# LES DÉRIVATEURS

**ALEXANDRE GROTHENDIECK**

## Chapitre IX

## Retour sur les catégories de fractions $\mathcal{M}W^{-1}$, comparaison avec Quillen

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX\,2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

**maltsin@math.jussieu.fr**

G. Maltsiniotis

[page 1]

# 1 Fonctorialité de $\mathrm{Ch}_\infty^\Sigma(a,b)$ en $a$, $b$ dans $\mathcal{M}\Sigma^{-1}$

On se donne une catégorie $\mathcal{M}$ avec [un] ensemble admissible de flèches $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, d'où (en prenant p. ex. $\underline{t} = (t_n)$, avec $t_n = (\underbrace{\Delta_+\Delta_-}_{\tau_0})^{2n}$, et $\underbrace{t_{n+1}}_{=\tau_0^{2n+2}} \longrightarrow \underbrace{t_n}_{=\tau_0^{2n}}$ défini comme $p * \mathrm{id}_{\tau_0^{2n}} * p$, où $p : \tau_0 \longrightarrow 1$ la dégénérescence.) On a alors une théorie des $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\infty}(\mathcal{M}, a, b)$, que je note simplement $\mathrm{Ch}_\infty(a,b)$ en tant qu'objet de Hot. Des accouplements

$$\mathrm{Ch}_\infty(a,b) \times \mathrm{Ch}_\infty(b,c) \longrightarrow \mathrm{Ch}_\infty(a,c) \qquad \text{dans Hot}$$

avec (nous allons l'admettre) *associativité* dans Hot. Cela définit donc des accouplements sur les $\pi_0(\mathrm{Ch}_\infty(a,b)) \overset{\text{déf}}{=} \pi_0(a,b)$, qui n'est autre que la composition des flèches dans $\mathcal{M}\Sigma^{-1}$. D'autre part, on a pour $a, b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(a,b) \longrightarrow \pi_0(\mathrm{Ch}_\infty(a,b)) = \pi_0(a,b),$$

compatible avec les compositions. Mais on peut l'ignorer pour l'instant, et regarder $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, ou simplement $\mathcal{M}_0$, avec la seule structure

$$\begin{cases} \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathrm{Hot} & (a,b) \longmapsto \mathrm{Ch}_\infty(a,b) \\ \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathrm{Fl}\,\mathrm{Hot} & (a,b,c) \longmapsto (\mathrm{Ch}_\infty(a,b) \times \mathrm{Ch}_\infty(b,c) \underbrace{\longrightarrow}_{\substack{\text{flèche} \\ \text{dans Hot}}} \mathrm{Ch}_\infty(a,c)) \end{cases}$$

avec condition [d']associativité, et aussi une condition d'unités :

$$\mathrm{Ch}_\infty(a,a) \text{ est muni d'un } 1_a \in \pi_0\mathrm{Ch}_\infty(a,a) = \pi_0(a,a),$$

jouant le rôle d'une 'identité bilatère', dans le sens suivant. Notons que les accouplements

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ch}_\infty(a,b) & \times & \mathrm{Ch}_\infty(b,c) & \longrightarrow & \mathrm{Ch}_\infty(a,c) \\ P & \times & Q & \longrightarrow & R \end{array}$$

[page 2]

définissent

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Hot}}(Q,R) \\ Q &\longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Hot}}(P,R), \end{aligned}$$

d'où en passant aux $\pi_0$

$$\begin{aligned} \pi_0(P) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(Q,R) \\ \pi_0(Q) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(P,R), \end{aligned}$$

en d'autres termes,

$$\begin{aligned} \pi_0(a,b) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\mathrm{Ch}_\infty(b,c), \mathrm{Ch}_\infty(a,c)) \\ \pi_0(b,c) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\mathrm{Ch}_\infty(a,b), \mathrm{Ch}_\infty(a,c)). \end{aligned}$$

On en déduit en particulier pour $a, b \in \mathcal{M}_0$

$$(*) \qquad \begin{cases} 1) \quad \pi_0(a,a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\mathrm{Ch}_\infty(a,b), \mathrm{Ch}_\infty(a,b)) \\ 2) \quad \pi_0(a,a) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\mathrm{Ch}_\infty(b,a), \mathrm{Ch}_\infty(b,a)), \end{cases}$$

et un objet $\alpha_a$ de $\pi_0(a,a)$ est unité bilatère si ses deux images sont les homomorphismes identiques dans $\mathrm{Ch}_\infty(a,b)$ resp. $\mathrm{Ch}_\infty(b,a)$. Passant aux $\pi_0$ de ceux-ci, cela implique que $\alpha_a$ est unité bilatère pour la composition des $\pi_0(x,y)$, relativement à $b$. Si on veut que ce soit le cas pour *tout b,* cela signifie (prenant $b = a$) que $\alpha_a$ est un objet unité bilatère pour la structure de composition associative (donc de monoïde) dans $\pi_0(a,a)$, donc que $\pi_0(a,a)$ est un monoïde *unitaire,* ayant $\alpha_a$ pour objet unité. L'élément $\alpha_a$ est donc déterminé de façon unique. Et on veut que $\alpha_a$ existe

`[page 3]`

pour tout $a \in \mathcal{M}_0$, donc $\mathcal{M}_0$, muni des $\pi_0(a,b)$ et de leur composition, devient une *catégorie,* soit $\mathcal{M}_\Pi$; et les flèches identiques de celle-ci doivent jouer le rôle d'unité bilatère également pour les 'Hom externes' $\mathrm{Ch}_\infty(a,b)$, à valeurs dans Hot.

