LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre VII

Catégories de chemins (2)

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX\,2_{\varepsilon}$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

`[page 1]`

Comme le formalisme 'simplifié' des chemins que j'ai voulu dégager à la va-vite s'est révélé d'une lourdeur insupportable, de nature à le rendre quasiment inutilisable, je vais essayer de dégager un formalisme souple, collant à l'intuition, au prix seulement d'un effort conceptuel supplémentaire.

1 Intervalles et leur variantes

On appelle *catégorie intervalle standard* une catégorie définie par un ensemble ordonné, dont l'ensemble des élements est un intervalle d'entiers $[0,n]$ ($n \in \mathbf{N}$, on n'exclut pas le cas $n = 0$, i.e. de la catégorie ponctuelle $\{0\}$) :

$$\operatorname{Ob} I = [0,n] \subseteq \mathbf{N},$$

et satisfaisant l'hypothèse suivante :

a) pour toute paire de deux sommets consécutifs $i-1$, i de I ($1 \leq i \leq n$), il y a une flèche qui les relie, donc soit $i \longrightarrow i+1$, soit $i \longleftarrow i+1$ `[plutôt` $i-1 \longrightarrow i$, $i-1 \longleftarrow i$`]` (cette flèche est notée $\underline{u}_i$,

$$(i-1) \xrightarrow{u_i} i \qquad \text{ou} \qquad (i-1) \xleftarrow{u_i} i \ \ ).$$

b) La catégorie I est engendrée par l'ensemble de ses flèches $\underline{u}_i$ (appelées *flèches de transition*).

La flèche de transition est dite *directe* si elle va de $i-1$ à i, *rétrograde* dans le sens inverse. Si on affecte l'intervalle $[i-1,i]$ du signe $+$ ou $-$ suivant que $\underline{u}_i$ est directe ou rétrograde, on voit donc que les

`[page 2]`

intervalles standard de longueur donnée n correspondent biunivoquement aux systèmes de signes $+$ ou $-$ sur les n intervalles de transition $[i-1,i]$ ($1 \leq i \leq n$), il y en a donc 2^n. Le sommet 0 est l'*origine* ou la *source* de l'intervalle, le sommet n l'*extrémité* ou le *but* de l'intervalle.

Un intervalle standard est *orienté,* du fait qu'on à la relation d'ordre *total* naturelle sur l'ensemble de ses sommets, savoir celle des entiers dans $[0,n]$. Quand on parlera de la relation d'ordre sur I, qu'un sommet i en *'précède'* ou *'suit'* un autre j ($i \leq j$ ou $i \geq j$ respectivement), c'est de cette relation d'ordre qu'on voudra parler. Celle associée à la structure de catégorie ne sera jamais regardée comme une relation d'ordre. Il y a également une relation d'ordre total naturelle sur l'ensemble des flèches de transition $\underline{u}_i$ ($1 \leq i \leq n$), donnée par la relation d'ordre des entiers i, $1 \leq i \leq n$, qui les indexent. On dira qu'une flèche i `[plutôt` $\underline{u}_i$`]` de transition *précède* ou *suit* une autre `[`$\underline{u}_j$`]`, ou qu'elle est *successeur immédiat* ou *prédécesseur immédiat* d'une autre (si $i = j+1$ ou $i = j-1$).

Si on a un ensemble d'entiers

$$E \subseteq \mathbf{Z},$$

on considérera dans E la relation d'équivalence engendrée par la relation entre deux éléments (i, j) de E : j est successeur immédiat de i *dans* $\mathbf{Z}$ (i.e. $j = i + 1$). Deux éléments distinct i, j de E sont congrus pour cette relation si et seulement si l'intervalle d'entiers qu'ils déterminent est $\subseteq E$, donc

si $i < j$, i et j sont *'connectés'* dans E si et seulement si $[i, j] \subseteq E$.

`[page 3]`

Quand on parlera des 'composantes connexes' de E, il s'agira toujours des classes suivant cette relation d'équivalence.

Nous identifierons l'ensemble des flèches de transition $\mathrm{Fl\,tr}(I)$ de I à l'intervalle d'entiers $[1, n]$, donc à une partie de $\mathbf{Z}$. Si on a une partie $E \subseteq \mathrm{Fl\,tr}(I)$, on y a donc la notion de flèches de transition 'connectées' dans E, et la notion de connexité pour E. Si $i < j$, $\underline{u}_i$ et $\underline{u}_j$ sont connectées si et seulement si toutes les flèches de transition intermédiaires entre $\underline{u}_i$ et $\underline{u}_j$ sont dans E. Et E est connexe si et seulement s'il est soit vide, soit formée d'une suite de flèches de transition dont chacune est successeur immédiat de celle qui la précède,

$$E = \{\underline{u}_i, \underline{u}_{i+1} \dots, \underline{u}_{i+l-1}\},$$

où l est le cardinal de E. Une telle E est appelée une *chaîne* de flèches de transition, et l est sa longueur. Une chaîne est dite *composable* si le composé $\underline{u}_{i+l-1} \circ \dots \circ \underline{u}_{i+1} \circ \underline{u}_i$ `[ou` $\underline{u}_i \circ \underline{u}_{i+1} \circ \dots \circ \underline{u}_{i+l-1}$`]` a un sens, i.e. si elles sont toutes de même sens, soit directe, soit rétrograde.

On désigne par $\mathrm{Fl\,tr}^+(I)$, $\mathrm{Fl\,tr}^-(I)$ l'ensemble des flèches de transition directes, ou rétrogrades, respectivement. Leurs composantes connexes ne sont autres que les chaînes composables maximales. Ainsi, les chaînes composables maximales forment une partition de l'ensemble des flèches de transition, en intervalles d'entiers mutuellement disjoints. Les chaînes forment elles-mêmes un ensemble totalement ordonné

$$C_1,\ C_2,\ \dots\ C_r \qquad (1 \leq r \leq n).$$

L'entier r s'appelle la *'longueur utile'* de l'intervalle

`[page 4]`

I, c'est donc le cardinal de l'ensemble de ses chaînes composables maximales.

Deux chaînes composables maximales `[consécutives]` sont toujours de signe opposé, si l'une est directe l'autre est rétrograde, et inversement. La première chaîne composable maximale C_1 (disons simplement *'chaîne structurale'*) a le même signe que $\underline{u}_1$; `[on]` dit que la *direction initiale* de I est directe, resp. rétrograde, s'il en est ainsi de $\underline{u}_1$, ou ce qui revient au même, de C_1. De même on définit la *direction finale* de I comme celle de $\underline{u}_n$, ou encore celle de C_r. Direction initiale et finale sont égales si la longueur utile r est impaire, inégales si elle est paire. (**NB** Ce n'est que pour $n = 0$, i.e. quand $I = \{0\}$ est la catégorie ponctuelle, que direction initiale et direction finale ne sont pas définies.)

Les chaînes composables correspondent aux sous-catégories pleines de I qui sont isomorphes à une catégorie $\mathbf{\Delta}_i$ (où i est la longueur de la chaîne). Notons que $\mathbf{\Delta}_i$ n'a pas d'autre automorphisme que l'identité, donc les chaînes maximales de longueur donnée $i \geq 1$ correspondent exactement aux foncteurs

$$\mathbf{\Delta}_i \hookrightarrow I$$

qui sont injectifs sur les sommets. Un tel foncteur est pleinement fidèle, et un monomorphisme. Ce foncteur définit une application strictement croissante ou strictement décroissante sur

`[page 5]`

les sommets, suivant que la chaîne est directe ou rétrograde.

Notons que tout simplexe type $\mathbf{\Delta}_i$, $i \geq 0$, peut être vu comme un intervalle, de longueur i, de longueur utile 1 (si $i \geq 1$, 0 si $i = 0$). Son origine est 0, son extrémité est i. Mais appelons une catégorie quelconque une *catégorie intervalle* si elle est isomorphe à un intervalle standard. Notons ici

Proposition 1. *Soit I un intervalle standard de longueur $n \geq 1$.*

a) Soit $i \in I$. Pour que $i \in \{0, n\}$, i.e. pour que i soit un des deux 'bouts' *(ou* 'extrémités'*) (source ou but) de I, il faut et il suffit que l'une des deux catégories I/i ou $i\backslash I$ soit la catégorie ponctuelle et que l'autre soit isomorphe à un $\mathbf{\Delta}_j$ ([1]). (Caractérisation intrinsèque des bouts d'un intervalle.) Pour que i soit la source, il faut et il suffit que $i\backslash I$* `[phrase incomplète]`

b) Tout foncteur $I \longrightarrow I$ qui fixe les deux extrémités de I est l'identité.

Corollaire. *Le groupe des automorphismes de I a au plus deux éléments. S'il en a deux, l'automorphisme non trivial échange les deux extrémités. (On dit alors que l'intervalle est* symétrique.*)*

`[page 6]`

NB Si i n'est pas un bout, et si néanmoins l'une des deux catégories $i\backslash I$, I/i est ponctuelle, disons I/i, alors au voisinage immédiat de i, I a la forme

$$\underset{i-1}{\bullet} \xleftarrow{\underline{u}_i} \underset{i}{\bullet} \xrightarrow{\underline{u}_{i+1}} \underset{i+1}{\bullet}$$

($\underline{u}_i$ rétrograde, $\underline{u}_{i+1}$ directe - si c'était $i\backslash I$ la ponctuelle, alors $\underline{u}_i$ serait directe, $\underline{u}_{i+1}$ rétrograde - en tous les cas ces deux flèches sont de sens opposé, i.e. non composables). On trouve donc que $i\backslash I$ est une catégorie de la forme

[1]où j est la longueur de l'unique chaîne structurale qui 'touche' i (i.e. telle que i soit dans la sous-catégorie pleine définie par ladite chaîne).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & i \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & i-1 \arrow[dl, dotted] & & i+1 \arrow[dr, dotted] & \\
i-r & & & & i+r,
\end{tikzcd}$$

où r est la longueur de la chaîne structurale contenant $\underline{u}_i$, s celle de la chaîne structurale contenant $\underline{u}_{i+1}$. Cette catégorie est une somme amalgamée $\mathbf{\Delta}_r \amalg \mathbf{\Delta}_s$ (recollées suivant leur origine), mais n'est pas isomorphe à une $\mathbf{\Delta}_j$, p. ex. faute d'avoir un objet final.

Cette observation prouve a). Pour prouver b), il suffit de prouver que l'ordre total sur I est déterminé de façon intrinsèque, par le choix de *l'origine* s_0 de I (parmi ces deux extrémités). Supposons que l'on ait déjà déterminé intrinsèquement les sommets s_0, s_1, $\ldots$, s_i ($i \geq 0$). Comment déterminer s_{i+1}? (Quand $i < n$.) Soit I' la sous-catégorie pleine de I

`[page 7]`

formée des $j \in I$ qui ne sont pas parmi les s_j `[plutôt` s_k`]` déjà construits, sauf le dernier s_i (donc $s_i \in I'$, $\operatorname{card} I' \geq 2$). Alors I' est isomorphe à un intervalle standard, avec s_i correspondant à l'origine. Une des catégories $i\backslash I$, I/i est ponctuelle, l'autre isomorphe à une catégorie $\mathbf{\Delta}_j$, et de plus, i est objet initial ou final de $\mathbf{\Delta}_j$. Si c'est l'objet initial 0, on prend pour s_{i+1} le successeur immédiat de i dans $\mathbf{\Delta}_j$. Si c'est l'objet final j, on prend pour s_{i+1} le prédécesseur immédiat $j-1$.

Si on était parti du but n de I, au lieu de partir de la source, on aurait trouvé la relation d'ordre total opposée. Affectant l'élément but du numéro d'ordre 0, on trouve une renumération de I, i devenant $n-i$, et les flèches de transition qui étaient directes pour la relation d'ordre initiale, deviennent rétrogrades dans la relation d'ordre opposée, et inversement. On voit ainsi :

Proposition 2. *Si I est un intervalle standard, il existe un unique couple (I', θ), où I' est un intervalle standard, et θ un isomorphisme $I \xrightarrow{\sim} I'$ qui transforme le but de I dans la source de I' (et la source de I en le but de I').*

Cet intervalle I' est appelé l'intervalle *opposé* de I. Il faut le voir, intrinsèquement, comme la 'même' categorie I, mais avec une 'orientation' opposée.

`[page 8]`

Une façon plus claire de voir ceci est la suivante. Soit J une catégorie intervalle, i.e. isomorphe à un intervalle standard. Alors il y a exactement (si $I \not\simeq e$) *deux* couples (I, θ) d'un intervalle standard I et d'un isomorphisme $\theta : I \xrightarrow{\sim} J$. Ces deux isomorphismes induisent sur J deux ordres totaux, opposés l'un de l'autre. Chaque couple est déterminé de façon unique par ledit ordre total, qu'on appelera une *orientation* de l'intervalle J. Ainsi J a deux orientations, et chacune détermine un *isomorphisme orienté* (i.e. respectant les orientations) de J avec un intervalle standard ([2]). Ces deux intervalles sont les mêmes si et seulement s'il existe un automorphisme de J (nécessairement unique) qui échange ses deux orientations, ou ce qui revient au même, qui échange entre elles les deux extrémités. (Ainsi les catégories opposées l'une de l'autre

sont chacunes des intervalles symétriques.) Choisir une orientation revient aussi 'a choisir l'origine parmi les deux extrémités.

Notons que la *catégorie opposée* à un intervalle est un intervalle, et la catégorie opposée à un intervalle standard est l'intervalle standard qui s'en déduit en changeant tous les signes sur les intervalles de transition $[i-1, i]$ $(1 \leq i \leq n)$. On se gardera de confondre la propriété $I \simeq I^o$, avec la propriété de symétrie.

`[page 9]`

Ainsi les deux catégories (Ψ_1 et Φ_1) ci-dessus sont symétriques, mais opposées l'une de l'autre sans être isomorphes. D'autre part, les $\mathbf{\Delta}_i$ ne sont pas symétriques, mais chacune isomorphe à la catégorie opposée.

Si I est isomorphe à la catégorie opposée I^o, et si θ est un tel isomorphisme (nécessairement unique), alors il est immédiat que θ renverse l'orientation (sinon ce serait l'identité sur les sommets, et les flèches de transition seraient à la fois directes et indirectes), donc $\theta(0) = n$, $\theta(1) = n-1$, et on veut que $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_n$ sont de même signe. Mais si I est symétrique, $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_n$ sont de signe opposé. Donc I ne peut être à la fois symétrique et isomorphe à l'intervalle opposé `[plutôt à la catégorie opposée; exception :` $I = \{0\}$`]`.

Pour toute catégorie $\mathbf{\Delta}_i$, celle-ci étant un intervalle, il y a (si $i > 0$) *deux orientations.* En tant qu'intervalles orientés, il y a $\mathbf{\Delta}_i^+$ (avec l'orientation ordinaire, donné par l'ordre ordinaire sur Ob $\mathbf{\Delta}_i = [0, i]$), et $\mathbf{\Delta}_i^-$ avec l'orientation opposée.

[2] **NB** On parlera de l'intervalle *orienté opposé* I^{opp} d'un intervalle *orienté* I, qu'il faut se garder de confondre avec la catégorie opposée I^o. Ici I^{opp} a même catégorie sous-jacente que I, mais avec une orientation opposée.

`[page 10]`

2 Sous-catégories pleines d'un intervalle

Soit I une catégorie intervalle orientée, de longueur $n \geq 1$. Nous identifierons $\operatorname{Ob} I$ à l'ensemble des entiers $[0, n]$. Pour une chaîne $\underline{u}_i$, $\underline{u}_{i+1}$, ... , $\underline{u}_{i+l-1}$ de flèches de transition dans I, on appelle *domaine* de la chaîne, l'ensemble des sources et de buts de ces éléments. C'est donc un intervalle d'entiers $[i-1, i+l-1]$, de longueur l égale à celle de la chaîne, dont l'origine est déterminé par la première flèche $\underline{u}_i$ de la chaîne (c'est sa source, si $\underline{u}_i$ est directe, et son but si $\underline{u}_i$ est rétrograde), et dont l'extrémité est déterminée par la dernière $\underline{u}_{i+l-1}$. Les intervalles d'entiers (vus comme des sommets de I) correspondant aux chaînes structurales sont appelés les *intervalles structuraux* ou *intervalles critiques* de I. Contrairement aux chaînes structurales, ces intervalles ne forment pas une partition de I, puisque deux intervalles structuraux peuvent avoir une extrémité commune. Si les chaînes structurales sont

$$C_1,\ C_2,\ \ldots\ ,\ C_r \qquad (r = \text{ longueur utile de } I)$$

de longueurs

$$l_1,\ l_2,\ \ldots\ ,\ l_r,$$

alors les intervalles structuraux sont

$$\underbrace{[0, l_1]}_{I_1},\ \underbrace{[l_1, l_1 + l_2]}_{I_2},\ \ldots\ ,\ \underbrace{[l_1 + \cdots + l_{r-1}, l_1 + \cdots + l_{r-1} + l_r]}_{I_r},$$

une suite d'intervalles d'entiers dont deux consécutifs ont une extrémité commune, et tels que si $i < j$, chaque élément de I soit $\leq$ chaque élément de I_j. On appelle *sommet critique* de I les extrémités des intervalles structuraux.

Proposition 3. *Soit $s \in I$, soit $I' = I/s$ (sous-catégorie pleine de I des s' tels qu'il existe $s' \longrightarrow s$), $I'' = I/s$* `[plutôt` $I'' = s\backslash I$`]`, *$I'_0 = (I/s)\backslash\{s\}$, $I''_0 = (s\backslash I)\backslash\{s\}$* ([3]). Pour que s soit critique, il faut et il suffit que $I\backslash\{s\}$ soit catégorie somme de I'_0 et I''_0.

`[page 11]`

Proposition 4. *Soient i, j dans I, avec $i < j$. Conditions équivalentes :*

a) Il existe une flèche entre i et j (soit $i \longrightarrow j$, soit $j \longrightarrow i$).

b) i et j appartiennent à un même intervalle structural (nécessairement unique).

c) La sous-catégorie pleine de I définie par l'ensemble d'objets $[i, j]$ est isomorphe à une $\mathbf{\Delta}_\alpha$ (on aura $\alpha = j - i$).

[3] i.e. qu'on ait : il n'y a pas de flèches entre un élément de I'_0 et un élément de I''_0.

On dira alors que i et j sont *directement connectés* dans I. (Et on utilisera la même terminologie dans une catégorie quelconque : i et j sont directement connectés si et seulement si $\mathrm{Hom}_I(i,j)$ *ou* $\mathrm{Hom}_I(j,i)$ est non vide.)

Proposition 5. *Soit $J \subseteq I$ une partie de I, considérons la sous-catégorie pleine de I qu'elle définit. Alors :*

a) Les composantes connexes J_α de J sont des intervalles et l'ordre induit sur un J_α par celui de I est une orientation (dite orientation induite*) de J_α.*

b) Supposons card $J > 1$. *Soit i le plus petit élément de J, j le plus grand élément, donc $i < j$. Pour que J lui-même soit un intervalle, il faut et il suffit que tout sommet critique dans $[i,j]$ soit élément de J.*

([4]).

NB Si $s \in [i,j]$ est un sommet critique de I qui n'est pas dans J, alors par la proposition 3 il disconnecterait J, i.e. J serait somme directe de deux sous-catégories J' et J'' non vides ($i \in J'$, $j \in J''$), donc J ne serait pas un intervalle.

`[page 12]`

Corollaire. *L'ensemble des sommets critiques de I est aussi l'ensemble des sommets du plus petit sous-intervalle de I contenant les extrémités. Plus généralement, si $i < j$ sont deux sommets de I, le plus petit sous-intervalle de I contenant i, j est formé de i, j et des sommets critiques s tels que $i < s < j$.*

Définition. Un intervalle est dit *réduit* (ou *irrédondant*) si tous ses sommets sont critiques, ou ce qui revient au même, si ses chaînes structurales sont de longueur 1.

Un intervalle orienté *réduit* est connu, à isomorphisme près, quand on connaît

a) sa longueur n,

b) sa direction initiale + (directe) ou − (rétrograde).

NB Cette direction est la même que la direction finale si n est impair, elle est opposée si n est pair.

Ainsi, suivant les deux cas de direction initiale, on trouve

$$0 \longrightarrow 1 \longleftarrow 2 \longrightarrow \cdots \qquad \cdots\ n \qquad \text{(Avec } n-1 \longrightarrow n \ \text{ si } n \text{ impair,} \quad n-1 \longleftarrow n \ \text{ si } n \text{ pair.)}$$

$$0 \longleftarrow 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow \cdots \qquad \cdots\ n \qquad \text{(Avec } n-1 \longleftarrow n \ \text{ si } n \text{ impair,} \quad n-1 \longrightarrow n \ \text{ si } n \text{ pair.)}$$

[4] On appelle *sous-intervalle* de I une sous-categorie pleine connexe, i.e. qui est elle-même un intervalle. Notons d'ailleurs que *toute* sous-catégorie I' de I qui est un intervalle, est nécessairement pleine, cf. plus bas `[paragraphe]` des foncteurs entre intervalles.

Proposition 6. *Un sous-intervalle J, ayant i et j $(i < j)$ comme plus petit et plus grand sommet, est réduit si et seulement si tout $s \in J$ distinct de i et de j est critique.*

Corollaire. *La sous-catégorie pleine de I formée des sommets critiques est un sous-intervalle. On l'appelle l'intervalle réduit associé à I, noté $I_{\text{réd}}$.*

[page 13]

3 Chemins. Catégorie de chemins d'un type donné τ.

Soient I un intervalle orienté, et X une catégorie. On appelle *chemin de type I* dans X tout foncteur $I \longrightarrow X$, et *catégorie de chemins de type I dans X* la catégorie

$$\underline{\mathrm{Ch}}_I(X) = \underline{\mathrm{Hom}}(I, X).$$

Comme I est *canoniquement* isomorphe à une catégorie intervalle standard I_0, on peut identifier les chemins de type I, au de type I_0. Le type τ d'un chemin le longueur n ($=\operatorname{card} I$) dans X peut donc être décrit par une suite de n signes $+$ ou $-$

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots\ ,\ \tau_n \qquad (\tau_i \in \{-1, +1\} \text{ pour } 1 \leq i \leq n).$$

À cause du fait que I est engendré pas ses flèches de transition, un foncteur $c : I \longrightarrow X$ est déterminé quand on connaît

a) Les $c(i)$ $(i \in I)$, i.e. une suite de $n+1$ objets de X :

$$a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,\ a_n \ ({}^5);$$

b) Les $c(\underline{u}_i)$ (où les $\underline{u}_i$ sont les flèches de transition dans I), i.e. pour tout $i \in [1, n]$ une flèche u_i dans X entre a_{i-1} et a_i, allant de a_{i-1} dans a_i si $\underline{u}_i$ est directe ($\tau_i = +1$), et de a_i dans a_{i-1} si $\underline{u}_i$ est rétrograde ($\tau_i = -1$),

et à toute telle donnée a), b) correspond un foncteur. Ainsi on pourra identifier les chemins de type I

[page 14]

dans X aux diagrammes du type précisé dans X. Et les morphismes entre chemins correspondent de même aux morphismes entre diagrammes a et a', une flèche $a \xrightarrow{\alpha} a'$ étant donc une suite de $n+1$ flèches

$$\alpha_i : a_i \longrightarrow a'_i, \qquad i \in [0, n],$$

satisfaisant la condition de commutativité pour les n carrés

$$\begin{tikzcd} a_{i-1} \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"'] & a_i \arrow[d, "\alpha_i"] \\ a'_{i-1} \arrow[r, "u'_i"] & a'_i \end{tikzcd} \qquad \text{(cas } \underline{u}_i \text{ directe)}$$

[5] a_0 est dit la *source* du chemin, a_n son but.

ou

$$\begin{tikzcd} a_{i-1} \arrow[d, "\alpha_{i-1}"'] & a_i \arrow[l, "u_i"'] \arrow[d, "\alpha_i"] \\ a'_{i-1} & a'_i . \arrow[l, "u'_i"] \end{tikzcd} \qquad \text{(cas } \underline{u}_i \text{ rétrograde)}$$

Si on a une flèche entre deux sommets quelconque i, j dans I, avec $i < j$ et j non successeur immédiat de i, alors i, j appartiennent à un même intervalle critique, et dans I on aura

$$i \xrightarrow{u_{i+1}} i+1 \xrightarrow{u_{i+2}} \cdots\ j-1 \xrightarrow{u_j} j \qquad \text{une chaîne de longueur } j-i \geq 2$$

ou

$$i \longleftarrow i+1 \longleftarrow\ \cdots\ j-1 \longleftarrow j,$$

et la flèche correspondante entre a_i et a_j s'obtient en composant les flèches u_i correspondantes.

[page 15]

Exemples.

1. $I = \mathbf{\Delta}_0 = e$, $\underline{\mathrm{Ch}}_I(X) \simeq X$. Les chemins de longueur 0 s'identifient aux objets a de X. L'unique élément id_e de $\mathrm{Fl}(I)$ donne id_a dans X.

2. $I = \mathbf{\Delta}_1^+$, $\underline{\mathrm{Ch}}_I(X) \simeq \underline{\mathrm{Fl}}(X)$. Les chemins de type $\mathbf{\Delta}_1^+$ sont ceux de longueur 1 et *directs,* i.e. donnés par une flèche

   $$a_0 \longrightarrow a_1$$

   dont la source est aussi la source a_0 du chemin. Par contre, les chemins de type $\mathbf{\Delta}_1^-$ sont donnés par des diagrammes

   $$a_0 \longleftarrow a_1,$$

   i.e. par des flèches dont le but est considéré comme source du chemin. Bien sûr, les catégories $\underline{\mathrm{Ch}}_{\mathbf{\Delta}_1^+}(X)$ et $\underline{\mathrm{Ch}}_{\mathbf{\Delta}_1^-}(X)$ sont canoniquement isomorphes, mais par un isomorphisme qui *échange source et but du chemin.* Nous nous garderons donc bien de confondre les deux chemins précédents.

[page 16]

3. $\mathbf{\Delta}_2^+$, $\mathbf{\Delta}_2^-$, correspondant aux diagrammes

   $$a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2$$

   resp.

   $$a_0 \longleftarrow a_1 \longleftarrow a_2,$$

   on peut faire une remarque similaire que pour $\mathbf{\Delta}_1^+$, $\mathbf{\Delta}_1^-$.

4. Φ_1, Ψ_1, ce sont respectivement les intervalles

$$\Phi_1 : \ 0 \xleftarrow{u_0} 1 \xrightarrow{u_1} 2 \qquad \text{ou} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \\ 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 2 \end{tikzcd} ,$$

et

$$\Psi_1 : \ 0 \xrightarrow{u_0} 1 \xleftarrow{u_1} 2 \qquad \text{ou} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \arrow[dl] \\ 1 & \\ & 2 \arrow[ul] \end{tikzcd} .$$

Ils correspondent respectivement aux diagrammes

$$a_0 \xleftarrow{u_0} a_1 \xrightarrow{u_1} a_2$$

et

$$a_0 \longrightarrow a_1 \longleftarrow a_2.$$

Les catégories Φ_1, Ψ_1 sont opposées l'une de l'autre, et ne sont pas isomorphes. Aussi n'y a-t-il en général aucun isomorphisme entre $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Phi_1}(X)$ et $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Psi_1}(X)$.

Soit I un intervalle orienté, et considérons l'*intervalle opposé* I^{opp}, ayant même catégorie sous-jacente mais l'orientation opposé. Comme la définition de la catégorie des chemins du type I ne fait pas intervenir l'orientation de I, on a donc un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Ch}}_I(X) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Ch}}_{I^{\mathrm{opp}}}(X).$$

[page 17]

Néanmoins on se gardera de confondre un chemin de type I avec le chemin opposé de type I^{opp}, la source de l'un étant le but de l'autre et inversement. C'est dire qu'un chemin doit être vu comme *plus* qu'un simple foncteur

$$I \longrightarrow X,$$

il faut de plus se donner l'*orientation de I* comme faisant partie de la structure de chemin. Donc la définition formelle raisonnable, qui colle à l'intuition du chemin comme allant d'une *source* bien définie vers un *but* également bien défini, c'est qu'un chemin (défini en termes d'une catégorie intervalle I) est la donné d'un couple (ω, c), où ω est une orientation de I, et c un foncteur $c : I \longrightarrow X$. Quand on regarde la catégorie des chemins d'un 'type' déterminé, ce *type* est (I, ω), et non I. C'est quand ω est fixé une bonne fois que cette catégorie s'identifie impunément à $\underline{\mathrm{Hom}}(I, X)$ sans plus.

Il faut voir cette catégorie de chemins comme munie de la structure essentielle

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Ch}}_{(I,\omega)}(X) \arrow[d, "(\sigma,\beta)"] \\ X \times X \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} c \longmapsto (\sigma(c), \beta(c)) \\ \text{ou } \sigma(c) \text{ est la } \textit{source,} \\ \quad \beta(c) \text{ le } \textit{but} \text{ de } c. \end{array}$$

[page 18]

Ce foncteur s'identifie au foncteur de composition

$$c \longmapsto c \circ \alpha$$

où α est le foncteur d'inclusion

$$\begin{cases} \varepsilon \xrightarrow{\alpha} I & \\ \varepsilon = \{0,1\}, & \text{catégorie discrète à deux éléments,} \\ \alpha \text{ donné par} & \alpha(0) = \text{ source de } I \\ & \alpha(1) = \text{ but de } I. \end{cases}$$

Si ω' est l'orientation opposée de I, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Ch}}_{(I,\omega)}(X) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, "(\sigma{,}\beta)"] & \underline{\mathrm{Ch}}_{(I,\omega')}(X) \arrow[d, "(\sigma'{,}\beta')"] \\ X \times X \arrow[r, "s"] & X \times X, \end{tikzcd}$$

où s est le foncteur de symétrie

$$s(x,y) = (y,x)$$

([6]). Donc l'isomorphisme φ ne respecte pas les flèches structurales 'source-but' (σ, β).

Il y a cependant un embarras quand il existe un isomorphisme d'intervalles *orientés*

$$\theta : (I,\omega) \xrightarrow{\sim} (I,\omega'),$$

i.e. quand I est symétrique. Ce n'est pas le cas pour les $\mathbf{\Delta}_i$ $(i \geq 1)$ (ces catégories n'ont pas d'autres automorphismes que l'identité), mais c'est le cas pour les catégories Φ_1, Ψ_1 de l'exemple 4^o, plus généralement

[page 19]

pour les catégories réduites de longueur *paire.* Comme chaque fois qu'on a un isomorphisme θ d'intervalles *orientés,* on trouve un isomorphisme entre les catégories de chemins de type (I,ω) et $(I,\omega)^{\mathrm{opp}} = (I,\omega')$, *compatible* cette fois avec les foncteurs (σ,β) :

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Ch}}_{(I,\omega)}(X) \arrow[rr, "\Psi_\theta", "\sim"'] \arrow[dr, "(\sigma{,}\beta)"'] & & \underline{\mathrm{Ch}}_{(I,\omega')}(X) \arrow[dl, "(\sigma'{,}\beta')"] \\ & X \times X. & \end{tikzcd}$$

[6] Le foncteur φ est celui qui associe à tout chemin c, de type τ, le *chemin opposé* c^{opp} ou c^{-1}, de type τ^{opp}. Si $\tau = \tau^{\mathrm{opp}}$, c'est donc un chemin *de même type,* et φ est un *automorphisme* de $\underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X)$. Cet automorphisme (fonctoriel en X) est déduit d'un automorphisme θ de I, cf. ci-dessous.

`[page 20]`

Il est bon de regarder un *type* de chemins comme une donné non catégorique, mais combinatoire, une simple suite τ de n signes τ_i $(1 \leq i \leq n)$ $+$ ou $-$ ($n =$ longueur des chemins envisagés). Cette donné combinatoire définit un intervalle orienté standard, I_τ. Quand on a un intervalle orienté quelconque (I, ω), il définit un type τ, et on l'identifie canoniquement au type I_τ. Il vaut mieux écrire $\underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X)$, plutôt que $\underline{\mathrm{Ch}}_{(I,\omega)}(X)$, pour bien indiquer que pour X donné, c'est là une catégorie totalement 'épinglée', sans automorphismes liés à la nature particulière de τ (à des automorphismes de τ!).

On peut préciser ce point ainsi. Soit τ' un autre type d'intervalles, et proposons-nous de déterminer des 'lois' qui permettent à tout chemin de type τ dans une catégorie arbitraire X, d'associer un chemin de type τ' de cette même catégorie, et ceci de façon 'fonctorielle', i.e. compatible avec les applications horizontales

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ch}_\tau(X) \arrow[r, "\mathrm{Ch}_\tau(f)"] \arrow[d, "L_X"'] & \mathrm{Ch}_\tau(X') \arrow[d, "L_{X'}"] \\
\mathrm{Ch}_{\tau'}(X) \arrow[r, "\mathrm{Ch}_{\tau'}(f)"] & \mathrm{Ch}_{\tau'}(X')
\end{tikzcd}$$

associées à un foncteur $f : X \longrightarrow X'$.

`[page 21]`

Par exemple, prenant le type $\mathbf{\Delta}_2^+$ (i.e. $+1, +1$), correspondant aux chemins

$$a_0 \xrightarrow{u_1} a_1 \xrightarrow{u_2} a_2,$$

on peut associer à un tel chemin le chemin de type `[`$\mathbf{\Delta}_1^+$`]`

$$a_0 \xrightarrow{u_2 u_1} a_2,$$

ou aussi le chemin de type $\mathbf{\Delta}_2^+$

$$a_0 \xrightarrow{u_2 u_1} a_2 \xrightarrow{\mathrm{id}} a_2,$$

etc. Comme le foncteur

$$\begin{cases} X & \longmapsto & \mathrm{Ch}_\tau(X) \qquad (= \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X)) \\ \mathrm{Cat} & \longrightarrow & (\mathrm{Ens}) \end{cases}$$

est *représenté* par l'objet I_τ de X `[plutôt de Cat]`, le sorite des foncteurs représentables nous dit que de telles lois de formation de chemins de type τ à partir des chemins de type τ' `[plutôt` τ' `à partir des chemins de type` τ`]` correspondent biunivoquement aux flèches dans Cat

$$I_{\tau'} \xrightarrow{\varphi} I_\tau\ ,$$

en prenant simplement la 'loi' correspondante à φ

$$c \longmapsto c \circ \varphi \qquad \text{pour } c : I_\tau \longrightarrow X.$$

De façon plus précise, l'application naturelle

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(I_{\tau'}, I_\tau)}_{= \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Hom}}(I_{\tau'}, I_\tau)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Ch}_\tau, \mathrm{Ch}_{\tau'}),$$

[page 22]

où le deuxième Hom est considéré comme un Hom d'objets dans $\mathrm{Cat}^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Cat}, \mathrm{Ens})$. Ainsi, dans les deux exemples plus haut, où $\tau = \mathbf{\Delta}_2^+$ et $\tau' = \mathbf{\Delta}_1^+$ ou $\mathbf{\Delta}_2^+$, les foncteurs en sens inverse sont

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta}_2^+ \ \{ & 0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \\
\mathbf{\Delta}_1^+ \ \{ & 0 \arrow[rr] \arrow[u, mapsto] & & 1 \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta}_2^+ \ \{ & 0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \\
\mathbf{\Delta}_2^+ \ \{ & 0 \arrow[r] \arrow[u, mapsto] & 1 \arrow[r] \arrow[ur, mapsto] & 2 . \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

C'est là un principe général pour ramener toutes les 'opérations' $\pm$ canoniques sur des chemins dans des catégories arbitraires, et des énoncés les concernant, à des questions où X disparaît et où on travaille dans les catégories intervalles elles-mêmes. Un des avantages techniques, c'est que ce sont des catégories fort petites, donnant lieu de plus à une intuition topologique sûre (qui risque de se volatiliser par moments en travaillant dans des catégories de chemins), et aussi que dans de telles catégories, donc aussi dans les catégories de foncteurs entre elles, il y a toujours au plus

[page 23]

une seule flèche allant d'un objet donné vers un autre. En d'autres termes, dans de telles catégories tous les diagrammes sont commutatifs.

