P}$ resp. $\mathcal{Q}$, par

$$(5.19) \qquad p^\natural = \alpha_0\beta_0(p), \qquad q^\flat = \beta_0\alpha_0(q).$$

La relation entre ces endomorphismes, et l'opération de même nom sur $\mathfrak{P}(\mathcal{P})$, $\mathfrak{P}(\mathcal{Q})$, est donnée par

$$(5.20) \qquad \begin{cases} p^\natural &= \text{Plus grand élément de } \{p\}^\natural \\ A^\natural &= \sup_{p \in A} p^\natural, \end{cases}$$

et symétriquement du côté de $\mathcal{Q}$.

On dit que p est *$\mathcal{R}$-clos,* ou β_0-clos, ou α_0-clos, si $p = p^\natural$, et de même $q \in \mathcal{Q}$ est dit *$\mathcal{R}$-clos* etc. si $q = q^\flat$. Les applications

$$(5.21) \qquad \begin{cases} p \longmapsto p^\natural : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ q \longmapsto q^\flat : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q} \end{cases}$$

sont *croissantes* et *idempotentes.* On peut caractériser $p^\natural$ comme le plus petit élément clos de $\mathcal{P}$ majorant p, et de même pour $q^\flat$. On trouve alors, par (5.19), que α_0 et β_0 induisent des bijections inverses l'une de l'autre,

[page 78]

entre l'ensemble des éléments clos de $\mathcal{P}$, et l'ensemble des éléments clos de $\mathcal{Q}$

$$(5.22) \qquad \mathcal{P}^\natural \underset{\bar{\alpha}_0}{\overset{\bar{\beta}_0}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\sim}}}} \mathcal{Q}^\flat.$$

Mais en pratique, les applications α_0, β_0 ne sont pas obtenues directement, mais on dispose de la relation $\mathcal{R}$, satisfaisant la condition (D_0), dont on déduit α_0, β_0. Dans tous les cas auxquels je pense ici, ou bien $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ sont de la forme $\mathfrak{P}(P_0)$, $\mathfrak{P}(Q_0)$, et $\mathcal{R}$ se déduit d'une relation $R_0 \subseteq P_0 \times Q_0$ comme ci-dessus (de loin le plus fréquent, il me semble), ou bien $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ apparaissent comme sous-ensembles convenables d'ensembles $\mathfrak{P}(P_0)$, $\mathfrak{P}(Q_0)$, munis de l'ordre induit, et la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ s'obtient d'une façon plus complexe.

Exemples.

1) Relations d'*orthogonalité* entre parties de deux modules sur un anneau, muni d'un accouplement de dualité. Dans le cas des [espaces] vectoriels de dimension finie et d'une vraie dualité, les parties closes sont les sous-espaces vectoriels, dans le cas infini, ce sont les sous-espaces vectoriels fermés pour la 'topologie faible' définie par l'accouplement.
2) Relations d'*orthogonalité* entre parties de deux groupes topologiques commutatifs localement compacts duales l'une de l'autre, au sens de Pontrjagin.

   [page 79]

   Les parties closes sont les sous-groupes fermés.
3) Pour deux espaces vectoriels 'en dualité' sur un corps valué complet, tel **R** où **C**, la relation
$$|\langle x, x'\rangle| \leq 1.$$
   Dans le cas réel ou complexe, les parties closes sont les parties convexes cerclées [?] faiblement fermées.
4) Pour les espaces vectoriels réels, la relation de semi-polarité
$$\langle x, x'\rangle \geq -1.$$
   Les parties closes sont les parties convexes faiblement fermées contenant l'origine.

5) Soit K un corps (pour simplifier), L une extension galoisienne de groupe G. Relation entre L et G

$$\gamma \cdot x = x, \qquad \text{i.e. } x \in L^{\gamma}.$$

Les parties closes de L sont les sous-extensions, les parties closes de G les sous-groupes de G.

Il y a des analogues divers dans des cas inséparables (à coups de p-algèbres de Lie par exemple), et des énoncés de descente en tous genres.

`[page 80]`

Tous ces exemples sont de $1^{\text{ère}}$ espèce, les ensembles ordonnés qui interviennent sont de la forme $\mathfrak{P}(P_0)$, $\mathfrak{P}(Q_0)$, et la relation entre eux est déduite d'une relation R_0 entre P_0 et Q_0. Voici maintenant des exemples plus complexes.

6) Soit $\mathcal{M}$ une catégorie ('grosse', le plus souvent ...). On prend

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q} = \mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M})).$$

La relation $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ est la relation de Quillen, que j'écris, pour $\Phi, \Psi \in \mathfrak{P}$

$$\Psi \subseteq \Phi_*,$$

ou encore de façon équivalente

$$\Phi \subseteq \Psi^*,$$

(Ψ a la LLP `[left lifting property]` pour Ψ, Φ la RLP `[right lifting property]` pour Ψ). Donc les applications α_0, β_0 sont données par

$$\beta_0(\Phi) = \Phi_*, \qquad \alpha_0(\Psi) = \Psi^*.$$

L'idée ici ne viendrait à personne d'introduire $\mathfrak{P}(\mathcal{P})$, $\mathfrak{P}(\mathcal{Q})$ - c'est déjà assez gros comme ça ! La notation pour $\Phi^{\natural}$ est ici $\tilde{\Phi}$, pour $\Psi^{\flat}$ c'est $\bar{\Psi}$. Les parties closes sont celles que j'appelle Q-closes à gauche et à droite.
La relation $\mathcal{R}$, que j'écris

$$\Phi \longleftrightarrow \Psi,$$

`[page 81]`
n'est pas déduite d'une relation entre flèches de $\mathcal{M}$, i.e. d'une partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \times \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, mais est de nature plus complexe. Pour la décrire, il faut introduire l'ensemble $\mathcal{D}$ des diagrammes carrés commutatifs (traits pleins) de la forme