On peut dire que pour $a = a_0$ fixé, les $\mathrm{Ch}_\infty(a_0,b)$ ($b$ variable) forment les valeurs d'un *foncteur* covariant

$$\mathcal{M}_\Pi \longrightarrow \mathrm{Hot} \qquad b \longmapsto \mathrm{Ch}_\infty(a_0,b),$$

en associant à

$$b \xrightarrow{u} b', \qquad u \in \pi_0(b,b'),$$

la flèche

$$\mathrm{Ch}_\infty(a,b) \longrightarrow \mathrm{Ch}_\infty(b')$$

`[plutôt` $\mathrm{Ch}_\infty(a_0,b) \longrightarrow \mathrm{Ch}_\infty(a_0,b')$`]` correspondante $*_1$ [?]. Que ce soit bien là une loi fonctorielle doit résulter formellement de l'associativité des accouplements sur les $\mathrm{Ch}_\infty$. De même, on a une loi fonctorielle, pour $b$ fixé,

$$\mathcal{M}_\Pi^\circ \longrightarrow \mathrm{Hot}, \qquad a \longmapsto \mathrm{Ch}_\infty(a,b),$$

grâce à l'associativité. En fait, l'associativité impliquera aussi qu'on a un *bifoncteur*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Pi^\circ \times \mathcal{M}_\Pi &\longrightarrow \mathrm{Hot} \\ (a\,,\,b) &\longmapsto \mathrm{Ch}_\infty(a,b), \end{aligned}$$

[page 4]

car si

$$a' \xrightarrow{u} a, \qquad b \xrightarrow{v} b',$$

on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ch}_\infty(a,b) \arrow[r, "\text{comp. avec}\ v"] \arrow[d, "\text{comp. avec}\ u"'] & \mathrm{Ch}_\infty(a,b') \arrow[d, "\text{comp. avec}\ u"] \\ \mathrm{Ch}_\infty(a',b) \arrow[r, "\text{comp. avec}\ v"] & \mathrm{Ch}_\infty(a',b'), \end{tikzcd}$$

qui est commutatif grâce à l'associativité pour

$$\mathrm{Ch}_\infty(a',a),\ \mathrm{Ch}_\infty(a,b),\ \mathrm{Ch}_\infty(b,b').$$

**Corollaire** de cette dépendance bifonctorielle : *Si* $u : a' \longrightarrow a$, $v : b \longrightarrow b'$ *sont dans* $\mathcal{M}_\Pi$, *alors la flèche correspondante*

$$\mathrm{Ch}_\infty(a,b) \longrightarrow \mathrm{Ch}_\infty(a',b') \qquad \textit{dans } \mathrm{Hot}$$

*est un* isomorphisme.

Les mêmes arguments devraient marcher si au lieu des Hom ext à valeurs dans Hot, on les prenait dans Ind Hot, ou dans Cat hot, ou dans Ind Cat hot – je pense bien sûr aux $\mathrm{CH}_\infty(a,b)$ (dans la théorie de la localisation) dans Ind Cat hot, qui peuvent être regardés comme provenant d'un bifoncteur (où $\mathcal{M}_\Pi = \mathcal{M}\Sigma^{-1}$)

$$\mathcal{M}_\Pi \times \mathcal{M}_\Pi \longrightarrow \mathrm{Ind\,Cat\,hot}.$$

[page 5]

Voici l'axiomatisation définitive (?). On remplace Hot par une catégorie

$\mathcal{H}$, catégorie avec produit $*$ associatif, commutatif (?) ([1]), unitaire, et toutes les compatibilités habituelles au besoin,

l'objet unité pour $*$ sera noté 1, et on notera

$$\begin{cases} \pi_0(\xi) & \overset{\text{déf}}{=} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(1,\xi) \\ \pi_0 : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathrm{Ens.} \end{cases}$$

Si on a

$$P * Q \xrightarrow{u} R,$$

[1]On ne doit pas avoir besoin de la commutativité.

on en déduit

$$\begin{cases} \pi_0(P) \xrightarrow{c^{\mathrm{l}}_u} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(Q,R) \\ \pi_0(Q) \xrightarrow{c^{\mathrm{r}}_u} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(P,R) \end{cases}$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha \in \pi_0(P), \text{ i.e. } 1 \xrightarrow{\alpha} P, \text{ alors} \quad & \alpha * \mathrm{id}_Q : Q \longrightarrow P*Q \\ \text{et} \quad & c^{\mathrm{l}}_u(\alpha) = u \circ (\alpha * \mathrm{id}_Q) \\ \text{et dualement} \quad & c^{\mathrm{r}}_u(\beta) = u \circ (\mathrm{id}_P * \beta). \end{aligned}$$

Si on a trois objets $P_0$, $P_1$, $P_2$ dans $\mathcal{H}$, des accouplements

$$\begin{cases} P_0 * P_1 \xrightarrow{u_1} Q_0 \\ P_1 * P_2 \xrightarrow{u_2} Q_1 \\ P_0 * Q_1 \xrightarrow{u_3} R \\ Q_0 * P_2 \xrightarrow{u_4} R \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "P_0"'] \arrow[rr, bend left, "Q_0"] \arrow[rrr, bend left=40, "R"] & b \arrow[r, "P_1"'] \arrow[rr, bend right, "Q_1"'] & c \arrow[r, "P_2"'] & d \end{tikzcd}$$

[page 6]

avec une relation d'associativité, disant que

$$\begin{tikzcd} P_0 * P_1 * P_2 \arrow[r] \arrow[d] & Q_0 * P_2 \arrow[d] \\ P_0 * Q_1 \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

est commutatif, alors on en déduit deux relations de transitivité et une de commutation, pour les opérations associées aux éléments de $\pi_0(P_0)$, $\pi_0(P_1)$, $\pi_0(P_2)$, qu'on n'explicitera pas, sauf l'une :

$$\begin{aligned} \text{Soit } \beta \in P_1,\ \gamma \in P_2, & \\ \text{d'où par } \beta : \quad & c_{u_1}(\beta) : P_0 \longrightarrow Q_0, \\ \text{et par } \gamma : \quad & c_{u_4}(\gamma) : Q_0 \longrightarrow R, \\ \text{et par } \beta *_{u_2} \gamma \in \pi_0(Q_1) : \quad & c_{u_3}(\beta [*_{u_2}] \gamma) : P_0 \longrightarrow R, \end{aligned}$$

`[plutôt` $\beta \in \pi_0(P_1)$`,` $\gamma \in \pi_0(P_2)$`]`, et bien on a

$$\boxed{c(\beta *_{u_2} \gamma) \;=\; c(\gamma)c(\beta).}$$

Il faut encore définir $\beta *_{u_2} \gamma$, via l'accouplement $P_1 * P_2 \xrightarrow{u_2} Q_1$, on a en effet

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(P_1) \times \pi_0(P_2) & \longrightarrow & \pi_0(P_1 * P_2) \\ (\beta\,,\gamma) & \longmapsto & \beta * \gamma, \end{array}$$

et on compose avec

$$\pi_0(u_2) : P_1 * P_2 \longrightarrow Q_1$$

`[plutôt` $\pi_0(u_2) : \pi_0(P_1 * P_2) \longrightarrow \pi_0(Q_1)$`]`.