Bien sûr, on voit aussi que si on a une loi de formation L de chemins de type τ' à partir de chemins de type τ (avec la condition de fonctorialité par rapport à la catégorie X où on prend les chemins), cette loi est nécessairement *fonctorielle par rapport aux chemins :* si on a un homomorphisme

$$c \xrightarrow{v} c' \qquad \text{dans } \underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X),$$

alors la loi L 'se prolonge' à de tels v pour donner

$$L(c) \xrightarrow{L(v)} L(c'),$$

avec les relations habituelles

$$L(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{L(c)}, \qquad L(v'v) = L(v')L(v).$$

Cela résulte de la description de L comme une opération L_φ en termes d'un foncteur bien déterminé

$$I_{\tau'} \xrightarrow{\varphi} I_\tau,$$

lequel à son tour donne pour toute X un *foncteur*

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ch}}_{\tau'}(X) \\ c & \longmapsto & c \circ \varphi \end{cases}$$

plus précis que simplement un *application* $\mathrm{Ch}_\tau(X) \longrightarrow \mathrm{Ch}_{\tau'}(X)$ entre les ensembles d'objets correspondants.

`[page 24]`

On a le choix maintenant entre

a) Une étude plus ou moins systématique des foncteurs entre intervalles. Je préfère attendre pour cela d'avoir besoin de ceci et de cela, et de ne faire que le strict minimum pour les constructions que j'ai en vue.

b) Une description de la compositions des chemins.

c) Un formalisme des catégories de chemins *de type non précisé.*

Comme mon objectif est surtout de décrire de telles catégories $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ (sans indice τ!), avec des bonnes propriétés, je commencerai par c), regarderai ensuite b) comme un test crucial pour l'utilisabilité des notions obtenues, et enfin m'occuperai de a) quand je saurai de quoi j'aurai en besoin.

4 Catégorie de chemins $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$

Je veux 'inclure' toutes les catégories $\underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X)$ de chemins de tous les types qu'on veut, dans une même catégorie $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$. Rappelons

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X) = \underline{\mathrm{Hom}}(I_\tau, X),$$

où I_τ est l'intervalle (orienté) standard de type τ.

L'ensemble de tous les types d'intervalles

`[page 25]`

peut être identifié au monoïde libre Ty à deux générateurs Δ^+ et Δ^-, dont les éléments sont les suites finies quelconques (eventuellement vides) d'objets alternativement égales à Δ^+ et à Δ^-. Si le premier élément est Δ^+, on a un type de chemin à direction initiale directe, rétrograde dans le cas contraire. La décomposition de I_τ, ou de $\mathrm{Fl}(I_\tau)$, en intervalles critiques correspond à l'écriture réduite d'un mot comme

$$(\Delta^+)^{l_1}(\Delta^-)^{l_2}\ \cdots\ (\Delta^?)^{l_r} \qquad (\Delta^? = \Delta^+ \text{ si } r \text{ impair, } \Delta^? = \Delta^- \text{ si } r \text{ pair}),$$

ou comme

$$(\Delta^-)^{l_1}(\Delta^+)^{l_2}\ \cdots\ (\Delta^?)^{l_r} \qquad (\Delta^? = \Delta^- \text{ si } r \text{ impair, } \Delta^? = \Delta^+ \text{ si } r \text{ pair}).$$

Les l_i sont les longueurs des intervalles critiques successifs (ou des chaines structurales successives), leur nombre est la longueur réduite de l'intervalle.

On va considérer Ty comme l'ensemble des objets d'une catégorie $\underline{\mathrm{Ty}}$:

$$\begin{cases} \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Ty}} = \mathrm{Ty} = \text{ monoïde libre à deux générateurs } \Delta^+,\, \Delta^- \text{ précédents.} \\ \text{Si } \tau, \tau' \in \mathrm{Ty},\ \mathrm{Hom}(\tau,\tau') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(I_\tau, I_{\tau'}). \end{cases}$$

([7]). On notera qu'on a non seulement un ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(I_\tau, I_{\tau'})$, mais même une catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(I_\tau, I_{\tau'})$, ce qui revient ici à dire que $\mathrm{Hom}(I_\tau, I_{\tau'})$ (i.e. $\mathrm{Hom}(\tau,\tau')$) peut être vu comme un ensemble *ordonné.* Mais pour l'instant nous allons ignorer cette relation d'ordre.

`[page 26]`

La composition des morphismes est la composition des foncteurs entre catégories I_τ. Ainsi on a un foncteur *pleinement fidèle* ([8]) canonique

$$\tau \longmapsto I_\tau : \underline{\mathrm{Ty}} \xrightarrow{\rho} (\mathrm{Cat}) \qquad ({}^9),$$

[7] Définition un peu canulée, il faut se borner aux homomorphismes de I_τ dans $I_{\tau'}$ compatibles avec source et but - cf. p. 29.

[8] faux, cf. annotation marginale page précédente - on ne prend pas *tous* les foncteurs dans Cat entre I_τ et $I_{\tau'}$.

par quoi la catégorie I_τ `[plutôt` $\underline{\text{Ty}}$`]` pourrait s'identifier à une sous-catégorie pleine de (Cat) (celle des I_τ). Mais je préfère ne pas identifier $\tau \in \text{Ty}$ (donnée combinatoire) avec I_τ (donnée catégorique).

Soit X une (petite?) catégorie. On a un contrafoncteur

$$\begin{cases} S \longmapsto \underline{\text{Hom}}(S, X) \\ (\text{Cat})^o \longrightarrow (\text{Cat}) \end{cases}$$

défini par X, d'où en composant avec ρ un contrafoncteur

$$\underline{\text{Ty}}^o \xrightarrow{\text{CH}_X} \text{Cat}.$$

C'est le contrafoncteur

$$\begin{cases} \tau \longmapsto \underline{\text{Hom}}(I_\tau, X) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\text{Ch}}_\tau(X), \\ \text{i.e. } \text{CH}_X(\tau) = \underline{\text{Ch}}_\tau(X). \end{cases}$$

Mais un contrafoncteur sur une petite catégorie $\underline{\text{Ty}}$ donne lieu à une *catégorie fibrée* (et même scindée) sur celle-ci.

`[page 27]`

Je vais désigner cette catégorie fibrée par $\underline{\text{Ch}}(X)$. (Provisoirement - si elle s'avère trop grosse, je la restreindrai ...) Ainsi on a

$$\begin{array}{c} \underline{\text{Ch}}(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_X} \\ \underline{\text{Ty}}\ . \end{array}$$

La fibre de $\underline{\text{Ch}}(X)$ en $\tau \in \text{Ob}\,\underline{\text{Ty}}$ est la catégorie $\underline{\text{Ch}}_\tau(X)$ des chemins de type τ dans X. Cela nous dit donc quelles sont les flèches dans $\underline{\text{Ch}}(X)$ au dessus des flèches identiques dans $\underline{\text{Ty}}$. Mais que sont les flèches plus générales? On se donne une flèche dans $\underline{\text{Ty}}$

$$\varphi : \tau' \longrightarrow \tau, \qquad \text{i.e. } I_{\tau'} \xrightarrow{\varphi} I_\tau,$$

quelles sont les flèches de $\underline{\text{Ch}}(X)$ au dessus de φ? Par le sorite général des catégories fibrées, si

$$\begin{aligned} c \in \underline{\text{Ch}}(X)_\tau &= \underline{\text{Ch}}_\tau(X) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\text{Hom}}(I_\tau, X) \\ c' \in \underline{\text{Ch}}(X)_{\tau'} &= \underline{\text{Ch}}_{\tau'}(X) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\text{Hom}}(I_{\tau'}, X) \end{aligned}$$

on a

$$\boxed{\text{Hom}_\varphi(c', c) \simeq \text{Hom}(c', \underbrace{\varphi^*(c)}_{= c\circ\varphi}).}$$

Donc : les homomorphismes du

---

[9]foncteur *réalisation* d'un type (combinatoire) d'intervalles.

[page 28]

chemin c' de type τ' dans X, dans le chemin c de type τ, 'au dessus' du morphisme φ de τ' dans τ, i.e. du foncteur

$$\varphi : I_{\tau'} \longrightarrow I_\tau ,$$

est un homomorphisme v de c' dans $c \circ \varphi$, i.e.

$$\begin{tikzcd} I_{\tau'} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "c'"'] & I_\tau \arrow[d, "c"] \arrow[dl, phantom, "v"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

La composition des flèches est évidente :

$$\begin{tikzcd} I_{\tau''} \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[drr, "c''"'] & I_{\tau'} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "c'"] \arrow[d, phantom, "v'"] & I_\tau \arrow[d, "c"] \arrow[dl, phantom, "v"] \\ & & X, \end{tikzcd}$$

on a

$$\begin{array}{llll} v : & c' & \longrightarrow & c \circ \varphi, \quad \text{d'où } c' \circ \varphi' \xrightarrow{v * \varphi'} \underbrace{(c \circ \varphi) \circ \varphi'}_{= c \circ (\varphi\varphi')} \\ v' : & c'' & \longrightarrow & c' \circ \varphi' \end{array}$$

et

$$v'' = (v * \varphi') \circ v', \qquad \text{donc} \quad \begin{tikzcd} c'' \arrow[r, "v'"] \arrow[rr, bend right, "v''"'] & c' \circ \varphi' \arrow[r, "v*\varphi'"] & c \circ (\varphi\varphi'). \end{tikzcd}$$

Mais a-t-on des foncteurs source et but

$$\underline{\mathrm{Ch}}(X) \overset{\sigma}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} X \qquad \begin{array}{lll} c & \longmapsto & \mathrm{source}(c) \\ c & \longmapsto & \mathrm{but}(c) \end{array} \qquad ?$$

Il faudrait donc qu'un homomorphisme v comme dessus

$$v : c' \longrightarrow c \circ \varphi$$

définisse

$$\begin{array}{rrcl} \sigma(c) : & \mathrm{source}(c') & \longrightarrow & \mathrm{source}(c) \\ \beta(c) : & \mathrm{but}(c') & \longrightarrow & \mathrm{but}(c). \end{array}$$

[page 29]

Mais comme

$$\begin{cases} \sigma(c) = c(0_\tau),\ \beta(c) = c(1_\tau) \\ \text{où } 0_\tau,\ 1_\tau \text{ sont les objets source et but de l'intervalle orienté standard } I_\tau\ , \end{cases}$$

et de même pour τ', v n'induira bien

$$\underbrace{\sigma(c')}_{=c'(0_{\tau'})} \longrightarrow c(\varphi(0_{\tau'})) \overset{?}{=} \underbrace{\sigma(c)}_{c(0_\tau)},$$

et itou pour $\beta(c')$ et $\beta(c)$, que si on impose

$$\boxed{\begin{cases} \varphi(0_{\tau'}) & = & 0_\tau \\ \varphi(1_{\tau'}) & = & 1_\tau, \end{cases}}$$

i.e. que le foncteur envisagé φ soit *compatible avec la source et le but.* C'est ce visiblement qu'il fallait imposer dans la définition de

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(\tau', \tau) = \underline{\mathrm{Hom}}^{\text{int}}(I_{\tau'}, I_\tau) \quad -$$

il faut prendre les foncteurs φ respectant les structures d'intervalle, i.e. rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} I_{\tau'} \arrow[rr] & & I_\tau \\ & \varepsilon = \{0,1\} \arrow[ul, "i_{\tau'}"] \arrow[ur, "i_\tau"'] & \end{tikzcd}$$

définissant l'orientation de $I_{\tau'}$ et de I_τ ([10]). Cette rectification faite, j'ai bon espoir que la catégorie $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ qu'on vient de construire est 'la bonne'. On pourrait désigner par $\underline{\mathrm{CH}}(X)$ la catégorie plus grande, sur la catégorie $\underline{\mathrm{Typ}}$ ayant mêmes objets que $\underline{\mathrm{Ty}}$, mais plus de morphismes : à savoir

[page 30]

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Typ}}}(\tau, \tau') &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(I_\tau, I_{\tau'}) \\ \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(\tau, \tau') &= \mathrm{Hom}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Cat}}(I_\tau, I_{\tau'}) \\ &\ \text{(homomorphismes respectant la structure d'intervalle).} \end{aligned}$$

On aura

$$\underline{\mathrm{Ch}}(X) \simeq \underline{\mathrm{CH}}(X) \times_{\underline{\mathrm{Typ}}} \underline{\mathrm{Ty}},$$

[10] En fait, il faut sans doute restreindre encore plus les morphismes en exigeant qu'il soient *croissants* sur les objets - cf. page 31.

i.e. $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ est la *restriction* de la catégorie fibrée $\underline{\mathrm{CH}}(X)$ sur $\underline{\mathrm{Typ}}$, à la sous-catégorie (non-pleine) $\underline{\mathrm{Ty}}$ de $\underline{\mathrm{Typ}}$.

NB Les catégories fibrées $\underline{\mathrm{CH}}(X)$, $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ sur $\underline{\mathrm{Typ}}$, $\underline{\mathrm{Ty}}$ dépendent fonctoriellement de X, variant dans (Cat), comme il se doit. Comme de juste, on s'y intéresse surtout quand X *n'est pas* dans (Cat), i.e. quand X est une 'grosse' catégorie (telle que (Cat) elle-même). Je me dispense d'expliciter ici les questions pertinentes d'Univers.

Deux tests essentiels, pour s'assurer si la notion est bonne

a) La théorie des $\mathcal{M}\Sigma^{-1}$.

b) La composition des chemins doit bien marcher.

`[page 31]`

On a le diagramme de foncteurs canoniques

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Ty}} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \varepsilon\backslash\mathrm{Cat} \arrow[d] \\ \underline{\mathrm{Typ}} \arrow[r, hook] & \mathrm{Cat}, \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont pleinement fidèles.

5 Propriétés des morphismes d'intervalles

Je me suis plus ou moins convaincu que pour se prêter à des calculs et à des raisonnements simples, il faut encore plus restreindre les morphismes dans la définition de la catégorie $\underline{\mathrm{Ty}}$. Je vais exiger que les morphismes $\tau \longrightarrow \tau'$ soient des foncteurs

$$w : I_\tau \longrightarrow I_{\tau'}$$

qui sont compatibles avec la structure d'*intervalles orientés* de I_τ, $I_{\tau'}$, i.e. qu'ils transforment source en source, but en but, mais de plus qu'ils soient *croissants* sur les objets (pour la relation d'ordre de progression des chemins). C'est une restriction qui géométriquement me paraît assez naturelle. (Elle est similaire à la restriction analogue, dans la définition pré-catégorique des morphismes entre $\mathbf{\Delta}_i$ ...) C'est cette hypothèse qui permet de faire une théorie de structure assez simple des morphismes d'intervalles. Mais pour l'instant je vais distinguer 'morphismes' et 'morphismes croissants'.

`[page 32]`

Soit

$$f : I_\tau \longrightarrow I_{\tau'}$$

un morphisme d'intervalles orientés. Considérons les sous-catégories pleines, isomorphes à des Δ_i^+ ou Δ_i^- comme intervalles orientés, définis par les intervalles critiques de I_τ. Ils forment une suite Σ_τ de sous-catégories de I_τ

$$\Sigma_\tau = (\mathbf{\Delta}_{l_1}^{\varepsilon_1}(\tau), \mathbf{\Delta}_{l_2}^{\varepsilon_2}(\tau), \dots, \mathbf{\Delta}_{l_r}^{\varepsilon_r}(\tau))$$

dont I_τ est la somme amalgamée (on reviendra sur ce point plus `[bas]`), r étant la longueur utile de τ. On les appelle les *sous-intervalles critiques* de I_τ. Ainsi f se décompose en une suite de morphismes

$$f_i : \mathbf{\Delta}_{l_i}^{\varepsilon_i} \longrightarrow I_{\tau'}, \qquad i \in [1, r],$$

tels que

a) pour $i \in [1, r-1]$, le but de f_i soit égal à la source de f_{i+1}.

   De plus,

b) f_1 transforme source en source, et f_r transforme but en but.

Inversement, quand on se donne des f_i satisfaisant ces deux conditions, ils définissent un morphisme d'intervalles f unique. (Et si la condition b) n'est pas exigée, on trouve une description des morphismes de catégories $I_\tau \longrightarrow I_{\tau'}$.)

`[page 33]`

On va d'abord regarder un foncteur quelconque

$$f : \mathbf{\Delta}_i^\varepsilon \longrightarrow I_{\tau'} \qquad (\varepsilon \in \{\pm 1\}) \quad .$$

Supposons pour fixer les idées que $\varepsilon = +1$, i.e. que le premier membre soit un intervalle critique direct ... On trouve que f se factorise par un sous-intervalle critique de $I_{\tau'}$, soit $\mathbf{\Delta}_j^{\varepsilon'}$. Il est donc défini par une application croissante de $\mathbf{\Delta}_i^{\varepsilon}$ dans $\mathbf{\Delta}_j^{\varepsilon'}$ (si ε, ε' [sont] de même signe), une application décroissante dans le sens inverse ([11]). Mais si on exige que f soit croissant, alors il faut que *ou bien* f soit constant (auquel cas, si sa valeur n'est pas une extrémité de $I_{\tau'}$, il y a exactement *deux* intervalles critiques de $I_{\tau'}$ par lesquels se factorise f) *ou bien* f non constant et $\varepsilon = \varepsilon'$ (et en tous cas, si f non constant, alors l'intervalle critique par lequel se factorise f est unique). Pour résumer :

Proposition 7. *Soient I_τ, $I_{\tau'}$ deux intervalles orientés,*

$$f : I_\tau \longrightarrow I_{\tau'}$$

un foncteur. Alors pour tout intervalle critique $J \subseteq I_\tau$ tel que $f|J$ soit non constant, il existe un unique intervalle critique $J' \subseteq I_{\tau'}$ tel que $f|J$ se factorise par J', i.e. tel que $f(J) \subseteq J'$. Si f est croissant, alors J et J' sont de même signe,

[page 34]

i.e. tous deux directs, ou tous deux rétrogrades.

Ainsi, si on regarde la suite $s_0, s_1, \ldots, s_n$ des sommets critiques de τ, alors

$$t_0 = f(s_0),\ t_1 = f(s_1),\ \ldots\ ,\ t_n = f(s_n)$$

forment une suite de sommets de $I_{\tau'}$, telle que deux consécutifs soient reliés par une flèche de $I_{\tau'}$. Donc la sous-catégorie pleine de $I_{\tau'}$ définie par ces t_i est connexe, c'est donc un sous-intervalle. Si f est croissant, ce sous-intervalle est $[t_0, t_n]$. Si f est un morphisme d'intervalles, il contient tous les sommets critiques de $I_{\tau'}$. Dans tous les cas, prenant t_i, t_j $(i < j)$ et appliquant ce qui précède à $f|J$, où J est le sous-intervalle de I d'origine s_i, d'extrémité s_j, on voit que tout sommet critique de $I_{\tau'}$ compris entre t_i et t_j est parmi les t_k $(i \leq k \leq j)$. Pour résumer :

Corollaire. *Soient $s_i \leq s_j$ deux sommets critiques de $I_{\tau'}$. Alors tout sommet critique de $I_{\tau'}$ compris entre $f(s_i) = t_i$ et $f(s_j) = t_j$, est l'image d'un sommet critique s_k compris entre s_i et s_j (i.e. $i \leq k \leq j$). En particulier, si f est un morphisme d'intervalles,*

$$f(I_{\tau\,\text{réd}}) \supseteq I_{\tau'\,\text{réd}}$$

(où $I_{\tau\,\text{réd}}$ désigne l'ensemble des sommets critiques de I_τ ou aussi le sous-intervalle réduit qu'il définit).

[page 35]

On fera attention que même si f est croissant, on *n'a pas* en général $f(I_{\tau\,\text{réd}}) \subseteq I_{\tau'\,\text{réd}}$, i.e. f ne transforme pas forcément sommets critiques en sommets critiques, Exemple minimal :

[11] **Lemme.** *Si $I_{\tau'}$ est un intervalle, toute partie J de $I_{\tau'}$ telle que pour deux éléments de J, il existe toujours une flèche de l'un dans l'autre, est contenue dans un intervalle critique (unique si* $\operatorname{card} J \geq 2$*).*

$$\begin{tikzcd}
\Phi_3^+ : & s_0 \arrow[r] \arrow[d, mapsto] & s_1 \arrow[d, mapsto] & s_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl, mapsto] & s_3 \arrow[dl, mapsto] \\
\boldsymbol{\Delta}_2^+ : & {} \arrow[r] & {} \arrow[r] & {} &
\end{tikzcd}$$

Φ_3^+ est réduite, les deux sommets critiques transformés en le sommet non critique 1.

Désignons par $\mathrm{Cr}(\tau)$ l'ensembles des intervalles critiques de I_τ, en correspondance biunivoque (respectant l'ordre total) avec l'ensemble des flèches de transition de $I_{\tau\,\text{réd}}$,

$$\mathrm{Cr}(\tau) \simeq \mathrm{Fl\,tr}\,(I_{\tau\,\text{réd}}).$$

Soit, pour un foncteur

$$f : I_\tau \longrightarrow I_{\tau'},$$

$\mathrm{Cr}(\tau, f)$ l'ensemble des intervalles critiques de I_τ sur lesquels f ne soit pas constant. On a alors une application

$$(*) \qquad \mathrm{Cr}(\tau, f) \longrightarrow \mathrm{Cr}(\tau')$$

induite par f via la proposition 7, associant à tout $J \in \mathrm{Cr}(\tau, f)$ l'unique $J' \in \mathrm{Cr}(\tau')$ tel que $f(J) \subseteq J'$. On a de plus

Corollaire 2.

a) L'image de $(*)$ *est un segment de l'ensemble totalement ordonné* $\mathrm{Cr}(\tau')$*, i.e. si deux intervalles critiques* J'*,* J'' *dans* $I'_{\tau'}$ *sont dans l'image, il en est de même de tous*

[page 36]

ceux qui sont compris entre eux.

b) Cette image contient aussi l'intervalle critique de $I_{\tau'}$ *(il y en a au plus un) qui contient* $f(0_\tau)$ *(resp.* $f(1_\tau)$*) et dont l'intersection avec le segment* $[f(0_\tau), f(1_\tau)]$ *est de cardinal* ≥ 2*, ainsi que tous les intervalles critiques contenus dans ledit segment.*

c) Si f *est un morphisme d'intervalles orientés, alors l'application induite*

$$\mathrm{Cr}(f) : \mathrm{Cr}(\tau, f) \longrightarrow \mathrm{Cr}(\tau')$$

est surjective. De façon plus précise, soit $J' \subseteq \mathrm{Cr}(\tau')$*, et soit* $J = f^{-1}(J')$*. Alors* $\mathrm{Cr}(f)^{-1}(\{J'\})$ *est formé des intervalles critiques dans* $\mathrm{Cr}(\tau, f)$ contenus dans J. *On a de plus,* si f est croissant,

$$\mathrm{long}(J') = \sum_{K \in \mathrm{Cr}(f)^{-1}(\{J'\})} \pi_{\mathrm{n}}(K, f),$$

où $\pi_{\mathrm{n}}(K, f)$ *est la 'partie' (numérique) de* $f|K$*, i.e. la longueur de l'intervalle* $[f(0_K), f(1_K)]$*. (***NB** *Si* K *est un intervalle critique de* I *tel que* $K \notin Cr(\tau, f)$*, i.e.* $f|K$ *est constant, on posera* $\pi_{\mathrm{n}}(K, f) = 0$*. Donc la formule précédente se lit aussi*

$$\mathrm{long}(J') = \sum_{\substack{\underbrace{K \in \mathrm{Cr}(I_\tau),\, K \subseteq J} \\ (\text{i.e. } K \in \mathrm{Cr}(f^{-1}(J')))}} \pi_{\mathrm{n}}(K, f).\ )$$

Corollaire 3. *Si f est un morphisme* croissant *d'intervalles orientés, alors pour tout $J' \in \mathrm{Cr}(\tau')$, on a*

$$(0 \leq)\ \mathrm{card}\,\mathrm{Cr}(f)^{-1}(\{J\}) \longrightarrow \mathrm{long}(J'),$$

[page 37]

l'égalité n'étant obtenue que si les parties de f sur les intervalles critiques de I_τ qui sont au dessus de J' sont toutes égales à 0 ou 1 (donc si et seulement si sur les $J \in \mathrm{Cr}(f)^{-1}(\{J'\})$, elles sont égales à 1).

Corollaire 4. *Supposons de plus I' [$= I_{\tau'}$] réduit. Alors*

$$Cr(f) : Cr(\tau, f) \longrightarrow Cr(\tau')\ (\simeq \mathrm{Fl}\,\mathrm{tr}(\tau'))$$

est bijective.

Donc dans ce cas, τ' réduit, on obtient une application en sens inverse

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tr}(\tau') \simeq \mathrm{Cr}(\tau') \arrow[rr, "\mathrm{Cr}^*(f)"] \arrow[dr, "\mathrm{Cr}(f)^{-1}"'] & & \mathrm{Cr}(\tau) \\ & \mathrm{Cr}(\tau, f), \arrow[ur, hook, "\text{inclusion}"'] & \end{tikzcd}$$

application qui transforme l'intervalle critique J' ($= \{i-1, i\}$) en l'*unique* intervalle critique J de I_τ tel que

$$f(J) = J'.$$

[page 38]

Mais $J \simeq \mathbf{\Delta}_i^\varepsilon$, et on a donc un morphisme *surjectif*

$$f_0 : \mathbf{\Delta}_i^\varepsilon \longrightarrow J' \simeq \mathbf{\Delta}_1^\varepsilon.$$

On voit tout de suite qu'il existe alors une *unique* flèche de transition u de $\mathbf{\Delta}_i^\varepsilon$, telle que $f(u) \neq \mathrm{id}$. Donc on trouve le corollaire suivant, plus précis que le corollaire 4 :

Corollaire 5. *Soit $f : I_\tau \longrightarrow I_{\tau'}$ un morphisme croissant d'intervalles orientés, avec $I_{\tau'}$ réduit, et soit $\mathrm{Tr}(\tau, f)$ l'ensemble des flèches de transition $\underline{u}_i$ de I_τ telle que $f(\underline{u}_i) \neq \mathrm{id}$, i.e. telles que $\pi(u_i, f) = 1$. Alors f induit une application*

$$\mathrm{Tr}(\tau, f) \longrightarrow \mathrm{Tr}(\tau')$$

qui est bijective, et (bien sûr) croissante, donc un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Ainsi l'application $\mathrm{Tr}(\tau') \longrightarrow \mathrm{Cr}(\tau, f)$ de tantôt se précise par une application bijective

$$\mathrm{Tr}(f)^* : \mathrm{Tr}(\tau') \longrightarrow \mathrm{Tr}(\tau, f),$$

reliée à $\mathrm{Cr}(f)^*$ plus haut par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Tr}(\tau, f) \arrow[dd, "\wr\,\alpha"] \\ \mathrm{Tr}(\tau') \arrow[ur, "\mathrm{Tr}(f)^*"] \arrow[dr, "\mathrm{Cr}(f)^*"'] & \\ & \mathrm{Cr}(\tau, f), \end{tikzcd}$$

[page 39]

l'application α associant à toute $u_i \in \mathrm{Tr}(\tau, f)$ l'unique intervalle critique qui 'contienne' u_i (i.e. tel que u_i soit une flèche dudit intervalle, ou encore, fasse partie de la 'chaîne critique' associée ...).

On a mieux encore :

Proposition 8. *Soient* $\tau, \tau' \in \mathrm{Ty}$*,* τ' réduit. *Pour tout morphisme croissant d'intervalles orientés*

$$f : I_\tau \longrightarrow I_{\tau'}$$

(on va dire simplement que f *est une flèche dans* $\underline{\mathrm{Ty}}$*, et écrire* $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(I_\tau, I'_\tau)$*), associons lui la partie* $\mathrm{Tr}(\tau, f)$ *des flèches de transition de* I_τ *non dégénérées pour* f*. Ces flèches forment un ensemble totalement ordonné affecté de signes + ou − (caractère direct ou rétrograde des flèches), et* f *induit une bijection d'ensembles totalement ordonnés*

$$\underbrace{E_f}_{\subseteq \mathrm{Tr}(\tau)} = \mathrm{Tr}(\tau, f) \simeq \mathrm{Tr}(\tau'),$$

et même un isomorphisme d'ensembles totalement ordonnés 'affectés de signes'. Ainsi, à toute f *on associe une partie* E_f *de* $\mathrm{Tr}(\tau)$*, et telle que son 'type' soit égal à* τ'*. Désignons par*

$$\mathfrak{P}_{\tau'}(\mathrm{Tr}(\tau)) \subseteq \mathfrak{P}(\mathrm{Tr}(\tau))$$

l'ensemble des parties E *de* $\mathrm{Tr}(\tau)$ *dont le type soit* τ'*.*

[page 40]

Alors l'application

$$f \longmapsto \mathrm{Tr}(\tau, f) : \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(\tau, \tau') \longrightarrow \mathfrak{P}_{\tau'}(\mathrm{Tr}(\tau))$$

est bijective *: se donner un morphisme* $f : \tau \longrightarrow \tau'$ *dans* $\underline{\mathrm{Ty}}$*,* revient au même *que de se donner une suite strictement croissante de flèches de transition*

$$\underline{u}_{i_1},\ \underline{u}_{i_2},\ \ldots\ , \underline{u}_{i_{n'}} \qquad (n' = \operatorname{long} \tau')$$

dans I_τ *(*$i_1 < i_2 < \cdots < i_{n'}$*), telle que la suite des signatures correspondante*

$$(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_{n'}}) = \tau'$$

soit égale à τ'*.*

Corollaire 1. *Pour tout* τ*, on a des bijections canoniques*

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}^+(\tau) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(\tau, \Delta^+) \\ \mathrm{Tr}^-(\tau) & \simeq & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(\tau, \Delta^-), \end{cases}$$

fonctorielles en τ *(variant dans* $\underline{\mathrm{Ty}}$*).*

Pour donner un sens au corollaire, il faut définir

$$\tau \longmapsto \mathrm{Tr}^+(\tau), \qquad \tau \longmapsto \mathrm{Tr}^-(\tau)$$

comme *foncteurs* contravariant en τ, donc pour un morphisme

$$f : I_{\tau_2} \longrightarrow I_{\tau_1}$$

dans $\underline{\mathrm{Ty}}$, définir des applications

[page 41]

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}^+(f)^* : \mathrm{Tr}^+(\tau_1) &\longrightarrow \mathrm{Tr}^+(\tau_2) \\ \mathrm{Tr}^-(f)^* : \mathrm{Tr}^-(\tau_1) &\longrightarrow \mathrm{Tr}^-(\tau_2), \end{aligned}$$

en d'autres termes, une application

$$\mathrm{Tr}(f)^* : \mathrm{Tr}(\tau_1) \longrightarrow \mathrm{Tr}(\tau_2)$$

'compatible avec les signatures'. Dans le corollaire 5 plus haut, on a défini une telle application seulement pour τ' réduit $[\tau_1 = \tau', \; \tau_2 = \tau]$ ([12]). Pour une flèche u de I_τ, appelons *partie ensembliste* de f sur u, où de u pour f, la partie ensembliste de la flèche $f(u)$ dans $I_{\tau'}$, i.e. le segment $[f(i-1), f(i)] \subseteq I_{\tau'}$ (ici $u = \underline{u}_i$). Soit

$$\underline{u}_{i_1}, \; \ldots \; , \underline{u}_{i_N} \qquad \text{ou } (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

la suite croissante des éléments de $\mathrm{Tr}(\tau, f)$, on voit alors par récurrence sur i que pour $i \in [1, N-1]$, on a

$$\begin{aligned} f(\mathrm{but}(v_i)) &= f(\mathrm{source}(v_{i+1})) \quad (= t_i), \\ f(\mathrm{source}(v_1)) &= 0_{\tau'}, \\ f(\mathrm{but}(v_N)) &= 1_{\tau'}. \end{aligned}$$

Considérons la suite

$$\{\overbrace{0_{\tau'}}^{= t_0}, t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}, \overbrace{1_{\tau'}}^{= t_N}\},$$

elle est définie par le sous-ensemble correspondant de $I_{\tau'}$, qu'on appelera l'ensemble des *sommets critiques de $I_{\tau'}$ pour f.* C'est une suite contenant $0_{\tau'}$, $1_{\tau'}$, et telle que deux éléments consécutifs sont reliés dans $I_{\tau'}$ par une flèche, ce qui équivaut à dire qu'elle contient les sommets critiques (intrinsèques) de $I_{\tau'}$. D'autre part, pour tout intervalle de transition $[i-1, i]$ de $I_{\tau'}$ ($i \in [1, n']$),

[12] Ce qui suit ne fait pas intervenir les signatures - c'est un sorite sur les applications croissantes entre ensembles finis totalement ordonnés.

`[page 42]`

il existe un et un seul intervalle de transition $[t_{j-1}, t_j]$ pour cette suite ($j \in [1, N]$), telle qu'on ait $[i-1, i] = [t_{j-1}, t_j]$. C'est dire qu'il existe une et une seule $v_j \in \mathrm{Tr}(\tau, f)$ telle que la partie de f sur v_j (savoir justement $[j-1, j]$) contienne (celle de) $\underline{u}_i$. Pour résumer :

Corollaire 2. *Soit $f : \tau \longrightarrow \tau'$ dans $\underline{\mathrm{Ty}}$. Alors pour toute $u \in \mathrm{Tr}(\tau') = \mathrm{Tr}(I_{\tau'})$, il existe une et une seule $v \in \mathrm{Tr}(\tau)$ telle que la partie de f sur v contienne u. De plus, les signatures de u et de v sont égales.*

C'est ainsi qu'on obtient donc une application

$$\mathrm{Tr}(f)^* : \mathrm{Tr}(\tau') \longrightarrow \mathrm{Tr}(\tau) \qquad \text{(se factorisant par } \mathrm{Tr}(\tau, f))$$

induisant

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}^+(f)^* : \mathrm{Tr}^+(\tau') &\longrightarrow \mathrm{Tr}^+(\tau) \\ \mathrm{Tr}^-(f)^* : \mathrm{Tr}^-(\tau') &\longrightarrow \mathrm{Tr}^-(\tau). \end{aligned}$$

La transitivité pour un composé

$$\tau \xrightarrow{f} \tau' \xrightarrow{g} \tau''$$

ou

$$I_\tau \xrightarrow{f} I_{\tau'} \xrightarrow{g} I_{\tau''}$$

est immédiate. Si u, u', u'' sont des flèches de transition dans I_τ, $I_{\tau'}$, $I_{\tau''}$ respectivement, telles que

$$\begin{aligned} \pi(g, u') &\supseteq \pi(u''), &\qquad \text{i.e. } u' = \mathrm{Tr}(g)^*(u'') \\ \pi(f, u) &\supseteq \pi(u'), &\qquad \text{i.e. } u = \mathrm{Tr}(f)^*(u'), \end{aligned}$$

alors on a

$$\pi(gf, u) \supseteq \pi(u''), \qquad \text{i.e. } u = \mathrm{Tr}(gf)^*(u'').$$

`[page 43]`

Si les flèches en question ont comme partie intrinsèque $[i-1, i]$, $[i'-1, i']$, $[i''-1, i'']$ respectivement, l'hypothèse est

$$\begin{aligned} g(i'-1) &\leq i''-1, \quad & g(i') &\geq i'' \\ f(i-1) &\leq i'-1, \quad & f(i) &\geq i' \end{aligned}$$

et comme g est croissant, on a déduit

$$\begin{aligned} gf(i-1) &\leq g(i'-1) \quad (\leq i''-1) \\ gf(i) &\geq g(i') \qquad (\geq i''), \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Ainsi, le corollaire 1 plus haut obtient un sens précis et il est démontré du même coup, vu que les correspondances du corollaire 1 sont données par

$$\underbrace{f}_{\in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(\tau,\Delta^\varepsilon)} \longmapsto \mathrm{Tr}(f)^*(\underline{u}),$$

où $\underline{u}$ est l'unique flèche de transition de Δ^ε.

On va utiliser ces sorites pour donner, pour tout $\tau \in \underline{\mathrm{Ty}}$, une description combinatoire simple des catégories $\underline{\mathrm{Ty}}/\tau$ et $\tau\backslash\underline{\mathrm{Ty}}$, ou du moins de leurs ensembles d'objets.