(∗)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(qu'on peut interpréter comme $\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}))$, ensemble des flèches dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$). On a une partie $\mathcal{D}_0$ de $\mathcal{D}$, formée des diagrammes pour lesquels `[il]` existe `[un]` f avec deux triangles commutatifs (c'est donc l'image de $\underbrace{\mathrm{Fl}_3(\mathcal{M})}_{\mathrm{Hom}(\mathbf{\Delta}^3,\mathcal{M})}$ dans $\mathrm{Hom}(\mathbf{\Delta}^1\times\mathbf{\Delta}^1,\mathcal{M})$, transposée de $\mathbf{\Delta}^1\times\mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow \mathbf{\Delta}^3$ donné par $(0,0)\longmapsto 0$, $(0,1)\longmapsto 1$, $(1,0)\longmapsto 2$, $(1,1)\longmapsto 3$), et une application

$$\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \times \mathrm{Fl}(\mathcal{M}),$$

associant à $(*)$ le couple (i,j) `[plutôt` (i,p)`]` (source et but de $(*)$, considéré comme flèche dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$ de i dans p). La relation $\mathcal{R}$ est alors déduite de φ, $\mathcal{D}_0$ par la condition

`[page 82]`

$$\Phi \longleftrightarrow \Psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi^{-1}(\Phi\times\Psi) \subseteq \mathcal{D}_0.$$

Mais à vrai dire, je m'aperçois que c'est quand-même déduit d'une relation entre éléments de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, et cette relation entre $i : A \longrightarrow B$ et $p : X \longrightarrow Y$ peut s'écrire ainsi :

$(**)$ pour toutes flèches $A \longrightarrow X$, $B \longrightarrow Y$ rendant commutatif le diagramme $(*)$, la flèche φ pointillée dans $(*)$ existe.

Cela me fait penser que si on a une relation $\mathcal{R}$ entre $\mathfrak{P}(P)$ et $\mathfrak{P}(Q)$, satisfaisant (D_0), donc décrite par une application décroissante

$$\mathfrak{P}(P) \longrightarrow \mathfrak{P}(Q)$$

transformant sup en inf, la donné d'une telle application équivaut à celle d'une application quelconque

$$P \longrightarrow \mathfrak{P}(Q),$$

ou ce qui revient au même, d'une relation $\mathcal{R}$ sur $P \times Q$. Donc cette structure doit être regardée comme 'de première espèce'. La situation change à partir du moment où pour décrire la relation $\mathcal{R}$ avec les propriétés voulues, on se trouve contraint de remplacer $\mathfrak{P}(P)$, $\mathfrak{P}(Q)$ par des sous-ensembles convenables - quand on ne regarde que certaines parties de P, Q. C'est ce qu'on

`[page 83]`

va faire au § suivant. Le cas que je vais y traiter est le seul de son espèce que j'ai rencontré - un cas de 'dualité formelle' qui s'introduit de façon naturelle, et qui ne soit 'de $1^{\text{ère}}$ espèce'.

6 Transporteurs, noyaux, stabiliseurs relatifs à W

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie, munie d'une partie

$$W \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}). \tag{6.1}$$

Je pense au cas d'un localiseur, mais n'introduirai d'hypothèse sur W qu'au besoin. Pour simplifier, je suppose $\mathcal{M}$ stable par produits fibrés.

Je pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} ({}^{62})\mathcal{P} & = & \mathfrak{P}(W) = \{A \in \mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M})) \mid A \subseteq W\} \\ \mathcal{Q} & = & \{L \in \mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M})) \mid \begin{array}{l} L \textit{ stable} \text{ par changement de} \\ \text{base (par qui je sous-entends aussi,} \\ \text{stable par isomorphie)} \\ \text{et par composition. }\}. \end{array} \end{array}\right. \tag{6.2}$$

J'introduis une relation

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$$

de la façon suivante. Pour $A \in \mathcal{P}$, $L \in \mathcal{Q}$, on pose

$$(A, L) \in \mathcal{R} \iff \text{Pour tout diagramme cartésien} \tag{6.3}$$

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[from=u, "f"'] & Y' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

avec $f \in A$, $p \in L$, on a $f' \in W$
(i.e. A est stable par changement de base par $p \in L$).

[page 84]

Quand j'ordonne $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M}))$ par la relation d'ordre induite par l'inclusion de parties de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, on trouve des sous-ensembles ordonnés de $\mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M}))$, stables par réunions quelconques, et aussi par intersections quelconques, avec la seul réserve que dans le cas de $\mathcal{P}$, la famille d'indices doit être $\neq \emptyset$ (puisqu'alors on trouve comme intersection $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ tout entier, qui n'est pas en général contenu dans W).