`[page 7]`

On se donne un ensemble $\mathcal{M}_0$, et

$$\begin{cases} \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0 \xrightarrow{\text{Ch}} \mathcal{H} \quad \text{noté} \quad (a,b) \longmapsto \text{Ch}(a,b) \text{ ou } \text{Hom}\,\text{ext}_{\mathcal{H}}(a,b) \\ \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0 \xrightarrow{\text{comp.}} \text{Fl}\,\mathcal{H} \quad (a,b,c) \longmapsto \big(\text{Ch}(a,b) \times \text{Ch}(b,c) \longrightarrow \text{Ch}(a,c)\big) \end{cases}$$

avec deux axiomes

a) Associativité pour les compositions, pour $(a,b,c,d) \in \mathcal{M}_0^4$

$$\begin{tikzcd} \text{Ch}(a,b) \times \text{Ch}(b,c) \times \text{Ch}(c,d) \arrow[r] \arrow[d] & \text{Ch}(a,c) \times \text{Ch}(c,d) \arrow[d] \\ \text{Ch}(a,b) \times \text{Ch}(b,d) \arrow[r] & \text{Ch}(a,d). \end{tikzcd}$$

b) Existence d'objets unité bilatères

$$1_a \in \pi_0(\text{Ch}(a,a)) \qquad \text{pour tout } a \in \mathcal{M}_0$$

Alors les $\pi_0(\text{Ch}(a,b))$ et leur composition définissent sur $\mathcal{M}_0$ comme ensemble d'objets une structure de *catégorie* $\mathcal{M}_{0\,\Pi}$, ayant les $1_a$ comme identités, et on trouve que

$$(a,b) \longmapsto \text{Ch}(a,b)$$

peut s'interpréter à partir d'un *bifoncteur* canonique

$$\mathcal{M}_{0\,\Pi}^{o} \times \mathcal{M}_{0\,\Pi} \longrightarrow \mathcal{H},$$

dont le composé avec

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\pi_0} \text{Ens}$$

n'est autre que le bifoncteur $(a,b) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}_{0\,\Pi}}(a,b)$,

`[page 8]`

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{0\,\Pi}}(a,b) \ \simeq\ \pi_0(\mathrm{Ch}(a,b)).$$

Cette relation est la *définition* de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{M}_{0\,\Pi}}$, mais ici la relation est entendue comme une bijection *fonctorielle* en $a$, $b$.

On trouve notamment que si

$$u : a' \longrightarrow a, \qquad v : b \longrightarrow b'$$

sont des flèches *inversibles* dans $\mathcal{M}_{0\,\Pi}$, alors

$$\mathrm{Ch}(a,b) \ \longrightarrow\ \mathrm{Ch}(a',b')$$

correspondant dans $\mathcal{H}$ est `[un]` *isomorphisme.*

On appliquera tout ceci surtout aux deux situations déduites d'une situation $(\mathcal{M},\Sigma)$, avec

$$\begin{array}{lllllll} 1^o) & \mathcal{H} & = & \mathrm{Hot}, & \mathrm{Ch}(a,b) & = & \mathrm{Ch}^{\Sigma}_{\infty}(\mathcal{M};a,b) \\ 2^o) & \mathcal{H} & = & \mathrm{Ind\,Cat\,hot}, & \mathrm{Ch}(a,b) & = & \mathrm{CH}^{\Sigma}_{\infty}(\mathcal{M};a,b)\ (^2). \end{array}$$

Dans les deux cas, on a donc un foncteur sur $(\mathcal{M}\Sigma^{-1})^o \times (\mathcal{M}\Sigma^{-1})$, à valeurs soit dans Hot, soit dans Ind Cat hot. (**NB** Les deux structures de catégorie sur $\mathcal{M}_0$ déduites des ces deux foncteurs sont canoniquement isomorphes.)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{Hot} & (a,b) \longmapsto \mathrm{Ch}^{\Sigma}_{\infty}(a,b) \\ (\mathcal{M}\Sigma^{-1})^o \times (\mathcal{M}\Sigma^{-1}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \mathrm{Ind\,Cat\,hot} & (a,b) \longmapsto \mathrm{CH}^{\Sigma}_{\infty}(a,b) \end{tikzcd}$$

`[page 9]`

Comme les foncteurs canoniques

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ind\,Cat\,hot} \arrow[r, "\mathrm{Ind}\,\varphi"] & \mathrm{Ind\,Hot} \arrow[r, "\mathrm{Ind}\,\psi"] & \mathrm{Ind\,Hot}_0^{\wedge} \arrow[r, "\underrightarrow{\lim}"] & \mathrm{Hot}_0^{\wedge}, \\ \mathrm{Cat\,hot} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Hot} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\psi"] & \mathrm{Hot}_0^{\wedge} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

commutant aux produits finis, toute théorie de 'Hom externes' à valeurs dans une de ces catégories, en définit une à valeurs dans chacune de celles dans laquelle elle s'envoie.

[2] $*$ dans Hot et Ind Cat hot est le produit cartésien sans plus.