1° Description de $\mathrm{Ob}\,(\tau\backslash\underline{\mathrm{Ty}})$**.**

À $f \in \mathrm{Ob}(\tau\backslash\underline{\mathrm{Ty}})$, i.e.

$$f : \tau \longrightarrow \tau' \qquad \text{i.e. } f : I_\tau \longrightarrow I_{\tau'}$$

dans $\underline{\mathrm{Ty}}$, est associé $E = E_f = \mathrm{Tr}(\tau, f) \subseteq \mathrm{Tr}(\tau)$, l'ensemble des flèches de transition critiques (i.e. non dégénérées) pour f. À chaque $u \in E$, associons l'entier $\mathrm{long}(\pi(f,u))$,

`[page 44]`

la *partie* de f sur u. Alors (τ', f) est déterminé de façon unique par le couple

$$(E,\pi), \qquad E \in \mathfrak{P}(\mathrm{Tr}(\tau)), \qquad \underbrace{\pi}_{\text{pondération}} : E \longrightarrow \underbrace{\mathbf{N}^*}_{\substack{=\text{ ensemble des}\\ \text{entiers } \geq 1}} .$$

Ou si on préfère, par l'application $\pi = \pi_f$

$$\mathrm{Tr}(\tau) \xrightarrow{\pi} \mathbf{N}, \qquad u \longmapsto \pi(u) = \pi(u,f) = \mathrm{long}(\pi_{\tau'}(f(u)))$$

(qui redonne E comme

$$E = \pi^{-1}(\mathbf{N}^*) \qquad).$$

Cette application n'est soumise à aucune restriction,

$$\mathrm{Ob}\,(\tau\backslash\underline{\mathrm{Ty}}) \xrightarrow[\sim]{\text{bij.}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathrm{Tr}(\tau),\mathbf{N}).$$

On récupère τ' à partir de π ainsi. On prend $E = \pi^{-1}(\mathbf{N}^*)$ (flèches de transition non dégénérées pour π), E est totalement ordonné par l'ordre induit par celui de $\mathrm{Tr}(\tau)$, il est de plus signaturé `[sic]` par la signaturation `[sic]` de $\mathrm{Tr}(\tau)$, soit

$$(\varepsilon_1, n_1),\ \ldots\ ,\ (\varepsilon_r, n_r)$$

la suite des signatures et pondérations, de la suite des éléments de E ($\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $n_i \in \mathbf{N}^*$ pour $i \in [1,r]$). Alors,

$$\tau' = \Delta_{\varepsilon_1}^{n_1}\Delta_{\varepsilon_2}^{n_2}\cdots\Delta_{\varepsilon_r}^{n_r}, \qquad r = \mathrm{card}\,E,$$

dans le monoïde libre Ty, où on a désigné par Δ_+, Δ_- (au lieu de Δ^+, Δ^-) les deux générateurs. L'application

$$I_\tau \longrightarrow I_{\tau'}$$

`[page 45]`

est décrite de façon unique en disant qu'elle est *constante* sur chacune des 'composantes connexes' (au sens de la numérotation des sommets de I_τ) de l'ensemble $E' = E'(f) \subseteq I_\tau = [0,n]$ des sommets qui sont sources ou buts de flèches de transition dégénérées pour f, i.e. dans $\mathrm{Tr}(\tau)\backslash E$. Et sur le α-ème élément de E ($\alpha \in [1, r = \mathrm{card}\, E]$), d'indice i_α dans $\mathrm{Tr}(\tau)$, f induit le foncteur

$$\mathbf{\Delta}_{\varepsilon_\alpha} \simeq \underbrace{J_{i_\alpha}}_{\substack{\text{intervalle}\\ \text{de transition}\\ \text{d'indice } i_\alpha\\ \text{dans } I_\tau}} \longrightarrow I_{\tau'}$$

donné par *l'unique* <u>Ty</u>*-flèche* dans I_τ de J_{i_α} dans le α-ème facteur, de type $\Delta^{n_\alpha}_{\varepsilon_\alpha}$, de τ', donné par $(*)$

$$\Delta^{n_\alpha}_{\varepsilon_\alpha} \simeq \text{type de } \mathbf{\Delta}^{\varepsilon_\alpha}_{n_\alpha} \ \ldots$$

2° Détermination de $\mathrm{Ob}\,(\underline{\mathrm{Ty}}/\tau')$**.**

Si $(\tau, f) \in \mathrm{Ob}\,(\underline{\mathrm{Ty}}/\tau')$, donc

$$f : I_\tau \longrightarrow I_{\tau'},$$

on lui associe tout d'abord la partie

$$\mathrm{Cr}(\tau', f) = E'_f = E' \subseteq I_{\tau'}$$

formée des sommets (dits 'critiques pour f', cf. page 41) de $I_{\tau'}$ qui sont source ou but d'une flèche $f(u)$, où $u \in \mathrm{Tr}(\tau, f)$, i.e. $f(u)$ n'est pas dégénérée ([13]). E' contient $f(I_{\tau\,\text{réd}})$ (i.e. les images par f des sommets critiques de I_τ),

`[page 46]`

mais peut être plus grand. (P.ex. si $\tau = \tau'$, $f = \mathrm{id}$, $E' = I_{\tau'}$, qui est donc strictement plus grand que $I_{\tau'\text{réd}}$ si τ' n'est pas réduit.) Pour tout $i \in E'$, considérons $f^{-1}(\{i\}) \subseteq I_\tau$. Comme f `[est]` croissant, c'est un intervalle de l'ensemble totalement ordonné I_τ, donc c'est un sous-intervalle de la catégorie intervalle I_τ. Comme tel, il a une signature $\tau_i \in \mathrm{Ty}$. On a donc une application

$$\eta_f \text{ ou } \eta : E' \longrightarrow \mathrm{Ty}.$$

Je dis que $(\tau, f) \in \mathrm{Ob}\,(\underline{\mathrm{Ty}}/\tau')$ est déterminé de façon unique par ce couple

$$(E', \eta) \begin{cases} E' \in \mathfrak{P}(I_{\tau'}) = \mathfrak{P}([0, n']) \\ \eta : E' \longrightarrow \mathrm{Ty}\ . \end{cases}$$

De plus, celui-ci est soumis à la seule restriction que

$$E' \supseteq \mathrm{Cr}(\tau') = \text{ensemble des sommets critiques de } I_{\tau'}$$

[13] dégager un lemme f croissante inutile.

(où ce qui revient au même, que E' contient $0_{\tau'}$, $1_{\tau'}$ et que deux éléments consécutifs de E' sont reliés par une flèche de $I_{\tau'}$) :

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{Ob}\,(\mathrm{Ty}/\tau') & \simeq & \text{ensemble des couples } (E',\eta), \text{ avec} \\ & & E' \subseteq [0, \underbrace{n'}_{=\mathrm{long}\,\tau'}], \quad E' \supseteq \mathrm{Cr}(\tau'), \\ & & \eta : E' \longrightarrow \mathrm{Ty}\ . \end{array}\right.$$

Soit

$$0 = t_0 < t_1 < \ \cdots \ < t_r = n'$$

la suite des éléments de E', soit pour $i \in [1, N]$

$$\left\| \begin{array}{l} l_i = t_i - t_{i-1} \\ \varepsilon_i \quad \text{signature de } [t_{i-1}, t_i] \text{ dans } I_{\tau'}\ , \end{array}\right.$$

[page 47]

et pour $i \in [0, N]$, soit

$$\| \quad \tau_i = \eta(t_i).$$

Alors le type τ est donné par

$$(*) \qquad \tau = \tau_0 \Delta_{\varepsilon_1} \tau_1 \Delta_{\varepsilon_2} \cdots \Delta_{\varepsilon_N} \tau_N,$$

[de] longueur $N + \sum_{i=0}^{N} \underbrace{\mathrm{long}(\tau_i)}_{\lambda_i \geq 0}$.

3° Description de $\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}})$.

Si

$$f : \tau \longrightarrow \tau' \qquad \text{[est] dans } \underline{\mathrm{Ty}}\ ,$$

on lui associe comme tantôt un entier $\underline{N \geq 0}$ ($N = \mathrm{card}\,\mathrm{Cr}(\tau', f) - 1$, $N = 0$ si et seulement si $\tau' = 1$, type de l'intervalle ponctuel), des applications

$$\left\{\begin{array}{lllll} [1, N] & \longrightarrow & [+1, -1] \times \mathbf{N}^*, & i & \longmapsto & (\varepsilon_i, l_i) \\ [0, N] & \longrightarrow & \mathrm{Ty} & i & \longmapsto & \tau_i \end{array}\right.$$

([14]). La flèche f dans $\underline{\mathrm{Ty}}$ est determinée par ces données. Le type τ est donné par la formule $(*)$ ci-dessus, le type τ' par

$$(*') \qquad \tau' = \Delta_{\varepsilon_1}^{l_1} \Delta_{\varepsilon_2}^{l_2} \ \cdots \ \Delta_{\varepsilon_N}^{l_N}, \qquad \text{longueur } n' = \sum l_i,$$

[14]**NB** Si $N = 0$, $[1, N] = \emptyset$, et il n'y a pas de ε_i, l_i; l'application $\underbrace{[0, N]}_{=\{0\}} \longrightarrow \mathrm{Ty}$ se réduit à la donnée de $\tau_0 \in \mathrm{Ty}$.

et l'application croissante de $I_\tau = [0, N + \sum \mathrm{long}(\tau_i)]$ dans $I_{\tau'} = [0, \sum l_i]$ est donnée ainsi :

$$\begin{array}{lcl}
\text{constante sur } [0, 0+\lambda_0] & \longmapsto & 0 \\
\text{constante sur } [\lambda_0 + 1, \lambda_0 + 1 + \lambda_1] & \longmapsto & l_1 \\
\text{constante sur } [\lambda_0 + \lambda_1 + 2, \lambda_0 + \lambda_1 + 2 + \lambda_2] & \longmapsto & l_2 \\
\dots & & \\
\text{constante sur } [\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_i + (i+1), \lambda_0 + \cdots + \lambda_i + \lambda_{i+1} + (i+1)] & \longmapsto & l_i.
\end{array}$$

[page 48]

6 Composition dans $\underline{\mathrm{Ty}}$

On a une loi de composition (partout définie) dans $\mathrm{Ob}\,(\underline{\mathrm{Ty}}) = \mathrm{Ty}$, c'est celle du monoïde libre à deux générateurs Δ_+, Δ_-. Cette loi de composition s'interprète, au niveau catégorique (et non plus seulement combinatoire) comme une somme amalgamée

$$I_{\tau\tau'} = I_\tau \amalg_{(e,\underline{1}_\tau,\underline{0}_{\tau'})} I_{\tau'},$$

où e est la catégorie unité, et où $\underline{1}_\tau$, $\underline{0}_{\tau'}$ représentent maintenant les morphismes $e \longrightarrow I_\tau$, $e \longrightarrow I_{\tau'}$, ayant comme image l'élément but et l'élément source respectivement de l'intervalle orienté envisagé. On a donc un carré cocartésien dans (Cat)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & e \arrow[dl, hook, "\underline{1}_\tau"'] \arrow[dr, hook, "\underline{0}_{\tau'}"] & \\ I_\tau \arrow[dr, hook, "i_{\tau,\tau'}"'] \arrow[rr, phantom, "\text{cocart.}"] & & I_{\tau'} \arrow[dl, hook', "j_{\tau,\tau'}"] \\ & I_{\tau\tau'}, & \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des foncteurs mono et pleinement fidèles. Que ce diagramme (évidemment commutatif) soit bien cocartésien dans (Cat) revient, par définition, à dire que pour toute X dans Cat, le diagramme transposé

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X & \\ \underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X) \arrow[ur, "\beta_\tau", "\text{(but)}"'] & & \underline{\mathrm{Ch}}_{\tau'}(X) \arrow[ul, "\sigma_{\tau'}"', "\text{(source)}"] \\ & \underline{\mathrm{Ch}}_{\tau\tau'}(X), \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

[est cartésien]

[page 49]

ce qui revient à la tautologie suivante qu'un chemin C dans X de type $\tau\tau'$ 'n'est autre chose' qu'un couple (c, c') d'un chemin c de type τ et d'un chemin c' de type τ' 'mis bout à bout' (dans cet ordre), i.e. tels que

$$\mathrm{but}(c) = \mathrm{source}(c')$$

(et on a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{source}(C) &= \mathrm{source}(c) \\ \mathrm{but}(C) &= \mathrm{but}(c') \qquad). \end{aligned}$$

Il se pose ici le sempiternel problème si on va noter ce chemin $c{\cdot}c'$, ce qui semble à première vue s'imposer, ou plutôt $c' \circ c$, regardant le chemin c de $x = \mathrm{source}(c)$ vers $y = \mathrm{but}(c)$ comme une sorte de morphisme de x dans y (cf. plus bas le formalisme des catégories de fractions), c' comme un morphisme de $y = \mathrm{source}(c')$ vers $z = \mathrm{but}(c')$, et en interprétant le composé C comme le composé de ces deux morphismes c, c' (dans cet ordre du point de vue des opérations à effectuer), qu'on note traditionellement $c' \circ c$ ou $c' \cdot c$, et non $c \circ c'$ ou $c \cdot c'$, hélas! C'est cette notation que nous allons suivre plus bas.

Mais pour l'instant on ne va pas se soucier des chemins dans des catégories quelconques X, mais revenir au formalisme des τ et des I_τ eux-mêmes. L'interprétation catégorique de $\tau\tau'$ comme une somme amalgamée nous assure que cette opération de composition est fonctorielle :

`[page 50]`

$$\tau_1 \xrightarrow{f} \tau_2, \quad \tau_1' \xrightarrow{f'} \tau_2' \qquad \text{donne } \tau_1\tau_1' \xrightarrow{f*f'} \tau_2\tau_2'$$

(on n'écrira pas $f \cdot f'$ pour la flèche notée $f * f'$, à cause de la confusion possible avec la composition des flèches dans $\underline{\mathrm{Ty}}$). On a transitivité de façon évidente : si de plus $\tau_2 \xrightarrow{g} \tau_3$, $\tau_2' \xrightarrow{g'} \tau_3'$, `[on a]`

$$(gf) * (g'f') = (g * g') \circ (f * f').$$

Donc on a un bifoncteur de composition

$$\underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ty}} \qquad (c, c') \longmapsto c \cdot c' \text{ ou } c * c'.$$

(En fait, on a aussi un bifoncteur

$$\underline{\mathrm{Typ}} \times \underline{\mathrm{Typ}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Typ}},$$

mais on préfère oublier maintenant la catégorie $\underline{\mathrm{Typ}}$, qui donne un formalisme nettement moins simple.)

Cette composition est *strictement* associative et *strictement unitaire* (l'unité étant bien sûr l'élément unité 1 du monoïde libre Ty, correspondant à la catégorie ponctuelle $\{0\}$), et pas seulement 'à isomorphisme près'. Et pour cause, puisque dans $\underline{\mathrm{Ty}}$ les isomorphismes sont des identités. *Donc* $\underline{\mathrm{Ty}}$ *est un monoïde dans la catégorie* (Cat) des petites catégories!

`[page 49′ (il y a un décalage dans la numérotation)]`

Cela implique que non seulement $\mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Ty}} = \mathrm{Ty}$, mais aussi $\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}})$, et plus généralement tous les ensembles de la forme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(X, \underline{\mathrm{Ty}})$ sont des monoïdes, et ceci fonctoriellement en X, par exemple les composantes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\boldsymbol{\Delta}_i, \underline{\mathrm{Ty}})$ de l'ensemble semi-simplicial 'nerf' de $\underline{\mathrm{Ty}}$,

$$\mathrm{Nerf}_i(\underline{\mathrm{Ty}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\boldsymbol{\Delta}_i, \underline{\mathrm{Ty}}),$$

sont des monoïdes, et les applications semi-simpliciales entre elles sont des homomorphismes de monoïdes : le nerf de $\underline{\mathrm{Ty}}$ est un *monoïde semi-simplicial.*

On va décrire ces monoïdes $\mathrm{Nerf}_i(\underline{\mathrm{Ty}})$, et constater que ce sont tous des monoïdes *libres,* tout comme $\mathrm{Nerf}_0(\underline{\mathrm{Ty}}) = \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Ty}} = \mathrm{Ty}$. Les applications semi-simpliciales entre ces monoïdes sont donc connus quand on les connaît sur les *générateurs* de ces monoïdes libres (lesquels générateurs sont aussi les éléments indécomposables, donc définis intrinsèquement en termes de la structure multiplicative).

Pour $\mathrm{Nerf}_0(\underline{\mathrm{Ty}}) = \mathrm{Ty}$, c'est une chose vue, les générateurs sont

$$\Delta_+, \Delta_-,$$

correspondant respectivement aux intervalles orientés

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{\Delta}_+ : & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \mathbf{\Delta}_- : & 0 & \longleftarrow & 1. \end{array}$$

`[page 50′]`

Pour $\mathrm{Nerf}_1(\underline{\mathrm{Ty}}) = \mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}})$, i.e. pour les flèches, le résultat 3^o) du paragraphe précédent (détermination de $\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}})$) s'interprète aussi en disant que $\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}})$ est le monoïde libre engendré par un système de générateurs infini

$$\mathfrak{f}_{\varepsilon,n}\ , \qquad (\varepsilon, n) \in \{+1, -1\} \times \mathbf{N},$$

indexé par l'ensemble produit $\{+1, -1\} \times \mathbf{N}$. Ici $\mathfrak{f}_{\varepsilon,n}$ désigne l'unique flèche dans $\underline{\mathrm{Ty}}$

$$\mathfrak{f}_{\varepsilon,l} : \Delta_\varepsilon \longrightarrow \Delta_\varepsilon^l$$

(où bien sûr l'exposant l désigne une exponentation pour la loi de composition dans $\underline{\mathrm{Ty}}$

$$\Delta_\varepsilon^l = \underbrace{\Delta_\varepsilon \circ \Delta_\varepsilon \circ \ \cdots \ \circ \Delta_\varepsilon}_{l \text{ copies}},$$

et non la puissance cartésienne dans Cat, où dans $\underline{\mathrm{Ty}}$ (où elle n'existe que si $l \in \{0,1\}$)). Dans la description de $\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}})$ dans le paragraphe précédent, on a écrit le 'terme général' du monoïde libre en groupant ensemble les groupes de foncteurs successifs de la forme $f_{+,0}$, $f_{-,0}$, i.e. corréspondant aux deux flèches de dégénérescence indécomposables (pour $*$)

$$\begin{cases} f_{+,0} : & \Delta_+ & \longrightarrow & e \\ f_{-,0} : & \Delta_- & \longrightarrow & e \end{cases}$$

([15]). Le sous-monoïde libre de $\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}})$ engendré par ces deux éléments est le monoïde des flèches de dégénérescence (pure) quelconques

[15]**NB** Le 'mot' vide de $\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}})$ correspond à la flèche id_1, où 1 est l'élément unité de Ty, réalisant l''intervalle' ponctuel.

[page 51]

dans $\underline{\mathrm{Ty}}$:

$$f_\tau : I_\tau \longrightarrow e \qquad (\tau \in \mathrm{Ty}),$$

et on a

$$f_\tau * f_{\tau'} = f_{\tau\tau'},$$

i.e. l'application

$$\tau \longmapsto f_\tau : \underbrace{\mathrm{Ob}\,(\underline{\mathrm{Ty}})}_{=\,\mathrm{Ty}\,=\,\mathrm{Nerf}_0(\underline{\mathrm{Ty}})} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}})}_{\mathrm{Nerf}_1(\underline{\mathrm{Ty}})}$$

est un homomorphisme de monoïdes, transformant Δ_ε $(\varepsilon \in \{+1,-1\})$ dans $\mathfrak{f}_{\varepsilon,0}$. Ce n'est pas l'application de dégénérenscence de Nerf_0 dans Nerf_1, i.e. l'application $\tau \longmapsto \mathrm{id}_\tau$. Celle-ci est donnée par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ob}\,(\underline{\mathrm{Ty}}) & \longrightarrow & \mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}}) \\ \tau & \longmapsto & \mathrm{id}_\tau \end{array} : \left| \begin{array}{rrcll} & \Delta_\varepsilon & \longmapsto & \mathfrak{f}_{\varepsilon,1} & (\varepsilon \in \{+1,-1\}) \\ \text{i.e.} & \Delta_+ & \longmapsto & \mathfrak{f}_{+,1} & \\ & \Delta_- & \longmapsto & \mathfrak{f}_{-,1}\ . & \end{array} \right.$$

Quant aux homomorphismes source et but

$$\mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}}) \underset{\beta\ (\mathrm{but})}{\overset{\sigma\ (\mathrm{source})}{\rightrightarrows}} \mathrm{Ob}\,(\underline{\mathrm{Ty}}),$$

ils sont évidents sur les générateurs

$$\begin{cases} \sigma(\mathfrak{f}_{\varepsilon,l}) & = & \Delta_\varepsilon \\ \beta(\mathfrak{f}_{\varepsilon,l}) & = & \Delta_\varepsilon^l. \end{cases}$$

Je vais décrire maintenant $\mathrm{Nerf}_2(\underline{\mathrm{Ty}})$, i.e. les systèmes

$$\tau \xrightarrow{f} \tau' \xrightarrow{g} \tau''.$$

[page 52]

Se donner $f \in \mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}})$ revient à se donner une suite ordonnée de générateurs $f_{\varepsilon,l}$, donc une suite

$$\mathfrak{f}_{\varepsilon_1,l_1},\ \mathfrak{f}_{\varepsilon_2,l_2},\ \ldots\ ,\mathfrak{f}_{\varepsilon_n,l_n}$$
$$((\varepsilon_i,l_i))_{1\le i\le n} \in [\{\pm 1\} \times \mathbf{N}]^n.$$

On a alors

$$\begin{array}{rcll} x & = & \Delta_{\varepsilon_1}\Delta_{\varepsilon_2}\cdots\Delta_{\varepsilon_n} & \qquad \mathrm{long}\, x = n \\ y & = & \Delta_{\varepsilon_1}^{l_1}\Delta_{\varepsilon_2}^{l_2}\cdots\Delta_{\varepsilon_n}^{l_n} & \qquad \mathrm{long}\, y = \sum_{i\in[1,n]} l_i. \end{array}$$

Se donner $q : y \longrightarrow z$, i.e. un objet de $y\backslash\underline{\mathrm{Ty}}$, revient à se donner une application de l'ensemble des $m = \sum l_i$ flèches de transition de y dans $\mathbf{N}$. En fait, on a

$$\mathrm{Tr}(y) = \mathrm{Tr}(\Delta_{\varepsilon_1}^{l_1}) \amalg \mathrm{Tr}(\Delta_{\varepsilon_2}^{l_2}) \amalg \cdots \amalg \mathrm{Tr}(\Delta_{\varepsilon_n}^{l_n})$$

('ensemble somme', i.e. réunion disjointe), donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathrm{Tr}(y)) \simeq \prod_{i\in[1,n]} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\underbrace{\mathrm{Tr}(\Delta_{\varepsilon_i}^{l_i})}_{[1,l_i]}, \mathbf{N}),$$

donc la donnée de g équivaut à la donnée d'un système de n applications

$$\begin{cases} \pi_i : [1,l_i] \longrightarrow \mathbf{N} \qquad (\text{pondération de } \Delta_{\varepsilon_i}^{l_i}) \\ \text{pour } i \in [1,n]. \end{cases}$$

Mais pour $i \in [1,n]$, considérons l'élément de Nerf_2

(1) $$\Delta_{\varepsilon_1} \xrightarrow{\mathfrak{f}_{\varepsilon_i,l_i}} \Delta_{\varepsilon_i}^{l_i} \xrightarrow{g_{\varepsilon,\pi_i}} \underbrace{\Delta_{\varepsilon_i}^{\pi_i(1)}\Delta_{\varepsilon_i}^{\pi_i(2)}\cdots\Delta_{\varepsilon_i}^{\pi_i(l_i)}}_{\Delta_{\varepsilon_i}^{\Sigma_j \pi_i(j) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{long}(\pi_i)}},$$

[page 53]

où g_{ε_i,π_i} est la flèche définie en termes de π_i au paragraphe précédent. Mais ce n'est autre aussi que

(2) $$g_{\varepsilon_i,\pi_i} = \mathfrak{f}_{\varepsilon_i,\pi_i(1)} * \mathfrak{f}_{\varepsilon_i,\pi_i(2)} * \cdots * \mathfrak{f}_{\varepsilon_i,\pi_i(l_i)}.$$

L'élément de Nerf_2 envisagé ne dépend que de

$$(\varepsilon_i, l_i, \pi_i), \qquad \text{où } (\varepsilon_i, l_i) \in \{\pm 1\} \times \mathbf{N},\ \pi_i : [1,l_i] \longrightarrow \mathbf{N}.$$

(**NB** Si $l_i = 0$, $[1,l_i] = [1,0] = \emptyset$ par convention, et π_i est l'unique application $\emptyset \longrightarrow \mathbf{N}$, donc la donnée $(\varepsilon_i, l_i, \pi_i)$ revient alors à (ε_i, l_i).)

Si

$$(\varepsilon, l, \pi) \text{ comme dessus,} \qquad (\varepsilon, l) \in \{\pm 1\} \times \mathbf{N},\ \pi : [1,l] \longrightarrow \mathbf{N},$$

désignons par

$$\mathfrak{f}_{\varepsilon,l,\pi}$$

l'élément de Nerf_2 donné par

$$\Delta_\varepsilon \xrightarrow{\mathfrak{f}_{\varepsilon,l}} \Delta_\varepsilon^l \xrightarrow{\quad \mathfrak{f}_{\varepsilon,\pi(1)} \ * \ \cdots \ * \ \mathfrak{f}_{\varepsilon,\pi(l)} \quad} \Delta_\varepsilon^{\pi(1)}\Delta_\varepsilon^{\pi(2)}\cdots\Delta_\varepsilon^{\pi(l)}.$$

On peut formuler la construction précédente en disant que tout élément de Nerf_2 peut se décomposer de façon unique en un produit

$$(f,g) = \mathfrak{f}_{\varepsilon_1,l_1,\pi_1} * \mathfrak{f}_{\varepsilon_2,l_2,\pi_2} * \cdots * \mathfrak{f}_{\varepsilon_n,l_n\pi_n},$$

ce qui prouve que $\mathrm{Nerf}_2(\underline{\mathrm{Ty}})$ est le monoïde libre sur les générateurs précédents $\mathfrak{f}_{\varepsilon,l,\pi}$. (**NB** à la suite vide correspond

$$1 \xrightarrow{\mathrm{id}_1} 1 \xrightarrow{\mathrm{id}_1} 1 \qquad .)$$

[page 54]

Si l'objet de Nerf_2 est

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z,$$

la construction précédente nous dit, en termes de la donnée combinatoire, i.e. de la suite de données

$$(\varepsilon_1, l_1, \pi_1), \ \ldots \ , (\varepsilon_n, l_n, \pi_n),$$

quels sont x, y, z : chacun d'eux est le produit dans $\mathrm{Nerf}_0 = \mathrm{Ty}$ des n facteurs x_i, y_i ou z_i respectivement, pour $i \in [1,n]$, donnés dans la définition des $\mathfrak{f}_{\varepsilon_i, l_i, \pi_i}$, i.e. de

$$\Delta_{\varepsilon_i}, \ \Delta_{\varepsilon_i}^{l_i}, \ \text{ et } \Delta_{\varepsilon_i}^{\pi_i(1)} \Delta_{\varepsilon_i}^{\pi_i(2)} \cdots \Delta_{\varepsilon_i}^{\pi_i(l_i)} = \Delta_{\varepsilon_i}^{\mathrm{long}(\pi_i)}$$

(où $\mathrm{long}(\pi_i) = \sum_{j\in[1,l_i]} \pi_i(j)$). Donc

$$\begin{cases} x &= \prod^{\mathrm{Ty}}_{i\in[1,n]} \Delta_{\varepsilon_i} \\ y &= \prod^{\mathrm{Ty}}_{i\in[1,n]} \Delta_{\varepsilon_i}^{l_i} \\ z &= \prod^{\mathrm{Ty}}_{i\in[1,n]} \Delta_{\varepsilon_i}^{\mathrm{long}(\pi_i)} \end{cases}$$

([16]), et on trouve de même f, g comme des produits (au sens $*$) de n facteurs f_i resp. g_i ($i \in [1,n]$) explicités dans les formules (1), (2) (p. 52, 53) :

$$\begin{aligned} f_i &= \mathfrak{f}_{\varepsilon_i, l_i} : \ \Delta_{\varepsilon_i} \longrightarrow \Delta_{\varepsilon_i}^{l_i} \\ g_i &= g_{\varepsilon_i, l_i} : \ \Delta_{\varepsilon_i}^{l_i} \longrightarrow \Delta_{\varepsilon_i}^{\mathrm{long}(\pi_i)}, \end{aligned}$$

g_i lui-même étant représenté comme un $*$-produit de l_i facteurs indécomposables, de sorte que f et g apparaissent sous forme

[page 55]

de $*$-produits de n, resp. de $\sum_{i\in[1,n]} l_i$ facteurs de la forme $\mathfrak{f}_{\varepsilon,\nu}$. Pour terminer de tenir en mains l'objet semi-simplicial tronqué $(\mathrm{Nerf}_i(\underline{\mathrm{Ty}}))_{0\leq i\leq 2}$, il reste à décrire les deux applications de dégénérescence $\mathrm{Nerf}_1 \longrightarrow \mathrm{Nerf}_2$ (cas où f ou g est une flèche identique) et surtout l'application de *composition* des flèches

$$\mathrm{Nerf}_2(\underline{\mathrm{Ty}}) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Nerf}_1(\underline{\mathrm{Ty}}) = \mathrm{Fl}(\underline{\mathrm{Ty}}).$$

Il suffit de donner γ sur les générateurs, et on a tautologiquement, par définition des $\mathfrak{f}_{\varepsilon,l,\pi}$

$$\gamma(\mathfrak{f}_{\varepsilon,l,\pi}) = \mathfrak{f}_{\varepsilon,\mathrm{long}(\pi)}.$$

(**NB** Il n'existe au plus qu'un seul morphisme de Δ_ε (de Δ_+ ou de Δ_-) dans un intervalle I_τ. Il existe si et seulement si τ est de la forme Δ_ε^l, $l \in \mathbf{N}$.)

[16] attention, les produits doivent être pris en respectant l'ordre des facteurs donné par la notation indicielle en i.

Le cas $g = \mathrm{id}$ correspond au cas où

$$\pi_i(j) = 1 \qquad \forall j \in [1, l_i],$$

les $\mathfrak{f}_{\varepsilon_i,l_i,\pi_i}$ sont alors détérminés en fonction des $\mathfrak{f}_{\varepsilon_i,l_i}$, et l'application de dégénérescence est

$$\mathfrak{f}_{\varepsilon,l} \longmapsto \mathfrak{f}_{\varepsilon,l,1_l} \qquad \text{(où } 1_l \text{ est la fonction constante de valeur 1 sur } [1,l]).$$

Le $f = \mathrm{id}$ est celui où les l_i sont égaux à 1. Alors chaque $\pi_i : [1,1] \longrightarrow \mathbf{N}$ peut être vu comme un élément de $\mathbf{N}$, la donnée de $(\varepsilon_i, l_i, \pi_i)$ revient à celle des $(\varepsilon_i, n_i) \in \{\pm 1\} \times \mathbf{N}$, i.e. la donnée

`[page 56]`

d'une suite de n générateurs parmi les $\mathfrak{f}_{\varepsilon,l}$. L'application de dégénérescence $\mathrm{Nerf}_1 \longrightarrow \mathrm{Nerf}_2$ est ici donnée sur les générateurs par

$$\mathfrak{f}_{\varepsilon,l} \longmapsto \mathfrak{f}_{\varepsilon,1,l}.$$

Heureusement, on n'a plus à prouver l'associativité de la composition.

NB La simplicité de ces descriptions renforce mon sentiment que la catégorie $\underline{\mathrm{Ty}}$ définie à présent, avec les *morphismes d'intervalles orientés croissants* $I_\tau \longrightarrow I_{\tau'}$ comme flèches de $\underline{\mathrm{Ty}}$, est bien 'la bonne'. On va déjà voir si elle donne une description sympa des catégories de fractions $X\Sigma^{-1}$, sans tortillements comme précédemment.

Mais on a promis de déterminer $\mathrm{Nerf}_r(\underline{\mathrm{Ty}})$, pour tout $r \in \mathbf{N}$. Le générateur général de Nerf_r est de la forme (pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ fixé)

$$\underbrace{\Delta_\varepsilon}_{= \Delta_\varepsilon^{l_0} \text{ avec } l_0 = 1} \xrightarrow{f_1} \Delta_\varepsilon^{l_1} \xrightarrow{f_2} \Delta_\varepsilon^{l_2} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_r} \Delta_\varepsilon^{l_r},$$

où les $f_i : \Delta_\varepsilon^{l_{i-1}} \longrightarrow \Delta_\varepsilon^{l_i}$, $i \in [1,r]$, sont donnés par des applications

$$\pi_{i-1} : [1, l_{i-1}] \longrightarrow \mathbf{N} \qquad \text{telles que } \underbrace{\mathrm{long}(\pi_{i-1})}_{\overset{\text{déf}}{=} \Sigma_{j \in [1,l_i]} \pi_i(j)} = l_i.$$

(NB $\pi_0 : [1,1] = \{1\} \longrightarrow \mathbf{N}$ est identifié à $\mathrm{long}(\pi_0) = \pi_0(1) = l_1$.)

`[page 57]`

Pour ne pas faire dépendre la définition du domaine des π_i ($i \in [0, r-1]$) des entiers l_i, on peut aussi considérer les π_i comme des applications

$$\mathbf{N}^* \xrightarrow{\pi} \mathbf{N} \qquad (\mathbf{N}^* = \{i \in \mathbf{N} \mid i \geq 1\})$$

à supports finis (i.e. tels que $\pi(i) = 0$ pour i grand), et exiger de façon précise

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}\, \pi_0 &\subseteq \{1\} \\ \mathrm{supp}\, \pi_1 &\subseteq [1, \mathrm{long}(\pi_0)] \\ &\cdots \end{aligned}$$

$$(**) \qquad \boxed{\mathrm{supp}\, \pi_i \subseteq [1, \mathrm{long}(\pi_{i-1})]}, \qquad \text{pour } \boxed{i \in [0, r-1]} \; .$$

D'autre part, posant $l_i = \mathrm{long}(\pi_{i-1})$ (pour $i \in [1, r]$),

$$f_i : \Delta_\varepsilon^{l_{i-1}} \longrightarrow \Delta_\varepsilon^{l_i\ (=\mathrm{long}(\pi_{i-1}))}$$

est défini comme

$$f_i = \mathfrak{f}_{\varepsilon,\pi_{i-1}(1)} * \mathfrak{f}_{\varepsilon,\pi_{i-1}(2)} * \cdots * \mathfrak{f}_{\varepsilon,\pi_{i-1}(l_{i-1})},$$

de sorte que l'élément $(*)$ de $\mathrm{Nerf}_r(\underline{\mathrm{Ty}})$ est déterminé de façon unique par la donnée des $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et de

$$\pi_\bullet = (\pi_i)_{i \in [0, r-1]} \in (\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathbf{N}^*, \mathbf{N}))^r$$

satisfaisant les conditions $(**)$. Soit $F_{\varepsilon,\pi_\bullet}$ cet élément de $\mathrm{Nerf}_r(\underline{\mathrm{Ty}})$, et soit N_r l'ensemble des $\pi_\bullet$ qu'on vient d'expliciter. Alors

$$(F_{\varepsilon,\pi_\bullet})_{(\varepsilon,\pi_\bullet) \in \{\pm 1\} \times N_r}$$

est un système de générateurs libre du monoïde $\mathrm{Nerf}_r(\underline{\mathrm{Ty}})$.

Si $l_i = 0$ (i.e. $\boxed{\pi_{i-1} = 0}$), on doit avoir $\mathrm{supp}(\pi_{i+1}) = \emptyset$, i.e. $\pi_{i+1} = 0$, d'où $l_{i+1} = 0$, et de même pour les l_j et π_j suivants. Géométriquement l'hypothèse s'exprime par la condition que le but

`[page 58]`

de f_i est l'élément 1 de Ty (correspondant à l'intervalle ponctuel), et comme $\mathrm{Hom}(1, \tau) = \emptyset$ pour $\tau \neq 1$, cela signifie que les flèches qui suivent f_i doivent être toutes égales à la flèche $\mathrm{id}_1 : 1 \longrightarrow 1$.