On va vérifier la condition (D_0) de la page 69, pour $\mathcal{R}$ et les relations d'ordre. Il y a deux vérifications à faire.

1°) [où est '2°' ?] Donnons nous $A \in \mathcal{P}$, i.e. $A \subseteq W$, et considérons l'ensemble $\mathcal{R}(A)$ des $L \in \mathcal{Q}$ tels que l'on ait $(A, L) \in \mathcal{R}$. Il est clair que c'est un ouvert (et de même, que ${}^s\mathcal{R}(L)$ est un ouvert de $\mathcal{Q}$ pour tout L dans $\mathcal{Q}$) - i.e. $L \in \mathcal{R}(A)$, $L' \subseteq L$ implique

[62] cf. rectification p. 86.

$L' \in \mathcal{R}(A)$. Reste à trouver un plus grand élément de $\mathcal{R}(A)$. Notons que si $L \in \mathcal{R}(A)$, alors pour tout $p \in L$, $p : Y' \longrightarrow Y$, le changement de base

$$p^* : \mathrm{Cat}/Y \longrightarrow \mathrm{Cat}/Y' : X \longmapsto X \times_Y Y'$$

doit transformer flèches $f \in A$ en flèches $g \in W$, comme il résulte du fait que L est stable par changement de base.

$$\begin{tikzcd} X_1 & X'_1 \arrow[l, "q_1"'] \arrow[d, "g"] \\ X_2 \arrow[from=1-1, "f"'] \arrow[d] & X'_2 \arrow[l, "q_2"'] \arrow[d] \\ Y & Y'. \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

Donc $L \subseteq \mathbf{L}_W(A)$, où on pose

[page 85]

$$\mathbf{L}_W(A) = \{(p : Y' \longrightarrow Y) \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \quad | \quad p^* : \mathrm{Cat}/Y \longrightarrow \mathrm{Cat}/Y' \text{ transforme flèches de } A \text{ en flèches } de\ W.\}$$

([63]).

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & X'_1 \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ X_2 \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & X'_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ Y & Y' \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

$$f \in A \implies f' \in W.$$

Il est clair d'autre part que cette partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ est stable par changement de base, donc $\mathbf{L}_W(A) \in \mathcal{Q}$, et que $(A, \mathbf{L}_W(A)) \in \mathcal{R}$. Donc $\mathbf{L}_W(A)$ est un plus grand élément de $\mathcal{R}(A)$, donc on trouve

(6.5) $$\mathcal{R} = \{(A, L) \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \mid L \subseteq \mathbf{L}_W(A)\}.$$

[63]NB le dire plutôt en termes de diagrammes cartésiens, vu qu'on n'a pas fait d'hypothèse de stabilité de W par isomorphismes.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & X'_1 \arrow[l, "q_1"'] \arrow[d, "f'"] \\ X_2 \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & X'_2 \arrow[l, "q_2"'] \arrow[d] \\ Y_1 \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & Y'_1 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[d] \\ Y & Y'. \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

Inversement, partons de $L \in \mathcal{Q}$, et montrons que l'ouvert ${}^{s}\mathcal{R}(L)$ de $\mathcal{P}$ a un plus grand élément. Pour ceci, posons

(6.6) $$\mathbf{A}_W(L) = \{(f : X \longrightarrow Y) \in W \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \quad | \quad \forall \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\mathit{cart.}"] & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y', \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$
$$\text{avec } p \in L, \text{ on a } f' \in W\}.$$

(NB Quand L contient les identités, comme c'est le cas notamment s'il est de la forme $\mathbf{L}_W(A)$ - alors il contient les isomorphismes, du moins si A les contient - alors $\mathbf{A}_W(L)$ est l'ensemble de $f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ satisfaisant la condition énoncée après $|$, sans avoir à spécifier $f \in W$.) On a $\mathbf{A}_W(L) \in \mathcal{P}$, et on vérifie que $(\mathbf{A}_W(L), L) \in \mathcal{R}$ (en utilisant la stabilité de L par composition), enfin il est clair que $(A, L) \in \mathcal{R}$ implique $A \subseteq \mathbf{A}_W(L)$ (en utilisant $A \subseteq W$), donc $\mathbf{A}_W(L)$ est un plus grand élément de ${}^{s}\mathcal{R}(L)$.

`[page 86]`

Notons que si W *est stable par composition* (ce que nous allons supposer désormais), il en est de même de $\mathbf{A}_W(L)$ (ce qui utilise encore le fait que L soit stable par changement de base). De plus, si W *contient les isomorphismes* (ce que nous supposerons également), $\mathbf{A}_W(L)$ les contient aussi. Quant à $\mathbf{L}_W(A)$, il contient les isomorphismes *pourvu que* A soit stable par isomorphismes ; quand A est stable par composition et contient les isomorphismes, cette condition sera automatiquement satisfaite. Nous tenons à cette condition, c'est pourquoi du côté de A, dans la définition de $\mathcal{P}$, je vais introduire cette condition supplémentaire que A soit *stable par isomorphismes.* Donc je pose, en corrigeant (6.2),