D'ailleurs, ces foncteurs ne sont pas tous pleinement fidèles (c'est en tous cas faux pour $\varphi$ et $\operatorname{Ind}\varphi$, et j'ignore ce qui en est de $\psi$ et $\operatorname{Ind}\psi$ – les flèches verticales par contre sont pleinement fidèles ([3]).) Mais ils induisent des bijections pour les $\pi_0$. Donc la catégorie $\mathcal{M}_{0\Pi}$ déduite d'une théorie de Hom externes à valeurs dans une de ces catégoires, et celle déduite dans une autre où elle s'envoie, est la même à isomorphisme canonique près. Pour ce qui est de cette définition de $\mathcal{M}_{0\Pi}$, rien n'est changé donc quand on regarde les $\mathrm{CH}_\infty$ comme des objets de Ind Hot, ou seulement de $\operatorname{Ind}\mathrm{Hot}_0^\wedge$, ou même seulement de $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, ou quand on regarde les $\mathrm{Ch}_\infty$ comme des objets

[page 10]

dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$. Mais bien sûr, la donnée des accouplements de composition perd chaque fois en précision (sauf peut-être en passant de Hot à $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, si $\psi$ est pleinement fidèle ...). Quand on prend les images des $\mathrm{CH}_\infty^\Sigma(a,b)$ et $\mathrm{Ch}_\infty^\Sigma(a,b)$ dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$ (la dernière catégorie du diagramme), on trouve des objets canoniquement isomorphes (fonctoriellement en $a$, $b$ dans $\mathcal{M}_{0\Pi} \simeq \mathcal{M}\Sigma^{-1}$). Quand on les regarde comme étant respectivement dans Ind Hot et dans Hot $\hookrightarrow$ Ind Hot, on trouve un homomorphisme fonctoriel

$$(*) \qquad \mathrm{CH}_\infty^\Sigma(a,b) \longrightarrow \mathrm{Ch}_\infty^\Sigma(a,b) \qquad \text{dans Ind Hot ou dans } \operatorname{Ind}\mathrm{Hot}_0^\wedge \text{ au choix.}$$

La $\varinjlim$ de $\mathrm{CH}_\infty^\Sigma(a,b)$ dans Hot n'existe pas en général (sauf si l'ind-objet est essentiellement constant), mais elle existe dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, et l'isomorphisme canonique

$$(**) \qquad \varinjlim_{\mathrm{Hot}_0^\wedge} \mathrm{CH}_\infty^\Sigma(a,b) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ch}_\infty^\Sigma(a,b) \qquad \text{dans } \mathrm{Hot}_0^\wedge$$

est la flèche déduite de $(*)$ dans $\operatorname{Ind}\mathrm{Hot}_0^\wedge$.

[page 11]

Dans les deux cas CH et Ch (qu'on va désigner par le symbole commun $C_\infty(a,b)$), la fonctorialité de cet objet $C_\infty(a,b)$ (même au sens le plus faible, comme objet de $\mathrm{Hot}_0^\wedge$) par rapport à $a$ et $b$ (même au sens le plus faible, comme foncteur $\mathcal{M}^o \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Hot}_0^\wedge$ et pas même $(\mathcal{M}\Sigma^{-1})^o \times (\mathcal{M}\Sigma^{-1}) \longrightarrow \mathrm{Hot}_0^\wedge$) n'est pas évidente du tout sur la définition directe en termes du système inductif explicite dans Cat

$$C_\infty(a,b) \;=\; (\mathrm{Ch}_{\tau_0^{2n}}(a,b))_{n\in\mathbf{N}},$$

car une flèche $a' \longrightarrow a$ ou $b \longrightarrow b'$ dans $\mathcal{M}$, et même qu'elle serait dans $\Sigma$, ne définit aucunement une flèche dans Cat

$$\begin{aligned} C_\infty(a,b) &\longrightarrow C_\infty(a',b) \\ \text{ou}\quad C_\infty(a,b) &\longrightarrow C_\infty(a,b'). \end{aligned}$$

Cette difficulté rappelle celle qu'avait à surmonter Quillen, dans Homotopical Algebra, pour affronter la différence entre 'left homotopies' et 'right homotopies'. Je me rappelle comment

[3] et également, $\operatorname{Ind}\mathrm{Hot}_0^\wedge \xrightarrow{\lim} \mathrm{Hot}_0^\wedge$ n'est *pas* pleinement fidèle.

[page 12]

on peut néanmoins définir de telles flèches, comme résultant d'une flèche (beaucoup plus riche) de 'composition' de chemins entre $a'$ et $a$, et $a$ et $b$, ou entre $a$ et $b$, et $b$ et $b'$, soit en général donc l'accouplement

$$C_\infty(a,b) \times C_\infty(b,c) \longrightarrow C_\infty(a,c),$$

dont la définition directe n'est pas moins problématique, et ne peut en tous cas *pas* se donner comme une flèche dans Cat lui-même, ou dans Ind Cat. Interprétant p. ex. $\mathrm{Ch}_\infty(a,b)$ en termes de chemins *infinis* (des deux cotés) de $a$ à $b$, en un sens évident (mais 'essentiellement finis' des deux cotés), on peut définir aussi

$$\mathrm{Ch}^-_\infty(a,b), \qquad \mathrm{Ch}^+_\infty(a,b)$$

comme les sous-catégories pleines formées respectivement de chemins qui sont totalement dégénérés en degrés $\geq 0$ (i.e. $a_0 \longleftarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longleftarrow a_3 \cdots$ sont tous des identités), ce qui revient aux chemins infinis seulement à gauche, i.e. s'arrêtant à $a_0$, et symétriquement pour $\mathrm{Ch}^+_\infty(a,b)$. Même tabac pour les $\mathrm{CH}^+$, $\mathrm{CH}^-$.