Remarque. Dans la description combinatoire de $\underline{\mathrm{Ty}}$ et de $\mathrm{Nerf}_\bullet(\underline{\mathrm{Ty}})$, l'ensemble des 'signatures' $\{\pm 1\}$ joue un rôle assez bidon. Il peut être remplacé par n'importe quel ensemble Σ (dit 'ensemble des signatures'), et on construit alors une catégorie monoïdale (ou un monoïde catégorique) ayant comme ensemble d'objets le monoïde libre engendré par Σ, interprétés comme des intervalles d'entiers $[0, n]$, munis de 'signatures' dans Σ pour chaque intervalle de transition, ou ce qui revient au même, des 'graphes' orientés Σ-pondérés de type combinatoire un intervalle $\mathbf{\Delta}_i$, ce qui revient à la donnée d'une suite (ordonnée) de n éléments $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots \ , \ \varepsilon_n \in \Sigma$, i.e. d'un 'mot' $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, qu'on préfère écrire $\Delta_{\varepsilon_1}\Delta_{\varepsilon_2} \cdots \Delta_{\varepsilon_n}$. On peut définir de façon évidente les homomorphismes *croissants* de tels graphes pondérés orientés (sous-entendu : avec l'élément source et l'élément but dans la structure, à respecter par les morphismes), sans avoir besoin d'une interprétation catégorique. La fonctorialité de l'opération de composition des intervalles pondérés, pour cette notion de morphisme, est évidente. Le

`[page 59]`

choix $\Sigma = \{\pm 1\}$ est à ma connaissance le seul utile, à cause de son lien avec la notion de chemins et le calcul de π_0 d'un objet de X `[plutôt d'un objet` X `de` Cat`]`, etc.

7 Explicitation des catégories de fractions $X\Sigma^{-1}$ en termes des $\underline{\mathrm{Ch}}(X; a, b)$

Si X est une catégorie, on désigne par $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ la catégorie des chemins dans X (cf. §4), et pour $a, b \in \mathrm{Ob}\, X$, par

$$\underline{\mathrm{Ch}}(X; a, b) \qquad \text{ou simplement } \underline{\mathrm{Ch}}(a, b)$$

celle des chemins de a vers b, i.e. de source a, but b. L'intuition géométrique (qu'on explicitera), c'est qu'un tel chemin c définit un chemin 'direct' de a vers b (i.e. un chemin de type τ' 'direct', i.e. toutes les flèches de transition sont directes, i.e. τ' de la forme Δ_+^n), de même longueur que le chemin initial c, obtenu en inversant toutes les flèches rétrogrades dans le chemin c. Cette opération est effectivement possible dans X lui-même si et seulement si lesdites flèches sont inversibles. On obtient alors une suite composable de flèches, dont le composé total (qu'on peut appeler 'l'effet utile' du chemin)

`[page 60]`

est une flèche de a vers b. Dans le cas général, les chemins de a vers b peuvent être vus comme une sorte de 'flèches généralisées' allant de a vers b, dont la composition serait la composition évidente, et les identités les 'chemins vides' relatifs aux $a \in \mathrm{Ob}\, X$. On trouve d'ailleurs bien ainsi une catégorie, ayant mêmes objets que X, mais où les

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}}(a, b) = \mathrm{Ch}(a, b) = \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Ch}}(a, b)$$

sont prohibitivement gros. Cela s'exprime notamment par le fait que les seules flèches inversibles dans X_{Ch} sont les identités ! On n'a pas de foncteur naturel entre X_{Ch} et X qui soit l'identité sur les objets. Car à un chemin $a \xrightarrow{c} b$ on ne peut associer de X-morphismes $a \longrightarrow b$ (sauf si c `[est]` de type Δ_+), et à un X-morphisme $a \xrightarrow{u} b$ on peut associer un chemin $c(u)$ de type Δ_+, mais si $a \xrightarrow{u} b \xrightarrow{v} c$, $c(vu)$ est encore de type Δ_+ alors que $c(v)c(u)$ est de type Δ_+^2, ils ne sont pas égaux. Par contre, il y a une flèche naturelle entre ces deux éléments de $\underline{\mathrm{Ch}}(a, c)$, flèche au dessus de l'unique homomorphisme

$$\Delta_+ \xrightarrow{\mathfrak{f}_{+,2}} \Delta_+^2.$$

`[page 61]`

On a alors

$$\mathfrak{f}_{+,2}^*(\underbrace{a \xrightarrow{u} b \xrightarrow{v} c}_{c(v)c(u)}) = (\underbrace{a \xrightarrow{vu} c}_{c(vu)}),$$

d'où une flèche canonique

$$c(vu) \longrightarrow c(v)c(u) \qquad \text{dans } \underline{\mathrm{Ch}}(a, c).$$

Cela montre que $c(vu)$ et $c(v)c(u)$ sont tout au moins dans une même composante connexe de $\underline{\mathrm{Ch}}(a, c)$, ou (comme on dit encore) qu'ils sont 'homotopes'. Cela suggère ici de modifier la définition de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}}(a, b)$ en

$$\pi(a, b) = \pi_0(\underline{\mathrm{Ch}}(a, b)).$$

Le foncteur de composition des chemins

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\mathrm{Ch}}(a,b) & \times & \underline{\mathrm{Ch}}(b,c) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ch}}(a,c) \\ (c & , & c') & \longmapsto & c' \circ c \end{array}$$

`[il y a trop de` c`]` ([17]) induit une application sur les π_0, ce qui donne une loi de composition

$$\pi(a,b) \times \pi(b,c) \longrightarrow \pi(a,c)$$

sur les flèches. Il est immédiat qu'elle est associative (la composition des chemins l'étant), et unitaire. Elle admet comme flèche identique en x soit le 'lacet vide en x', lequel est (directement) homotope dans $\underline{\mathrm{Ch}}(x,x)$ au chemin 'dégénéré' $x \xrightarrow{\mathrm{id}} x$

`[page 62]`

de type Δ_+, ou aussi au chemin dégénéré de n'importe quel type τ, disons

$$x \xleftarrow{\mathrm{id}} x \xrightarrow{\mathrm{id}} x \xrightarrow{\mathrm{id}} x \xleftarrow{\mathrm{id}} x \xleftarrow{\mathrm{id}} x,$$

un tel chemin n'étant autre que $p_\tau^*(x)$, où

$$p_\tau : \tau \longrightarrow 1$$

est le morphisme de dégénérescence (l'unique morphisme dans $\underline{\mathrm{Ty}}$ vers 1, qui est objet final), d'où

$$p_\tau^* : \underline{\mathrm{Ch}}_1(x,x) = \{x\} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_\tau(x,x) \subseteq \underline{\mathrm{Ch}}(x,x).$$

La catégorie $\Pi(X)$ ainsi obtenu doit s'appeler le *groupoïde fondamental* de X. En effet,

a) toutes les flèches de $\Pi(X)$ sont inversibles, i.e. $\Pi(X)$ est bien un groupoïde, et

b) le foncteur canonique

$$X \longrightarrow \Pi(X)$$

qui est l'identité sur les objets, et qui est défini sur les flèches par $u \longmapsto c(u)$ comme ci-dessus, est *universel* (dans Cat) pour les foncteurs (i.e. les Cat-morphismes) de X vers des *groupoïdes*. (Plus généralement encore, il est universel pour les foncteurs $X \xrightarrow{F} Y$ tels que F transforme toute flèche de X en `[une]` flèche inversible.)

[17] Ce foncteur est déduit des foncteurs

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\tau(a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\tau'}(b,c) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_{\tau\tau'}(a,c)$$

évidents, cf. page 77.

[page 63]

Pour prouver que toute flèche dans $\Pi(X)$ est inversible, comme tout chemin non vide est composé de chemins 'élémentaires' de type Δ_+ ou Δ_-, il suffit de prouver que ces chemins sont inversibles. En fait, ils se correspondent biunivoquement,

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Delta_+}(a,b) \simeq \underline{\mathrm{Ch}}_{\Delta_-}(b,a),$$

en associant au chemin de a vers b

$$c(u) : a \xrightarrow{u} b \qquad \text{de type } \Delta_+$$

le chemin

$$c(u)^o : b \xleftarrow{u} a \qquad \text{de type } \Delta_-$$

de b vers a. Je dis que

$$\begin{aligned} c(u)^o c(u) &\sim 1_a \\ c(u)c(u)^o &\sim 1_b \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "u"] & b & a \arrow[l, "u"'] \\ a \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & a \arrow[u, "u"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \\ & a & \end{tikzcd}$$

on a un homomorphisme dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Delta_+\Delta_-}(a,a)$
de 1_a dans $c(u)^o c(u)$.

$$\begin{tikzcd} b & a \arrow[l, "u"'] \arrow[r, "u"] & b \\ a \arrow[u, "u"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & a \arrow[u, "u"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

itou dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Delta_-\Delta_+}(b,b)$,
de $1_b \longrightarrow c(u)c(u)^0$

[plutôt $1_b \longleftarrow c(u)c(u)^0$, viz.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[d, "\mathrm{id}"] & a \arrow[l, "u"'] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"] & b \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ b & b \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & b \end{tikzcd}$$].

`[page 64]`

Notons que, plus généralement, pour tout chemin

$$c : a \longrightarrow b, \qquad \text{de type } \tau,$$

on définit un *chemin opposé*

$$c^o : b \longrightarrow a \qquad \text{de type } \tau^o,$$

où

$$\tau \longmapsto \tau^o : \mathrm{Ty} \longrightarrow \mathrm{Ty}$$

est l'antiïnvolution du monoide libre Ty qui échange les deux générateurs Δ_-, Δ_+, et qui est donc donné sur l'élément général par

$$(\Delta_{\varepsilon_1}\Delta_{\varepsilon_2}\cdots\Delta_{\varepsilon_n})^o = \Delta_{-\varepsilon_n}\Delta_{-\varepsilon_{n-1}}\cdots\Delta_{-\varepsilon_1}.$$

Par récurrence sur la longueur de c ([18]), en utilisant le résultat précédent, que $c(u)$, $c(u)^o$ sont inverses l'un de l'autre dans $\Pi(X)$, on trouve

$$\left.\begin{array}{rcl} c^o c & = & \mathrm{id}_a \\ c c^o & = & \mathrm{id}_b \end{array}\right\} \text{dans } \Pi(X).$$

Exemple. Si

$$\begin{array}{rcl} \tau & = & \Delta_+\Delta_-\Delta_+^2\Delta_- \\ \tau^o & = & \Delta_+\Delta_-^2\Delta_+\Delta_-, \end{array}$$

et si on a un chemin

$$c : a_0 \xrightarrow{u_1} a_1 \xleftarrow{u_2} a_2 \xrightarrow{u_3} a_3 \xrightarrow{u_4} a_4 \xleftarrow{u_5} a_5$$

de type τ, on en déduit le chemin

$$c^o : a_5 \xrightarrow{u_5} a_4 \xleftarrow{u_4} a_3 \xleftarrow{u_3} a_2 \xrightarrow{u_2} a_1 \xleftarrow{u_1} a_0$$

de type τ^o. L'opération $c \longmapsto c^o$ satisfait en

`[page 65]`

effet `[pour]`

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{\gamma} & b & \xrightarrow{\gamma'} & c \\ c & \xrightarrow{\gamma'^o} & b & \xrightarrow{\gamma^o} & a \end{array}$$

la relation

$$(*) \qquad (\gamma'\gamma)^o = \gamma^o\gamma'^o,$$

[18] inutile, résulte directement de la formule $(*)$ `[de la]` page suivante, en décomposant c en composés de chemins 'élémentaires' de type Δ_+ ou Δ_-.

ce qui est en accord avec l'intuition que l'opération $\gamma \longmapsto \gamma^o$ joue le rôle d'un passage à l'inverse ('à homotopie près'), et on a la formule

$$(\gamma'\gamma)^{-1} = \gamma^{-1}\gamma'^{-1}$$

pour deux flèches inversibles γ, γ' composables (dans l'ordre γ', γ).

Pour la propriété universelle de

$$X \longrightarrow \Pi(X)$$

(qui permettra d'écrire

$$\Pi(X) \simeq X\Sigma^{-1}, \qquad \text{avec } \Sigma = \mathrm{Fl}(X) \ \ ),$$

autant l'établir tout de suite dans le cadre général où on se donne une partie

$$\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(X),$$

et on définit, pour $\tau \in \mathrm{Ty}$,

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X) \subseteq \underline{\mathrm{Ch}}_{\tau}(X)$$

comme la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Ch}}_{\tau}(X)$ formée des chemins dans X dont *toutes les flèches rétrogrades*

`[page 66]`

sont dans X `[plutôt dans` Σ`]`. On notera que pour qu'un chemin c et son opposé c^o soient tous les deux des Σ-*chemins,* il faut et il suffit que *toutes* les flèches du chemin c soient dans Σ (on dira alors que c est un Σ-*chemin stricte*), puisque les flèches rétrogrades de c^o sont les flèches directes de c.

Pour que les sous-catégories pleines $\underline{\mathrm{Ch}}_{\tau,\Sigma}(X)$ soient stables par les foncteurs images inverses

$$f^* : \underline{\mathrm{Ch}}_{\tau'}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_{\tau}(X)$$

associés aux flèches

$$f : \tau \longrightarrow \tau'$$

dans $\underline{\mathrm{Ty}}$, ou simplement pour qu'y ait stabilité pour les deux foncteurs f^* associés à un $f : \Delta_- \longrightarrow 1$ et $\Delta_- \longrightarrow \Delta_-^2$, il faut et il suffit que Σ soit stable par composition et contienne toutes les flèches identiques

$$\begin{cases} x \in \mathrm{Ob}\, X \implies \mathrm{id}_x \in \Sigma \\ u, v \in \Sigma, \quad u,\ v \text{ composables} \implies uv \in \Sigma. \end{cases}$$

En effet, les flèches dans un chemin $f^*(c') \in \underline{\mathrm{Ch}}_{\tau}(X)$ sont soit des flèches identiques (qui correspondent aux flèches de transition de I_τ dégénérées pour f), soit des flèches parmi celles de τ, ou des composés d'une suite de flèches consécutives composables de τ' (qui correspondent aux flèches de transition dans $I_{\tau'}$ incluses dans la partie d'une flèche de transition de I_τ), avec conservation des signatures.

[page 67]

On suppose ces conditions satisfaites, de sorte que les $\underline{\mathrm{Ch}}_{\tau,\Sigma}(X)$ forment les fibres d'une sous-catégorie fibrée pleine de $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ sur $\underline{\mathrm{Ty}}$, qu'on dénotera par

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(X).$$

Il est évident que cette sous-catégorie est stable par l'opération de composition des chemins (mais non pas, en général, on l'a dit, par passage de c à c^o (il faudrait pour cela que Σ contienne *toutes* les flèches de X, puisque pour toute $u : a \longrightarrow b$, qui est donc dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Delta_+,\Sigma}(X)$, u^o donné par $b \xleftarrow{u} a$ dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Delta_-}(X)$ devrait être un Σ-chemin, d'où $u \in \Sigma$)).

On va définir une catégorie canonique

$$\Pi_\Sigma(X),$$

ayant même objets que X, et un foncteur canonique

$$X \longrightarrow \Pi_\Sigma(X)$$

qui est l'identité sur les objets, et qui transforme les $u \in \Sigma$ en flèches inversibles. Pour cela on calque la description du groupoïde fondamental (mais $\Pi_\Sigma(X)$ ne sera pas en général un groupoïde), en posant

$$\mathrm{Hom}_\Sigma(x,y) = \pi_0(\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(x,y)),$$

[page 68]

et en définissant la composition des 'Σ-flèches' en termes de la composition des chemins. L'argument qui prouvait, dans le cas de $\Pi(X)$, que *toute* flèche de X, vue comme chemin c de type Δ_+, était inversible dans $\Pi(X)$, ayant comme inverse c^o de type Δ_-, est encore valable, pourvu que c^o soit encore bien un Σ-chemin, ce qui exige que $u \in \Sigma$.

On va l'interpréter en termes d'un foncteur canonique

$$(*) \qquad \kappa : X \longrightarrow \Pi_\Sigma(X) \qquad ([19])$$

qui se décrit encore comme dans le cas du groupoïde fondamental, en associant à toute flèche u de X la classe d'homotopie du chemin $c(u)$ qu'elle définit. On voit donc que ce foncteur canonique transforme les $u \in \Sigma$ en flèches inversibles.

Quand les flèches de Σ sont déjà inversibles dans X, je dis que le foncteur $(*)$ est un isomorphisme, i.e. que pour tout $a, b \in \mathrm{Ob}\, X$,

$$\alpha : \mathrm{Hom}_X(a,b) \longrightarrow \pi_0 \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b), \qquad u \longmapsto \underbrace{\mathrm{ch}_\Sigma(u)}_{=\,\mathrm{ch}(u)}$$

est bijectif. Pour le voir, on va définir

$$\beta : \pi_0(\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(a,b),$$

qui sera inverse de β. On définit

[19] Sur les flèches, κ est défini, pour $u : a \longrightarrow b$, par $\kappa(u) =$ classe d'homotopie de $\mathrm{ch}(u)$ dans $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b)$, où $\mathrm{ch}(u)$ est le chemin de type Δ_+ de a vers b défini par u.

[page 69]

$\beta(c)$, pour une Σ-flèche de type τ, le longueur n, en inversant toutes les flèches rétrogrades (ce qui est possibles, puisqu'elles sont dans Σ), de façon à obtenir un chemin $c^\natural$ de type Δ_+^n, et en prenant le composé (dans X) des flèches de ce chemin $c^\natural$. Il est évident alors que $\beta\alpha = \mathrm{id}$, il faut prouver que l'on a aussi $\alpha\beta = \mathrm{id}$, i.e. que dans $\Pi_\Sigma(X)$, les flèches $u = \int c^\natural$ et c sont égales, i.e. u et c sont homotopes dans $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b)$. Considérons le chemin $c^\natural$, de type Δ_+^n :

$$a = a_0 \xrightarrow{u_1} a_1 \xrightarrow{u_2} a_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_{n-1} \xrightarrow{u_n} a_n = b,$$

et soit u_i ($i \in [1,n]$) une flèche de ce chemin, correspondant à une flèche de transition $\underline{u}_i$ *rétrograde* de τ, donc par construction

$$u_i = v_i^{-1} \qquad \text{dans } X, \text{ avec } v_i \in \Sigma$$

la flèche d'indice i dans le chemin initial c de type τ. Si $\underline{u}_i$ par contre est directe, on aura

$$u_i = v_i.$$

(NB On désigne par v_i la i-flèche dans le chemin c.) Or on a

$$(*) \qquad c = c_n * c_{n-1} * \cdots * c_1 \qquad \text{dans } \Pi_\Sigma(X)$$

et le facteur c_i est soit la classe d'homotopie de $\mathrm{ch}(v_i) = \mathrm{ch}(u_i)$ (cas où la flèche de transition $\underline{u}_i$ de τ est directe), soit celle du chemin *opposé* au chemin $\mathrm{ch}(v_i) : a_i \xrightarrow{v_i} a_{i-1}$ de type Δ_+, donc le chemin $\mathrm{ch}(v_i)^o : a_{i-1} \xleftarrow{v_i} a_i$ de type Δ_-. Je dis que

$$(1) \qquad \boxed{\mathrm{ch}(v_i)^o = \mathrm{ch}(u_i) \qquad \textit{dans } \Pi(X),}$$

ce qui prouve que dans $\Pi_\Sigma(X)$, c est égal au composé des $\mathrm{ch}(u_i)$ ($i \in [1,n]$), donc à $c^\natural$. Il faut prouver de plus que

$$(2) \qquad c^\natural = \mathrm{ch}(u) \qquad (u = u_n u_{n-1} \cdots u_1) \qquad \text{dans } \Pi(X).$$

[page 70]

Donc il y a deux vérifications à faire (où je suppose à nouveau Σ quelconque) :

1°) Soit $u \in \Sigma$, $u : a \longrightarrow b$, supposons Σ inversible dans X. Alors

$$\mathrm{ch}(u)^o = \mathrm{ch}(u^{-1}) \qquad \text{dans } \Pi_\Sigma(X),$$

i.e. les deux chemins de b vers

$$b \xleftarrow{u} a \quad \text{de type } \Delta_-$$
$$b \xrightarrow{u^{-1}} a \quad \text{de type } \Delta_+$$

sont homotopes dans $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(b,a)$. Or on sait déjà, comme $\kappa : X \longrightarrow \Pi_\Sigma(X)$ est un foncteur, que
$$\mathrm{hot\,ch}(u^{-1}) = (\mathrm{hot\,ch}(u))^{-1} \qquad \text{dans } \Pi_\Sigma(X)$$
où $\mathrm{hot}(\bullet)$ désigne la classe d'homotopie d'une chaine (ici classe dans $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(b,a)$ et dans $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b)$ respectivement). Donc l'énoncé à prouver c'est que $\mathrm{hot}(\mathrm{ch}(u)^o)$ est égal à l'*inverse* de $\mathrm{hot}(\mathrm{ch}(u))$ dans $\Pi_\Sigma(X)$. C'est donc ce qu'on a prouvé pour *tout* $u \in \mathrm{Fl}(X)$, dans le cas de $\Pi(X)$. L'argument doit marcher, du moment qu'il a un sens, i.e. que $\mathrm{ch}(u)^o$ est bel et bien un Σ-chemin, i.e. $u \in \Sigma$.

2°) La formule (2) signifie que pour tout chemin c de type Δ^n_+ (donc tautologiquement un

[page 71]

Σ-chemin), allant de a vers b, sa classe dans $\mathrm{Hom}_\Sigma(a,b)$ n'est autre que celle de $\mathrm{ch}(u)$, où u est le composé $u_n u_{n-1} \cdots u_1$. Mais on a
$$c = c_1 * c_2 * \cdots * c_n,$$
d'où dans $\Pi_\Sigma(X)$
$$\mathrm{hot}(c) = \mathrm{hot}(c_n)\mathrm{hot}(c_{n-1}) \cdots \mathrm{hot}(c_1),$$
or $\mathrm{hot}(c_i) = \mathrm{hot\,ch}(u_i) = \kappa(u_i)$, donc
$$\begin{aligned} \mathrm{hot}(c) &= \kappa(u_n)\kappa(u_{n-1}) \cdots \kappa(u_1) \\ &= \kappa(\underbrace{u_n u_{n-1} \cdots u_1}_{u}), \end{aligned}$$
puisque κ est un foncteur, donc
$$\mathrm{hot}(c) = \mathrm{hot\,ch}(u),$$
c.q.f.d.

Notons maintenant que si (X', Σ') est un deuxième couple d'une catégorie X' et d'un ensemble *'admissible'* de flèches de X', et si
$$f : X \longrightarrow X'$$
est un foncteur tel que
$$f(\Sigma) \subseteq \Sigma',$$
alors il existe un *unique* foncteur
$$\bar{f} = \Pi_\Sigma(f) : \Pi_\Sigma(X) \longrightarrow \Pi_{\Sigma'}(X')$$
qui 'prolonge' f, i.e. tel que le carré

[page 72]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\kappa_X"] \arrow[d, "f"'] & \Pi_\Sigma(X) \arrow[d, "\bar{f} = \Pi_\Sigma(f)"] \\ X' \arrow[r, "\kappa_{X'}"] & \Pi_{\Sigma'}(X') \end{tikzcd}$$

soit commutatif. L'unicité résulte du fait que sur les objets $\bar{f}$ doit être donné par f, et que sur les flèche la commutativité du carré implique que $\bar{f}$ est connu sur les flèches de la forme $\kappa_X(u)$, ainsi donc que sur les inverses de telles flèches, quand ces inverses sont inversibles, donc en particulier sur les $\kappa_X(u)^{-1}$ pour $u \in \Sigma$. Or toute flèche de $\Pi_\Sigma(X)$, provenant d'un chemin, est composé d'une suite de flèches de cette forme. Pour l'existence de $\bar{f}$, on note que f induit des foncteurs

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X; a, b) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X'; f(a), f(b))$$

qui commutent aux opérations φ^* sur les chemins associées aux foncteurs

$$\varphi : \tau \longrightarrow \tau',$$

d'où un homomorphisme de catégories fibrées sur $\underline{\mathrm{Ty}}$

$$f_{a,b} : \underline{\mathrm{Ch}}(X; a, b) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(X'; f(a), f(b)).$$

[page 73]

D'où une application sur les π_0, i.e.

$$\bar{f}_{a,b} : \mathrm{Hom}_\Sigma(a, b) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Sigma(f(a), f(b)),$$

donnée par

$$\bar{f}_{a,b}(\mathrm{hot}(c)) = \mathrm{hot}(f_{a,b}(c)).$$

On a évidemment, pour deux chemins $\gamma : a \longrightarrow b$ et $\gamma' : b \longrightarrow c$,

$$f_{a,c}(\gamma\gamma') = f_{b,c}(\gamma')f_{a,b}(\gamma),$$

ce qui prouve que $\bar{f}$ est compatible avec la composition. Il est trivial qu'il est compatible avec les identités (car $f_{a,a}$ transforme le chemin vide en a en le chemin vide en $f(a)$), donc on a un foncteur $\bar{f}$, et il rend bel et bien le carré commutatif.

On peut maintenant prouver la propriété universelle de $\Pi_\Sigma(X)$ et de

$$X \xrightarrow{\kappa} \Pi_\Sigma(X),$$

savoir que tout foncteur $f : X \longrightarrow X'$ tel que $u \in \Sigma \Longrightarrow f(u)$ inversible, se factorise *de façon unique* par $\Pi_\Sigma(X)$. L'unicité se voit comme tantôt ([20]). Pour l'existence, on note que f applique Σ dans l'ensemble Σ'

[20] C'est inutile, cf. ci-dessous.

[page 74]

des flèches inversibles de X' (lequel ensemble satisfait bien aux deux conditions d'admissibilité). Donc par ce qui précède on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "f"'] & \Pi_\Sigma(X) \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "\bar{f} = \Pi_\Sigma(f)"] \\ X' \arrow[r, "\kappa'", "\sim"'] & \Pi_{\Sigma'}(X'), \end{tikzcd}$$

où $\tilde{f}$ est uniquement déterminé. Comme κ' est un isomorphisme (comme on a vu tantôt, puisque Σ' [est] formé des flèches inversibles), l'existence et l'unicité de $\tilde{f}$ équivaut à la conclusion annoncée,

c.q.f.d.

Encore un sorite sur les classes d'homotopie d'éléments d'une catégorie X. De façon générale, on voit que X et $\Pi_\Sigma(X) = X\Sigma^{-1}$ ont mêmes composantes connexes, car si

[page 75]

a et b dans X sont reliés par une flèche de $X\Sigma^{-1}$, i.e. par un Σ-chemin, alors ils sont dans une même composante connexe de X. Mais l'inverse est également vrai, comme on voit p. ex. en prenant $\Sigma = \mathrm{Fl}(X)$, et en disant que dans le *groupoïde* $\Pi(X)$, où deux sommets sont dans une même composante [connexe] si et seulement si $\exists\ x \longrightarrow y$ (relation qui est non seulement transitive et reflexive, mais aussi symétrique dans un groupoïde). Un chemin

$$a \xrightarrow{\quad c \quad} b$$

sera appelé aussi une *homotopie* de a vers b. On dit que a et b sont *homotopes* s'il existe une homotopie c de a vers b, auquel cas il existe aussi une homotopie 'inverse' c^o de b vers a. Cela signifie aussi que a et b sont dans la même composante connexe de X, i.e. définissent le même élément de $\pi_0(X)$.

L'homotopie sera dite *simple* si c est de type Δ_+ ou Δ_-, i.e. si elle est donnée par une flèche $u : a \longrightarrow b$ ou $v : b \longrightarrow a$. Si on cherche une homotopie entre a et b, on essaiera de la trouver la plus 'courte' possible. Si on a une homotopie c de longueur l de a vers b, alors en remplaçant τ par $\tau_{\text{réd}}$, donc I_τ par $I_{\tau\,\text{réd}}$, le sous-intervalle réduit

[page 76]

correspondant, on trouve une homotopie de a à b de type $\tau_{\text{réd}}$, dont la longueur est égale à la *'longueur utile'* du type τ de c (ce qui justifie la terminologie). Notons que si

$$\tau = \Delta_\varepsilon^{l_1}\Delta_{-\varepsilon}^{l_2}\Delta_\varepsilon^{l_3}\cdots\Delta_{(-1)^r\varepsilon}^{l_r},$$

alors

$$\tau_{\text{réd}} = \Delta_\varepsilon\Delta_{-\varepsilon}\Delta_\varepsilon\cdots\Delta_{(-1)^r\varepsilon},$$

`[plutôt deux fois` $(-1)^{r-1}$`]` où r est la longueur utile de τ (la longueur pas utile étant $n = \sum_{i\in[1,r]} l_i$).

Quand on part d'une homotopie entre *foncteurs*

$$X \longrightarrow Y,$$

il est entendu qu'il s'agit d'homotopies dans la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$. (Ou, suivant le contexte, dans une sous-catégorie précisée de $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$.)

`[page 77]`

À la page 61, j'ai invoqué l'existence d'un *foncteur* de *'composition des chemins'*

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X;a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X;b,c) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X;a,c),$$

qui sur la fibre du premier membre au dessus de $(\tau,\tau') \in \mathrm{Ob}\,(\underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}})$, serait donné par

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X;a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X;b,c) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau\tau'}(X;a,c),$$

la composition des chemins de types précisés τ, τ'. Qu'on ait là un *foncteur,* pas seulement une application sur les ensembles d'objets, est assez évident, et peut s'exprimer par exemple à l'aide du diagramme d'amalga`[ma]`tion

$$\begin{tikzcd}
 & \varepsilon = \{0,1\} \arrow[dl, hook] \arrow[dr, hook] & \\
I_\tau \arrow[dr, hook] & & I_{\tau'} \arrow[dl, hook'] \\
 & I_{\tau\tau'} &
\end{tikzcd}$$

en le transformant par $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot,X)$ (au lieu de le transformer par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\cdot,X)$ seulement), du moins dans le cas particulier où $\Sigma = \mathrm{Fl}(X)$ (qui était celui de la page 61). Mais le passage aux flèches est assez évident - pour deux composés $c_1' \circ c_1$ et $c_2' \circ c_2$, de

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "c_1"] \arrow[d, equal] & b \arrow[r, "c_1'"] \arrow[d, equal] & c \arrow[d, equal] \\
a \arrow[r, "c_2"] & b \arrow[r, "c_2'"] & c
\end{tikzcd}
\qquad w : c_1 \to c_2, \quad w' : c_1' \to c_2'$$

`[on]` voit que les homomorphismes w'' du premier dans le second, dans $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X;a,c)$, qui sont l'identité sur le sommet d'indice $n+1$ des deux chemins (où $n = \mathrm{long}\,\tau$), correspondant à 1_τ et à $0_{\tau'}$, 'sont' exactement les couples

`[page 78]`

formés d'un homomorphisme $w : c_1 \longrightarrow c_2$ et $w' : c'_1 \longrightarrow c'_2$ dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(a,b)$ et $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(b,c)$ respectivement, et si w'', w, w' se correspondent ainsi, on posera

$$w'' = w * w'.$$

Il y a une transitivité évidente à vérifier pour voir que ça définit un *foncteur* $(*)$. On peut exprimer la situation à l'aide du diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[rr, "\pi\ (\text{composition})"] & & \underline{\mathrm{Ty}} \\ \underline{\mathrm{Ty}} & & \underline{\mathrm{Ty}}, & \end{tikzcd}$$

où p_1, p_2 sont les deux projections. On considère sur $\underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}}$ les trois catégories fibrés

$$p_1^*(\underline{\mathrm{CH}}_{\Sigma,\tau}(a,b)),\quad p_2^*(\underline{\mathrm{CH}}_{\Sigma,\tau'}(b,c)),\quad \pi^*(\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau\tau'}(a,c))$$

`[plutôt` $\pi^*(\underline{\mathrm{CH}}_{\Sigma,\tau\tau'}(a,c)$`]`, dont les fibres en (τ,τ') sont respectivement

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(a,b),\quad \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(b,c),\quad \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau\tau'}(a,c).$$

(On écrit $\underline{\mathrm{CH}}$ au lieu de $\underline{\mathrm{Ch}}$, pour indiquer que l'on considère les catégories envisagées comme des catégories (fibrées) *au dessus de* ($\underline{\mathrm{Ty}}$) ([21]).) Au dessus de $\underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}}$, on a un homomorphisme (cartésien) de catégories fibrées

$$(**)\qquad p_1^*(\underline{\mathrm{CH}}_{\tau}(a,b)) \times_{\underline{\mathrm{Ty}}\times\underline{\mathrm{Ty}}} p_2^*(\underline{\mathrm{CH}}_{\tau}(b,c)) \longrightarrow \pi^*(\underline{\mathrm{CH}}_{\tau}(a,c))$$

`[plutôt` $p_1^*(\underline{\mathrm{CH}}_{\tau}(a,b)) \times_{\underline{\mathrm{Ty}}\times\underline{\mathrm{Ty}}} p_2^*(\underline{\mathrm{CH}}_{\tau'}(b,c)) \longrightarrow \pi^*(\underline{\mathrm{CH}}_{\tau\tau'}(a,c))$`]`,

`[page 79]`

car c'est OK sur les fibres ($(*)$ page 77), et si

$$(\varphi,\varphi') : (\tau_1,\tau'_1) \longrightarrow (\tau,\tau') \qquad (\varphi : \tau_1 \longrightarrow \tau,\ \varphi' : \tau'_1 \longrightarrow \tau')$$

est une flèche dans $\underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}}$, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(b,c) \arrow[r, "\text{comp.}"] \arrow[d, "\varphi^*_{a,b}\times(\varphi'_{b,c})^*"] & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(a,c) \arrow[d, "(\varphi*\varphi')^*_{a,c}"] \\ \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau_1}(a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'_1}(b,c) \arrow[r, "\text{comp.}"] & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau_1\tau'_1}(a,c) \end{tikzcd}$$

[21] Mais il s'agit pour p_1^*, p_2^* et π^* de produits cartésiens ordinaires dans Cat, il n'y a pas à avoir peur et à écrire des $\underline{\mathrm{CH}}$ ...

`[plutôt` $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau\tau'}(a,c)$`]`, i.e. la composition des chemins d'extrémités fixés est compatible avec les images inverses de chemins par flèches entre les types de chemins.

Mais l'homomorphisme cartésien $(**)$ de catégories fibrées sur $\underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}}$ n'est pas tout à fait la même chose qu'un anodin foncteur

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(b,c) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,c).$$

La formule $(*)$ définit en tout cas une application sur les ensembles d'objets, puisque les ensembles d'objets de chacune des trois catégories envisagées se décompose en somme d'ensembles $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(\bullet,\bullet)$, où τ parcourt $\mathrm{Ty} = \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Ty}}$. Mais cela se prolonge-t-il de façon naturelle aux morphismes?

`[page 80]`

Mais voilà que je me rappelle que ce fameux produit cartésien $p_1^*(\text{fourbi}) \times p_2^*(\text{machin})$ n'est autre que le produit cartésien tout bête

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(b,c),$$

envoyé sur $\underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}}$ par le produit cartésien des deux foncteurs de projection

$$\begin{aligned} p_{a,b} : \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ty}} \\ p_{b,c} : \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(b,c) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ty}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(b,c) \arrow[d, "p_{a,b}\times p_{b,c}"] \\ \underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}} \end{tikzcd}$$

`[page 81]`

qui est bel et bien fibrant (comme produit cartésien de deux foncteurs fibrants) et a les fibres qu'il faut! On trouve donc bien, par le sorite général sur les foncteurs fibrants (ici sur $\underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}}$) un foncteur de catégories fibrées sur $\underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}}$

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(b,c) \longrightarrow \underbrace{\pi^*(\underline{\mathrm{CH}}_\Sigma(a,c))}_{=(\underline{\mathrm{Ty}}\times\underline{\mathrm{Ty}})\times_{\underline{\mathrm{Ty}}}\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,c)\ (^{22})} .$$

Comme on a d'autre part un foncteur du dernier membre (produit fibré) vers le facteur $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,c)$, on gagne. (On l'aurait retrouvé par le raisonnement direct que je m'apprêtais de faire, et que j'ai biffé - mais je suis plus heureux comme ça!)

