LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre VIII

1-types d'homotopie relatifs : leur intégration ...

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX 2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

[page 1]

1 Intégration des 1-types d'homotopie relatifs sur une catégorie.

Les types d'homotopie relatifs sur une (petite) catégorie S sont définis par les *champs* (en catégories) sur $S^\wedge$, qui correspondent essentiellement aux contrafoncteurs $S^o \longrightarrow (\mathrm{Cat})$, ou encore aux catégories X sur S qui sont Cat-fibrées sur S. (Dans $(\mathrm{Cat}/S)_{\mathrm{fib}}$, on inverse les flèches qui sont des Hot-équivalences sur les fibres.) D'autre part, les 1-types d'homotopie relatifs sur S doivent se décrire par des *champs en groupoïdes* sur S. Si on a un type d'homotopie relatif, défini par

$$X \longrightarrow S, \qquad \text{catégorie Cat-fibrée sur } S,$$

ou par

$$\begin{array}{ccc} S^o & \longrightarrow & \mathrm{Cat} \\ s & \longmapsto & X_s\ , \end{array}$$

le 1-type d'homotopie associé est défini par

$$s \longmapsto \Pi(X_s), \qquad S^o \longrightarrow (\mathrm{Grp}), \qquad \text{catégorie des groupoïdes,}$$

où $\Pi(X_s)$ est le groupoïde fondamental de X_s. On note la catégorie fibrée correspondante sur S par $\boxed{\Pi(X/S)}$. Il est vrai que si

$$X \longrightarrow X'$$

est un homomorphisme de catégories fibrées sur S qui induise une Hot-équivalence sur les fibres, elle induit une équivalence fibrée

$$\Pi(X/S) \longrightarrow \Pi(X'/S),$$

mais non un isomorphisme. Il y aurait donc du travail à faire pour définir un foncteur

$$\underbrace{\underline{\mathrm{Hot}}(S)}_{\substack{\text{catégorie des}\\ \text{types d'homotopie}\\ \text{relatifs sur } S}} \xrightarrow{\xi \longmapsto \Pi(\xi/S)} \underbrace{\underline{\mathrm{Grp}}(S)}_{\substack{\text{catégorie des}\\ \text{groupoïdes}\\ \text{fibrés sur } S\\ \text{(ou catégories}\\ \text{des champs en}\\ \text{groupoïdes}\\ \text{sur } S^\wedge)}} .$$

Mais ce n'est pas pour l'instant mon propos. Plutôt, de donner une formule de transitivité en homologie non commutative, analogue à $R(gf)_* \simeq Rg_* Rf_*$ en cohomologie.

[page 2]

Si

$$f : S \longrightarrow T$$

est un foncteur, on va définir un foncteur

$$f_! : \underline{\mathrm{Grp}}(S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Grp}}(T)$$

(image directe de 1-types d'homotopie relatifs). Mais notons d'abord que si

$$p : X \longrightarrow S$$

est une S-catégorie *quelconque* (pas nécessairement Cat-fibrée), on lui associe néanmoins un type d'homotopie relatif, via la catégorie fibrée $\tilde{X}^{(S)}$, ou $\tilde{X}$, ayant comme fibres les $s\backslash X$ (en notant que $s' \longrightarrow s$ dans S définit bien $s\backslash X \longrightarrow s'\backslash X$) (1). On a un S-foncteur canonique

$$X \xrightarrow{i} \tilde{X}, \qquad x \longmapsto (x, p(x), \underbrace{p(x)}_{= `s'} \xrightarrow{\mathrm{id}} p(x)).$$

C'est une S-Hot-équivalence si X était déjà fibrée. En fait, sur chaque fibre c'est un homotopisme car on définit alors $\tilde{X}_{s_0} \xrightarrow{j} X_{s_0}$ de façon évidente, de façon que

$$X_{s_0} \underset{j}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \tilde{X}_{s_0}, \qquad ji \simeq \mathrm{id}, \quad ij \underbrace{\xrightarrow{\text{homotopie simple}}}_{\substack{\text{NB cette flèche} \\ \text{n'est pas [un]} \\ \text{isomorphisme} \\ \text{en général.}}} \mathrm{id}.$$