[page 13]

Ceci dit, on a ceci (revenant à la notion $C_\infty$ ambivalente) :

a) les inclusions pleinement fidèles

$$C^-_\infty(a,b) \hookrightarrow C_\infty(a,b) \hookleftarrow C^+_\infty(a,b)$$

sont des isomorphismes dans Ind Cat hot resp. dans Hot, et

b) On a bel et bien une composition des chemins

$$C^-_\infty(a,b) \times C^+_\infty(b,c) \longrightarrow C_\infty(a,c).$$

L'*associativité* dans le cas du CH n'offre d'ailleurs pas de difficulté, à cause de la possibilité de se ramener aux

$$C_m(a,b) \times C_n(b,c) \times C_p(c,d) \rightrightarrows C_N(a,d)$$

pour $N$ grand, et prouver l'egalité comme flèches dans Cat hot – ce qui résultera du lemme d'homotopie sur les intervalles dans Cat. Dans le cas du $\mathrm{Ch}_\infty$ par contre je n'ai pas trouvé de démonstration. (Faute seulement d'avoir essayé sérieusement de m'y mettre? Je n'ai pas trop envie, vu qu'il se pourrait que $\mathrm{Hot} \longrightarrow \mathrm{Hot}^\wedge_0$ soit pleinement fidèle, auquel cas le travail devient inutile ...)

[page 14]

## 2 Comparaison avec Quillen

Il se pose un certain nombre de questions sur ce foncteur $(\mathcal{M}\Sigma^{-1})^o \times (\mathcal{M}\Sigma^{-1}) \longrightarrow \mathrm{Hot}$, et sa relation aux constructions classiques, notamment à la théorie de QUILLEN. Je vais maintenant noter

$$\begin{aligned} \mathrm{Ch}^{\Sigma}_{\infty}(a,b) &= \mathrm{Hom\,ext}_{\mathrm{Hot}}(a,b) \qquad \text{ou simplement} \\ &\phantom{=} \mathrm{Hom\,ext}(a,b). \end{aligned}$$

$1^o$). Soient $f, g : a \rightrightarrows b$ dans $\mathcal{M}$, alors (si $\mathcal{M}$ est une 'model category') QUILLLEN définit un ensemble

$$\pi_1(a,b;f,g) \qquad \text{ou} \qquad \pi_1(f,g)$$

des classes d'homotopie de $f$ à $g$, de telle façon que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(a,b)$ devient l'ensemble des objets d'un groupoïde, dont les flèches sont les éléments de $\pi_1(f,g)$, pour une notion de composition naturelle. Je suspecte que l'on a

$$\pi_1(f,g) \;=\; \mathrm{Hom}_{\underbrace{\Pi(\underline{\mathrm{Ch}}^{\Sigma}_{\infty}(a,b))}_{\substack{\text{groupoïde}\\ \text{fodamental}\\ \text{de } \underline{\mathrm{Ch}}^{\Sigma}_{\infty}(a,b)}}}(f,g),$$

quand $f$ et $g$ sont considérés comme des 'chemins infinis' (en insérant chaque $f : a \longrightarrow b$ dans

$$\cdots \underbrace{a_{-2}}_{=a} \xleftarrow{\mathrm{id}} \underbrace{a_{-1}}_{=a} \xrightarrow{f} \underbrace{a_0}_{=b} \xleftarrow{\mathrm{id}} \underbrace{a_1}_{=b} \longrightarrow \cdots \;)$$

[page 15]

Donc la définition des $\pi_1(f,g)$ (si c'est bien ça) se prolonge de façon naturelle aux chemins infinis (essentiellement finis) arbitraires.

$2^o$) Supposons que $\mathcal{M}$ admette un objet à la fois initial et final $0_{\mathcal{M}}$ ($\mathcal{M}$ 'ponctuée'). Je dis qu'alors toutes les catégories $\underline{\mathrm{Ch}}^{\Sigma}_{\infty}(a,b)$ sont ponctuées de façon naturelle : à savoir, par le chemin infini de $a$ à $b$ défini (comme plus haut) à partir de $f = 0_{a,b} : a \longrightarrow b$, l'application nulle de $a$ à $b$. On a envie alors de regarder les $\underline{\mathrm{Ch}}^{\Sigma}_{\infty}(a,b)$ comme définissant des éléments dans le $\mathrm{Hot}_{\bullet}$ ('Hot ponctué'). C'est plus fin que de dire qu'on se donne une classe neutre

$$e \longrightarrow \mathrm{Ch}(a,b) \qquad \text{dans Hot},$$

car le foncteur de $\mathrm{Hot}_{\bullet}$ dans Hot (ou dans $e\backslash\mathrm{Hot}$) n'est pas fidèle. Le problème, c'est de définir les flèches

$$\mathrm{Ch}(a,b) \times \mathrm{Ch}(b,c) \longrightarrow \mathrm{Ch}(a,c)$$

dans $\mathrm{Hot}_{\bullet}$, et pas seulement dans Hot, et avec associativité (et les unités) dans $\mathrm{Hot}_{\bullet}$ également. Si on applique la définition avec $\mathrm{Ch}^{-}(a,b)$ et $\mathrm{Ch}^{+}(b,c)$, le composé des éléments nuls $a \xrightarrow{0} b$ de $\mathrm{Ch}^{-}(a,b)$ et $b \xleftarrow{\mathrm{id}} b \xrightarrow{0} c$ de $\mathrm{Ch}^{+}(b,c)$

[page 16]

est l'élément de $\mathrm{Ch}_\infty(a,c)$ que voici

$$\begin{tikzcd}
 & a_{-2} & a_{-1} \arrow[l] \arrow[r] & a_0 \arrow[d, equal] & a_1 \arrow[l] \arrow[r] & a_2 & \cdots & \\
\cdots \arrow[loop left, "\mathrm{id}"'] & a & a \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "0"'] & b & b \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "0"'] & c & \cdots \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[loop right, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

ce n'est *pas* l'élément nul de $\mathrm{Ch}_\infty(a,c)$ ! Mais on a des flèches canoniques

$$e^-_{a,b} \circ e^+_{b,c} \rightleftarrows e_{a,c} \qquad \text{dans } \mathrm{Ch}_\infty(a,c)$$

qui sont l'identité sur tous les sommets sauf celui d'indice 0. Il y a un sorite à développer, comme quoi une paire

$$(f : K_\bullet \longrightarrow L_\bullet, c)$$

d'un foncteur entre catégories ponctuées, et d'un chemin $c : f(e_{K_\bullet}) \longrightarrow e_{L_\bullet}$, définit dans Hot une flèche canonique

$$\mathrm{hot}_\bullet(K_\bullet) \longrightarrow \mathrm{hot}_\bullet(L_\bullet)$$

avec transitivité si on a

$$(f' : L_\bullet \longrightarrow M_\bullet, c' : f'(e_{L_\bullet}) \longrightarrow e_{M_\bullet}),$$