[22] produit fibré par $\pi : \underline{\mathrm{Ty}} \times \underline{\mathrm{Ty}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ty}}$.

Pour bien faire, il faudrait prouver l'*associativité* des foncteurs de composition, pas seulement au niveau des objets, par des arguments comme ceci, mais ça revient simplement à une relation du type

$$(w'' * w') * w = w'' * (w' * w)$$

pour un système de trois flèches dans

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(a,b),\ \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(b,c) \text{ et } \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(c,d)$$

respectivement. Ça ne peut être que trivialement

`[page 82]`

vrai, mais fastidieux à expliciter.

Les sueurs froides sont terminées!

En résumé, le formalisme des $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X)$ et des $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X;a,b)$ développé jusqu'à présent donne satisfaction complète sur les points suivants :

a) Bon formalisme de composition des chemins (qui était dégueulasse avant).

b) Traitement élégant de la construction des catégories de fractions $\mathcal{M}\Sigma^{-1}$. Mais je m'attends que ce sera moins joli qu'avant, quand il s'agira de remplacer un $(\mathcal{M},\Sigma)$ par des $(\underbrace{\mathcal{M}(X)}_{=\underline{\mathrm{Hom}}(X,\mathcal{M})}, \Sigma_X)$ (X une catégorie d'indices) `[plutôt` $\underline{\mathrm{Hom}}(X^o,\mathcal{M})$`]`. C'est pour y pallier qu'il me faudra développer des énoncés de comparaison, entre la catégorie $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma$ construite ici, et d'autres dont le type dans Hot se prête aux calculs de façon plus directe, comme dans l'état premier de la question. De plus, on sera sûrement obligé d'en venir à des Ind-catégories, pour pouvoir suivre la variance de $\mathcal{M}(X)\Sigma_X^{-1}$ pour X variable.

c) Bon formalisme des 'homotopies' et des compositions des homotopies (ce qui est une autre façon de parler des chemins et de leur composition).

[page 83]

8 Le lemme d'homotopie pour les morphismes d'intervalles

C'est le suivant :

Lemme 1. *Soient $\tau, \tau' \in$ Ty, et $f, g : \tau \rightrightarrows \tau'$ deux morphismes dans $\underline{\mathrm{Ty}}$. Alors f, g sont homotopes dans la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}\,\underline{\mathrm{int}}(I_\tau, I_{\tau'})$ des morphismes croissants d'intervalles orientés de I_τ dans $I_{\tau'}$.*

Cette catégorie pourrait licitement se désigner par $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(\tau, \tau')$, ou $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau')$. C'est une sous-catégorie de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(I_\tau, I_{\tau'})$ de *tous* les foncteurs de I_τ dans $I_{\tau'}$, et une sous-catégorie pleine de la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}^\varepsilon(I_\tau, I_{\tau'})$ des foncteurs f qui sont compatibles avec la donnée des sources et des buts, i.e. qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \varepsilon = \{0,1\} \arrow[dl, hook', "(\sigma_\tau, \beta_\tau)"'] \arrow[dr, hook, "(\sigma_{\tau'}, \beta_{\tau'})"] & \\ I_\tau \arrow[rr, "f"] & & I_{\tau'}. \end{tikzcd}$$

Si f, g sont dans cette catégorie (pas forcément morphismes croissants d'ailleurs), une flèche de f dans g est donc la donnée, pour tout $i \in I_\tau$, d'une flèche $f(i) \xrightarrow{w_i} g(i)$ dans $I_{\tau'}$, avec les deux conditions :

a) Si $i \in \{0_\tau, 1_\tau\}$, $w_i = \mathrm{id}$, et

b) le carré commutatif habituel pour une flèche $i \longrightarrow j$ dans I_τ. (Il suffit d'avoir cette compatibilité pour les flèches de transition $\underline{u}_i : i - 1 \longrightarrow i$ dans I_τ $(i \in [1, \mathrm{long}\,\tau])$.)

Une autre façon de décrire cette catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}^\varepsilon$, c'est de dire que c'est la catégorie

[page 84]

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\tau(I_{\tau'}; 0_{\tau'}, 1_{\tau'}) \qquad (\simeq \underline{\mathrm{Hom}}^\varepsilon(I_\tau, I_{\tau'})),$$

mais $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(\tau, \tau')$ est la sous-catégorie pleine de cette catégorie formée des *chemins croissants* dans $I_{\tau'}$. Le lemme d'homotopie signifie aussi que cette catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(\tau, \tau')$ est toujours *connexe.* Elle n'est d'ailleurs pas forcément 0-connexe, car elle peut être vide. Notons ici, pour plus tard, la

Proposition 1 : *Soient $\tau, \tau' \in$ Ty, soient r, r' leurs longueurs utiles. Pour que* $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ty}}}(\tau, \tau')$ *soit non vide, il faut et il suffit que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes soit satisfaite :*

a) $r \geq r' + 1$

b) $r = r'$, *et (si* $r \neq 0$*)* τ *et* τ' *ont même direction initiale (de sorte que* $\tau_{\text{réd}} = \tau'_{\text{réd}}$*).*

(Démonstration $\pm$ immédiate.)

Notons que si τ, τ' n'ont pas même direction initiale, alors tout morphisme $\tau \longrightarrow \tau'$ est forcément dégénéré sur le premier intervalle critique de I_τ. On aura donc $\tau = \Delta_\varepsilon^{l_0} \cdot \tau_0$ (où l_0 est la longueur du premier intervalle critique, et où τ_0 a [la] direction initiale opposée de celle de τ), et un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau') \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\tau_0, \tau'),$$

où cette fois τ_0, τ' ont même direction initiale. On supposera donc désormais que *la direction initiale de* τ, τ' *est la même.* La condition $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau') \neq \emptyset$ équivaut maintenant à $\underline{r \geq r'}$, ce que nous pouvons supposer. Je vais alors décrire un élément canonique

[page 85]

F_0 de $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau')$, ainsi. Soient

$$I_1, I_2, \ldots, I_r$$

les intervalles critiques de I_τ, et

$$I'_1, I'_2, \ldots, I'_{r'} \qquad (r' \leq r)$$

ceux de $I_{\tau'}$. Le foncteur F_0 proviendra de morphismes d'intervalles orientés (comme

$$\left\{\begin{array}{ccc} I_1 & \xrightarrow{f_1} & I'_1 \\ I_2 & \xrightarrow{f_2} & I'_2 \\ & \cdots & \\ I_{r'} & \xrightarrow{f_{r'}} & I'_{r'} \end{array}\right. \qquad)$$

et sera donc forcément trivial sur les intervalles critiques I_α pour $r' < \alpha \leq r$ (il y en a si et seulement si $r > r'$). Comme I_τ, $I_{\tau'}$ ont même direction initiale, il s'ensuit que pour $\alpha \in [1, r']$, I_α et I'_α ont même signature (à savoir $\varepsilon_\alpha = (-1)^{\alpha+1}\varepsilon_1$, où ε_1 est la signature commune de I_1 et I'_1). Donc

$$I_\alpha = \Delta_{\varepsilon_\alpha}^{l_\alpha}, \qquad I'_\alpha = \Delta_{\varepsilon_\alpha}^{l'_\alpha},$$

et on définit f_α comme

$$f_\alpha = \mathfrak{f}_{\varepsilon_\alpha, l'_\alpha} * \mathrm{triv}_\alpha,$$

où

$$\mathfrak{f}_{\varepsilon_\alpha, l'_\alpha} : \Delta_{\varepsilon_\alpha} \longrightarrow \Delta_{\varepsilon_\alpha}^{l'_\alpha}$$

et où

$$\mathrm{triv}_\alpha : \Delta_{\varepsilon_\alpha}^{l_\alpha - 1} \longrightarrow 1.$$

En d'autres termes, pour $\varepsilon = +1$ (p. ex.) on doit définir un morphisme des intervalles type $\underbrace{\mathbf{\Delta}^+_{l_\alpha}}_{=[0,l_\alpha]} \longrightarrow \underbrace{\mathbf{\Delta}^+_{l'_\alpha}}_{=[0,l'_\alpha]}$, et on pose (avec les numérotations internes à $\mathbf{\Delta}_{l_\alpha}$, $\mathbf{\Delta}_{l'_\alpha}$)

$$f_\alpha(0) = 0, \qquad f_\alpha(i) = l'_\alpha \ \text{ pour } i \in [1, l_\alpha].$$

`[page 86]`

L'idée donc, c'est d'être dans les dispositions d'un voyageur qui, tenu à un plan de voyage par étapes décrit par τ, voudrait arriver aussi vite que possible à $1_{\tau'}$, en partant de $0_{\tau'}$. Il va dès la première étape $\Delta_\varepsilon \subseteq I_1$, se porter jusqu'au bout de I'_1, regrettant ne pas pouvoir aller plus loin (à cause du plan de voyage). Il doit rester inactif jusqu'à ce qu'il soit arrivé au moment marqué par l'extrémité finale de I_1 (si celle-ci est au delà de celle de sa première flèche de transition, i.e. si $l_1 > 1$), puis il fait son deuxième grand pas jusqu'à l'extrémité terminale de I'_2 etc. Il peut espérer, à chaque moment de son voyage, être en avance (ou du moins pas en retard) sur les autres voyageurs, qui auraient suivi de tactiques de progression différentes. Si cet espoir était justifié, cela signifierait que F_0 serait un plus grand élément de $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau')$ (**NB** toutes ces catégories $\underline{\mathrm{Hom}}$ entre intervalles sont 'ordonnées', i.e. il y a au plus une flèche entre deux objets), i.e. un objet final. Cela impliquerait que $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau')$ serait même contractile - chose peut-être vraie, mais sûrement pas de façon si simpliste je crains. Je me suis d'ailleurs canulé : F_0 est sans doute bien un 'plus grand' élément, mais pour l'ordre défini par la numérotation des sommets de $I_{\tau'}$ (donc $F \leq G$ si et seulement si $F(i) \leq G(i)\ \forall i \in I_\tau$), et nullement pour l'ordre défini par la structure de catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau')$.

`[page 87]`

L'idée pour prouver la connexité de $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau')$, c'est de ramener tout $F \in \mathrm{Hom}(\tau, \tau')$, par une suite d'homotopies simples, à la forme normale. Rappelons que F est donné par une suite croissante de flèches de transition

$$\underline{u}_{i_1},\ \underline{u}_{i_2},\ \dots\ ,\ \underline{u}_{i_s}, \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_s,$$

et une suite d'entiers ≥ 1

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ ,\ \lambda_s$$

avec la condition que

$$(*) \qquad \Delta^{\lambda_1}_{\varepsilon_{i_1}} \Delta^{\lambda_2}_{\varepsilon_{i_2}} \cdots \Delta^{\lambda_s}_{\varepsilon_{i_s}} = \tau'.$$

Les $\underline{u}_{i_\alpha}$ sont les flèches de transition de I_τ *critiques* pour F, i.e. non dégénérées pour F, et λ_α est la *partie* de $\underline{u}_{i_\alpha}$ pour F. Le foncteur normalisé ('pressé') F_0 est distingué par les conditions suivantes a) et b) `[et c)]`. Tout d'abord :

a) La suite des signes $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_s}$ est 'alternée', i.e. $\varepsilon_{i_\alpha} \neq \varepsilon_{i_{\alpha+1}}$ ($\alpha \in [1, s-1]$). (Cela traduit le fait que le voyageur pressé ne fait pas en plusieurs pas ce qu'il pourrait faire en un seul.)

Comme le premier de ces signes est forcément $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$, cela signifie que la suite des signes est la même que celle des $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r'}$ (à la longueur près). Mais mieux, que l'expression $(*)$ de τ' est son unique expression réduite, donc que $s = r'$ (longueur utile de τ'), et que les λ_i sont les longueurs l'_i des intervalles critiques de $I_{\tau'}$.

`[page 88]`

Soit donc $\alpha \in [1, s = r']$, et considérons la flèche de transition F-critique $\underline{u}_{i_\alpha}$, soit j_α l'indice marquant l'intervalle critique de I_τ contenant la partie de $\underline{u}_{i_\alpha}$ dans I_τ,

$$\underline{u}_{i_\alpha} \in \mathrm{Fl}(I_{j_\alpha}),$$

alors F induit des morphismes (croissants) d'intervalles orientés

$$F_\alpha = F|I_{j_\alpha} : I_{j_\alpha} \longrightarrow I'_\alpha$$

et est trivial sur les autres intervalles critiques (ceux pas de la forme I_{j_α}). La donnée des F_α détermine donc F sur les I_{j_α}, donc sur *tous* les I_j, donc partout (par l'opération $*$ de composition par recollement). De plus la condition a) assure que chaque F_α est de nature assez particulière : une seule flèche de transition critique $\underline{u}_{i_\alpha}$. De plus, pour qu'on ait $F = F_0$, il faudra :

b) $\forall \alpha \in [1, r']$, $\underline{u}_{i_\alpha}$ est la *première* flèche de transition de l'intervalle critique I_{j_α} qui la contient.

Et enfin :

c) La suite des intervalles critiques de I_τ

$$I_{j_1},\ I_{j_2},\ \ldots\ ,\ I_{j_{r'}} \qquad \text{(de signes alternés } \varepsilon_1,\ -\varepsilon_1,\ \varepsilon_1,\ \ldots)$$

associés aux flèches F-critiques, n'est autre que celle

$$I_1,\ I_2,\ \ldots\ ,\ I_{r'}$$

des r' premiers intervalles critiques de I_τ, i.e.

$$(j_1, j_2, \ldots, j_{r'}) = (1, 2, \ldots, r').$$

`[page 89]`

Ceci vu, l'idée naturelle pour 'déformer' F en F_0, c'est de trouver une suite d'homotopies qui transforment F de façon à lui faire acquérir successivement les caractéristiques a), b), c) du voyageur pressé. Au besoin, pour aller plus vite au but, on utilisera l'hypothèse de récurrence sur $n = \operatorname{long} \tau$, que le théorème de connexité est déjà prouvé quand I est de longueur $\leq n-1$. (NB Ce théorème est trivial pour $n \leq 1$, car alors les catégories $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau')$ sont toutes ou bien vides, ou bien ponctuelles.)

`[page 90]`

1) On veut assurer a). Pour ceci, on utilise l'hypothèse de récurrence, pour remplacer un groupe de `[mot illisible]` flèches critiques consécutives de même signe, par une seule flèche critique. Cette méthode ne foire que si les flèches critiques sont toutes de même signe ε et incluent $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_n$. Mais l'hypothèse de récurrence appliquée à $I = [1, n-1] \subseteq I_\tau$ nous ramène au cas où il n'y a que deux flèches critiques $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_n$. Si le premier intervalle critique n'est pas réduit à Δ_ε, i.e. soit de longueur 2, alors l'hypothèse de récurrence appliquée à $I = [1, n] \subseteq I_\tau$ nous ramène au cas où les deux flèches critiques sont $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$, et on est

`[page 91]`

alors ramené au cas où $\boxed{I = \Delta^2_\varepsilon,\ \tau' = \Delta^2_\varepsilon.}$ Sinon, au cas où $\boxed{\tau = \Delta_\varepsilon \Delta^{l_2}_{-\varepsilon} \Delta_\varepsilon,\ \tau' = \Delta^2_\varepsilon,}$ et où les deux flèches critiques sont encore la première et la dernière, et $\tau' = \Delta^2_\varepsilon$. Ce sont là les deux cas irréductibles, qu'il faudra traiter à part.

Ces cas admis, on a donc moyen pour définir F de façon à satisfaire a). Ensuite on veut :

2) Assurer que la suite des intervalles critiques I_{j_1}, I_{j_2}, ..., $I_{j_{r'}}$ qui contient les flèches critiques $\underline{u}_{i_1}$, ..., $\underline{u}_{i_{r'}}$, soit la suite I_1, ..., $I_{r'}$. C'est encore immédiat par l'hypothèse de récurrence, le seul cas irréductible étant celui où $r' = 1$ (une seule flèche critique), et où il s'agit de faire descendre cette flèche critique jusqu'à $\underline{u}_1$. Si I_1 est de longueur > 1, alors on fait descendre en $\underline{u}_2$ par hypothèse de récurrence, et le cas irréductible est celui où $\boxed{\tau = \Delta^2_\varepsilon,\ \tau' = \Delta_\varepsilon,}$ une flèche critique $\underline{u}_2$, la faire descendre en $\underline{u}_1$. Si par contre I_1 `[est]` de longueur 1, le cas irréductible est $\boxed{\tau = \Delta_\varepsilon \Delta^{l_2}_{-\varepsilon} \Delta_\varepsilon,\ \tau' = \Delta_\varepsilon,}$ une flèche critique $\underline{u}_{l_2+2}$, la faire descendre en $\underline{u}_1$.

Sous réserve de traiter les deux nouveaux cas irréductibles, on peut déformer F en un foncteur qui satisfait à a) et à c). Reste à normaliser chacun des $F_\alpha : I_\alpha \longrightarrow I'_\alpha$ ($\alpha \in [1, r']$). Donc on est ramené à $\Delta^n_\varepsilon \longrightarrow \Delta_\varepsilon$: une seule flèche critique $\underline{u}_\alpha$, $\alpha \in [1, n]$, à faire descendre en $\underline{u}_1$. Si $n \geq 2$, par hypothèse de récurrence elle descend en $\underline{u}_2$, cas supposé traité en 2°). Donc

`[page 92]`

on gagne, sous réserve de traiter les 4 cas irréductibles.

A) Cas $\tau = \Delta^2_\varepsilon$, $\tau' = \Delta^2_\varepsilon$ ou Δ_ε.

La catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^2_\varepsilon, \Delta_\varepsilon)$ a deux éléments, les morphismes $\Delta^2_\varepsilon \longrightarrow \Delta_\varepsilon$ correspondent aux flèches de transition de Δ^2_ε ($= \mathbf{\Delta}^+_2$ ou $\mathbf{\Delta}^-_2$). Dans le cas $\varepsilon = +1$, ce sont les deux applications de $\{0, 1, 2\}$ dans $\{0, 1\}$, qui appliquent 0 en 0, 2 en 1, et 1 soit en 1 (F_0), soit en 1 `[plutôt en 0]` (F_1).

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$$

$$0 \longrightarrow 1$$

On a évidemment une flèche $F_1 \longrightarrow F_0$ (le voyageur pressé arrive plus vite ...). Similaire pour $\varepsilon = -1$,

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^2_\varepsilon, \Delta_\varepsilon) \simeq \mathbf{\Delta}^1, \qquad \text{catégorie 0-connexe.}$$

La catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^2_\varepsilon, \Delta^2_\varepsilon)$ a trois éléments, s'identifiant à l'ensemble des parties non vide de l'ensemble $\mathrm{Tr}(\tau)$ à deux éléments des flèches de transition $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ de τ : il y a $F_{\underline{u}_1} = F_0$, $F_{\underline{u}_2}$, $F_{\underline{u}_1, \underline{u}_2}$. Si $\varepsilon = +1$, il s'agit des applications croissantes (sans plus) de $\{0, 1, 2\}$ dans $\{0, 1, 2\}$, appliquant 0 en 0, 2 en 2, et 1 en ce qu'elle voudra.

Donc $1 \longmapsto 2$ correspond à F_0

$1 \longmapsto 1$ correspond à F_1

$1 \longmapsto 0$ correspond à F_2

et on a bien sur $F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0$,

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^2_\varepsilon, \Delta^2_\varepsilon) \simeq \mathbf{\Delta}^2, \qquad \text{catégorie 0-connexe.}$$

Dans ces deux cas, deux éléments de $\mathrm{Hom}(\tau, \tau')$ sont reliés par une homotopie *simple.*

[page 93]

B) Cas $\tau = \Delta_\varepsilon \Delta^l_{-\varepsilon} \Delta_\varepsilon$, $\tau' = \Delta^2_\varepsilon$ ou Δ_ε.

Notons que l'on a, pour $\tau, \tau' \in \underline{\mathrm{Ty}}$ quelconque, un isomorphisme de catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\tau'^o, \tau^o),$$

exprimant simplement que

$$\tau \longmapsto \tau^o$$

est un [2]-foncteur de $\underline{\mathrm{Ty}}$ dans $\underline{\mathrm{Ty}}$, et même un automorphisme de cette [2]-catégorie. Donc dire que $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau')$ est connexe revient à dire que $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau^o, \tau'^o)$ l'est. Donc on peut supposer ci-dessus que $\varepsilon = +1$ (et pareil dans A!).

$$\tau : \quad \longrightarrow \underbrace{\longleftarrow \longleftarrow \cdots \longleftarrow}_{l} \longrightarrow$$

$$\tau' : \quad \longrightarrow \longrightarrow \quad \text{ou} \quad \longrightarrow .$$

Mais tous les morphismes $\tau \longrightarrow \tau'$ sont triviaux sur l'intervalle critique I_2 (rétrograde), ce qui implique que

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau') \xleftarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^2_\varepsilon, \tau'),$$

via le foncteur de contraction canonique

$$I_\tau \longrightarrow I_{\Delta^2_\varepsilon} = \mathbf{\Delta}^2.$$

Or dans A on a vu que $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^2_\varepsilon, \tau')$ est connexe (pour τ' de la forme Δ_ε ou Δ^2_ε).

On a gagné!

`[page 94]`

9 Théorème d'homotopie pour les catégories de chemins

Soient X une catégorie, $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(X)$ `[un]` ensemble admissible de flèches dans X, $a, b \in \mathrm{Ob}\, X$. Considérons pour $\tau \in \mathrm{Ty}$ variable, les catégories

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X), \qquad \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X; a, b),$$

qui forment les fibres des catégories Cat-fibrées

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(X) \arrow[dr] & & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(X; a, b) \arrow[ll, "\text{incl.}"'] \arrow[dl] \\ & \underline{\mathrm{Ty}} & \end{tikzcd}$$

sur la catégorie $\underline{\mathrm{Ty}}$. Ainsi, pour $\tau, \tau' \in \mathrm{Ty}$, et pour toute

$$\varphi : \tau \longrightarrow \tau',$$

on a un carré commutatif d'homomorphismes

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X) \arrow[d, "\varphi^*_X"'] & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X; a, b) \arrow[l, "\text{incl.}"'] \arrow[d, "\varphi^*_{a,b}"] \\ \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X) & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X; a, b), \arrow[l, "\text{incl.}"'] \end{tikzcd}$$

avec transitivité pour φ variable (composition $\psi \circ \varphi$ de flèches dans $\underline{\mathrm{Ty}}$).

En fait, pour φ variable dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau')$, les foncteurs images inverses φ^*_X, $\varphi^*_{a,b}$ dépendent *fonctoriellement* de φ; i.e. on a des *foncteurs*

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X), \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X)) \\ \underline{\mathrm{Hom}}(\tau, \tau') \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X; a, b), \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X; a, b)) \end{tikzcd}$$

[page 95]

Cela provient de l'inclusion

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\tau,\tau') \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\varepsilon}(I_\tau, I_{\tau'})$$

et de la description des catégories $\underline{\mathrm{Ch}}_\tau$, $\underline{\mathrm{Ch}}_{\tau'}$ comme catégories de foncteurs, telle

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_\tau,\Sigma}(I_\tau, X),$$

où Σ_τ désigne l'ensemble des flèches dans I_τ qui sont soit inversibles, soit *rétrogrades.* (Cet ensemble de flèches est admissible, car stable par composition.) On désigne par $\underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_\tau,\Sigma}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}$ formée des foncteurs qui appliquent Σ_τ dans Σ. Or de façon générale, si

$$(I,\Sigma_I),\ \ (I',\Sigma_{I'}),\ \ (X,\Sigma)$$

sont trois catégories, munies d'ensembles admissibles de flèches, considérant les foncteurs $\varphi : I \longrightarrow I'$ avec $\varphi(\Sigma_I) \subseteq \Sigma_{I'}$, alors le foncteur familier

$$\underline{\mathrm{Hom}}(I,I') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(I',X), \underline{\mathrm{Hom}}(I,X))$$

(transposé du foncteur de composition

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\mathrm{Hom}}(I,I') & \times & \underline{\mathrm{Hom}}(I',X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(I,X) \\ (\varphi & , & F') & \longmapsto & F'\circ\varphi \end{array} \quad),$$

se généralise en un foncteur

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_I,\Sigma_{I'}}(I,I') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_{I'},\Sigma}(I',X), \underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_I,\Sigma}(I,X)),$$

transposé du foncteur de composition

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_I,\Sigma_{I'}}(I,I') \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_{I'},\Sigma}(I',X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_I,\Sigma}(I,X)$$

induit par $(*)$.

[page 96]

Comme toute

$$\varphi : \tau \longrightarrow \tau'$$

induit

$$\varphi : I_\tau \longrightarrow I_{\tau'},$$

transformant flèches rétrogrades en flèches identiques ou rétrogrades, i.e.

$$\varphi(\Sigma_\tau) \subseteq \Sigma_{\tau'},$$

on trouve le premier des deux foncteurs $(*)$ annoncés page 94, qui est associé par transposition au foncteur γ

$$(*)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=large]
\underline{\mathrm{Hom}}(\tau,\tau') \times \underbrace{\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X)}_{\simeq\, \underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_{\tau'},\Sigma}(I_{\tau'},X)} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"'] & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X) \arrow[d, equal] \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_\tau,\Sigma_{\tau'}}(I_\tau, I_{\tau'}) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_{\tau'},\Sigma}(I_{\tau'},X) \arrow[r, dotted, "\gamma_0"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\Sigma_\tau,\Sigma}(I_\tau,X)
\end{tikzcd}$$

déduit du foncteur composition γ_0 dans ce diagramme : $\gamma = \gamma_0 \circ \mathrm{can.}$ D'autre part, ce foncteur de composition γ induit visiblement un foncteur sur les sous-catégories de chemins à source et but fixés

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\tau,\tau') \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X;a,b) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X;a,b),$$

d'où la deuxième des deux flèches annoncées dans $(*)$ p. 94.

Cela montre donc que si

$$\varphi_1,\varphi_2 : \tau \rightrightarrows \tau'$$

sont deux morphismes de τ dans τ' homotopes dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\tau,\tau')$, alors les foncteurs induits entre catégories de Σ-chemins ou entre catégories de Σ-chemins à extrémités précisés :

[page 97]

$$\begin{array}{rccc}
\varphi^*_{1X}, \varphi^*_{2X} : & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X) & \rightrightarrows & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X), \\
(\varphi_1)^*_{a,b}, (\varphi_2)^*_{a,b} : & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X;a,b) & \rightrightarrows & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X;a,b)
\end{array}$$

sont également homotopes.

Or le lemme d'homotopie nous assure que l'hypothèse $\varphi_1 \sim \varphi_2$ est *toujours* satisfaite. Donc :

Théorème d'homotopie sur les opérations universelles sur les chemins. *Soient X, Σ, a, b comme dessus, et $\tau,\tau' \in \mathrm{Ty}$ telles que $\mathrm{Hom}(\tau,\tau') \neq \emptyset$. Alors les foncteurs φ^*_X, $\varphi^*_{X;a,b}$ induits par un $\varphi \in \mathrm{Hom}(\tau,\tau')$*

$$\left\{\begin{array}{rccc}
\varphi^*_X : & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X) \\
\varphi^*_{X;a,b} : & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X;a,b) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X;a,b)
\end{array}\right.$$

ne dépendent pas de φ, à homotopie près.

On peut préciser cet énoncé, de telle façon que l'énoncé pour les $\varphi^*_{X;a,b}$ apparaisse, comme il devrait, comme corollaire pour celui sur φ^*_X. Pour ceci, on va regarder les catégories de chemins dans X comme catégories *au dessus de X,* par les foncteurs 'source et but' :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X) \arrow[dr, "{(\sigma_\tau,\beta_\tau)}"'] & & \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X) \arrow[dl, "{(\sigma_{\tau'},\beta_{\tau'})}"] \\
& X \times X &
\end{tikzcd}$$

[page 98]

Alors le foncteur $(*)$ (p. 94) se factorise par la sous-catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}/X\times X}(\cdot,\cdot)$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(\cdot,\cdot)$ formée des foncteurs qui commutent aux foncteurs de projection dans $X\times X$, et les homomorphismes entre tels foncteurs qui s'effectuent par des flèches 'verticales' de la catégorie but (i.e. par des flèches au dessus de flèches identiques de la catégorie base $X\times X$) :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\tau,\tau') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}/X\times X}(\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(X), \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(X)).$$

Donc dans l'énoncé du théorème d'homotopie, on peut préciser que l'homotopie se fait dans cette sous-catégorie, i.e. s'effectue par une suite d'homotopies simples qui sont des morphismes de foncteurs entre catégories au dessus de $X\times X$. Cela implique alors l'énoncé d'homotopie sur les $\varphi^*_{X;a,b}$.

`[page 99]`

10 Question de comparaison pour les catégories Cat-fibrées satisfaisant au 'théorème d'homotopie' (base filtrante)

Nous allons généraliser maintenant au cas d'une catégorie (Cat)-fibrée sur une autre

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\pi"'] \\ T, \end{tikzcd}$$

en pensant surtout au cas $T = \underline{\mathrm{Ty}}$, $C = \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma}(X; a, b)$. L'hypothèse essentielle est la suivante :

(Hypothèse d'homotopie)	Si $t, t' \in \mathrm{Ob}\, T$ sont tels que $\mathrm{Hom}(t, t') \neq \emptyset$, alors les foncteurs $\varphi^* : C_{t'} \longrightarrow C_t$ associés aux $\varphi \in \mathrm{Hom}(t, t')$ sont homotopes.

Ils définissent donc une seule et même flèche dans Cat hot. Je désigne par T_{ord} ou T_{o} l'ensemble $\mathrm{Ob}\,(T)$, avec comme relation d'ordre celle déduite de la structure de catégorie :

$$t \leq t' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Hom}_T(t, t') \neq \emptyset,$$

de sorte qu'on a un foncteur

$$T \longrightarrow T_{\mathrm{o}}$$

qui est *universel* pour les foncteurs de T dans des catégories 'ordonnées' (i.e. où toute flèche est monomorphique `[non, cf.` $\bullet \rightrightarrows \bullet$`; plutôt, où toujours` $\#\mathrm{Hom}(a, b) \leq 1$ `(admettant des isomorphismes non identiques)]`) ou pour les foncteurs F sur T tels que F soit constant sur tout $\mathrm{Hom}(t, t')$. L'hypothèse d'homotopie peut s'exprimer en disant que le foncteur composé

$$\begin{array}{ccccc} T^o & \longrightarrow & \mathrm{Cat} & \longrightarrow & \mathrm{Cat\,hot} \\ t & \longmapsto & C_t & & \end{array}$$

`[page 100]`

se factorise (évidemment de façon unique) en un foncteur

$$H_C : T_{\mathrm{o}}^o \longrightarrow \mathrm{Cat\,hot},$$

i.e. qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T^o \arrow[r, "t \mapsto C_t"] \arrow[d] & \mathrm{Cat} \arrow[d] \\ T^o_{\mathrm{o}} \arrow[r, "H_C"] & \mathrm{Cat\,hot}. \end{tikzcd}$$

Nous allons supposer de plus :

(Hypothèse de filtration)	L'ensemble ordonné T_{o} associé à T est *filtrant* décroissant (filtrant à gauche), i.e. si $t, t' \in \mathrm{Ob}\, T$, il existe $t'' \in \mathrm{Ob}\, T$ et des flèches $t'' \longrightarrow t$, $t'' \longrightarrow t'$.

Cette hypothèse est bien satisfaite dans $\underline{\mathrm{Ty}}$, car pour $\tau, \tau' \in \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Ty}} = \mathrm{Ty}$, il suffit de prendre $\tau\tau'$, qui s'envoie dans τ par $\mathrm{id}_\tau * p_{\tau'}$, dans τ' par $p_\tau * \mathrm{id}_{\tau'}$, où $p_\tau : \tau \longrightarrow 1$ est le morphisme de τ dans l'objet final.

Ainsi, H_C définit un ind-objet de Cat hot, que nous allons désigner par $\underline{\underline{C}}$. Si on suppose de plus :

(Hypothèse de dénombrabilité, toujours satisfaite si $\mathrm{card}\, T_{\mathrm{o}} \leq \aleph_0$)	T_{o} admet un sous-ensemble *dénombrable* cofinal à gauche.

alors cet ind-objet de Cat hot peut être défini, de beaucoup de façons, en termes

`[page 101]`

d'un système inductif dans Cat (pas seulement dans Cat hot)

$$(C_n)_{n \in \mathbf{N}},$$

d'où on récupère l'ind-objet $\underline{\underline{C}}$ dans Cat hot en passant au système inductif correspondant dans Cat hot, puis à l'ind-objet associé.

Pour construire le système inductif C_n, il suffit de prendre une chaîne infinie

$$t_0 \longleftarrow t_1 \longleftarrow t_2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow t_n \longleftarrow t_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

de morphismes dans T, telle que l'ensemble des t_i soit cofinal à gauche dans T_{o}. On va supposer de plus C *strictement fibrée* sur T (i.e. provenant d'un véritable foncteur $T^o \longrightarrow \mathrm{Cat}$, i.e. on peut choisir les foncteurs images inverses

$$\varphi^* : C_{t'} \longrightarrow C_t$$

de façon transitive stricte, pas seulement transitive à isomorphisme près) - cas auquel on peut toujours se ramener d'ailleurs par l'astuce de Giraud. Cette hypothèse est d'ailleurs vérifiée dans le cas $\underline{\mathrm{Ch}_\Sigma}(X; a, b)$ sur $\underline{\mathrm{Ty}}$. Ainsi, les

$$(C_{t_i})_{i \in \mathbf{N}}$$

forment un système inductif de catégories indexées par $\mathbf{N}$, le morphisme de transition

$$C_n \longrightarrow C_{n'} \qquad \text{i.e. } C_{t_n} \longrightarrow C_{t_{n'}}$$

`[page 102]`

étant le foncteur image inverse $\varphi^*_{n,n'}$, où

$$\varphi_{n,n'} : t_{n'} \longrightarrow t_n$$

est le composé des $t_{n'} \longrightarrow t_{n'-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow t_n$. (Si on n'avait pas transitivité stricte, on définirait $\varphi^*_{n,n'}$ comme le composé des foncteurs image inverse par des flèches de transition successives $t_{n'} \longrightarrow t_{n'-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow t_{n+1} \longrightarrow t_n$, ce ne serait $\varphi^*_{n,n'}$ qu'à isomorphisme canonique près.)

Soit

$$C_\infty = \varinjlim_n C_n = \varinjlim_n C_{t_n}$$

la catégorie $\varinjlim$. (Elle sera surtout sympathique si on a pu choisir le système $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de telle façon que les foncteurs de transition

$$C_{t_n} \longrightarrow C_{t_{n-1}}$$

soient pleinement fidèles, et peut-être même `[des]` monomorphismes, de telle façon que les C_n s'identifient à des sous-catégories pleines de leur limite inductive C_∞.) Je voudrais comprendre les relations précises entre les trois genres d'objets suivants :

(a) C elle-même (comme objet dans Cat, pas de Cat$/T$), et surtout les objets de Cat hot et de Hot qui lui correspondent.

`[page 103]`

(b) C_∞, et les objets de Cat hot et de Hot qui lui correspondent. Dans quelle mesure ces deniers sont-ils indépendant du choix du système projectif cofinal à gauche $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans T? Quel est le rôle de C_∞? Est-elle canoniquement isomorphe à C dans Cat hot, ou dans Hot? (Auquel cas la question de son 'rôle' me semblerait résolue!)

(c) Le ind-objet H_C dans Cat hot, et l'ind-objet de Hot qu'il définit.