(6.7) $$\begin{cases} \mathcal{P} = \{A \in \mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M})) \quad | \quad \mathrm{Is}(\mathcal{M}) \subseteq A \subseteq W, \quad A \text{ stable par composition}\} \\ \mathcal{Q} = \{L \in \mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M})) \quad | \quad \mathrm{Is}(\mathcal{M}) \subseteq L, \quad L \text{ stable par changement de base}\}. \end{cases}$$

On est bien sûr intéressé surtout aux éléments clos de $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, i.e. les parties A, L de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, contenant les isomorphismes, stables par composition (et L stable aussi par changement de base, $A \subseteq W$) telles que l'on ait

$$A = \mathbf{A}_W(L), \qquad L = \mathbf{L}(A) \tag{6.8}$$

[plutôt $\mathbf{L}_W(A)$].

[page 87]

Je garderai les notations $\natural$, $\flat$ du paragraphe précédent. Quels sont les deux couples extrêmes ?

Partant de $A_0 = \mathrm{Is}(\mathcal{M})$ (plus petit des éléments de $\mathcal{P}$), on trouve $\mathbf{L}_W(A_0) = \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ (plus grand élément de $\mathcal{Q}$), et $A_0^\natural = \mathbf{A}_W(\mathrm{Fl}(\mathcal{M})) = W_{\mathrm{univ}}$, ensemble des flèches qui sont dans W et le restent par tout changement de base :

$$A_0^\natural = W_{\mathrm{univ}}, \qquad \beta_0(A_0) \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{L}_W(A_0) = \mathrm{Fl}(\mathcal{M}), \qquad \text{où } A_0 = \mathrm{Is}(\mathcal{M}) \text{ plus petit élément de } \mathcal{P}. \tag{6.9}$$

Inversement, partons de $L_0 = \mathrm{Is}(\mathcal{M})$, le plus petit élément de $\mathcal{Q}$. On a $\mathbf{A}_W(L_0) = W$ (W étant stable par composition et contenant les isomorphismes), et $L_0^\flat = \mathbf{L}_W(W) = \mathrm{Fib}_W$, les W-fibrations :

$$L_0^\flat = \mathrm{Fib}_W, \qquad \alpha_0(L_0) = W, \qquad \text{où } L_0 = \mathrm{Is}(\mathcal{M}), \text{ plus petit élément de } \mathcal{Q}. \tag{6.10}$$

Donc les parties $\mathcal{R}$-closes à gauche de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ se promènent entre W_{univ} et W, les parties $\mathcal{R}$-closes à droite entre Fib_W et $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$.

Proposition 6.1. *Soient $A \in \mathcal{P}$, $L \in \mathcal{Q}$ tels que $A = \alpha_0(L)$, $L = \beta_0(A)$ (i.e. $A = \mathbf{A}_W(L)$, $L = \mathbf{L}_W(A)$). Pour que L soit stable par composition, il faut et il suffit que A soit stable par changement de base par les flèches $f \in L$. (Plus généralement, si $L \in \mathcal{Q}$ est un élément quelconque de $\mathcal{Q}$, et si on suppose de*

[page 88]

plus que L est stable par composition, alors $A = \mathbf{A}_W(L)$ est stable par changement de base par L.)

Terminologie : pour $A \in \mathcal{P}$, i.e. A une partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ contenue dans W contenant les isomorphismes et stable par composition, $\mathbf{L}_W(A)$ s'appelle le *transporteur de A dans W.* (Il y a une notion duale de *cotransporteur.*) C'est un élement de $\mathcal{Q}$, donc une partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ contenant les isomorphismes et stable par changement de base. D'autre part, pour L dans $\mathcal{Q}$, les $f \in \mathbf{A}_W(L)$ s'appellent flèches *W-L-asphériques,* ou les *W-L-équivalences,* ou les *W-équivalences L-universelles,* et $\mathbf{A}_W(L)$ s'appelle le *L-noyau de W.* On pourrait le noter plus simplement W_L (quand cette notation ne conflicte pas avec $W_S \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M}/S)$ pour $S \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$). C'est une partie de W qui (comme W lui-même) contient les isomorphismes et est stable par composition.

Enfin, il y a lieu aussi d'introduire le *stabiliseur* $\mathrm{Stab}(A)$, ou transporteur de A dans A, qui ne dépend pas de la donné de W, mais seulement de la partie A de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, contenant les isomorphismes et stable par composition. On pourrait aussi le noter Fib_A, et appeler ses éléments des *A-fibrations* (A jouant à présent le rôle de W). On a $\mathrm{Stab}(A) \subseteq \mathbf{L}_W(A)$, et il semblerait qu'en