Revenons alors à $f : S \longrightarrow T$, et considérons un groupoïde fibré sur S,

$$G \longrightarrow S,$$

ce n'est pas une catégorie fibrée sur T, mais on peut lui associer

$$t \longmapsto t\backslash G, \qquad T^o \longrightarrow (\mathrm{Cat}),$$

d'où une catégorie fibrée sur T, dont on prend le Π relatif. Mais il est plus simple de prendre directement

$$t \longmapsto \Pi(t\backslash G),$$

qui définit une catégorie fibrée en groupoïdes sur T.

---

[1]Ayant $\tilde{X}$, on définit $\Pi(X/S) \overset{\text{déf}}{=} \Pi(\tilde{X}/S)$.

[page 3]

Ainsi on trouve bien un foncteur (en fait, même un 2-foncteur de 2-catégories)

$$f_! : \underline{\mathrm{Grp}}(S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Grp}}(T).$$

Si

$$u : G \longrightarrow G'$$

est un homomorphisme de groupoïdes fibrés sur S, qui induise des Cat-équivalences sur les fibres, alors

$$f_!(u) : f_!(G) \longrightarrow f_!(G')$$

est aussi une Cat-équivalence sur les fibres. (Cela est formel, à partir du fait que $f_!$ est un 2-foncteur, compte tenu que si on a une équivalence sur les fibres, alors il y a un quasi-inverse – c'est une histoire générale de catégories fibrées ...)

Soit maintenant

$$p : X \longrightarrow S,$$

et prenons le cas $G = \Pi(X/S)$. Je dis qu'on a alors une T-équivalence

$$(*) \qquad \boxed{f_!(\Pi(X/S)) \simeq \Pi(X/T),}$$

en d'autres termes, pour connaître $\Pi(X/T)$ (à T-équivalence près), il suffit de connaître $\Pi(X/S)$, et de lui appliquer le foncteur $f_!$ d'intégration des 1-types d'homotopie relatifs, pour $f : S \longrightarrow T$.

Notons que l'on a trivialement

$$\Pi(X/S) = p_!(e_X),$$

où e_X désigne le X-groupoïde fibré trivial (toutes les fibres ponctuelles). Donc la formule précédente s'écrit comme une formule de transitivité

$$f_!(p_!(\Gamma)) \simeq (fp)_!(\Gamma),$$

[page 4]

où Γ est le groupoïde fibré trivial sur X. Cela suggère de généraliser la formule $(*)$ en

$$\boxed{(fp)_!(\Gamma) \simeq f_!(p_!(\Gamma))}$$

pour *tout* groupoïde fibré sur X, dans une situation

$$X \xrightarrow{p} S \xrightarrow{f} T.$$

Ce sera formel, si on établit une propriété de 2-adjonction pour le foncteur $f_!$:

Théorème. *Soit $f : S \longrightarrow T$ une flèche dans* (Cat), *G un champ en groupoïdes sur S, H un champ en groupoïdes sur T. On a alors une équivalence de catégories canonique*

$$\boxed{\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Grp}}(S)}(G, f^*H) \ \simeq \ \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\mathrm{Grp}}(T)}(f_!G, H).}$$

Les flèches d'adjonction

$$\begin{cases} f_! f^* H & \longrightarrow & H & \qquad H & \in & \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Grp}}(T) \\ f^* f_! G & \longleftarrow & G & \qquad G & \in & \mathrm{Ob}\, \underline{\mathrm{Grp}}(S) \end{cases}$$

devraient se définir sans problème. Pour la deuxième, il faut définir pour $s \in S$

$$G_s \longrightarrow (f^*(f_!(G)))_s = (f_!(G))_{f(s)} \stackrel{\text{déf}}{=} \Pi(s\backslash G),$$

or on a

$$G_s \longrightarrow s\backslash G,$$

d'où

$$\underbrace{\Pi(G_s)}_{\substack{= \ G_s \\ \text{car } G_s \\ \text{est un} \\ \text{groupoïde}}} \longrightarrow \Pi(s\backslash G),$$

O.K. C'est fonctoriel en s ...