Je note que l'ind-objet H_C, et aussi les catégories C_∞ construites comme dessus, ne changent pas quand on remplace T par une sous-catégorie T' cofinale à gauche, ou aussi par une catégorie de la forme T/t_0 ($t_0 \in \operatorname{Ob} T$), qui donne lieu à l'ensemble ordonnée associé

$$(T/t)_\mathrm{o} = T_\mathrm{o}/t = \{t \in T_\mathrm{o} \mid t \leq t_0\}$$

`[plutôt` $(T/t_0)_\mathrm{o} = T_\mathrm{o}/t_0 = \{t \in T_\mathrm{o} \mid t \leq t_0\}$`]`. Si la relation entre les objets dans a), et ceux dans b) et dans c), est très étroite, on en concluerait que le 'type' de C dans Cat hot, ou dans Hot suivant le cas, ne change pas en remplaçant C par

[page 104]

$C \times_T T'$ ou par $C/t_0 \simeq C \times_T T/t_0$. Bien mieux, elle ne changerait pas en remplaçant T par $(\mathbf{N})^o$, la catégorie (ordonnée) opposée à $\mathbf{N}$ (ayant donc un unique objet final), et la catégorie fibrée C sur T par la catégorie $C_{\underline{t}}$ induite par C sur $(\mathbf{N})^o$, via le foncteur

$$\underline{t} : (\mathbf{N})^o \longrightarrow T$$

défini par le système projectif $\underline{t} = (t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans T. Cela signifierait donc que pour comprendre le type homotopique (au sens strict, i.e. dans Cat hot, ou large, i.e. dans Hot) de C, on peut le 'nettoyer' de façon draconienne, la base T étant vue comme une sorte de gangue un peu vaseuse, ou du moins pléthorique.

d) De toutes façons, si T' est une autre catégorie filtrante à gauche, et

$$\alpha : T' \longrightarrow T$$

un foncteur cofinal à gauche, de sorte que C sur T, et $C' = C \times_T T'$ sur T', définissent essentiellement le 'même' objet de Ind Cat hot, et que la catégorie C'_∞ pour C' sur T' fait partie des catégories C_∞ pour C sur T - on peut se demander

[page 105]

si le foncteur canonique

$$C' \longrightarrow C$$

est également toujours un isomorphisme dans Cat hot, ou sinon, du moins dans Hot.

Un intérêt particulier s'attache à $\pi_0(C)$, et de plus à sa variance pour C sur T variable de la façon suivante. Si S est dans Cat, on regarde les catégories

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(S, C_t) \qquad (t \in T),$$

on trouve un foncteur

$$t \longmapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(S, C_t), \qquad T^o \longrightarrow (\mathrm{Cat}),$$

d'où une catégorie fibrée sur T, que je vais désigner par

$$\underline{\mathcal{H}om}_T(S_T, C)$$

(Sauf erreur, elle s'interprète comme la catégorie fibrée sur T correspondante au champ sur $\mathrm{Top}(T) = T^\wedge$ du morphisme de T-champs de S_T dans C, où $S_T = S \times T$ (considérée comme catégorie fibrée sur T à fibre essentiellement constante S) dans C. Ici j'identifie catégorie fibrée sur T, et champs sur le topos $T^\wedge$.) Il est immédiat que la propriété d'homotopie (p. 99) est stable par passage de C à $\underline{\mathcal{H}om}_T(S_T, C)$. On s'intéresse à la variation de

$$\pi_0(\underline{\mathcal{H}om}_T(S_T, C))$$

[page 106]

comme contrafoncteur en S,

$$H : S \longmapsto \pi_0 \underline{\mathcal{H}om}_T(S_T, C) \qquad (\mathrm{Cat})^o \longrightarrow (\mathrm{Ens}),$$

et à une éventuelle expression de ce contrafoncteur H en termes de l'ind-objet H_C de Cat hot, par la formule hypothétique

$$H(S) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathrm{Cat\,hot})}(\gamma(S), H_C),$$

où

$$\gamma : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Cat\,hot}$$

est le foncteur canonique. Si on avait un tel isomorphisme canonique fonctoriel en S, cela donnerait une description (à isomorphisme unique près) de l'ind-objet H_C en termes du foncteur précédent H sur Cat.

Il me vient un doute ici, en vue de l'exemple $T = \underline{\mathrm{Ty}}$, $C = \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X; a, b)$. Les trois types d'objets a) b) c) ont le même π_0, et il est sûr que 'c'est le bon'. D'autre part, pour une catégorie paramètre variable S, il est sûr aussi que le bon foncteur en S est

$$S \longmapsto \pi_0(\underline{\mathrm{Hom}}_T(S_T, C)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind\,Cat\,hot}}(S, H_C),$$

isomorphe aussi, *si S est finie,* à

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(S, C_\infty),$$

ce qui montre que, du moins pour des arguments $S \in (\mathrm{Cat})$ qui sont des catégories *finies*, les objets

[page 107]

C_∞ et H_C sont 'bons', il nous permettent de décrire un foncteur important qui domine la situation envisagée. Moyennant une hypothèse très forte, mais satisfaite dans les cas importants, on peut dans ces deux formules remplacer Cat hot par Hot.

Par contre, sauf pour le cas où S est réduit à un point et où $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}$ ou $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}$ de S dans C n'est autre que $\pi_0(C)$ ($\simeq \pi_0(C_\infty) \simeq \pi_0(H_C)$), donc effectivement 'bon', je ne sais pas si

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(S, C)}_{= \pi_0 \underline{\mathrm{Hom}}(S,C)} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(S, C)$$

est lié de façon raisonnable aux ensembles précédents (déterminés par H_C, resp. par C_∞), p. ex. s'ils lui sont isomorphes de façon naturelle, et s'ils ont une signification géométrico-topologique raisonnable. Je commence à suspecter que *non* - donc qu'on aurait ici un cas où une relation de type très général concernant un π_0, ici donc

$$\pi_0(C) \simeq \pi_0(C_\infty) \simeq \pi_0(H_C),$$

ne se prolonge pas en un isomorphisme sur les π_i supérieurs, et en une propriété de Hot-équivalence.

[page 108]

Je ne trouve d'ailleurs aucune flèche directe entre C et l'un des objets C_∞, H_C; tout ce que je vois dans ce sens, c'est

$$\begin{tikzcd} C_{\mathbf{N}^o} \arrow[r, "\substack{\text{foncteur de}\\ \text{localisation}}"] \arrow[d] & C_\infty \\ C, & \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est la flèche de projection de $C_{\mathbf{N}^o} = C \times_T \mathbf{N}^o$ (avec $\mathbf{N}^o \xrightarrow{t} T$). Ceci n'établit une relation topologique étroite entre C (en tant qu'objet de Cat hot ou de Hot simplement) et C_∞, que si les deux flèches précédentes sont tout au moins des Hot-équivalences. Et le cas-type (problématique) où la question de la relation entre C et C_∞ se pose, est donc celui où $T = \mathbf{N}^o$, i.e. celui d'un système inductif quelconque de (petites) catégories, indexé par $\mathbf{N}$, et interprété comme défini par une catégorie fibrée $C = C_{\mathbf{N}^o}$ sur $\mathbf{N}^o$. Dans ce cas particulier, on a du moins une flèche canonique

$$C \longrightarrow C_\infty$$

sur laquelle on peut se poser la question si c'est

[page 109]

une Hot-équivalence. Sinon, cela prouvera que dans le cas général, le Hot-type de C (et a fortiori sa classe d'isomorphie dans Cat hot) n'a pas de sens géométrique intéressant. C'est à dire que C est intéressante uniquement *en tant que catégorie fibrée sur T*, permettant notamment de construire l'ind-objet H_T de Cat hot ou de Hot, mais pas en tant que 'catégorie nue'.

Mais je viens de me convaincre que $C_{\mathbf{N}^o} \longrightarrow C_\infty$ est bien une Hot-équivalence. Donc la flèche $C_{\mathbf{N}^o} \longrightarrow C$ définit une flèche *dans* Hot

$$C_\infty \longrightarrow C$$

(en composant avec l'inverse dans Hot de la précédente). Est-ce un isomorphisme? Donc pour cette question, on est ramené à la question pour $C_{\mathbf{N}^o} \longrightarrow C$. Mais si on prend $C = T$, cela pose déjà la même question pour $\mathbf{N}^o \longrightarrow T$, donc la question si T est asphérique, sous la seule hypothèse que T_o soit filtrante à gauche et dénombrable à l'infini (à gauche). Mais bien sûr c'est faux (p. ex. si T n'a qu'un seul objet, il n'est pas pour autant asphérique !).

Cela me convainc donc qu'à défaut

[page 110]

d'hypothèse supplémentaire draconienne sur T, la catégorie C 'nue' n'offre pas d'intérêt particulier, à part son π_0 (qui est donné aussi par C_∞, et par H_C). Il n'est pas dit, certes, que $\underline{\mathrm{Ty}}$ ne satisfasse pas à ces 'conditions draconiennes'. Mais comme C 'nue' ne s'insère pas dans un formalisme sympathique (p.ex. on n'a pas d'interprétation géométrique de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(S, C)$, ou de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(S, C)$), je crois que par la suite je peux en faire abstraction. Exit a) !

5.11.90

J'ai quand même passé la journée entière hier à essayer de comprendre la relation de C et de son type dans Hot, à celui de C_∞. En effet, comme on a finalement une flèche dans Hot

$$C_\infty \longrightarrow C,$$

déduite du diagramme dans (Hot)

$$\begin{tikzcd} C_{\mathbf{N}^\circ} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & C_\infty \\ C, & \end{tikzcd}$$

de prouver que $C_\infty \longrightarrow C$ est un isomorphisme dans Hot

[page 111]

semble la façon la plus simple, et peut-être unique, de prouver que l'image de C_∞ dans Hot ne dépend pas, à isomorphisme unique près, des choix faits pour construire C_∞. Sans compter que dans le cas motivant, $C = \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X)$ ou $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X; a, b)$, $T = \underline{\mathrm{Ty}}$, c'est la catégorie des chemins C qui donne lieu à une loi de composition des chemins impeccable, fonctorielle, associative et tout, alors qu'il n'en est rien pour C_∞. On ne trouve pas une loi de composition

$$C_\infty \times C_\infty \longrightarrow C_\infty$$

dans Cat, ni même dans Cat hot ou dans Hot - ou plutôt, si on arrive pourtant à construire une flèche $C_\infty \times C_\infty \longrightarrow C_\infty$ dans Cat, c'est encore laborieusement à coups de choix $\pm$ arbitraires, cran par cran, et sans savoir si ce qu'on obtient a une propriété d'unicité, ne serait ce que dans Hot; on ne trouve une interprétation géométrique tangible de cette composition que dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$ (où on a une véritable loi de groupoïde), ou dans H_T en tant qu'objet de Ind Cat hot

`[page 112]`

ou de Ind Hot. (Donc la limite inductive dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$ n'est autre que l'élément de $\mathrm{Hot}_0^\wedge$ défini par C_∞.)

Mes efforts pour prouver que

$$C_\infty \longrightarrow C$$

était un isomorphisme dans Hot, ou ne serait-ce qu'un 1-isomorphisme (i.e. un isomorphisme non seulement pour les π_0, ce qui est toujours vrai, mais aussi pour les π_1 de toutes les composantes), ont échoués. J'ai trouvé qu'il suffisait que le foncteur

$$T \longrightarrow T_{\mathrm{o}}$$

soit ou bien lisse et coasphérique, ou bien propre et asphérique - donc tout est OK si $T = T_{\mathrm{o}}$, i.e. si T est ordonnée. Mais dans le cas $T = \underline{\mathrm{Ty}}$, le foncteur $T \longrightarrow T_{\mathrm{o}}$ n'est ni propre, ni lisse (pas même 0-propre ou 0-lisse).

Finalement j'en suis arrivé à la conviction que dans le cas qui nous occupe ($T = \underline{\mathrm{Ty}}$, $C = \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X; a, b)$), la flèche $C_\infty \longrightarrow C$ n'est en général *pas* un isomorphisme dans Hot. En effet, dans le cas $a = b$, si cela `[était vrai]`,

`[page 113]`

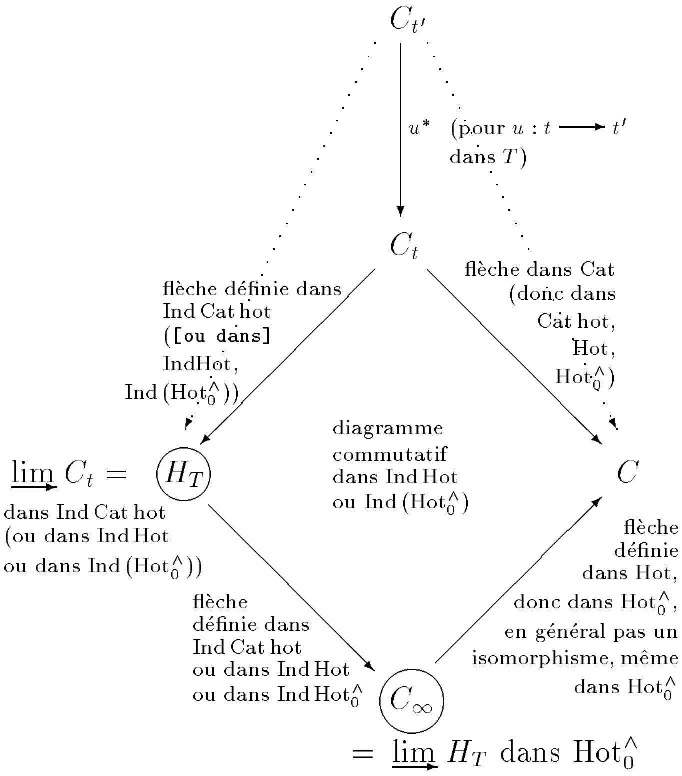
on aurait une description du Hot-groupe $\Omega(X, a) = \underline{\mathrm{Ch}}(X, a)$ ([23]) en termes d'une catégorie C munie d'une loi de composition *associative* (et unitaire) *dans* Cat, redonnant la loi de groupe de Ω en passant de (Cat) à Hot. Prenant le nerf de C, on trouverait un monoïde semi-simplicial qui, dans Hot, donnerait la loi de groupe de $\Omega(X, a)$. Or je me rappelle ([24]) qu'on m'a expliqué qu'en général, la loi de groupe de $\Omega(X, a)$ ne pourrait pas être obtenue par une loi *associative* sur un ensemble semi-simplicial. Ainsi, l'insuccès de mes efforts semble tenir, non à ma maladresse, mais à la nature des choses.

Je vais résumer les faits positifs auxquels je suis arrivé dans le diagramme suivant, qui a lieu dans la situation générale $C \longrightarrow T$ envisagée au début du présent paragraphe :

`[page 114]`

[23] On fait ici $\Sigma = \mathrm{Fl}(X)$.

[24] C'est un erreur - ça doit être pour d'*autres* objets groupe de Hot que les groupes de lacets. J'ai vu dans Quillen que $\Omega(X, x)$ doit se décrire par un groupe semi-simplicial (quand X est un ensemble semi-simplicial, x un sommet). Donc le problème si $C_\infty \simeq C$ dans Hot reste entier.



`[Les annotations dans ce diagramme concernent les flèches en traits pleins.]`

Les objets importants sont H_T et C_∞, alors que C (sur T) et les C_t prennent un rôle technique intermédiaire, pour construire H_T et C_∞. On peut considérer C_∞ comme une catégorie (objet de (Cat)), mais dont la construction dépend de nombreux arbitraires, à l'inverse de H_T dans Ind Cat hot. C'est l'objet de $\mathrm{Hot}_0^\wedge$ déduit de C_∞ qui a un sens canonique, et peut être décrit comme la limite inductive de H_T comme objet de Ind $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, i.e. comme représentant le même foncteur sur Hot_0 que H_T.

`[page 115]`

Dans le cas géométrique $T = \underline{\mathrm{Ty}}$, et C de la forme $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X; a, b)$, donnant lieu à $C_\infty(a,b)$, on *n'a pas* de définition naturelle d'un bifoncteur de composition des chemins

$$C_\infty(a,b) \times C_\infty(b,c) \longrightarrow C_\infty(a,c).$$

On peut définir, certes, des accouplements

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau}(a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau'}(b,c) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_{\Sigma,\tau\tau'}(a,c),$$

ou, avec les notations relatives à la donnée de

$$\underline{t} : \mathbf{N}^o \longrightarrow \underline{\mathrm{Ty}},$$
$$\underline{\mathrm{Ch}}_n(a,b) \times \underline{\mathrm{Ch}}_m(b,c) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_{n+m}(a,c),$$

mais ces accouplements *ne sont pas* compatibles avec les morphismes de transition des trois systèmes inductifs de catégories $(\underline{\mathrm{Ch}}_n)_{n\in\mathbf{N}}$, ils ne le sont *qu'à homotopie près.* Cela suffit cependant pour avoir des accouplements parfaits

$$H_T(a,b)\times H_T(b,c)\longrightarrow H_T(a,c),$$

avec associativité, et (si $\Sigma = \mathrm{Fl}(X)$ tout entier) existence de *vrais* inverses, i.e. de flèches (dans Ind Cat hot) de 'passage au chemin opposé'

[page 116]

$$(*)\qquad H_T(a,b)\longrightarrow H_T(b,a),\qquad c\longmapsto c^o,$$

donnant lieu au diagramme commutatif exprimant que c'est bien un inverse pour la composition. Une autre façon de le dire, c'est que pour tout objet Y de Cat hot (ou de Ind Cat hot), les ensembles

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(Y, H_T(a,b)) \overset{\text{déf}}{=} H_T^Y(a,b)$$

forment, pour $a,b\in X$ variables, les flèches d'un *groupoïde* ([25]) $\mathrm{Ch}_\Sigma^Y(X)$ ayant pour ensemble de sommets $\mathrm{Ob}\,X$, et $H_T^Y(a,b)$ étant formé des flèches de a vers b. L'application

$$H_T^Y(a,b)\longrightarrow H_T^Y(b,a),\qquad c\longmapsto c^o,$$

déduite du foncteur $(*)$ plus haut n'est autre que l'application de passage à l'inverse. Cette catégorie n'est d'ailleurs autre que celle déduit de

$$X(Y)\Sigma_Y^{-1},\qquad \text{où}\ \begin{cases} X(Y)=\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(Y,X)\\ \Sigma_Y\subseteq \mathrm{Fl}(X(Y)),\\ \text{défini en termes de } \Sigma \text{ 'argument par argument'},\end{cases}$$

à l'aide du foncteur

$$X\longrightarrow X(Y),\qquad a\longmapsto a_Y,$$

[page 117]

associant à tout $a\in X$ le foncteur *constant* sur Y de valeur a, en prenant

$$H_T(a,b)\simeq \mathrm{Hom}_{X(Y)\Sigma_Y^{-1}}(a_Y,b_Y)\ .$$

Dans le même cas géométrique, je me suis convaincu d'ailleurs que C_∞ était, en tant qu'objet de Hot (pas seulement de $\mathrm{Hot}_0^\wedge$) *unique à* Hot-*isomorphisme près,* mais (chose étrange) peut-être pas à Hot-isomorphisme *unique* près. De façon générale, revenant aux

[25] Si $\Sigma=\mathrm{Fl}(X)$. Si Σ est plus petit, au lieu d'un groupoïde, on trouve une *catégorie* sans plus.

conditions du début du paragraphe, C_∞ doit s'écrire $C_\infty(\underline{t})$, elle dépend du choix du foncteur cofinal

$$\underline{t} : \mathbf{N}^o \longrightarrow T.$$

Quand $\underline{t}$ varie dans la catégorie

$$\underline{\mathrm{Hom\,cof}}(\mathbf{N}^o, T),$$

les $C_\infty(\underline{t})$ varient de façon contravariante en $\underline{t}$ (donc définissent une catégorie fibrée sur $\underline{\mathrm{Hom\,cof}}(\mathbf{N}^o, T)$). De plus, le foncteur

$$C_\infty(\underline{t'}) \longrightarrow C_\infty(\underline{t})$$

associé à un morphisme de systèmes projectifs

$$\underline{t} \longrightarrow \underline{t'}$$

est un *isomorphisme* dans Hot. Donc le

[page 118]

foncteur

$$\underline{t} \longmapsto C_\infty(\underline{t}), \qquad \underline{\mathrm{Hom\,cof}}(\mathbf{N}^o, T) \longrightarrow (\mathrm{Hot})$$

se factorise par le groupoïde fondamental

$$\Pi(\underline{\mathrm{Hom\,cof}}(\mathbf{N}^o, T)) \longrightarrow (\mathrm{Hot}).$$

Quand ce groupoïde, i.e. quand la catégorie $\underline{\mathrm{Hom\,cof}}$ elle-même est connexe, on peut donc conclure que tous les $C_\infty(\underline{t})$ sont isomorphes entre eux dans Hot. Pour conclure même à un système *transitif* d'isomorphismes entre les $C_\infty(\underline{t})$, i.e. que $C_\infty(\underline{t})$ est 'unique à isomorphisme *unique* près', il faudrait savoir de plus que le groupoïde fondamental est équivalent à la catégorie ponctuelle (groupe fondamental trivial), ou, comme on dit, que $\underline{\mathrm{Hom\,cof}}$ soit *simplement connexe,* ou 1-connexe.

La connexité de $\underline{\mathrm{Hom\,cof}}$ est assurée quand la catégorie T a (comme c'est le cas pour $\underline{\mathrm{Ty}}$) une loi de composition $(t, t') \longmapsto t * t'$, avec des morphismes fonctoriels en t, t'

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & t \\ t * t' \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & t' \end{tikzcd}$$

(cette dernière condition étant automatique

[page 119]

si la loi de composition admet l'objet final de T, supposé existant, comme unité bilatère). Dans ce cas, $\underline{t} = (t_n)_n$ et $\underline{t'} = (t'_n)_n$ sont reliés entre eux par $\underline{t} * \underline{t'} = (t_n * t'_n)_n$, puisqu'on a un morphisme de systèmes projectifs

$$\begin{tikzcd} & \underline{t} * \underline{t'} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \underline{t} & & \underline{t'}. \end{tikzcd}$$

Je ne sais d'ailleurs pas si la flèche dans Hot

$$C_\infty(\underline{t}) \longrightarrow C_\infty(\underline{t'})$$

associée à $\underline{t'} \longrightarrow \underline{t}$ dans $\underline{\mathrm{Hom\,cof}}$ ne dépend que de $\underline{t}$, $\underline{t'}$, et pas du choix de $\underline{t'} \longrightarrow \underline{t}$. Ce qui est clair, c'est que son image dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$ est unique, c'est l'identité quand on identifie $C_\infty(\underline{t})$ et $C_\infty(\underline{t'})$ au seul et même élément de $\mathrm{Hot}_0^\wedge$ défini par $\varinjlim H_T$.

Et pourtant, je m'aperçois à l'instant que, sous l'hypothèse de l'existence de la loi de composition et de son unité bilatère, et admettant de plus que la loi en question est associative à isomorphisme près, *on a transitivité* dans les isomorphismes (canoniques!) entre les $C_\infty(\underline{t})$ qu'on vient d'indiquer !

[page 120]

(Sans avoir pour autant à calculer le groupe fondamental de $\underline{\mathrm{Hom\,cof}}(\mathbf{N}^\circ, T)$!) Si on a trois éléments $\underline{t}$, $\underline{t'}$, $\underline{t''}$ de $\underline{\mathrm{Hom\,cof}}$, il suffit de regarder le diagramme déduit du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & & \underline{t} * \underline{t'} * \underline{t''} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & \underline{t} * \underline{t'} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \underline{t'} * \underline{t''} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \underline{t} & & \underline{t'} & & \underline{t''} \end{tikzcd}$$

en lui appliquant le contrafoncteur $\underline{s} \longrightarrow C_\infty(\underline{s})$ de $\underline{\mathrm{Hom\,cof}}$ dans Hot.

Donc dans le cas des $C(a,b) = \underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X; a, b)$, je n'ai plus aucun scrupule à considérer la catégorie $C_\infty(a,b)$ comme un objet *canonique* de Hot, relié à l'ind-objet canonique $H_T(a,b)$ dans Hot par un homomorphisme canonique

$$(*) \qquad C_\infty(a,b) \longleftarrow H_T(a,b),$$

qui dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$ donne un isomorphisme

$$(**) \qquad C_\infty(a,b) \simeq \varinjlim H_T(a,b),$$

i.e. la flèche $(*)$ induit, pour $\xi \in \mathrm{Ob\,Hot}$, une application ensembliste

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\xi, C_\infty(a,b)) \longleftarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind\,Hot}}(\xi, H_T(a,b))}_{\varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\xi, C_n(a,b))},$$

qui est *bijective* si ξ est dans Hot.

[page 121]

Bien entendu, les flèches

$$(*) \qquad C_\infty(\underline{t'}) \longrightarrow C_\infty(\underline{t})$$

dans Hot, associés aux flèches $\underline{t} \longrightarrow \underline{t'}$ dans $\underline{\mathrm{Hom\,cof}}(\mathbf{N}^o, T)$, sont en fait des flèches dans (Cat) elle-même - et même des foncteurs pleinement fidèles, dans le cas 'géométrique' et pour les deux flèches canoniques

$$\begin{tikzcd} & \underline{t} * \underline{t'} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \underline{t} & & \underline{t'}. \end{tikzcd}$$

Elles sont isomorphiques *dans* Hot, parce qu'elles définissent un homomorphisme sur les ind-objets associés de Cat hot, donc aussi pour les ind-objets associés dans Hot et dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, d'où résulte que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(Y, C_\infty(\underline{t'})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(Y, C_\infty(\underline{t}))$$

associé à $(*)$ est une bijection si Y *est finie* ([26]), cette flèche s'identifie alors à

$$\varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(Y, C_{t'_n}) \longrightarrow \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(Y, C_{t_n}).$$

(Car $Z \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(Y, Z)$ commute aux limites inductives filtrantes, si Y est une catégorie *finie.* Cela provient du fait qu'une $\varinjlim$ filtrante de catégories de Thomason-Kan est itou ...) Mais j'ignore par contre si $(*)$ est [un] isomorphisme dans Cat hot. Seulement que pour une catégorie *finie* Y, elle induit

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(Y, C_\infty(\underline{t'})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(Y, C_\infty(\underline{t})),$$

les deux membres s'identifiant alors à

[page 122]

$$H_T(Y)_{\mathrm{Cat\,hot}} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind\,Cat\,hot}}(Y, H_T).$$

Pour résumer ces lumières et perplexités sur les $C_\infty(\underline{t})$:

a) À tout $\underline{t} = (t_n)_{n \in \mathbf{N}^o} \in \underline{\mathrm{Hom\,cof}}(\mathbf{N}^o, T)$ est associé un système inductif, indexé par $\mathbf{N}$, de catégories $C_n(\underline{t})$ $(= C_{t_n})$, et leur limite inductive

$$C_\infty(\underline{t}).$$

[26] Ce qui suffit à assurer que $(*)$ est [un] isomorphisme dans Hot : $\mathrm{Hot} \longrightarrow \mathrm{Hot}_0^\wedge$ est conservatif!

b) Ce système inductif, et aussi sa limite est [un] foncteur contravariant en $\underline{t}$. Si $\underline{t}, \underline{t}' \in \operatorname{Ob} \underline{\mathrm{Hom\,cof}}$, alors on peut comparer $C_\infty(\underline{t})$, $C_\infty(\underline{t}')$ et les systèmes inductifs correspondants, grâce à

$$\begin{tikzcd} & \underline{t} * \underline{t}' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \underline{t} & & \underline{t}'. \end{tikzcd}$$

c) L'objet

$$(C_n(\underline{t}))_{n\in\mathbf{N}} \in \operatorname{Ob} \operatorname{Ind} \operatorname{Cat} \mathrm{hot}$$

défini par le système inductif $(C_n(\underline{t}))_{n\in\mathbf{N}}$ de Cat est (à isomorphisme unique près) indépendant du choix de $\underline{t}$, soit H_C ou H. Les homomorphismes

$$(*) \qquad C_\infty(\underline{t}') \xrightarrow{u^*} C_\infty(\underline{t}) \qquad \text{associé à } u : \underline{t} \longrightarrow \underline{t}'$$

sont compatibles avec cette donnée, i.e. on a commutativité dans

$$\begin{tikzcd} \varinjlim\limits_{\operatorname{Ind}\operatorname{Cat}\mathrm{hot}} C_*(\underline{t}') \arrow[rr] & & \varinjlim\limits_{\operatorname{Ind}\operatorname{Cat}\mathrm{hot}} C_*(\underline{t}) \\ & H \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

[page 123]

d) Il s'ensuit que les homomorphismes $(*)$ sont des *isomorphismes* dans Hot, donc tous les $C_\infty(\underline{t})$ sont isomorphes *dans* Hot. L'astuce des $t * t'$ (dans le cas où on a une loi $t * t'$ associative et admettant l'objet final comme objet unité) donne même des isomorphismes *canoniques*

$$C_\infty(\underline{t}') \longrightarrow C_\infty(\underline{t}) \qquad \text{dans Hot},$$

et c'est là un système transitif d'isomorphismes. Donc on a dans Hot un objet canonique

$$C_\infty \in \operatorname{Ob} \mathrm{Hot},$$

dont la relation à $H \in \operatorname{Ob} \operatorname{Ind} \mathrm{Hot}$ est déduite de c), c'est une flèche canonique

$$H \longrightarrow C_\infty \qquad \text{dans Ind Hot } ({}^{27}).$$

Cette flèche induit un isomorphisme pour les objets correspondants de $\mathrm{Hot}_0^\wedge$; mais en regardant H non comme ind-objet de $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, mais prenant le foncteur H_0 induit sur Hot_0 par le foncteur ind-représentable H sur Hot. Ce foncteur induit est 'représentable' par l'objet C_∞ de la catégorie plus grande

$$H_0 \simeq C_\infty \qquad \text{dans } \mathrm{Hot}_0^\wedge.$$

(Si le foncteur canonique $\mathrm{Hot} \longrightarrow \mathrm{Hot}_0^\wedge$ est pleinement fidèle, alors cette formule décrit C_∞ comme objet de Hot, à isomorphisme unique près, en termes de H_0, donc aussi en termes de $H \in \operatorname{Ob} \operatorname{Ind} \operatorname{Cat} \mathrm{hot}$.)

[27] **NB** H n'est pratiquement jamais essentiellement constant, donc la flèche ci-contre [n'est] pas un isomorphisme dans Ind Hot.

[page 124]

e) J'ignore par contre si les flèches

$$C_\infty(\underline{t'}) \longrightarrow C_\infty(\underline{t})$$

sont des isomorphismes dans Cat hot, bien qu'elles soient définies en termes d'homomorphismes de systèmes inductifs de catégories, qui sont des isomorphismes dans Ind Cat hot. Il en est ainsi, même pour les flèches $C_\infty(\underline{t}), C_\infty(\underline{t'}) \rightrightarrows C_\infty(\underline{t} * \underline{t'})$ utilisées pour comparer $C_\infty(\underline{t})$ et $C_\infty(\underline{t'})$ canoniquement. Ainsi, je ne vois pas comment définir des flèches en sens inverse dans Cat, qui seraient candidats à être des isomorphismes inverses dans Cat hot.

f) Dans le cas géométrique ($T = \underline{\mathrm{Ty}}$, situation décrite en termes de X, Σ, et $a, b \in \mathrm{Ob}\, X$, d'où des $C_\infty(\underline{t}; a, b)$, $C_\infty(\overline{a, b})$, $H(a, b)$ etc.), on *n'a pas* d'opération de composition de chemins au niveau des *catégories* $C_\infty(\underline{t}; a, b)$ et $C_\infty(\underline{t}; b, c)$, mais seulement au niveau des objets $H(a, b)$, $H(b, c)$ de Ind Cat hot ou de Ind Hot. Suis-je seulement sûr de savoir définir *dans* Hot

$$C_\infty(a, b) \times C_\infty(b, c) \longrightarrow C_\infty(a, c) \ \ ?$$

Sûrement, il n'y a pas de problèmes pour les images dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, puisque là ce sont les mêmes que celles de $H(a, b)$, $H(b, c)$, $H(a, c)$ respectivement, et on a des accouplements parfaits, associatifs, avec unité, et avec inverses là ou il doit y

[page 125]

en avoir. Mais pas pour les $C_\infty(a, b)$ eux-mêmes?

C'est un peu vexant qu'avec tout ce travail il semblerait qu'on n'ait pas même été foutu de définir l'analogue dans Cat du classique espace des lacets $\Omega(X, x)$ comme un groupe *dans* Hot. (Que fait THOMASON?) Mais voilà une idée pensable [?]. Pour définir *quand-même*

$$C_\infty(a, b) \times C_\infty(b, c) \longrightarrow C_\infty(a, c)$$

dans Hot, on va décrire les deux foncteurs $C_\infty(a, b)$ et $C_\infty(b, c)$ par des systèmes projectifs différents $\underline{t}$, $\underline{t'}$. On peut l'expliciter en partant d'un τ_0 de longueur utile ≥ 2, et en prenant dans les deux cas

$$t_n = t'_n = \tau_0^n,$$

mais des morphismes de transition différents

$$\begin{aligned} (t_{n+p} \longrightarrow t_n) &= \pi_p * \mathrm{id}_{\tau_0^n} \\ (t'_{n+p} \longrightarrow t'_n) &= \mathrm{id}_{\tau_0^n} * \pi_p, \end{aligned}$$

où $\pi_p : \tau_0^p \longrightarrow 1$ est la dégénérescence totale. On définira $C_\infty(a, c)$ en termes de $\underline{t''} = \underline{t} * \underline{t'}$, donc

$$\begin{cases} t''_n = \tau_0^{2n} \\ (t''_{n+p} \longrightarrow t''_n) = \pi_p * \mathrm{id}_{\tau_0^{2n}} * \pi_p. \end{cases}$$

Cette fois, les foncteurs de composition

$$C_n(\underline{t}; a, b) \times C_n(\underline{t'}; b, c) \longrightarrow C_n(\underline{t''}; a, c),$$

sont compatibles avec les foncteurs transition pour n variable, et on trouve

[page 126]

$$C_\infty(\underline{t}; a, b) \times C_\infty(\underline{t'}; b, c) \longrightarrow C_\infty(\underline{t''}; a, c),$$

donc une flèche dans Hot

$$\mathrm{comp}_{\tau_0} : C_\infty \times C_\infty \longrightarrow C_\infty.$$

Il faut voir qu'elle ne dépend pas du choix de τ_0, mais si on a τ_0 et τ'_0, on les compare par $\tau_0 \times \tau'_0 \rightrightarrows \begin{smallmatrix}\tau_0 \\ \tau'_0\end{smallmatrix}$, il suffit donc de voir que s'il existe une flèche $\tau_0 \longrightarrow \tau'_0$, alors $\mathrm{comp}_{\tau_0} = \mathrm{comp}_{\tau'_0}$. Mais une telle flèche induit des flèches $\underline{t}_{\tau_0} \longrightarrow \underline{t}_{\tau'_0}$, $\underline{t'}_{\tau_0} \longrightarrow \underline{t'}_{\tau'_0}$, $\underline{t''}_{\tau_0} \longrightarrow \underline{t''}_{\tau'_0}$, d'où un diagramme dans Cat

$$\begin{tikzcd}
C_\infty(\underline{t}_{\tau'_0}; a, b) \times C_\infty(\underline{t'}_{\tau'_0}; b, c) \arrow[r, "\mathrm{comp}_{\tau'_0}"] \arrow[d] & C_\infty(\underline{t''}_{\tau'_0}; a, c) \arrow[d] \\
C_\infty(\underline{t}_{\tau_0}; a, b) \times C_\infty(\underline{t'}_{\tau_0}; b, c) \arrow[r, "\mathrm{comp}_{\tau_0}"] & C_\infty(\underline{t''}_{\tau_0}; a, c),
\end{tikzcd}$$

dont on vérifie tout de suite qu'il est commutatif. Or ce diagramme peut se réécrire dans Hot comme

$$\begin{tikzcd}
C_\infty(a, b) \times C_\infty(b, c) \arrow[r, "\mathrm{comp}_{\tau'_0}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & C_\infty(a, c) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
C_\infty(a, b) \times C_\infty(b, c) \arrow[r, "\mathrm{comp}_{\tau_0}"] & C_\infty(a, c),
\end{tikzcd}$$

[page 127]

d'où $\mathrm{comp}_{\tau_0} = \mathrm{comp}_{\tau'_0}$.