[page 89]

pratique, ce sont ces stabiliseurs, plus que les transporteurs $\mathbf{L}_W(A)$, qui sont importants (quand les deux ne coïncident pas). C'est ainsi que dans Cat, si W est un localiseur fondamental, les morphismes W-lisses (resp. W-propres) Liss_W (Prop_W), qui sont les stabiliseurs des ensembles W_{as} (W_{coas}) des ensembles de morphismes W-asphériques (resp. W-coasphériques), jouant un rôle essentiel, alors que je ne sais pas caractériser de façon sensible les flèches des transporteurs $\mathbf{L}_W(W_{\mathrm{as}})$, $\mathbf{L}_W(W_{\mathrm{coas}})$, lesquels contiennent, en plus des morphismes W-lisses (resp. W-propres) les W-fibrations Fib_W. Je ne sais pas comment caractériser une classe de morphismes qui apparaît aussi hétéroclite ! De même, il y a lieu d'introduire et de caractériser le stabiliseur de W_{bias} (ensemble des flèches W-biasphériques), comme les morphismes 'W-nets' Net_W, par une description similaire à celle des Liss_W, Prop_W, utilisant les bilocalisés $\backslash \underset{u}{X}/$, $\backslash \underset{v}{Y}/$, au lieu des localisés X/x, Y/y ou des colocalisés $x\backslash X$, $y\backslash Y$. Il y a lieu enfin de déterminer le stabiliseur de l'ensemble Equ des Cat-équivalences (ce qui ne dépend pas de la donné d'un W - mais on a $\mathrm{Equ} \subseteq \mathcal{P}(W)$ pour tout W fondamental).

`[page 90]`

7 Morphismes cofiltrants et localement cofiltrants

Mais je ne veux pas m'attarder à présent sur ces développements, qui ne me paraissent pas urgents, et voudrais revenir aux questions liées à la notion de catégories filtrantes ou cofiltrantes.

Definition 7.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche dans Cat. On dit que f est *cofiltrante* (resp. *localement cofiltrante*, resp. *faiblement cofiltrante* ([64]), resp. *localement faiblement cofiltrante* ou encore *précofiltrante*) si pour tout y dans Y, la catégorie colocalisé $y\backslash X$ est cofiltrante (resp. ...). (Dualement, on dit que f est *filtrante*, resp. ..., si les catégories X/y sont filtrantes, resp. ..., i.e. si $f^o : X^o \longrightarrow Y^o$ est cofiltrante resp. ....)

Remarque 7.2. Notions stables par changement de base coétale. Contient les isomorphismes et même les Cat-équivalences. Les morphismes *étales* sont localement filtrants.

Proposition 7.3. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme cofiltrant (resp. localement cofiltrant, resp. faiblement cofiltrant, resp. précofiltrant), et supposons que Y soit cofiltrant (resp. localement cofiltrant, resp. faiblement cofiltrant, resp. précofiltrant). Alors X lui-même est cofiltrant (resp. ...).*

Démonstration. Il s'agit, dans les quatre cas envisagés, de vérifier pour X la condition $\underbrace{\mathrm{PS}_g1' \;/\; \mathrm{PS}_g1}_{\text{deux derniers cas}} \;/\; \mathrm{PS}_g1' + \mathrm{PS}_g2 \;/\; \mathrm{PS}_g1 + \mathrm{PS}_g2$. Mais

`[page 91]`

pour chacune des trois conditions PS_g1, PS_g1', PS_g2 séparément, on voit immédiatement que si elle est vérifiée pour Y et pour les $y\backslash X$, elle l'est pour X, d'où la proposition.

Corollaire 7.3. *Les quatre notions envisagées dans (7.1) sont stables par composition.*

Démonstration immédiate, en utilisant la remarque (7.2).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & z\backslash X \arrow[l] \arrow[d] \\
Y \arrow[d] & z\backslash Y \arrow[l] \arrow[d] \\
Z & z\backslash Z. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

[64] J'ai modifié la terminologie : maintenant faiblement cofiltrant = 0-connexe + localement faiblement cofiltrant, *stable par passage* à X' sur X, X' étale et ∞-connexe. Revoir la terminologie dans le cas faiblement cofiltrant, qui est une notion traîtresse, faute d'être stable par passage `[à]` un X' étale sur X.

Remarque 7.4.

1) Notons que la notion de morphisme cofiltrant ou faiblement cofiltrant n'est *pas* stable par changement de base quelconque, ni même par une immersion ouverte. Exemple : $e \longrightarrow \mathbf{\Delta}^1$, appliquant e en 1, est cofiltrant,

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[d, mapsto] \\ 0 \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

mais sa fibre en 0 est vide, donc n'est ni cofiltrante, ni faiblement cofiltrante. Je n'ai pas vu d'exemple montrant que la notion de flèche *localement* cofiltrante resp. précofiltrante n'est pas stable par changement de base, et ne voudrais pas m'y attarder, n'ayant pas besoin de connaître la réponse.

2) Pour que X soit cofiltrante (resp. ...), il faut et il suffit que $X \longrightarrow e$ le soit. Ainsi la notion absolue est ramenée à une notion relative.