[page 17]

d'où

$$f'' = f' \circ f : K_\bullet \longrightarrow M_\bullet, \qquad \text{et} \quad c'' : f''(e_{K_\bullet}) \longrightarrow e_{M_\bullet}),$$

définit ainsi

$$\begin{tikzcd}
f'(f(e_{K_\bullet})) \arrow[r, "f'(c)"] \arrow[rr, bend right, "c'' \text{ par définition}"'] & f'(e_{L_\bullet}) \arrow[r, "c'"] & e_{M_\bullet}
\end{tikzcd}$$

? Cela nous donne donc bel et bien des accouplements dans $\mathrm{Hot}_\bullet$ (et aussi dans $\mathrm{Cat\,hot}_\bullet$?). Il est difficile de croire qu'ils pourraient ne pas être associatifs! D'ailleurs $\mathrm{Hot}_\bullet$, avec le produit cartésien ordinaire ([4]), satisfait à l'axiomatique de tantôt pour $\mathcal{H}$, et $\mathrm{Hot}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Hot}$ est compatible avec ce produit ([5]), et avec $\pi_0$.

Si tout ceci marche, on aurait donc une théorie des $\mathrm{Hom\,ext}_\bullet$ à valeurs dans $\mathrm{Hot}_\bullet$; et sans doute aussi pour les $\mathrm{CH}_\infty$ comme objets de $\mathrm{Ind\,Hot}_\bullet$, et non seulement de $\mathrm{Ind\,Hot}$. Mais

[4]Non, il faut prendre le produit $\xi_\bullet \divideontimes \eta_\bullet$ ($\xi_\bullet \times \eta_\bullet$, avec $\xi_\bullet \vee \eta_\bullet$ contracté en $e$).

[5]Non, mais on s'en tire quand même ...

de toutes façons on ne peut en général laisser tomber Cat hot, qui reste importante – donc il faudrait avoir des objets $\mathrm{CH}_\infty(a,b)$ dans $\mathrm{Ind\,Cat\,hot}_\bullet$, pour avoir une côte bien taillée.

Les $\pi_0(C(a,b))$ seront à présent des ensembles ponctués, et ce sera par l'image de l'application nulle $a \xrightarrow{0} b$, i.e. le composé

$$a \longrightarrow 0 \longrightarrow b$$

[page 18]

qu'il faut composer avec l'elément déduit du chemin tronqué

$$a \longrightarrow \underbrace{0}_{=a_0} \longleftarrow b \qquad \ldots$$

Il faudrait montrer que 0 est aussi un objet neutre de $\mathcal{M}\Sigma^{-1}$, i.e. que

$$\pi_0(a,0) = \pi_0(0,a) = \{0\} \qquad \text{pour tout } a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$$

et interpréter l'élément nul dans $\pi_0(a,b)$ comme l'application nulle dans $\mathcal{M}\Sigma^{-1}$. De façon générale, il faut des conditions qui assurent (sans que $\mathcal{M}$ soit forcément ponctuée) que

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{M}\Sigma^{-1}$$

commute aux sommes finies, aux produits finis (donc $\gamma(\varphi_\mathcal{M}) = \varphi_{\mathcal{M}\Sigma^{-1}}$, resp. $\gamma(e_\mathcal{M}) = e_{\mathcal{M}\Sigma^{-1}}$) ([6]).

Supposons enfin que $\mathcal{M}$ soit *additive,* et même $k$-linéaire ($k$ un anneau fixé), i.e. on a de plus un homomorphisme d'anneaux

$$k \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{id}_\mathcal{M}).$$

On doit supposer quelque compatibilité de $\Sigma$ à la structure additive, p. ex. que la somme directe de deux flèches dans $\Sigma$ est dans $\Sigma$, et sans doute quelque chose de plus fort, du genre 'lemme des cinq' pour $\Sigma$. (Mais on ne suppose pas forcément $\mathcal{M}$ abélienne, donc on aurait dû mal à formuler un lemme des cinq?)

[page 19]

Mais peut-être ici faut-il un axiome plus subtil, p.ex. (si $\underbrace{\Sigma}_{\text{suspension}}$ et $\Omega$ existent ([7])) que l'ensemble des morphismes d'adjonction $\Sigma\Omega \longrightarrow \mathrm{id}$, $\mathrm{id} \longrightarrow \Omega\Sigma$ soit `[formé d']`isomorphismes, ce qui implique que $\Omega$ resp. $\Sigma$ est pleinement fidèle. En tous cas, l'attente naturelle ici, c'est que $\mathrm{Ch}^\Sigma_\infty(a,b)$ soit non seulement dans $\mathrm{Hot}_\bullet$, mais même dans la catégorie $D^{\leq 0}(k\text{-Mod})$, sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $D^-(k\text{-Mod})$ formée des $K$ tels que $H^i(K) = 0$ si $i > 0$. On peut aussi la noter $D_{\geq 0}(k\text{-Mod})$, l'interprétant en

[6] à faire.