Je recule devant la vraie difficulté - celle de prouver l'associativité de cette loi de composition. Elle devient associative dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$ - mais pour que deux flèches dans Hot soient égales (ici donc

$$C_\infty(a, b) \times C_\infty(b, c) \times C_\infty(c, d) \rightrightarrows C_\infty(a, d) \ \ ),$$

suffit-il qu'il en soit ainsi de leurs images dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$ - en d'autres termes, le foncteur

$$\mathrm{Hot} \longrightarrow \mathrm{Hot}_0^\wedge,$$

est-il (en plus d'être conservatif) au moins fidèle (sinon pleinement fidèle)?

Il y a aussi que cette loi de composition est compatible avec celle des $H(a,b)$ dans Ind Hot, pour les flèches canoniques

$$H(a,b) \longrightarrow C_\infty(a,b) \qquad \text{dans Ind Hot,}$$

si on saurait que ce sont des épimorphismes, et le restent par produits cartésiens, on aurait gagné.

Bien sûr, on saura que c'est associatif, une fois qu'on saura que la composititon définie ici est compatible avec la composition des chemins dans le cadre semi-simplicial. Mais comment fait-on dans ce cadre, pour composer les chemins de longueur non bornée? N'y a-t-il pas là exactement la même difficulté? À moins de s'en

[page 128]

tirer en se ramenant tout de suite, pour la théorie des opérations Ω, aux complexes de Kan, et aux chemins de type Δ_+. Mais pour les composer *fonctoriellement,* il me semble y avoir toujours le même problème - on trouvera des chemins de type $\Delta_+\Delta_+ = \mathbf{\Delta}_2^+$, et non pas Δ_+, mais on peut alors composer les homotopies directes (revient à s'induire sur $\Delta_+ \simeq \{0,2\} \subseteq \mathbf{\Delta}_2^+$). Or j'ai fait le formalisme des catégories de chemins sans me soucier de conditions du type Kan. Je présume que dans le cadre semi-simplicial, les $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}_1, X)$ ne donnent *pas* le bon objet des chemins, pour X pas de Kan. (Car sinon, il semblerait que pour $X = X_0$ à composantes *finies,* le calcul des π_i devrait être fini, ce qui n'est pourtant pas le cas, m'a-t-on toujours assuré ...)

Je présume pourtant, quand on prend $\Sigma = \mathrm{Fl}(X)$, que les objets $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X;a,b)$ et $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(\bar{X};a,b)$ sont isomorphes dans Hot, quand on immerge X dans une enveloppe de Thomason-Kan $\bar{X}$.

[page 129]

11 Rapide retour sur les $(\mathcal{M}, \Sigma)$, dans l'optique des dérivateurs

Quand on s'intéresse au formalisme des $\underline{\mathrm{Ch}}_\Sigma(X; a, b)$ en vue d'un *dérivateur* $\mathbf{D}_{X,\Sigma}$ qu'on voudrait définir en termes de X, Σ, il semblerait que le prédérivateur qu'on obtient bel et bien ne mérite le nom de dérivateur que lorsqu'on suppose que pour toute flèche

$$Y \longrightarrow Y'$$

dans Cat qui est une Hot-équivalence, les flèches correspondantes

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind\,Cat\,hot}}(Y', H(a,b)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind\,Cat\,hot}}(Y, H(a,b)),$$

ou encore

$$\varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(Y', \underline{\mathrm{Ch}}_{n,\Sigma}(a,b)) \longrightarrow \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(Y, \underline{\mathrm{Ch}}_{n,\Sigma}(a,b))$$

sont des bijections. J'ai regardé dans V ce que ça signifie pour l'objet $H(a,b) = (\underline{\mathrm{Ch}}_{n,\Sigma}(a,b))_n$ de Ind Cat hot. C'est cette condition seulement qui assure, du point de vue des dérivateurs, une interprétation convaincante de $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty,\Sigma}(a,b)$,

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty,\Sigma}(a,b) = \varinjlim_n \underline{\mathrm{Ch}}_{n,\Sigma}(a,b)$$

en tant qu'objet de Hot, ou plus exactement de $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, car on a alors pour Y une catégorie *finie*

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat\,hot}}(Y, H(a,b))}_{\simeq \mathrm{Hom}_{X(Y)\Sigma_Y^{-1}}(a_X, b_X)} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(Y, \underline{\mathrm{Ch}}_{\infty,\Sigma}(a,b)),$$

[page 130]

car je veux quand-même que le type dans Hot soit le bon, qu'il correspond bien à l'homotopie des espaces de chemins. Donc on voudrait qu'un morphisme

$$X \xrightarrow{f} X'$$

dans (Cat), qui est une Hot-équivalence, définisse

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X; a, b) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X'; f(a), f(b)),$$

qui soient eux aussi des Hot-équivalences. D'autre part, c'est évidemment compatible avec la brillante composition des chemins, que j'ai réussi à définir entre ces objets de Hot. Donc (sous réserve d'avoir vérifié ce que je viens de dire) la vérification de l'associativité se ramenerait au cas où X est de Thomason-Kan. Mais dans ce cas, il y a des chances que, tout comme dans le cas semi-simplicial, les $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X; a, b)$ peuvent se définir (comme objets de (Hot)) comme étant simplement les chemins de type Δ_+ de a à b, qu'on compose alors de la façon triviale. Mais non, ces catégories sont discrètes!

Je renonce pour l'instant à poursuivre plus la question d'associativité. Demander à Thomason pour les propriétés du foncteur $\mathrm{Hot} \longrightarrow \mathrm{Hot}_0^\wedge$.

[page 131]

Cela signifie, à très peu de choses près, qu'on a une interprétation de $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty,\Sigma}(a,b)$, en tant qu'objet de Hot, comme un 'Hom externe' $\mathrm{Hom\,ext}(a,b)$ à valeurs dans Hot, défini sur la catégorie $\mathcal{M} = X$ à l'aide du seul ensemble admissible de flèches $\Sigma \subseteq \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, opération satisfaisant la condition

$$(*) \qquad \boxed{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(Y, \mathrm{Hom\,ext}(a,b)) \ \simeq\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(Y)\Sigma_Y^{-1}}(a_X, b_X)}$$

(qui peut s'interpréter aussi, soit comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(p_!(a_Y), b)$$

si $p_! : \underbrace{\mathcal{M}(Y)\Sigma_Y^{-1}}_{\mathbf{D}(Y)} \longrightarrow \mathcal{M}$ existe, soit comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(a, p_*(b_Y))$$

si $p_* : \underbrace{\mathcal{M}(Y)\Sigma_Y^{-1}}_{\mathbf{D}(Y)} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{M}}_{=\mathbf{D}(*)}$ existe); avec le seul petit ennui que cette formule n'est valable que pour Y *finie.* Si on veut exprimer le second membre pour Y variable quelconque dans Cat, il ne suffit pas d'un objet de Hot ($\mathrm{Hom\,ext}(a,b)$) dans le premier membre, mais il faut l'ind-objet $H(a,b) = (\underline{\mathrm{Ch}}_n(a,b))_{n\in\mathbf{N}}$ dans Hot. Si donc on tient à travailler dans un 'domaine' Diag du dérivateur $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\mathcal{M},\Sigma}$ aussi grand que possible, en se bornant à des catégories finies,

[page 132]

et qu'on veut qu'une formule $(*)$ reste valable pour toute Y dans le domaine, il faut 'en toute rigueur' définir le $\mathrm{Hom\,ext}(a,b)$ non comme objet de Hot, mais de Ind Hot. Il se décrirait donc alors comme

$$\mathrm{Hom\,ext}(a,b) = (\underline{\mathrm{Ch}}_{n,\Sigma}(a,b))_n \qquad \text{(ind-objet dans Hot)}\ ,$$

et l'objet $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty,\Sigma}$ dans Hot en est une sorte de limite inductive.

Je me suis demandé si la condition préalable, savoir que les foncteurs $H(a,b)$ sur Cat transforment Hot-équivalences $Y' \longrightarrow Y$ en bijections, était bel et bien une (forte) restriction. Je me suis convaincu que c'est bien le cas, déjà dans le cas particulier où $\Sigma = \mathrm{Fl}(X)$. Il me semble que lorsque les composantes connexes de $\Omega(X,a)$ ne sont pas contractiles, ladite condition n'est pratiquement jamais satisfaite. J'ai pensé p. ex. au cas où X a le type d'homotopie (dans Hot) d'une 2-sphère, de sorte que son $\Omega(X,a) = \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X,a,a)$ doit avoir un $\pi_1 \simeq \mathbf{Z}$. Prenons Y ayant le type dans Hot d'un cercle, disons

$$Y:\quad \begin{tikzcd} & a & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0' \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & b & \end{tikzcd}\ ,$$

`[page 133]`

donc les foncteurs

$$f : Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X; \bullet, \bullet) \overset{\text{déf}}{=} \Omega(X, \bullet)$$

correspondent à *certains* 'lacets' de $\Omega(X, \bullet)$ (mais lacets à origine non précisée), ils ont un type d'homotopie au sens topologique ('nombre de tours' autour de la sphère X) donné par un entier $n \in \mathbf{Z}$ (le 'degré' du lacet λ). L'intuition évidente, c'est que l'ensemble des degrés δ qu'on peut obtenir ainsi, avec une catégorie *finie* donnée Y qui représente le cercle $S^1 \in (\mathrm{Hot})$, est fini - $|\delta|$ majoré sûrement par le nombre de ces flèches (donc au moins par 4 dans le cas envisagé, chaque flèche de Y faisant faire *au plus* un tour autour du pseudo-cercle $\Omega(S^2, \bullet)$) ([28]). D'autre part, quand on représente S^1 par des catégories Y_n arbitrairement grandes (disons déduites des intervalles $\Phi_n = (\Delta_+\Delta_-)^n$ en identifiant la source et le but), on doit trouver des degrés arbitrairement élevés. Or toute Y_n s'envoie dans $Y (= Y_2)$ par une flèche

$$Y_n = Y' \longrightarrow Y = Y_2$$

`[page 134]`

qui est de degré 1, donc qui est une Hot-équivalence. Mais l'application correspondante

$$\pi_0 \underline{\mathrm{Hom}}(Y, \Omega(X, \bullet)) \longrightarrow \pi_0 \underline{\mathrm{Hom}}(Y', \Omega(X, \bullet))$$

n'est pas bijective. Ce genre d'argument me semble devoir marcher chaque fois que l'ensemble des groupes d'homotopie $\pi_j(X, x)$, pour $j \geq 2$ (donc l'ensemble des groupes d'homotopie π_i de $\Omega(X, x)$, pour $i \geq 1$) est *infini,* en prenant pour Y, Y' différents représentants Y_n de la sphère S^i, disons les Y_n déduites de Φ_n ($n \geq 2$) en prenant $\Phi_n^i = \Phi_n \times \Phi_n \times \cdots \times \Phi_n$ (qui est une sorte de i-cube combinatoire), et en identifiant son 'bord' à un seul point. Je présume que le nombre d'élements dans $\pi_i(\Omega(X, x))$ qu'on peut obtenir à partir de flèches $Y_n \longrightarrow \Omega(X, x)$ est limité par la taille de Y_n, mais on peut sûrement les obtenir chacun, en prenant n assez grand. Si donc $\xi \in \pi_i(\Omega)$ échappe à Y_{n_0} ($n_0 = 0$, disons), on prend un n' assez grand pour que ξ n'échappe pas à $Y_{n'}$, et on choisit

$$Y_{n'} \longrightarrow Y_n ,$$

[$n = n_0$?]

`[page 135]`

qui soit une Hot-équivalence (p. ex. à l'aide d'une rétraction de $\Phi_{n'}$ sur Φ_n, compatible avec sources et buts).

Ceci attire fortement l'attention sur le fait que si Y, C sont deux catégories, la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(Y, C)$ *n'est pas* un représentant de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Hot}}(\mathrm{hot}(Y), \mathrm{hot}(C))$, on a seulement une flèche canonique

$$(*) \qquad \mathrm{hot}(\underline{\mathrm{Hom}}(Y, C)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Hot}}(\mathrm{hot}(Y), \mathrm{hot}(C)),$$

[28]probablement on ne trouve tout au plus que les degrés δ entre -2 et $+2$.

i.e.

$$\underbrace{\mathrm{hot}(\underline{\mathrm{Hom}}(Y,C)) \times \mathrm{hot}(Y)}_{\mathrm{hot}(\underline{\mathrm{Hom}}(Y,C)\times Y)} \longrightarrow \mathrm{hot}(C),$$

laquelle flèche est simplement déduite de

$$\underline{\mathrm{Hom}}(Y,C) \times Y \longrightarrow C.$$

Mais la flèche $(*)$ n'a aucune envie d'être [un] isomorphisme. C'est parce qu'elle ne l'est déjà pas dans le cas particulier $Y = \mathbf{\Delta}^1$, essentiellement, qui nous oblige, pour faire une théorie des chemins dans les catégories qui soit topologiquement raisonnable, de ne pas nous borner à $\mathbf{\Delta}^1$ comme type de chemins, mais à prendre des intervalles composés $\tau \in \mathrm{Ty}$.

[page 136]

Par contre, $(*)$ est [un] isomorphisme quand C est une catégorie de Thomason-Kan. Il suffit de voir que pour tout Z dans (Cat), le Hom de $\mathrm{hot}(Z)$ dans les deux membres est isomorphe par la flèche déduite de $(*)$. Or si C est de Thomason-Kan, de même $\underline{\mathrm{Hom}}(Y,C)$ (immédiat sur la définition de Thomason-Kan en termes de prolongements de

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr] & A \arrow[d, dotted] \\ & C \end{tikzcd}$$

… ([29])), donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\mathrm{hot}(Z), \mathrm{hot}(\underline{\mathrm{Hom}}(Y,C))) \xleftarrow{\sim} \pi_0(\underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(Z, \underline{\mathrm{Hom}}(Y,C))}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(Z\times Y,C)}) \simeq \pi_0\underline{\mathrm{Hom}}(Z\times Y, C),$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\mathrm{hot}(Z), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Hot}}(\mathrm{hot}(Y), \mathrm{hot}(C))) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}}(\underbrace{\mathrm{hot}(Z)\times\mathrm{hot}(Y)}_{\mathrm{hot}(Z\times Y)}, \mathrm{hot}(C))$$

$$\underbrace{\xleftarrow{\sim}}_{\text{car } C \text{ est de Thomason-Kan}} \qquad \pi_0(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Cat}}(Z\times Y, C)),$$

O.K.

On voit donc que les catégories $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty,\Sigma}(X;a,b)$ n'ont aucune tendance à être des catégories de Thomason-Kan. Pourtant, son type dans Hot doit être 'le bon', sans avoir d'abord à remplacer X par une enveloppe de Thomason-Kan $\bar{X}$.

[29]un peu vif! Il faut savoir que les applications cofibrantes i de THOMASON le restent après multiplication cartésienne par Y …

[page 137]

12 Retour sur les 'catégories de chemins' dans Cat, comme catégorie de modèles pour Hot

Je vois exactement deux applications intéressantes du formalisme des chemins dans les catégories. L'une, qui m'a surtout forcé la main, est pour pouvoir construire des Hom ext, Hom *externes* à valeurs dans Hot, pour tout prédérivateur $\mathbf{D}$ défini par un couple $(\mathcal{M}, \Sigma)$ (et je ne connais pas de prédérivateur qui ne soit défini ainsi).

L'autre application est pour avoir dans (Cat) une *construction fonctorielle,* en termes d'un objet X quelconque ou d'une flèche $X \longrightarrow Y$, de l'analogue du formalisme de Cartan-Serre sur les espaces de chemins. Dans ce cadre, il est entendu qu'on prend toujours $\Sigma_X = \mathrm{Fl}(X)$, ensemble de *toutes* les flèches de X. Pour construire fonctoriellement en X dans (Cat)

$$\begin{array}{c} \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \\ \big\downarrow \\ X \times X, \end{array}$$

il faut avoir fixé un système projectif

$$\underline{t} = (t_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

[page 138]

dans $\underline{\mathrm{Ty}}$ qui soit cofinal dans $\underline{\mathrm{Ty}}$, ce qui signifie simplement que parmi les t_n il y en a de longueur utile arbitrairement grande (et comme

$$n \longmapsto \mathrm{long.ut.}(t_n)$$

est croissante, cela implique que long.ut.(t_n) tend vers $+\infty$ pour $n \longrightarrow +\infty$). Les faits principaux à vérifier ensuite (si faire se peut) sont les propriétés essentielles des flèches dans le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\tau"] & \\
& \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \arrow[d, "p"] \arrow[ddl, "\sigma"'] \arrow[ddr, "\beta"] & \\
& X \times X \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & \\
X & & X
\end{tikzcd}
\quad , \qquad
\left|
\begin{array}{l}
\sigma\tau = \beta\tau = \mathrm{id}_X \\
p\tau = \mathrm{diag}_X
\end{array}
\right.
$$

et plus généralement, pour une flèche

$$X' \xrightarrow{f} X$$

dans Cat, des flèches dans le diagramme correspondant

$$
\begin{tikzcd}
& \overline{X'} = C(f) \arrow[dl] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddrr, bend left, "\bar{f}"] & & \\
X' \arrow[ur, dotted, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, phantom, "\boxed{\text{cart.}}"] & & \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
& X & & X,
\end{tikzcd}
\qquad \bar{f}\alpha = (\beta g)\alpha = f,
$$

et plus particulièrement de βg. La flèche

[page 139]

en pointillés α est la section de $\overline{X'}$ sur X' déduite de la section τ de $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$ sur X qui réalise la décomposition de f en

$$X' \xrightarrow{\alpha} \overline{X'} \xrightarrow{\bar{f}} X,$$

où $\bar{f}$ devrait être une flèche *'fibrante'* et une Hot-équivalence, α une flèche *'cofibrante'* au sens de THOMASON. (Mais s'il en est ainsi, est à voir!) Voici pour le moment les propriétés essentielles que je voudrais vérifier.

1°) p est lisse et propre, et est une HOT-fibration.

2°) Donc il en est de même de $\sigma = \mathrm{pr}_1 p$ et $\beta = \mathrm{pr}_2 p$. De plus, ce sont des HOT-fibrations *triviales,* i.e. à fibres asphériques.

3^o) Plus généralement (pour ce qui concerne β), $\overline{X'} \xrightarrow{\bar{f}} X$ devrait encore être propre et lisse et une HOT-fibration, mais bien sûr en général pas triviale. (Elle devrait être triviale si et seulement si f est une Hot-équivalence.) ([30]).

Un mot sur la 'dualité'. Les énoncés sur σ (resp. β) se traduisent en énoncés sur β (resp. σ) par passage de $\underline{t}$ à $\underline{t}^o = (t_n^o)$, où $\tau \longmapsto \tau^o$ est le foncteur dans $\underline{\mathrm{Ty}}$ 'passage à l'intervalle opposé'. On a en effet

[page 140]

un isomorphisme fonctoriel en X (passage au chemin opposé)

$$\boxed{\begin{array}{ccc} c & \longmapsto & c^o \\ \underline{\mathrm{Ch}}^{\underline{t}}_{\infty}(X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ch}}^{\underline{t}^o}_{\infty}(X) \end{array}} \qquad ([31])$$

qui 'échange source et but'. Bien sûr, on a intérêt à prendre $\underline{t}$ tel qu'on ait $\underline{t} = \underline{t}^o$ (c'est ce que j'avais fait, par un sain instinct, dès le début dans V), de sorte qu'on a un foncteur involutif canonique

$$\begin{array}{ccc} c & \longmapsto & c^o \\ \underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X) \end{array}$$

(je laisse tomber à nouveau l'exposant $\underline{t}$), qui 'échange source et but'. Donc on trouve, à isomorphisme canonique près, la 'même' factorisation de $f : X' \longrightarrow X$ en $\bar{f} \circ \alpha$, si on fait comme dans page 38 pour définir $\overline{X'}$ et α, ou si dans ce diagramme on intervertit les rôles de σ et de β.

Enfin :

4^o) Si

$$c : a \longrightarrow b$$

est un chemin quelconque dans X, on voudrait en conclure un isommorphisme dans Hot (de 'transport par c')

$$\overline{X'}_a \xrightarrow[\sim]{\bar{c}} \overline{X'}_b,$$

avec bien sûr transitivité pour la composition,

[page 141]

ce qui donnera aussi

$$\overline{c^{\mathrm{opp}}} = \bar{c}^{-1}$$

(en admettant que les chemins triviaux $a \xrightarrow{\mathrm{id}} a$ donnent l'identité $\overline{X'}_a \xrightarrow[\sim]{\mathrm{id}} \overline{X'}_a$!) ([32],[33]). Bien sûr, $\bar{c}$ ne doit dépendre que de la *classe d'homotopie* de $\bar{c}$ (dans

[30] résulte formellement de 1^o et 2^o, cf. page 170.

[31] cf. page 143 pour le passage de $\underline{t}$ à $\underline{t}^-$.

[32] Surtout pas se borner au cas où c serait un des t_n!

[33] décrire quand-même l'effet sur les π_0!

$\underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X;a,b)$, ou même dans $C = \underline{\mathrm{Ch}}(X;a,b)$, catégorie de tous les chemins dans X, de a vers b, de type non précisé). En d'autres termes, on doit avoir un foncteur

$$\begin{array}{rcl} \Pi(X) & \longrightarrow & \mathrm{Hot} \\ a & \longmapsto & \mathrm{hot}(\overline{X'}_a) \end{array}$$

du groupoïde fondamental de X dans Hot. À vrai dire, ceci n'a rien à voir avec la situation particulière étudiée ici - ça doit marcher chaque fois qu'on a une HOT-fibration, ici $\overline{X'} \longrightarrow X$, mais aussi $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \longrightarrow X \times X$ ([34]). Et pour une **D**-fibration $X' \longrightarrow X$ (**D** un dérivateur quelconque), et $a \in \mathbf{D}(e)$, on doit avoir de même deux foncteurs

$$\Pi(X) \rightrightarrows \mathbf{D}(e)$$

correspondant à

$$\begin{cases} x & \longmapsto & H^\bullet_{\mathbf{D}}(X'_x, \bullet) \\ x & \longmapsto & H_\bullet^{\mathbf{D}}(X'_x, \bullet). \end{cases}$$

[page 142]

Le cas qui nous occupe ici serait celui où $\mathbf{D} = \mathrm{HOT}$, où on prend $H_\bullet^{\mathbf{D}}$, et $a =$ objet final de $\mathbf{D}(e) = \mathrm{Hot}$.)

5°) Si 1°, 2°, 3° sont vérifiés, on est moralement sûr que la construction des $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$ est bel et bien l'équivalent exact du formalisme de CARTAN-SERRE. Pour en avoir le cœur totalement net, i.e. raccrocher explicitement cette théorie aux constructions classiques, il faudrait prouver un *énoncé de comparaison* avec la théorie semi-simpliciale, qui dirait essentiellement ceci : Si on désigne, pour X dans Cat, par $\tilde{X}$ l'objet associé dans $\mathbf{\Delta}^\wedge$ (le 'nerf' de X), alors la flèche

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)\tilde{} \longrightarrow \underbrace{(X \times X)\tilde{}}_{\simeq\, \tilde{X}\times\tilde{X}}$$

dans $\mathbf{\Delta}^\wedge/(X \times X)\tilde{}$, est W-équivalente sur $(X \times X)\tilde{}$ à la flèche

$$\underline{\mathrm{Ch}}(\tilde{X}) \longrightarrow \tilde{X} \times \tilde{X}$$

de la théorie semi-simpliciale des chemins (à supposer qu'il y ait une telle flèche classique définie pour *tout* objet X de $\mathbf{\Delta}^\wedge$). Ou qu'on ait tout au moins des isomorphismes canoniques dans Hot

$$\mathrm{hot}_{\mathrm{Cat}}(\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X;a,b)) \;\simeq\; \mathrm{hot}_{\mathbf{\Delta}^\wedge}(\underline{\mathrm{Ch}}(\tilde{X};\tilde{a},\tilde{b})).$$

[34]Ici aussi, il faudrait décrire l'effet du transport $\overline{c}$ sur les π_0 des fibres.

`[page 143]`

Dans 1^o et 3^o, on veut prouver que certaines flèches (p et $\bar{f}$) sont à la fois *propre* et *lisse* - ce qui est vraiment idéal ! Je dis qu'il suffit à chaque fois de prouver l'un des deux, que l'autre s'en déduit (comme 'cas particulier') par dualité. Pour ceci, notons

$$\tau \longmapsto \tau^-$$

l'automorphisme (*pas anti*-automorphisme) de $\underline{\mathrm{Ty}}$ qui consiste à changer de signe toutes les flèches de transition - c'est donc, au niveau des objets, l'unique automorphisme du monoïde libre Ty, qui échange Δ_+ et Δ_-. Au système projectif $\underline{t}$ dans $\underline{\mathrm{Ty}}$ correspond le système projectif $\underline{t}^-$. Ceci dit, on a un isomorphisme de catégories

$$\boxed{\underline{\mathrm{Ch}}^{\underline{t}}_{\infty}(X^o) \ \simeq \ (\underline{\mathrm{Ch}}^{\underline{t}^-}_{\infty}(X))^o} \qquad ({}^{35})$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Ch}}^{\underline{t}}_{\infty}(X^o) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "p^{\underline{t}}_{X^o}"] & \underline{\mathrm{Ch}}^{\underline{t}^-}_{\infty}(X)^o \arrow[d, "(p^{\underline{t}^-}_X)^o"] \\ X^o \times X^o \arrow[r, equal] & (X \times X)^o. \end{tikzcd}$$

Ainsi, dire que $p^{\underline{t}}_X$ `[plutôt` $p^{\underline{t}^-}_X$`]` est lisse, i.e. que $(p^{\underline{t}}_X)^o$ `[plutôt` $(p^{\underline{t}^-}_X)^o$`]` est propre, équivaut à dire que $p^{\underline{t}}_{X^o}$ est propre.

`[page 144]`

Il nous reste donc, à ce sujet, que deux faits à vérifier : la lissité de $p : \underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X) \longrightarrow X \times X$, et celle de $\bar{f} : \overline{X'} \longrightarrow X$.

a) Lissité de $p : \underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X) \longrightarrow X \times X$. On se donne une flèche

$$w : (a,b) \longrightarrow (a',b'), \qquad \text{i.e.} \quad \begin{cases} u : & a & \longrightarrow & a' \\ v : & b & \longrightarrow & b', \end{cases}$$

sur la base, un objet c' au dessus du but, i.e.

$$c' \in \underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X; a', b'),$$

et on regarde la catégorie des flèches dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X)$, de but c', qui relèvent w,

$$\begin{tikzcd} \underset{\text{variable}}{c} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash] & \underset{\text{fixe}}{c'} \arrow[d, dash] \\ (a,b) \arrow[r, "w"] & (a',b'), \end{tikzcd}$$

[35] cf. page 140 pour le passage de $\underline{t}$ à $\underline{t}^o$.

i.e. la catégorie des couples (c, φ), où

$$\begin{cases} c \in \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X; a, b) \\ \varphi : c \longrightarrow c' \quad (\in \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X; a', b')) \\ \text{une flèche induisant } \begin{array}{l} u \text{ sur les sources} \\ v \text{ sur les buts,} \end{array} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rrrr, dotted, no head, "c"] \arrow[d] & {} \arrow[d, dotted] & {} \arrow[d, dotted] & {} \arrow[d, dotted] & b \arrow[d] \\ a' \arrow[rrrr, no head, "c'"] & {} & {} & {} & b'. \end{tikzcd}$$

[page 145]

9.11.90

Pour la question précédente, relative aux flèches dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "i"] & \\ & \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \arrow[d, "p"] \arrow[ddl, "\sigma"'] \arrow[ddr, "\beta"] & \\ & X \times X \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & \\ X & & X, \end{tikzcd}$$

il faut préciser absolument la déscription de $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$ *dans* Cat, donc il faut préciser le système projectif $\underline{t} = (t_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Nous allons prendre en effet

$$t_n = (\underbrace{\Delta_+ \Delta_-}_{\tau_0})^{2n},$$

avec les morphismes de transition décrits par ailleurs

$$\underbrace{t_{n+p}}_{=\tau_0^{2n+2p}} \longrightarrow \underbrace{t_n}_{\tau_0^n},$$

étant donnés par $\delta_p * \mathrm{id}_{\tau_o^{2n}} * \delta_p$, où $\delta_p : \tau_0^p \longrightarrow 1$ est la dégénérescence de τ_0^p. Ainsi on peut considérer $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$ comme étant la catégorie des chemins biinfinis dans X

$$\cdots \longrightarrow a_{-5} \longleftarrow a_{-4} \longrightarrow \overbrace{a_{-3} \xleftarrow{u_{-2}} \overbrace{a_{-2} \xrightarrow{u_{-1}} a_{-1} \xleftarrow{u_0} \overbrace{a_0}^{\underline{\mathrm{Ch}}_0} \xrightarrow{u_1} a_1 \xleftarrow{u_2} a_2}^{\underline{\mathrm{Ch}}_1} \xrightarrow{u_3} a_3 \longleftarrow a_4}^{\underline{\mathrm{Ch}}_2} \longrightarrow a_5 \longleftarrow \cdots,$$

avec les u_i des identités pour $|i|$ assez grand.

La sous-catégorie (pleine)

$$\underline{\mathrm{Ch}}^W_{t_n}(X) \;=\; \underline{\mathrm{Ch}}^W_{(\Delta_+\Delta_-)^{2n}}$$

s'identifie à celle pour laquelle on a

> u_i une identité pour $i \notin [-2i+1, 2i]$, i.e. les seuls u_i 'significatifs' sont les $4i$ flèches u_{-2i+1}, u_{-2i+2}, $\ldots$, u_{2i}.

Mais il sera plus commode de regarder $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$ comme la limite inductive d'une

`[page 146]`

famille à deux indices de sous-catégories pleines

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{n,m}(X), \qquad n, m \in \mathbf{Z},$$

en définissant cette catégorie comme *vide* si $n > m$, et pour $n \leq m$ comme formée des objets

$$\begin{cases} (a_i, u_i)_{i\in\mathbf{Z}} \in \mathrm{Ch}^W_{n,m}(X) \iff u_i \text{ une identité pour } i \notin [n, m-1] \\ \overset{\mathrm{id}}{\cdots}\, a_{n-1} \overset{\mathrm{id}}{\text{——}} \underbrace{a_n \overset{u_n}{\text{——}} a_{n+1} \cdots \text{——} a_{m-1} \overset{u_{m-1}}{\text{——}} a_m}_{\text{'partie utile' du chemin}} \overset{\mathrm{id}}{\text{——}} a_{m+1} \overset{\mathrm{id}}{\cdots}\,. \end{cases}$$

Donc pour $n = m$, on trouve la sous-catégorie pleine isomorphe à X, formée des chemins infinis 'totalement dégénérés', i.e. tels que *toutes* les u_i soient des identités. (Cette sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty$ ne dépend donc pas du choix de $n = m$.)

$$\xrightarrow{\mathrm{id}} \underbrace{a_{-1}}_{=a} \xleftarrow{\mathrm{id}} \underbrace{a_0}_{=a} \xrightarrow{\mathrm{id}} \underbrace{a_1}_{=a} \xleftarrow{\mathrm{id}}$$

Tous les sommets d'un tel chemin sont égaux à un même objet de X, et les flèches de transition entre eux sont identiques.

La structure de $\underline{\mathrm{Ch}}^W_{n,m}(X) \simeq \underline{\mathrm{Ch}}^W_{\tau_{n,m}}(X)$ ne dépend que de la longueur $m-n$ de $\tau_{n,m}$ et de la *parité* de n. Si n est pair, la direction initiale de $\tau_{n,m}$ est positive, et

$$\tau_{n,m} = \underbrace{\Delta_+\Delta_-\cdots}_{m-n \text{ facteurs en alternance}} = \begin{cases} (\Delta_+\Delta_-)^{\frac{m-n}{2}} & \text{si } m \text{ pair} \\ (\Delta_+\Delta_-)^{\frac{m-n}{2}-1}\Delta_+ & \text{si } m \text{ impair} \end{cases}$$

`[plutôt` $\frac{m-n-1}{2}$ `au lieu de` $\frac{m-n}{2}-1$`]`, tandis que pour n impair c'est juste l'inverse

[page 147]

$$\tau_{n,m} = \underbrace{\Delta_-\Delta_+\cdots}_{m-n \text{ facteurs alternés}} = \begin{cases} (\Delta_-\Delta_+)^{\frac{m-n}{2}} & \text{si } m \text{ impair} \\ (\Delta_-\Delta_+)^{\frac{m-n}{2}-1}\Delta_- & \text{si } m \text{ pair} \end{cases}$$

[plutôt $\frac{m-n-1}{2}$ au lieu de $\frac{m-n}{2}-1$]. La direction initiale est conforme à la parité de n, i.e. égale à $(-1)^n$, tandis que la direction terminale est opposée à la parité de m, i.e. égale à $(-1)^m$ [plutôt $(-1)^{m+1}$].

Je note que l'on a $\tau_0 = (\tau_0)^o$, d'où

$$\underline{t} = \underline{t}^o, \qquad \text{mais } \underline{t} \neq \underline{t}^-,$$

et pourtant on a des isomorphismes fonctoriels en X

$$\underline{\mathrm{Ch}}_{\underline{t}}(X) \simeq \underline{\mathrm{Ch}}_{\underline{t}^-}(X)$$

respectant source et but, à cause d'un isomorphisme

$$\underline{t} \simeq \underline{t}^- \qquad \text{dans } \mathrm{Pro}(\underline{\mathrm{Ty}}).$$

On peut dire p. ex. que le *foncteur translation* T^p d'amplitude p (pour $p \in \mathbf{Z}$) est défini sur $\underline{\mathrm{Ch}}_{\underline{t}}^W(X)$, par

$$\begin{cases} T^p(((a_i),(u_i))_{i\in\mathbf{Z}}) = ((b_j),(v_j))_{j\in\mathbf{Z}} \\ \text{avec} \begin{cases} b_j & = & a_{j-p} \\ v_j & = & u_{j-p} \end{cases} \end{cases}$$

et que

$$T^p : \left.\begin{cases} \underline{\mathrm{Ch}}_t(X) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Ch}}_{-t}(X) \\ \underline{\mathrm{Ch}}_{-t}(X) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Ch}}_t(X) \end{cases}\right\} \text{si } p \text{ impair}$$

$$T^p : \left.\begin{cases} \underline{\mathrm{Ch}}_t(X) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Ch}}_t(X) \\ \underline{\mathrm{Ch}}_{-t}(X) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Ch}}_{-t}(X) \end{cases}\right\} \text{si } p \text{ pair.}$$

[page 148]

En d'autres termes, on peut formellement regarder la catégorie somme

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\pm(X) = \underline{\mathrm{Ch}}_+(X) \amalg \underline{\mathrm{Ch}}_-(X)$$

et l'opération translation T comme un automorphisme qui échange les deux morceaux, et T^p n'est autre que son itéré p-ème, qui échange les morceaux $+$ et $-$ si p impair, qui les stabilise si p pair.

Il y a aussi l'automorphisme involutif de passage au chemin opposé, qui échange source et but, et que je définis (conformément à l'isomorphisme canonique identique

$$\underline{t} \xrightarrow{\sim} \underline{t}^o \quad)$$

comme la symétrie S

$$\begin{cases} S((a_i),(u_i)) = ((b_j),(u_j)) \text{ avec} \\ b_j \ = \ a_{-j} \\ u_j \ = \ u_{-j+1}. \end{cases}$$

Si je le regarde comme opérant sur $\underline{\mathrm{Ch}}^W_{\pm}(X)$, il est lié au foncteur T par

$$\begin{cases} S^2 = \mathrm{id} \\ STS^{-1} = T^{-1}, \end{cases}$$

de sorte que c'est le groupe semidirect de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}$ (groupe affine de dimension 1 de l'anneau $\mathbf{Z}$) qui opère sur $\underline{\mathrm{Ch}}_{\pm}$.