`[page 5]`

Pour la flèche $f_! f^* H \longrightarrow H$ sur T, il faut trouver pour tout $t \in \mathrm{Ob}\, T$, et fonctoriellement en t,

$$\underbrace{(f_! f^* H)_t}_{\stackrel{\text{déf}}{=} \Pi(t\backslash f^*(H))} \longrightarrow \underbrace{H_t}_{= \Pi(H_t)},$$

il suffirait donc de définir

$$t\backslash f^*(H) \longrightarrow H_t,$$

mais on a le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} f^*H = H \times_S T \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] \\ S \arrow[r, "f"] & T \ni t \end{tikzcd}$$

`[plutôt` $H \times_T S$`]` induisant

$$f^*H \longrightarrow H,$$

d'où

$$t\backslash f^*H \longrightarrow t\backslash H \qquad \text{(au lieu de s'envoyer dans } H_t\text{)},$$

mais d'autre part, comme H est fibrée sur T, donc lisse sur T, l'inclusion

$$H_t \longrightarrow t\backslash H$$

est une Hot-équivalence. Ou disons plutôt : $f^*H \longrightarrow H$ est un morphisme de catégories sur T, induisant

$$\underbrace{\Pi(f^*H/T)}_{\overset{\text{déf}}{=} f_!(f^*H)} \longrightarrow \Pi(H/T),$$

[page 6]

or le T-foncteur canonique

$$H \longrightarrow \Pi(H/T) \qquad (= \text{catégorie sur } T \text{ définie par } t \longmapsto \Pi(t\backslash H))$$

est une équivalence, parce que H est un fibré en groupoïdes sur T. Donc on peut trouver un T-quasi-inverse

$$\Pi(H/T) \longrightarrow H$$

et en composant on trouve

$$f_!(f^*H) \longrightarrow \Pi(H/T) \longrightarrow H$$

la flèche cherchée.

Ayant les 2-flèches d'adjonction, je m'arrête là dans les vérifications !

2 Questions de changement de base

$$
(*) \qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "f"'] & S' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\
T \arrow[ur, phantom, "\curvearrowleft\gamma"] & T' \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}
\qquad p^* f_!(G) \longleftarrow f'_! q^*(G)
$$

La flèche est définie, pourvu qu'on ait commutativité ou une flèche de commutativité $\gamma : pf' \longrightarrow fq$ (pas nécessairement [un] isomorphisme). Par adjonction, il revient au même de donner

$$
\begin{tikzcd}
p_! f'_! q^* G \arrow[r] \arrow[d, "\wr"', "\text{transitivité}"] & f_!(G) \\
(pf')_! q^* G \arrow[d, "\gamma"] & \\
(fq)_! q^* G \arrow[d, "\wr", "\text{transitivité}"'] & \\
f_!(q_! q^*) G. \arrow[uuur, "\text{car } q_! q^* G \longrightarrow G"'] &
\end{tikzcd}
$$

On se demande quand la flèche est [un] isomorphisme.

[page 7]

Le théorème suivant doit être vrai, et résulte de mes fourbis généraux.

Théorème. *Si le carré* $(*)$ *est* cartésien *dans* (Cat), γ *un isomorphisme, et si on suppose que* f *soit* 1*-lisse, ou* p 1*-propre, alors le* T'*-foncteur de changement de base est une équivalence de* T'*-catégories.*

Les 'fourbis' généraux seraient en termes d'un dérivateur **D** ad hoc, celui des 1-types d'homotopie relatifs. J'y reviendrai par la suite.