[7] cf. plus bas ce que ça signifie.

termes de complexes de 'chaînes' plutôt que de cochaînes. Ici les accouplements doivent correspondre à l'opération $* = \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_k$ dans $D_{\geq 0}(k\text{-Mod})$, admettant $k$ comme objet unité, et

$$\pi_0(K_\bullet) \ \simeq \ H_0(K_\bullet).$$

Donc on doit avoir

$$\operatorname{Hom ext}(a,b) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_k \operatorname{Hom ext}(b,c) \longrightarrow \operatorname{Hom ext}(a,c),$$

où cette fois Hom ext désigne l'objet de $D_{\geq 0}(k\text{-Mod})$, au lieu d'un objet de Hot seulement, ou de $\mathrm{Hot}_\bullet$. On utilise les foncteurs

$$D_{\geq 0}(k\text{-Mod}) \longrightarrow \mathrm{Hot}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Hot}$$

[page 20]

pour faire le lien avec la théorie ponctuée dans $\mathrm{Hot}_\bullet$, ou [la] théorie générale dans Hot. Si on désigne par

$$\gamma : \ D_{\geq 0}(k\text{-Mod}) \longrightarrow \mathrm{Hot}_\bullet$$

le premier de ces foncteurs, il ne commute pas aux produits $*$ ($\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_k$ et $\times$ respectivement), mais on a, pour $P_\bullet$, $Q_\bullet$ variable dans $D_{\geq 0}(k\text{-Mod})$, une flèche fonctorielle canonique

$$\gamma(P_\bullet \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_k Q_\bullet) \xleftarrow{can.} \gamma(P_\bullet) \times \gamma(Q_\bullet)$$

'$k$-bilinéaire', ce qui montre que de donner des accouplements

$$P_\bullet * Q_\bullet \xrightarrow{c_k} R_\bullet,$$

d'où

$$(*) \qquad \gamma(P_\bullet * Q_\bullet) \xrightarrow{\gamma(c_k)} \gamma(R_\bullet),$$

est l'un et l'autre plus fin que de se donner seulement

$$(*') \qquad \gamma(P_\bullet) * \gamma(Q_\bullet) \xrightarrow{c_\bullet} \gamma(R_\bullet),$$

vu qu'une donnée $(*)$ impliquera une donne $(*')$ par

$$\begin{tikzcd} & \gamma(P_\bullet * Q_\bullet) \arrow[dr, "\gamma(c)"] & \\ \gamma(P_\bullet) * \gamma(Q_\bullet) \arrow[ur, "\text{can.}"] \arrow[rr, "c_\bullet"] & & \gamma(R_\bullet). \end{tikzcd}$$

Ceci vu, on s'attend bien à avoir une théorie *forte* des accouplements

[page 21]

$$\operatorname{Hom ext}_k(a,b) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_k \operatorname{Hom ext}_k(b,c) \longrightarrow \operatorname{Hom ext}_k(a,c),$$

d'où on déduira les accouplements plus faibles dans $\mathrm{Hot}_\bullet$ (au lieu de $D_{\geq 0}(k\text{-Mod})$)

$$\operatorname{Hom ext}_{\mathrm{Hot}_\bullet}(a,b) \times \operatorname{Hom ext}_{\mathrm{Hot}_\bullet}(b,c) \longrightarrow \operatorname{Hom ext}_{\mathrm{Hot}_\bullet}(a,c).$$

$3^o$) Revenant au cas $\mathcal{M}$ ponctuée sans plus, Quillen définit, pour $a$, $b$ dans $\mathcal{M}$,

$$\pi_1(a,b) \;=\; \pi_1(a,b\,;0_a,0_b)$$

comme bifoncteur sur $(\mathcal{M}\Sigma^{-1})^o \times (\mathcal{M}\Sigma^{-1})$ (avec les notations de $1^o$)). Si ce que j'avance sans preuve dans $1^o$) est vrai, il doit s'ensuivre qu'on a un isomorphisme canonique

$$\pi_1(a,b) \;\simeq\; \pi_1(\mathrm{Ch}^{\Sigma}_{\infty}(a,b)),$$

où $\mathrm{Ch}^{\Sigma}_{\infty}(a,b)$ est vu comme objet de $\mathrm{Hot}_\bullet$, donc son $\pi_1$ est défini. On a en tous cas, sans aucune référence à des cofibrations et des fibrations, un bifoncteur à valeurs dans Groupes, composé dans

$$(\mathcal{M}\Sigma^{-1})^o \times (\mathcal{M}\Sigma^{-1}) \xrightarrow{(a,b)\longmapsto \mathrm{Ch}^{\Sigma}_{\infty}(a,b)} \mathrm{Hot}_\bullet \xrightarrow{\pi_1} (\text{Groupes}).$$

Si pour $a$ fixé, $b$ variable,

$$b \longmapsto \pi_1(a,b)$$

est représentable, on note l'objet qui le représente par $\Sigma(a)$ (*suspension* – ne pas confondre ce $\Sigma$ avec $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, qu'il vaut mieux maintenant noter $W$, comme 'weak equivalence'). Donc

[page 22]

$$\operatorname{Hom}(\Sigma a, b) \;\simeq\; \pi_1(a,b),$$

et $\Sigma a$ dépend fonctoriellement de $a$, sous réserve d'existence. S'il existe toujours, on a

$$\Sigma :\; \mathcal{M}W^{-1} \longrightarrow \mathcal{M}W^{-1}.$$

On définit de même, sous réserve d'existence,

$$\Omega :\; \mathcal{M}W^{-1} \longrightarrow \mathcal{M}W^{-1}$$

par

$$\operatorname{Hom}(a, \Omega b) \;\simeq\; \pi_1(a,b),$$

et si tous les deux existent, on a la formule d'adjonction

$$\operatorname{Hom}(\Sigma a, b) \;\simeq\; \operatorname{Hom}(a, \Omega b) \qquad (\simeq \pi_1 \operatorname{Hom ext}_{\mathrm{Hot}_\bullet}(a,b)).$$

L'existence de

$$\Omega : \mathcal{M}W^{-1} \longrightarrow \mathcal{M}W^{-1}, \quad \text{ou de}$$
$$\Sigma : \mathcal{M}W^{-1} \longrightarrow \mathcal{M}W^{-1},$$

voire même des deux à la fois, apparaît comme une hypothèse (a) extrêmement forte sur $(\mathcal{M}, W)$. Cette condition *plus* celle (b) que les $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(a,b)$ soient homotopes à des catégories de Thomason-Kan, ou (ce qui revient au même, à peu de choses près?) que $Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(Y)W_Y^{-1}}(a_Y, b_Y)$ transforme Hot-équivalences de Cat en bijections (ne serait-ce que pour $Y$ fixé ...), semble le test crucial pour savoir si '$(\mathcal{M}, \Sigma)$ [plutôt $(\mathcal{M}, W)$] se prête à une théorie homotopique 'dans $\mathcal{M}$' '. Je doute que

[page 23]

ces conditions puissent être satisfaites pour $\mathcal{M}$ finie, sauf dans le cas trivial où $\mathcal{M} = \emptyset$, où $\mathcal{M}\Sigma^{-1}$ [plutôt $\mathcal{M}W^{-1}$] est équivalente à la catégorie ponctuelle.