3) Si $f : X \longrightarrow Y$ est cofiltrante, elle est
`[page 92]`
W-coasphérique (donc $\in W$) pour tout W satisfaisant l'axiome Loc (8) des limites inductives. En particulier, elle est W_0-asphérique, i.e. un foncteur cofiltrant (et même seulement faiblement cofiltrant) est *cofinal.*

La raison principale pour m'intéresser aux flèches cofiltrantes est contenue dans la

Proposition 7.4. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans* Cat *localement cofiltrant (resp. localement faiblement cofiltrant). Alors :*

a) Pour tout X' étale sur X, le composé $f' : X' \longrightarrow X \longrightarrow Y$ est localement cofiltrant (resp. ...), et pour toute factorisation de f' en $X' \xrightarrow{g'} Y' \longrightarrow Y$ avec $Y' \longrightarrow Y$ étale, g' est localement cofiltrant (resp. ...).

b) $\forall\, x$ dans X, le morphisme sur les localisés

$$f/x : X/x \longrightarrow Y/x \qquad (y = f(x))$$

est cofiltrant (resp. faiblement cofiltrant).

c) Si x, y comme dans b), et U est un ouvert de X/x, désignant par V l'ouvert de Y/y engendré par l'image de f/x (i.e. l'ouvert formé des z dans Y/y tels que $z\backslash(X/x)$ soit non vide), la flèche induite $q : U \longrightarrow V$ `[est]` *cofiltrante (resp. faiblement cofiltrante), a fortiori cofinale (et même W-coasphérique, pour tout W satisfaisant l'axiome des limites Loc (8))* ([65]).
`[page 93]`
Donc pout tout cofaisceau G sur V, à valeurs dans une catégorie $\mathcal{M}$ avec $\varinjlim$, on a `[un]` *isomorphisme*

$$\varinjlim_U g^*(G) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_V G,$$

[65]Il suffit ici qu'on soit dans l'hypothèse respée (f *faiblement* localement cofiltrant) sauf pour le NB ici `['le NB ici' est '(et même ...Loc (8))']`.

et pour tout préfaisceau F sur V, à valeurs dans une catégorie $\mathcal{M}$ avec $\varprojlim$, on a [un] *isomorphisme*

$$\varprojlim_U g^*(F) \xleftarrow{\sim} \varprojlim_V F.$$

DÉMONSTRATION. Je vais d'abord expliciter le

Lemme 7.5. *Soit $h : X' \longrightarrow X$ un morphisme étale dans* Cat*. Alors h est localement cofiltrant. De façon plus précise, pour tout x dans X, on a*

$$\pi_0(x\backslash X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ob}\, X'_x,$$

toute composante connexe de $x\backslash X'$ contient un élément et un seul de la catégorie discrète $X'_x \subseteq x\backslash X'$. Si x' est dans X'_x (i.e. x' objet de X' tel que $h(x') = x$), c'est un objet initial *de la composante connexe qui le contient. (Donc cette composante est cofiltrante.)*

Ceci prouve (et au delà) la première assertion de 7.4, compte tenu de 7.3 (stabilité par composition), ou parce qu'une

[page 94]

catégorie étale (en l'occurrence $y\backslash X'$) au dessus d'une catégorie localement cofiltrante (resp. localement faiblement cofiltrante) (en l'occurrence $y\backslash X$) est itou.

$$\begin{tikzcd}
y\backslash X' \arrow[r] \arrow[d, "\text{ét.}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & X' \arrow[d, "\text{ét.}"] \\
y\backslash X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & X \arrow[d] \\
y\backslash Y \arrow[r] & Y.
\end{tikzcd}$$

Pour la deuxième assertion dans a), on peut maintenant supposer $X' = X$. Il faut prouver que pour tout y' dans Y', $y'\backslash X \overset{\text{déf}}{=} X \times_{Y'} y'\backslash Y'$ est localement cofiltrante (resp. localement faiblement cofiltrante). Soit y dans Y l'image de y', et considérons le diagramme de trois carrés cartésiens ci-contre.

$$\begin{tikzcd}
y'\backslash X \arrow[r] \arrow[d, "\text{ét.}"'] \arrow[dr, phantom, "\textit{cart.}"] & y\backslash X \arrow[r] \arrow[d, "\text{ét.}"'] \arrow[dr, phantom, "\textit{cart.}"] & X \arrow[d, "\text{ét.}"] \\
y'\backslash Y' \arrow[r] & y\backslash Y' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\textit{cart.}"] & Y' \arrow[d] \\
& y\backslash Y \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Le Lemme 7.5 implique que $y'\backslash Y' \longrightarrow y\backslash Y'$ est l'inclusion dans $y\backslash Y'$ d'une composante connexe de $y\backslash Y'$, c'est donc une immersion ouverte. Donc $y'\backslash X \longrightarrow y\backslash X$ est une immersion ouverte. Comme $y\backslash X$ est localement cofiltrant (resp. localement faiblement cofiltrant) par hypothèse, il en est donc de même de $y\backslash X$. Cela prouve d).

Appliquant a) à la situation $X/x \longrightarrow Y/y$ dans b), on voit que les colocalisés $z\backslash(X/x)$ de X/x sur Y/y ($z \in \mathrm{Ob}\,(Y/y)$) sont localement cofiltrants (resp. faiblement). Mais comme ! X/x a un objet final au dessus de l'objet final de Y/y, il s'ensuit que $z\backslash(X/x)$ a un objet final, donc est 0-*connexe.*

[page 95]

Donc ces catégories, étant localement cofiltrantes (resp. faiblement), sont en fait cofiltrantes (resp. faiblement cofiltrantes).