On se pose la question quand le 2-foncteur associé à $f : S \longrightarrow T$

$$f^* : \underline{\underline{\mathrm{Grp}}}(T) \longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Grp}}}(S)$$

est 0-fidèle, 1-fidèle, 2-fidèle ([2]). Si G, H sont des fibrés en groupoïdes sur T, on considère

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{\mathrm{Grp}}}(T)}(G,H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\underline{\mathrm{Grp}}}(S)}(f^*G, f^*H),$$

et suivant que ce foncteur est toujours fidèle, ou pleinement fidèle, ou une équivalence de catégories, on dit que f^* est 0-, 1-, ou 2-fidèle. Dans le cas 2-fidèle, cela implique que si K est un fibré en groupoïdes sur S, s'il est équivalent à un f^*G, alors G est déterminé à T-équivalence près, elle même déterminée à isomorphisme unique près.

`[page 8]`

Soit $i \in \mathbf{N}$. On dit que f est i-asphérique si $\forall t \in T$, $Z = S/t$ est i-asphérique, i.e.

$$(*) \qquad \pi_0(Z),\ \ldots,\ \pi_i(Z) \qquad \text{triviaux.}$$

On définit aussi (-1)-asphérique : les S/t sont non-vides. De même pour la notion de i-coasphérique.

En fait, pour $i \in [-1, +\infty[\ \subseteq \mathbf{Z}$, on définit un dérivateur $\mathbf{D}_i$ des i-types d'homotopie relatifs (cf. plus bas). D'où les notions d'objet $\mathbf{D}_i$-asphérique ($= i$-asphérique), de $\mathbf{D}_i$-équivalence, de foncteur $\mathbf{D}_i$-asphérique et $\mathbf{D}_i$-coasphérique, de foncteur $\mathbf{D}_i$-lisse et $\mathbf{D}_i$-propre, de $\mathbf{D}_i$-fibration et de $\mathbf{D}_i$-fibration *triviale* (i.e. à fibres $\mathbf{D}_i$-asphériques). On doit avoir le

Théorème 3. *Soit $f : S \longrightarrow T$ dans* (Cat)*, $i \in \{0,1,2\}$. Supposons l'une des conditions suivantes satisfaite :*

a) f est $(i-1)$-propre, et $(i-1)$-asphérique (s'exprime par la condition que certaines catégories, telles les S/t, soient $(i-1)$-asphériques).

b) f est $(i-1)$-lisse, et $(i-1)$-coasphérique.

Alors :

1°) Le foncteur f^* image inverse

$$f^* : \underline{\mathrm{Grp}}(T) \longrightarrow \underline{\mathrm{Grp}}(S)$$

est i-fidèle.

2°) Dans le cas $i = 2$ (f pleinement fidèle), on

[2] La i-fidélité de f^* ($i \in \{0,1,2\}$) équivaut à celle des foncteurs (obtenus en prenant $G = e_T$)

$$\underline{\Gamma}(H/T) \longrightarrow \underline{\Gamma}(f^*H/S).$$

[page 9]

a de plus ceci : si $G \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Grp}}(S)$ *est un fibré en groupoïdes sur* S*, alors* G *est équivalent à un fibré en groupoïdes de la forme* $f^*(H)$ *si et seulement si pour tout* $t \in T$*, la restriction* G_t *de* G *à* S_t *est équivalente à un fibré en groupoïdes constant sur* S_t*. (***NB** *La condition a) ou b) implique déjà que* S_t *est* 1*-connexe, i.e. que son groupoïde fondamental est équivalent à e.)*

3°) Soit Z *un objet* 1*-connexe dans* (Cat)*,* G *un fibré en groupoïdes sur* Z*. Pour que* G *soit* Z*-équivalent à un groupoïde constant sur* Z*, il faut et il suffit que pour toute flèche* u *dans* Z*, le morphisme de groupoïdes* u^* *induit sur les fibres de* G *soit une* Z*-équivalence* ([3]).

Corollaire. *La condition nécessaire et suffisante de 2°) s'écrit aussi ainsi : pour toute flèche* u *de* S *'verticale' sur* T*, i.e. telle que* $f(u)$ *soit une flèche identique, le foncteur* u^* *induit par* u *sur les fibres de* G *soit une équivalence de groupoïdes.*

[3]On dit alors que G est *essentiellement localement constant* sur Z.