Un troisième test (c) qui me paraît important (mais peut-être ça résulte du reste), c'est les formules dans $\mathrm{Hot}_\bullet$

$$(*) \qquad \begin{cases} \mathrm{Hom\,ext}_\bullet(\Sigma a, b) & \simeq \mathrm{Hom\,ext}_\bullet(a, \Omega b) \\ & \simeq \Omega \mathrm{Hom\,ext}_\bullet(a, b), \end{cases}$$

où le $\mathrm{Hom\,ext}_\bullet$ désigne le Hom externe à valeurs dans $\mathrm{Hot}_\bullet$. Il faut le voir séparément (sous condition d'existence soit de $\Omega$, soit de $\Sigma$) comme deux formules 'duales' l'une de l'autre,

$$(**) \qquad \begin{cases} \mathrm{Hom\,ext}_\bullet(a, \Omega b) & \simeq \Omega \mathrm{Hom\,ext}_\bullet(a, b) \\ \mathrm{Hom\,ext}_\bullet(\Sigma a, b) & \simeq \Omega \mathrm{Hom\,ext}_\bullet(a, b), \end{cases}$$

isomorphismes de *groupes* dans $\mathrm{Hot}_\bullet$. (**NB** $\Omega b$ est un objet groupe de $\mathcal{M}W^{-1}$, car il représente un contrafoncteur à valeurs dans Gr, et de même $\Sigma a$ est un cogroupe de $\mathcal{M}W^{-1}$. Le foncteur $y \longmapsto \mathrm{Hom\,ext}(a, y)$ doit commuter aux produits finis, et donc transformer objets groupes en itou. Et de même $x \longmapsto \mathrm{Hom\,ext}(x, b)$ doit transformer sommes finies en produits finis, donc cogroupes en groupes ([8]).)

Je me suis convaincu que les isomorphismes $(**)$ n'ont de chance d'exister que si on a la condition préalable (b).

[8] Le foncteur $\Omega$ doit provenir d'un endomorphisme du dérivateur $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\mathcal{M},W}$, et celui-ci doit être exact à gauche, et dualement pour $\Sigma$.

[page 24]

# 3 Essai de construction du foncteur $\Omega$

Il n'y a sans doute guère de chance de prouver quelque chose sur le foncteur

$$\Omega :\ \mathcal{M}W^{-1} \longrightarrow \mathcal{M}W^{-1},$$

sans tenir en mains une *construction* plus ou moins explicite de celui-ci. Je vais essayer, en m'inspirant de QUILLEN, de dégager des conditions générales sur $(\mathcal{M}, W)$ (plus générales que celles de QUILLEN) qui assurent l'existence de $\Omega$, et permettent de le construire. L'idée géométrique remonte à SERRE-CARTAN. Il s'agit, pour un objet $S$ de $\mathcal{M}$, de construire un objet $\mathrm{Ch}(S)$ *dans* $\mathcal{M}$, jouant le rôle d'un 'espace de chemins', et qui doit s'inclure dans un diagramme de factorisation de $\mathrm{diag}_S : S \longrightarrow S \times S$ (on suppose que dans $\mathcal{M}$ les $\varprojlim$ finies, donc les produits finis, existent)

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "i_S"] \arrow[dd, bend right, "\mathrm{diag}_S"'] & \\
\mathrm{Ch}(S) \arrow[d, "p_S"] & \\
S \times S & e. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

La propriété essentielle, c'est que $p$ soit une *'fibration'* (dans un sens convenable, à dégager).

[page 25]

À titre accessoire il peut être utile (peut-être) que $i$ soit une 'cofibration' ([9]). On définit $\Omega(S)$ comme la fibre de $\mathrm{Ch}(S)$ sur $S \times S$ (par rapport à l'unique morphisme $e = e_{\mathcal{M}} \longrightarrow S \times S$, où $e_{\mathcal{M}}$ est l'objet nul de $\mathcal{M}$).

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ch}(S) \arrow[d] & \Omega S \arrow[l] \arrow[d] \\
S \times S & e. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

[9] et peut-être que $S \longrightarrow e$ soit également une fibration ?

C'est un objet de $\mathcal{M}$, qu'on regardera surtout comme un objet de $\mathcal{M}W^{-1}$. Il faut s'assurer qu'on a une bijection fonctorielle en $T$ dans $\mathcal{M}W^{-1}$

$$\underbrace{\pi_1 \underline{\mathrm{Ch}}_\infty^W(T,S)}_{\overset{\text{déf}}{=} \pi_1(T,S)} \simeq \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}W^{-1}}(T,\Omega S)}_{\overset{\text{déf}}{=} \pi_0 \underline{\mathrm{Ch}}_\infty^W(T,\Omega S)}.$$

Pour cela, il s'impose de comparer

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\infty^W(T,\Omega S) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\Omega_{\mathrm{Hot}_\bullet}(\underline{\mathrm{Ch}}_\infty^W(T,S))}_{\overset{\text{`par définition' pour } \Omega \text{ de } \mathrm{Hot}_\bullet}{=} \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(\mathrm{Ch}_\infty^W(T,S);0,0)} \quad ,$$

puisqu'il s'agit de construire une bijection entre leurs $\pi_0$.