[page 149]

On est embarassé de trouver un automorphisme T^2 de la situation $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X) \longrightarrow X \times X$, sans qu'il soit évident que dans Hot, ce foncteur induise l'identité! Je ne vois aucun moyen de relier un chemin c et T^2c par une flèche dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}$, ni même pas un chemin 'canonique'. Mais je me dis que cet automorphisme est décrit par un automorphisme, non pas du système projectif

$$(\tau_{n,m})_{n,m \in \mathbf{Z}^o \times \mathbf{Z},\ n \leq m}$$

(où $\mathbf{Z}^o$ désigne l'ensemble ordonné *opposé* de $\mathbf{Z}$), mais du *pro-objet* de $\underline{\mathrm{Ty}}$ qu'il définit (qui est bien sûr 'le même' pour tous les systèmes projectifs cofinaux à gauche dans $\underline{\mathrm{Ty}}$). Il en résulte déjà que T^2 induit l'identité sur l'ind-objet de Cat hot, $\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}_{\infty}(X)$, et a fortiori sur l'ind-objet correspondant de Hot, ou de $\mathrm{Hot}_0^{\wedge}$, ou enfin pour l'objet de $\mathrm{Hot}_0^{\wedge}$ lui-même. De même pour les $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X; a, b)$. Il s'ensuit, revenant à $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X)$ lui-même et aux $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X; a, b)$, que l'automorphisme induit par T^2 est l'identité dans $\mathrm{Hot}_0^{\wedge}$. J'espère que $\mathrm{Hot} \longrightarrow \mathrm{Hot}_0^{\wedge}$ est

[page 150]

tout au moins fidèle, de sorte que ça prouvera que T^2 induit l'identité dans Hot également.

Je reviens aux questions 1^o à 4^o d'il y a quelques jours.

Pour 1^o), il faut prouver que

$$p : \underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X) \longrightarrow X \times X$$

est lisse et propre et une Hot-fibration. Par dualité, p propre résultera de p lisse. Mais $\underline{\mathrm{Ch}}_{\infty}(X)$ est $\varinjlim$ des $\underline{\mathrm{Ch}}_{n,m}(X)$, avec $n \longrightarrow -\infty$, $m \longrightarrow +\infty$, et où on peut se borner à n et m *pairs.* Or on voit que pour n, m pairs, i.e. $\tau_{n,m}$ à flèche initiale directe, à flèche finale rétrograde, $\underline{\mathrm{Ch}}_{n,m}(X) \simeq \underline{\mathrm{Ch}}_{\tau n,m}(X)$ est Cat-*fibrée* sur $X \times X$, donc lisse (i.e. HOT-lisse), et cela passe aux $\varinjlim$ ([36]).

Ainsi $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \xrightarrow{p} X \times X$ est à la fois propre et lisse ([37]). Dire que c'est une HOT-fibration, revient p. ex. à dire que pour

$$(a,b) \xrightarrow{(u,v)} (a',b')$$

dans $X \times X$, la flèche correspondante

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)/(a,b) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)/(a',b')$$

est une Hot-équivalence. Or, comme p est propre, les inclusions des fibres en (a,b) et en (a',b') dans l'un et l'autre membre sont des Hot-équivalences :

[page 151]

(∗)
$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)/(a,b) \arrow[r, "\rho"] & \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)/(a',b') \\
\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X;a,b) \arrow[u, hook, "\imath"] \arrow[r, dotted, "\varphi"] & \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X;a',b') \arrow[u, hook, "\imath"']
\end{tikzcd}$$

Ainsi on trouve une flèche en pointillés dans Hot, dont il faut prouver que c'est une Hot-équivalence. Mais en considérant

$$u : a \longrightarrow a' \qquad v : b \longrightarrow b'$$

comme des *chemins* dans X, et

$$u^o : a' \longleftarrow a$$

comme un chemin rétrograde de a' à a, la théorie de variance générale (dans IX) nous donne bel et bien un isomorphisme dans (Hot) :

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X;a,b) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X;a',b'),$$

on a envie de dire que c'est φ, i.e. qu'en l'insérant à la place de φ, le carré ci-dessus devient commutatif (ce qui prouverait ce qu'on veut). Je pense que si on travaille avec les ind-objets $\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}_\infty(X)/(a,b)$, $\underline{\underline{\mathrm{Ch}}}_\infty(X;a,b)$ etc., pour lesquels on a des accouplements qui s'explicitent agréablement aux crans finis, et donnent naissance aux φ, cela devrait être facile (quoiqu'un peu fastidieux). Cela ne prouverait pas pour autant la commutativité de (∗) dans Hot, mais

[36]**NB** $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$ n'est ni fibrée ni cofibrée sur $X \times X$ - car les foncteurs d'inclusion entre les $\underline{\mathrm{Ch}}_{n,m}$ ne sont pas cartésiens resp. cocartésiens.

[37]12.11. Mais ça implique déjà que c'est une fibration !

[page 152]

seulement dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, ce qui n'est peut-être pas suffisant. Mais cela suffit pour prouver que la flèche ρ dans $(*)$ devient [un] isomorphisme dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, donc elle est [un] isomorphisme.

2°) Il faut montrer que les HOT-fibrations

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \underset{\beta}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} X$$

sont triviales, ou ce qui revient au même, qu'elles sont à fibres asphériques. Il suffit de le voir pour σ, donc que

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X; a, ?)$$

est asphérique. Mais cette catégorie est la limite inductive des $\underline{\mathrm{Ch}}_n(X; a, ?)$, i.e. des

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\text{source fixée}}(\tau^n, X).$$

Mais comme l'intervalle I_{τ^n} se rétracte par déformation sur son origine, il est immédiat que cette catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}$ est même contractile.

3°) Considérons

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{X'} = C(f) \arrow[dl] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddrr, bend left, "\bar{f}"] & & \\
X' \arrow[ur, dotted, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, phantom, "\underline{\text{cart.}}"] & & \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \arrow[dl, "\sigma"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
 & X & & X,
\end{tikzcd}$$

[page 153]

je voudrais prouver que $\bar{f}$ est une **D**-fibration propre et lisse ([38]).

$\overline{X'}$ est la catégorie des couples

$$(x', c) \in \mathrm{Ob}\, X' \times \mathrm{Ch}_\infty(X)$$

tels que

$$\sigma(c) = f(x')$$

et

$$\bar{f}(x', c) = \beta(c), \qquad \text{but de } c.$$

La fibre de $\overline{X'}$, $\bar{f}$ en $x_0 \in X$ est donc la catégorie des couples $(x', c) \in \mathrm{Ob}\, X' \times \mathrm{Ch}_\infty(X)$, tels que

$$\sigma(c) = f(x'), \qquad \beta(c) = x_0.$$

[38] Ça résulte formellement de ce qui a été déjà vu, cf. pages 170-171.

On peut regarder encore $\overline{X'}$ comme limite inductive des sous-catégories $\overline{X'}_{n,m}$, correspondante aux couples (x', c) avec $c \in \mathrm{Ch}_{n,m}(X)$. On trouve que pour m pair (direction terminale de $\tau_{n,m}$ rétrograde) les $\overline{X'}_{n,m}$ sont Cat-fibrées sur X, pour m impair (direction terminale de $\tau_{n,m}$ directe) elles sont Cat-cofibrées. Donc on conclut encore comme tantôt, $\overline{X'}$ étant (au choix) limite inductive filtrante de sous-catégories lisses sur X, ou propres sur X.

[page 154]

Il faut prouver enfin que $\overline{X'} \xrightarrow{\bar{f}} X$ est une **D**-fibration ([39]), ce qui revient p. ex. à dire que pour une flèche

$$a \xrightarrow{v} b$$

dans X, la flèche induite

$$\overline{X'}/a \xrightarrow{\bar{v}} \overline{X'}/b$$

est une Hot-équivalence. On sait déjà comme tantôt que l'on a un diagramme à flèches verticales des Hot-équivalences

$$\begin{tikzcd} \overline{X'}/a \arrow[r] & \overline{X'}/b \\ \overline{X'}_a \arrow[u, hook, "\wr"] \arrow[r, dotted] & \overline{X'}_b \arrow[u, hook, "\wr"'] \end{tikzcd},$$

et tout revient à montrer qu'une certaine flèche entre $\overline{X'}_a$ et $\overline{X'}_b$ dans Hot est [un] isomorphisme. J'ai envie de définir directement une telle flèche dans Hot, voire dans Cat. Or pour les m impairs, les $\overline{X'}_{n,m}$ sont Cat-cofibrées sur X. Pour $\overline{X'}_{-m,m}$ (m impair) on trouve donc

$$(\overline{X'}_{-m,m})_a \xrightarrow{v_*} (\overline{X'}_{-m,m})_b,$$

[page 155]

l'ennui est qu'elles ne sont pas compatibles avec les morphismes de transition pour m variable. Elles le sont cependant *à homotopie près* sûrement, donc on trouvera au moins une flèche d'ind-objets dans Cat hot

$$\overline{\overline{X'}}_a \xrightarrow{v_*} \overline{\overline{X'}}_b,$$

ce qui par passage à $\mathrm{Hot}_0^{\wedge}$ donne quand-même une flèche

$$\overline{X'}_a \xrightarrow{v_*} \overline{X'}_b.$$

En travaillant avec les m impairs, on trouve de même des foncteurs en sens inverses

$$(\overline{X'}_{-m,m})_a \xleftarrow{v^*} (\overline{X'}_{-m,m})_b,$$

[39] Cela résulte déjà du fait que c'est propre et lisse!

qui ne se recollent pas pour m variable, mais qui se recollent à homotopie près, pour donner une flèche dans Ind Cat hot

$$\overline{\overline{X'}}_a \xleftarrow{v^*} \overline{\overline{X'}}_b,$$

d'où aussi

$$\overline{X'}_a \xleftarrow{v^*} \overline{X'}_b \qquad \text{dans } \mathrm{Hot}_0^\wedge.$$

D'autre part, on doit pouvoir montrer soritalement,

[page 156]

cran par cran, que v_*v^* et v^*v_* dans Ind Cat hot sont égales à l'identité, donc v_* et v^* sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. On doit vérifier d'autre part soritalement que

$$\begin{tikzcd}
\overline{\overline{X'}}/a \arrow[r, "\bar{v}"] & \overline{\overline{X'}}/b \\
\overline{\overline{X'}}_a \arrow[u] \arrow[r, "v_*"] & \overline{\overline{X'}}_b, \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

dans Ind Cat hot est commutatif. Passant au diagramme correspondant dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, en prenant les limites inductives, on trouve un carré commutatif dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$

$$\begin{tikzcd}
\overline{X'}/a \arrow[r, "\bar{v}"] & \overline{X'}/b \\
\overline{X'}_a \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "v_*", "\sim"'] & \overline{X'}_b, \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

d'où résulte que $\bar{v}$ est [un] isomorphisme dans $\mathrm{Hot}_0^\wedge$, donc aussi dans Hot.

Pour vérifier que la HOT-fibration $\bar{f}$ est triviale si et seulement si f est une HOT-équivalence, il faudrait avoir développé dans Cat le formalisme de la suite exacte des lacets - on est tout près visiblement !

[page 157]

13.11.90

13 Où on prouve enfin que $\underline{\mathrm{Ch}}(X;-,-)$ est aussi bon (voire meilleur) que $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X;-,-)$.

Je crois finalement que les catégories $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$, $\underline{\mathrm{Ch}}(X;a,b)$ (sans indice ∞!) sont 'bonnes', que les flèches canoniques dans Hot

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Ch}}(X) \\ \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X;a,b) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Ch}}(X;a,b) \end{cases}$$

sont des isomorphismes. (La première est même [un] isomorphisme dans $\mathrm{HOT}(X\times X)$, ce qui implique la deuxième relation, en passant aux fibres ...) Je crois que je suis à présent (après XI) en mesure de le prouver. Cela résultera des deux résultats-clef suivants :

1) Le foncteur canonique
$$X \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(X)$$
(associant à tout $x \in \mathrm{Ob}\,X$ le chemin vide de source et but X) est une Hot-équivalence, et :

2) Le foncteur source-but
$$\underline{\mathrm{Ch}}(X) \longrightarrow X \times X$$
est *lisse* et *propre* (donc une 'Hot-fibration parfaite').

Cela doit donner ce qu'on cherche. Comme la $X \times X$-flèche $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(X)$ (et les flèches déduites $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X;a,b) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(X;a,b)$) a été définie par l'intermédiaire de la catégorie

$\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ} = \mathbf{N}^\circ \times_{\underline{\mathrm{Ty}}} \mathcal{C}$ (où $\mathcal{C} = \underline{\mathrm{Ch}}(X)$ [est] considérée comme catégorie fibrée sur $\underline{\mathrm{Ty}}$, et $\mathbf{N}^\circ \longrightarrow \underline{\mathrm{Ty}}$ est le système projectif des $\underbrace{(\Delta_+\Delta_-)^{2n}}_{t_n}$ ...)

[page 158]

à l'aide des deux flèches canoniques

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ} & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \\ \big\downarrow & & \\ \underline{\mathrm{Ch}}(X), & & \end{array}$$

on sera obligé de prouver aussi les résultats qui correspondent à 1) 2) pour $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}$, i.e.

1′)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "l"'] & \mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ} \\ \mathcal{C}_{t_0} = \mathcal{C}_0 \end{tikzcd}$$

(l'inclusion canonique de $\mathcal{C}_0$, fibre de $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}$ (fibrée sur $\mathbf{N}^o$) en $0 \in \mathbf{N}^o$) est une Hot-équivalence, et :

2′) $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ} \longrightarrow X \times X$ est propre et lisse.

Moyennant ces quatre résultats techniques, que je vais prouver tantôt (et 1′ et 2′ ne font aucune surprise pour moi), on gagne. Considérons en effet le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[d, "\alpha_0"] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ \underline{\mathrm{Ch}}(X) \arrow[dr, "p_1"'] & \mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ} \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "p_0"] & \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \arrow[dl, "p_2"] \\ & X \times X. & \end{tikzcd}$$

Par 1) et 1′) (concernant α_1 et α_0) et le résultat

[page 159]

similaire déjà connu pour α_2, ces trois foncteurs sont des Hot-équivalences. Donc il en est de même de π_1, π_2. Comme p_1, p_0, p_2 sont des Hot-fibrations (étant propres et lisses), il s'ensuit que π_1 et π_2 induisent des Hot-équivalences sur les fibres

$$\underline{\mathrm{Ch}}(X; a, b) \xleftarrow{\pi_1(a,b)} \mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}(a, b) \xrightarrow{\pi_2(a,b)} \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X; a, b).$$

Je l'avais vérifié (sans mal) déjà pour π_2 et les $\pi_2(a, b)$, ce qui avait permis, en inversant π_2 dans Hot, de définir *dans* Hot

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(X) \\ \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X; a, b) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(X; a, b), \end{cases}$$

et dire que ce sont des isomorphismes signifie justement que π_1 et les $\pi_1(a, b)$ sont des isomorphismes.

Je ne crois pas que $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}$ ait en lui-même d'autre interêt, que de permettre de comparer les $X \times X$-catégories $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$ et $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$, à l'aide du diagramme précédent. Par contre, $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X)$ et $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ m'aparaissent comme les deux ingrédients essentiels du formalisme des chemins dans Cat.

`[page 160]`

Je vais prouver 1, 2, 1′, 2′.

1) Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} X = (X_{\underline{\mathrm{Ty}}})_e \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, dotted] & X_{\underline{\mathrm{Ty}}} = X \times \underline{\mathrm{Ty}} \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Ch}}(X) \arrow[dl] \\ e \arrow[r, dotted] & \underline{\mathrm{Ty}}\ , & \end{tikzcd}$$

où $X_{\underline{\mathrm{Ty}}}$ et $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ sont considérées comme catégories Cat-fibrées sur $\underline{\mathrm{Ty}}$, et le foncteur j est déduit des foncteurs canoniques

$$X \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(X)_\tau \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Ch}}_\tau(X),$$

associant à $x \in \mathrm{Ob}\, X$ le chemin $p_\tau^*(x)$, où $p_\tau : \tau \longrightarrow e$ est la projection de τ vers l'élément unité (et élément final) $e = 1_{\underline{\mathrm{Ty}}}$ de $\underline{\mathrm{Ty}}$, et $\underline{\mathrm{Ch}}_e(X)$ est identifiée à X. Il faut vérifier le

Lemme. *Pour tout $\tau \in \underline{\mathrm{Ty}}$, le foncteur précédent est une* Hot-*équivalence (et même un homotopisme).*

Mais on sait que pour deux catégories $\mathcal{X}$, $\mathcal{C}$ lisses sur une autre, T, tout T-morphisme de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{C}$ qui induit des Hot-équivalences sur les fibres, est une Hot-équivalence. Ainsi j est

`[page 161]`

est une Hot-équivalence. D'autre part, $\underline{\mathrm{Ty}}$, ayant un objet final, est asphérique, donc $X \times \underline{\mathrm{Ty}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X$ est une Hot-équivalence, d'où résulte aussitôt que i est une Hot-équivalence. Donc de même ji, or $ji = \alpha_1$, q.e.d.

2) Prouvons p. ex. la lissité de $\underline{\mathrm{Ch}}(X) \longrightarrow X \times X$, la propriété s'en déduira en appliquant ce résultat à X^{opp}. Soit donc

$$(a', b') \longrightarrow (a, b), \qquad \text{i.e. } a' \xrightarrow{u} a,\ b' \xrightarrow{v} b,$$

une flèche dans $X \times X$, et c un objet de $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ au dessus de (a, b) :

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[r, dotted, "c'"] \arrow[d, "u"'] & b' \arrow[d, "v"] \\ a \arrow[r, "c"] & b. \end{tikzcd}$$

On regarde la catégorie $\mathcal{C}(c; u, v)$ des couples (c', w) qui relèvent $(c, (u, v))$, où donc c' est un chemin (de type non précisé) de a' vers b', et

$$w : c' \longrightarrow c$$

une flèche dans $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$ qui sur les objets source induise u, et sur les objets buts induise v (ainsi c' est un chemin de a' vers b'). Il faut

[page 162]

prouver que cette catégorie $\mathcal{C}(c; u, v)$ est asphérique. Pour cela, on regarde le chemin composé

$$\tilde{c} = \mathrm{ch}(u)\ c\ \mathrm{ch}(v)^o,$$

où $\mathrm{ch}(u)$ est le chemin (direct) de a' vers a défini par $u : a' \longrightarrow a$, et $\mathrm{ch}(v)^o$ désigne donc le chemin (rétrograde) de b à b' défini par $v : b' \longrightarrow b$. Si c est de type τ, $\tilde{c}$ est donc de type $\Delta_+\tau\Delta_-$. On va comparer $\mathcal{C}(c; u, v)$ et la catégorie $\underline{\mathrm{Ch}}(X)/\tilde{c}$, à l'aide de deux foncteurs

$$\mathcal{C}(c; u, v) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Ch}}(X; a', b')/\tilde{c}\ ,$$

dont on prouvera qu'ils définissent des flèches inverses l'une de l'autre dans Hot. Comme $\underline{\mathrm{Ch}}(X)/\tilde{c}$ est contractile (ayant un objet final), donc asphérique, il en est de même de $\mathcal{C}(c; u, v)$, et on gagnera.

On définit φ par $\boxed{\varphi(c', w') = (\tilde{c}', \tilde{w}'),}$ où (c' étant du type τ') $\tilde{c}'$ est le chemin de type $\Delta_+\tau'\Delta_-$ déduit de c' comme image inverse par la dégénérescence $\Delta_+\tau'\Delta_- \longrightarrow \tau'$, i.e. on prolonge c' d'un 'cran Δ_+' $a' \xrightarrow{\mathrm{id}} a'$ à gauche et d'un 'cran Δ_-' $b' \xleftarrow{\mathrm{id}} b'$ à droite, cf. figure.

$$\overbrace{\hphantom{a' \to a' \cdots b' \leftarrow b'}}^{\tilde{c}'}$$

$$\begin{tikzcd}
a' \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "*"] & a' \arrow[r, dotted, dash] \arrow[d, "u"'] & {c'} \arrow[r, dotted, dash] \arrow[d, dotted, "w'"] & b' \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "*"] & b' \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
a' \arrow[r, "u"] & a' \arrow[r, dash] & {c'} \arrow[r, dash] & b' & b' \arrow[l, "v"']
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{\hphantom{a' \to a' \longrightarrow b' \leftarrow b'}}_{\tilde{c}}$$

[page 163]

On peut dire que

$$\tilde{c}' = a'_{\Delta_+} \circ c' \circ b'_{\Delta_-},$$

où de façon générale, si $x \in X$ et $\tau \in \mathrm{Ty}$, x_τ désigne le 'chemin constant' de valeur x, type τ. On a d'autre part des morphismes évidents

$$a'_{\Delta_+} \longrightarrow \mathrm{ch}(u), \qquad b'_{\Delta_-} \longrightarrow \mathrm{ch}(v)^{\mathrm{opp}},$$

comme montré [?] par les flèches verticales $(\mathrm{id}_{a'}, u)$ et $(v, \mathrm{id}_{b'})$ dans les deux carrés marqués $*$ du diagramme, flèches qui sont l'une dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Delta_+}(X)$, l'autre dans $\underline{\mathrm{Ch}}_{\Delta_-}(X)$. Ceci dit, on pose

$$\tilde{w}' : \tilde{c}' \longrightarrow \tilde{c}, \qquad \tilde{w} = \lambda(u) * w' * \mu(v),$$

où

$$\begin{cases} \lambda(u) : & a'_{\Delta_+} & \longrightarrow & \mathrm{ch}(u) \\ \mu(v) : & b'_{\Delta_-} & \longrightarrow & \mathrm{ch}(v)^{\mathrm{opp}} \end{cases}$$

(cf. figure). Le couple

$$(\tilde{c}', \tilde{w}') \in \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Ch}}(X)/\tilde{c}$$

ainsi défini dépend fonctoriellement de (c', w') variable dans $\mathcal{C}(c; u, v)$: Si (c'_1, w'_1) est un deuxième objet de cette catégorie, une flèche du premier dans le second est une flèche

$$c' \xrightarrow{\alpha} c'_1$$

dans $\underline{\mathrm{Ch}}(X; a', b')$, telle qu'on ait commutativité dans

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "w'"'] & & c'_1 \arrow[dl, "w'_1"] \\ & c, & \end{tikzcd} \qquad w' = w'_1 \alpha.$$

Une telle flèche α définit

$$\tilde{\alpha} = a'_{\Delta_+} * \alpha * b'_{\Delta_-} : \tilde{c}' \longrightarrow \tilde{c}'_1$$

dans $\underline{\mathrm{Ch}}(X; a', b')$, et on vérifie

[page 164]

aussitôt que l'on a commutativité dans

$$\begin{tikzcd} \tilde{c}' \arrow[rr, "\tilde{\alpha}"] \arrow[dr, "\tilde{w}'"'] & & \tilde{c}'_1 \arrow[dl, "\tilde{w}'_1"] \\ & \tilde{c}, & \end{tikzcd} \qquad \text{i.e. } \tilde{w}' = \tilde{w}'_1 \tilde{\alpha},$$

i.e. que $\tilde{\alpha}$ est bien une flèche dans $\underline{\mathrm{Ch}}(X; a', b')/\tilde{c}$. De même, que $\alpha \longmapsto \tilde{\alpha}$ définit une dépendance fonctorielle, i.e. $(\beta\alpha)\tilde{} = \tilde{\beta}\tilde{\alpha}$, est évident sur la définition de $\tilde{\alpha}$. Donc, on a bien défini

$$\mathcal{C}(c; u, v) \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathrm{Ch}}(X; a', b')/\tilde{c},$$

définissons maintenant

$$\mathcal{C}(c; u, v) \xleftarrow{\psi} \underline{\mathrm{Ch}}(X; a', b')/\tilde{c}.$$

Soit (c'', w'') un objet de $\underline{\mathrm{Ch}}(X; a', b')/\tilde{c}$,

$$\begin{tikzcd} a'_0 = a' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & a'_1 \arrow[rr, "\longrightarrow", no head] \arrow[d, "w''_1"'] & \arrow[d, dotted, "w''"] & a'_n \arrow[d, "w''_n"'] & b' \arrow[l] \arrow[d, equal] \\ a' \arrow[r, "u"] & a \arrow[rr, no head] & \ & b & b', \arrow[l, "v"'] \end{tikzcd}$$

donc
$$w'' : c'' \longrightarrow \tilde{c}, \qquad \text{flèche dans } \underline{\mathrm{Ch}}(X; a', b'),$$
notons qu'on a une flèche de rétraction évidente
$$\tilde{c} \xrightarrow{\rho_c} c \qquad \text{associée à } \Delta_+\tau\Delta_- \longrightarrow \tau \text{ (rétraction)},$$
induisant u et v sur la source et le but :

$$\begin{array}{ccccccccc}
a' & \xrightarrow{u} & a & \overset{c}{\rule{3cm}{0.4pt}} & b & \xleftarrow{v} & b' & \Big\} \; \tilde{c} & \in \underline{\mathrm{Ch}}_{\Delta_+\tau\Delta_-}(a', b') \\
\downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \quad \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \\
a & \xrightarrow{\mathrm{id}} & a & \overset{c}{\rule{3cm}{0.4pt}} & b & \xleftarrow{v} & b' & \Big\} \; \delta_\tau^*(c) & \in \underline{\mathrm{Ch}}_{\Delta_+\tau\Delta_-}(a, b) \\
 & & a & \overset{c}{\rule{3cm}{0.4pt}} & b & & & \Big\} \; c & \in \underline{\mathrm{Ch}}_\tau(a, b).
\end{array}$$

[page 165]

Donc on définit un objet
$$(c', w') = \psi(c'', w'') \; \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}(c; u, v)$$
par
$$c' = c'', \qquad w' = \rho_c w'',$$
et c'est fonctoriel en (c'', w'').

Le composé $\varphi\psi$ étant un endomorphisme de la catégorie contractile $\underline{\mathrm{Ch}}(X; a', b')/\tilde{c}$, est homotope à l'identité. Il faut vérifier qu'il en est de même de $\psi\varphi$, endomorphisme de $\mathcal{C}(c; u, v)$. Ce foncteur associe à (c', w'), $(\tilde{c}', \overline{w'})$, où $\tilde{c}'$ est défini comme plus haut, $\tilde{c}' = a'_{\Delta_+} \circ c' \circ b'_{\Delta_-}$, et où $\overline{w'}$ est le composé
$$\underbrace{\tilde{c}'}_{= \delta'^*_{\tau'}(c')} \; \underbrace{\xrightarrow{\rho_{c'}}}_{\substack{\text{flèche} \\ \text{canonique}}} \; c' \xrightarrow{w'} c.$$

On a donc
$$(\psi\varphi)(c', w') = (\tilde{c}', \overline{w'}) \xrightarrow{\rho_{c'}} (c', w'),$$
c'est bien un morphisme dans $\mathcal{C}(c; u, v)$, i.e. on a commutativité dans

$$\begin{tikzcd}
\tilde{c}' \arrow[rr, "\rho_{c'}"] \arrow[dr, "\overline{w'}"'] & & c' \arrow[dl, "w'"] \\
 & c &
\end{tikzcd} \qquad \text{(flèche de } \underline{\mathrm{Ch}}(X; a', b')\text{)}.$$

[page 166]

Ainsi, le foncteur $\psi\varphi$ est bien homotope au foncteur identique. On a gagné !

Passons à $1'$, $2'$) pour $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^o}$. L'assertion $1'$) se démontre exactement de la même manière que 1) pour $\underline{\mathrm{Ch}}(X)$, en regardant $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^o}$ comme fibrée sur $\mathbf{N}^o$ (qui a un objet final 0), et en utilisant le diagramme

$$\begin{tikzcd} X = (X_{\mathbf{N}^o})_e \arrow[r, "i'"] & X_{\mathbf{N}^o} = X \times \mathbf{N}^o \arrow[r, "j'"] \arrow[dr] & \mathcal{C}_{\mathbf{N}^o} \arrow[d] \\ & & \mathbf{N}^o\ , \end{tikzcd}$$

où j' est (cartésien et) une Hot-équivalence sur chaque fibre d'après le lemme, donc une Hot-équivalence globalement, et i' est une Hot-équivalence car $\mathbf{N}^o$ est asphérique (ayant un objet final). Donc $j'i'$ est asphérique, q.e.d.

Il reste à prouver que

$$\mathcal{C}_{\mathbf{N}^o} \longrightarrow X \times X$$

est propre et lisse. Ici encore,

[page 167]

c'est exactement le même argument que tantôt, je présume. Il y a cependant une complication technique. Nous avions pris, pour définir

$$\underline{t} : \mathbf{N}^o \longrightarrow \underline{\mathrm{Ty}}, \qquad \underline{t} = (t_n)_n,$$

le choix

$$t_n = (\Delta_+\Delta_-)^{2n},$$

ou si on préfère

$$t_n = (\Delta_+\Delta_-)^n,$$

en tous cas les t_n sont à direction initiale $+$, terminale $-$, et ce sont des types réduits. Si on prend $\Delta_+ t_n \Delta_-$, on trouve un type non réduit, qui n'est pas parmi les t_n. Il ne servirait à rien de changer la définition de t_n en $t_n = (\Delta_-\Delta_+)^{\text{quelque chose}}$, car cette fois $\Delta_+ t_n \Delta_-$ sera bien réduit, mais n'aura pas les bons signes initial et terminal. Donc pour définir $\tilde{c}$ en termes de c, comme objet de $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^o}$, il faudra, si c est de type $\tau = t_n$, prendre $\tilde{c}$ de type $\Delta_+\Delta_-\tau\Delta_+\Delta_- = t_{n+1}$ (en prenant $t_{n+1} = (\Delta_+\Delta_-)^{2n}$), et de même pour définir $\tilde{c}'$ en termes de c'. Les définitions pertinentes du passage de (c', w') à $(\tilde{c}', \tilde{w}')$ sont décrites dans la figure :

[page 168]

$$
\tilde{w}'\Big\downarrow\quad
\begin{tikzcd}
a' \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & a' \arrow[d, "u"'] & a' \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, dotted, "c'"] \arrow[d, "u"'] & b' \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "v"'] & b' \arrow[d, "v"'] & b' \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
a' \arrow[r, "u"] & a & a \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "c"] \arrow[ur, phantom, "w'\ w'\ w'"] & b \arrow[r, "\mathrm{id}"] & b & b'. \arrow[l, "v"']
\end{tikzcd}
\quad \tilde{w}'
$$

Ainsi

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\tilde{c} & = & \xi_u \circ c \circ \eta_v \qquad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} \xi_u : \ a' \xrightarrow{u} a \xleftarrow{\mathrm{id}} a \\ \eta_v : \ b \xrightarrow{\mathrm{id}} b \xleftarrow{v} b' \end{array} \right\} \text{type } \Delta_+\Delta_- \\[2ex]
\tilde{c}' & = & a'_{\Delta_+\Delta_-} \circ c' \circ b'_{\Delta_+\Delta_-} \\[2ex]
\tilde{w}' & = & \lambda(u) * w * \mu(v) \qquad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \lambda(u) : \ a'_{\Delta_+\Delta_-} \longrightarrow \xi_u \\ \lambda(v) : \ b'_{\Delta_+\Delta_-} \longrightarrow \eta_v \end{array} \right\} \text{comme dans [la] figure.}
\end{array}
\right.
$$

On trouve ainsi, mutatis mutandis,

$$\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}(c; u, v) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}(a', b')/\tilde{c}, \qquad \varphi(c', w') = (\tilde{c}', \tilde{w}'),$$

et on définit le foncteur

$$\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}(c; u, v) \xleftarrow{\psi} \mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}(a', b')/\tilde{c}$$

ainsi : à (c'', w'') dans $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}(a', b')/\tilde{c}$, donc un chemin c'' de type $t_n = (\Delta_+\Delta_-)^{2n}$ de a' à b' et un homomorphisme $w'' : c'' \longrightarrow \tilde{c}$ à extrémités fixes, on associe (c', w') dans $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}(c; u, v)$, avec

$$c' = c'', \qquad w' = \rho_c w'',$$

où

$$\rho_c : \tilde{c} \longrightarrow c$$

est défini de façon similaire que tantôt, par

[page 169]

$$
\begin{tikzcd}
a' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & a \arrow[d, "\mathrm{id}"] & a \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, dash] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{id}\downarrow"] & b \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & b \arrow[d, "\mathrm{id}"] & b' \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "v"] & \tilde{c},\ \text{type } t_{n+1}. \\
a \arrow[r, "\mathrm{id}"] & a & a \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, dash, "c"] & b \arrow[r, "\mathrm{id}"] & b & b' \arrow[l, "\mathrm{id}"'] & \varphi^*_{n,n+1}(c).
\end{tikzcd}
$$

On doit seulement vérifier que l'endofoncteur $\psi\varphi$ de $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ}(c; u, v)$ est homotope à l'identité. Mais ce foncteur transforme (c', w') en $(\tilde{c}' = a'_{\Delta_+\Delta_-} c' b'_{\Delta_+\Delta_-}, \overline{w'})$, où $\overline{w'}$ est encore le composé

$$\begin{tikzcd} \tilde{c}' \arrow[r, "\text{can.}"] \arrow[rr, bend right, "\overline{w'}"'] & c' \arrow[r, "w'"] & c. \end{tikzcd}$$

On a donc

$$\psi\varphi \longrightarrow \mathrm{id},$$

$\psi\varphi$ est homotope au foncteur identique.

Cela prouve la lissité de $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ} \longrightarrow X \times X$. Pour la propreté, il faut prouver la lissité de le cas de X°, et du système projectif $\underline{t}^{\mathrm{opp}} \simeq (t_n^{\mathrm{opp}})_n$. Mais on a $\underline{t}^{\mathrm{opp}} = \underline{t}$, et il suffit d'appliquer ce qu'on a déjà prouvé au cas de X°, pour voir que $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\circ} \longrightarrow X \times X$ est propre.

Il ne reste plus que le lemme à prouver. Ça doit être essentiellement

`[page 170]`

trivial, et je renonce à rédiger une démonstration.

Je vais maintenant montrer 'formellement' que la factorisation 'canonique' d'une flèche de Cat $f : X' \longrightarrow X$ en

$$X' \xrightarrow{i_f} \overline{X'} \xrightarrow{\bar{f}} X, \qquad i_f \text{ Hot-équivalence},$$

avec (on l'espérait) $\bar{f}$ propre et lisse, à partir d'une factorisation similaire pour la flèche diagonale $X \xrightarrow{\mathrm{diag}_X} X \times X$ en

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "i_X \ \text{Hot-équivalence}"] \\ \mathcal{C}_X \ \text{'chemins'} \arrow[d, "p_X"] \\ X \times X \end{tikzcd}$$

est chose formelle. (Cf. page 139 pour les notations et `[la]` problématique.) On regarde le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}_X \arrow[dl, "\beta_X"'] \arrow[d, "p_X"] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & C(f) \simeq X' \times_X (\mathcal{C}_X, \sigma = \mathrm{pr}_1 \circ p_X) \arrow[l, "\mathrm{pr}_2'"'] \arrow[d, "p_{X,f}"] \arrow[dll, bend right, "\bar{f}"'] \\ X & X \times X \arrow[l, "\mathrm{pr}_2^X"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1^X"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & X' \times X \arrow[l, "f \times \mathrm{id}_X = f'"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & X & X' \arrow[l, "f"] \arrow[uu, dotted, bend right, "i_f"'] \end{tikzcd}$$

([40]). Comme p_X est propre et lisse, i.e. 'parfait', son image inverse sur $X' \times X$, savoir $p_{X,f}$, l'est aussi; d'autre part $\mathrm{pr}_2^X \circ f'$ est la

`[page 171]`

projection pr_2 de $X' \times X$ sur X, donc c'est aussi un morphisme parfait (puisque $X' \longrightarrow e$ est parfait, donc il en est de même du composé

$$(\mathrm{pr}_2^X \underbrace{f') \circ p_{X,f}} = \underbrace{\mathrm{pr}_2^X (p_X} \mathrm{pr}_2') = \beta_X \mathrm{pr}_2' \overset{\text{déf}}{=} \bar{f} \quad).$$

Je rappelle que la section i_f de $C(f)$ sur X' est définie à partir de la section i_X de $(\mathcal{C}_X, \sigma_X)$ sur X. C'est une Hot-équivalence, car $\sigma_X = \mathrm{pr}_1^X p_X$ est parfait à fibres asphériques, donc universellement une Hot-équivalence, donc $\mathrm{pr}_1 p_{X,f} : C(f) \longrightarrow X'$ est aussi une Hot-équivalence, et toute section en est donc une aussi.

[40]NB $C(f)$ est défini comme l'image inverse sur X' du fibré C_X sur X (par $\sigma_X = \mathrm{pr}_1^X \circ p_X$) par $f : X' \longrightarrow X$.