Prouvons c). Notons que pour z dans V, $z\backslash U$ s'identifie à l'image inverse, par $z\backslash(X/x) \longrightarrow X/x$, de l'ouvert U de X/x, c'est donc un *ouvert* de $z\backslash(X/x)$, non vide par construction de V. Mais un ouvert non vide d'une catégorie cofiltrante (resp. faiblement cofiltrante) est encore cofiltrant (resp. faiblement cofiltrant). Cela signifie que $g : U \longrightarrow V$ est cofiltrant (resp. faiblement cofiltrant), a fortiori cofinal (et W-coasphérique, pour tout W satisfaisant Loc (8)). Cela achève la démonstration.

Remarque 7.5.

1) Le même argument que dans c) montre que si $f : X \longrightarrow Y$ est cofiltrant (resp. faiblement cofiltrant), alors pour tout ouvert U dans X, si on désigne par V l'ouvert de Y engendré par $f(U)$, i.e. l'ouvert formé des y dans Y tels que $y\backslash X \neq \emptyset$, alors la flèche induite $g : U \longrightarrow V$ est cofiltrante (resp. faiblement cofiltrante), et a fortiori g est cofinal (et plus généralement, si f est cofiltrant, g est W-coasphérique pour tout W satisfaisant la condition Loc (8)).

   [page 96]

2) Un cas particulier intéressant de 7.4 est celui où on suppose que les $y\backslash X$ ($y \in \mathrm{Ob}\,Y$) sont sommes directes de catégories ayant chacune un *objet initial.* Alors on voit que cette condition est stable par les opérations de 7.4 a) [?], et par conséquent, les colocalisés $z\backslash(X/x)$ des morphismes localisés en haut $X/x \longrightarrow Y/y$ sont des catégories à objet initial. Ceci implique alors qu'il en est de même des colocalisés $z\backslash U$ ($z \in \mathrm{Ob}\,V$) dans $g : U \longrightarrow V$. Il s'ensuit que g est W-coasphérique pour *tout* localiseur fondamental W (sans avoir à se soucier de l'axiome des limites).

   La condition envisagée sur $f : X \longrightarrow Y$ est satisfaite notamment dans les deux cas suivants (qui me paraissent de loin les plus importants) : a) f est étale et b) X est discrète.

[page 97]

Top X
localement totalement 0-connexe
et 0-connexe
$\iff$ totalement 0-connexe
et localement irréductible
$\iff$ X *cofiltrante*,
i.e. PS*1′ + PS*2
$\iff$ X 0-connexe
+ PS*1 + PS*2
$\iff$ $\left\{\begin{array}{l}\forall\, x \in \mathrm{Ob}\, X,\ X/x \text{ et} \\ X/x \times x \text{ sont irréductible,} \\ X \text{ 0-connexe}\end{array}\right.$
$\iff$ $\left\{\begin{array}{l}X \text{ 0-connexe,} \\ \text{les } X/a \times_x b \text{ non vides} \\ \text{(et même 0-connexes),} \\ \text{les } X/a \times_{x\times x} b \text{ 0-connexes}\end{array}\right.$

[stable par passage à $X' \longrightarrow X$ étale sur X, si X' 0-connexe, *mais* si les X/x sont cofiltrantes et X 0-connexe, cela n'implique *pas* X cofiltrante
Ex. B_G]

stricte (ex. • •) $\Longrightarrow$

$\boxed{\varepsilon = \bullet\ \bullet}$

Top X localement
totalement 0-connexe
$\iff$ les composantes connexes de X
sont cofiltrantes
$\iff$ PS*1 + PS*2
(X *localement cofiltrante*)

[Stable par passage à $X' \longrightarrow X$ étale, mais si les X'/x y satisfont, pas forcément X' !]

stricte (ex. $\mathbf{\Delta}$) $\Longrightarrow$

Top X totalement 0-connexe
(on dit X *totalement* 0-*connexe*)
$\iff$ $X^o \longrightarrow X^o \times X^o$ est cofinal
et $X \neq \emptyset$
$\iff$ $\forall\, x, y \in \mathrm{Ob}\, X$, $x \times y$ 0-connexe de $X^\wedge$
i.e. $X/x \times y$ 0-connexe
et $X \neq \emptyset$

$\Downarrow$

Top X
localement irréductible

[NB n'est pas stable par passage aux X/x ([66]), et si les X/x sont totalement 0-connexes et $X \neq \emptyset$, il ne s'ensuit pas que X le soit ([67]).]

stricte (ex. B_G) $\Longrightarrow$

Top X localement
irréductible
+ 0-connexe
$\iff$ X *pseudofiltrante*
+ 0-*connexe,*
i.e. PS*1
+ 0-connexe

B_G

[PS*1 ne dépend que des catégories induites X/x, donc stable par passage aux $X' \longrightarrow X$ étales, donc la condition PS*1 + 0-connexe stable par passage aux revêtements $X' \longrightarrow X$ 0-*connexes.*]

stricte (ex. $0 \rightrightarrows 1$) $\Longrightarrow$

stricte (ex. B_G, ou $0 \rightrightarrows 1$) $\Longrightarrow$

Top X irréductible
(X *irréductible*)
$\iff$ PS*1′

$0 \rightrightarrows 1$

[ne dépend que [de] Ord X ou de Esp(X), signifie que Ord X cofiltrant, ou Esp(X) irréductible.
N'est pas stable par passage à $X' \longrightarrow X$ étale 0-connexe, p.ex. par passage à un X/x, p.ex. $X = (0 \rightrightarrows 1)$ est irréductible, mais $X/1 = \left(\begin{array}{c}\cdot \searrow \\ \quad\cdot \\ \cdot \nearrow\end{array}\right)$ ne l'est pas.]

---

[66] **Ex.** $\mathbf{\Delta}$.
[67] **Ex.** B_G.

[page 98]

Top X localement totalement 0-connexe
+ 0-connexe
(X *cofiltrante*)

$\varepsilon = \bullet\ \bullet$

Top X localement irréductible
+ 0-connexe
(X *pseudofiltrante* et 0-*connexe*)
PS*1 + 0-connexe

B_G

Top X totalement 0-connexe
(X *totalement* 0-*connexe*)
$X^o \longrightarrow X^o \times X^o$ cofinal

$\mathbf{\Delta}$

Top X localement totalement
0-connexe
(X *localement cofiltrante*)
PS*1 + PS*2

Top X irréductible
(X *irréductible*)
PS*1′

$0 \rightrightarrows 1$

Top X localement irréductible
(X *pseudo-cofiltrante* [?])
PS*1

$B_G \amalg e$
avec $G \neq 1$

([68]).

X *cofiltrante*
PS*1′ + PS*2
= PS*1 + PS*2 + 0-connexe

$\bullet\ \bullet$

X *pseudo-cofiltrante* et 0-*connexe*
(PS*1 + 0-connexe)

B_G

X *totalement* 0-*connexe*
($X^o \longrightarrow X^o \times X^o$ cofinal)

$\mathbf{\Delta}$

X *localement cofiltrante*
PS*1 + PS*2

X *irréductible*
PS*1′

$\bullet \rightrightarrows \bullet$

X *pseudo-cofiltrante*
PS*1

$B_G \amalg e$

[68]**NB** Les cinq catégories typiques B_G ($G \neq 1$), $\mathbf{\Delta}$, $0 \rightrightarrows 1$, $\varepsilon = \bullet\ \ \bullet$, $B_G \amalg e$ ($G \neq 1$) sont telles qu'elles appartiennent à la classe envisagée C d'objets de Cat, mais à aucune des cinq autres classes sauf celles qui sont reliées à C par $C \Longrightarrow C'$ sur le diagramme d'implications (ou par une implication composée).

$\bullet \rightrightarrows \bullet$	n'est ni pseudo-cofiltrante, ni totalement 0-connexe.
B_G	n'est ni localement cofiltrante, ni totalement 0-connexe.
$\mathbf{\Delta}$	n'est pas pseudo-filtrante.
$B_G \amalg e$	n'est pas localement cofiltante, car B_G ne l'est pas, ni appartient à une des 4 classes d'objets connexes.
Itou pour	$\varepsilon = \bullet \;\; \bullet$

[page 99]

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \begin{array}{l}\textit{X cofiltrante}\\ (\mathrm{PS}^*1' + \mathrm{PS}^*2\\ \Longleftrightarrow \mathrm{PS}^*1 + \mathrm{PS}^*2\\ + \text{0-connexe})\end{array} \arrow[dl, Rightarrow, "\begin{array}{l}\mathrm{PS}^*1'\\ (\Longrightarrow \text{0-connexe})\end{array}"'] \arrow[d, Rightarrow, "\begin{array}{l}\mathrm{PS}^*1\\ (\text{les } x\backslash X \text{ satisfont}\\ \mathrm{PS}^*1')\end{array}"] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\begin{array}{l}X \text{ totalement 0-connexe}\\ (X^o \longrightarrow X^o \times X^o \text{ cofinal})\\ \boxed{\mathbf{\Delta}}\end{array} \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{l}\textit{X pseudo-cofiltrante}\\ \text{0-connexe}\\ (\mathrm{PS}^*1 + \text{0-connexe})\\ (\text{manque } \mathrm{PS}^*2)\\ \boxed{B_G}\\ G \neq \{1\}\end{array} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \begin{array}{l}\boxed{\varepsilon = \bullet\;\bullet}\\ \textit{X localement cofiltrante}\\ (\text{composantes connexes filtrantes})\\ (\mathrm{PS}^*1 + \mathrm{PS}^*2)\end{array} \arrow[d, Rightarrow] \\
\begin{array}{l}X \text{ irréductible}\\ (\mathrm{PS}^*1')\\ \boxed{\bullet \rightrightarrows \bullet}\end{array} & & \begin{array}{l}\textit{X pseudo-cofiltrante}\\ \text{ou encore \textit{localement irréductible}}\\ (\text{composantes connexes}\\ \text{pseudo-filtrantes})\\ (\mathrm{PS}^*1) \quad \boxed{B_G \amalg e}\\ G \neq \{1\}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

et dualement on a

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X \text{ filtrante} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
X^o \text{ totalement 0-connexe} \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{l}X \text{ pseudo-filtrante}\\ \text{0-connexe}\end{array} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & X \text{ localement filtrante} \arrow[d, Rightarrow] \\
X \text{ coirréductible} & & X \text{ pseudo-cofiltrante}
\end{tikzcd}
$$

donc on a une terminologie directe sauf pour 'X^o totalement 0-connexe' - je n'ose dire 'X totalement co-connexe'!!