LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre XI

Hot-fibrations, foncteurs propres et foncteurs lisses etc. (dans Cat)

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX 2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

[Il n'y a pas de pages 1-126]

[page 127]

1 Hot-**fibrations dans** Cat

Théorème 1. *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *dans* Cat. *Conditions équivalentes :*

a) *Pour tout* $Y'' \xrightarrow{p} Y'$ *sur* Y, *d'où* $X'' = X \times_Y Y'' \xrightarrow{q} X' = X \times_Y Y'$, *si* p *est une* Hot-*équivalence,* q *l'est aussi.*

a′) *Comme a), avec* $Y'' = e$, Y' *ayant un objet final.*

a″) *Comme a), avec* $Y'' = e$, Y' *ayant un objet initial* ([1]).

b′) *Pour tout* $y \in \mathrm{Ob}\, Y$, $X_y \longrightarrow X/y$ *est une* Hot-*équivalence, pour tout* $y \longrightarrow y'$ *dans* Y, $X/y \longrightarrow X/y'$ *est une* Hot-*équivalence; enfin ces conditions sont encore vérifiées pour* $f' : X' \longrightarrow Y'$, *pour tout changement de base* $Y' \longrightarrow Y$ *dans* Cat. *(En fait, il suffit de le demander pour la première des deux conditions, concernant* $X_y \longrightarrow X/y$.*)*

b″) *Dual de b′), avec* $X_y \longrightarrow y\backslash X$ *et* $y'\backslash X \longrightarrow y\backslash X$.

c) *Pour tout faisceau d'ensembles localement constant* F *sur* X, $f_*(F)$ *est localement constant et se calcule 'fibre par fibre', de même pour* $R^1 f_*(F)$ *si* F *est un faisceau en groupes, et pour les* $R^i f_*(F)$ *si* F *est un faisceau abélien. De plus, on veut que ces conditions restent satisfaites après tout changement de base.* ([2])

Démonstration. On a les implications ± tautologiques

$$\mathrm{a} \implies \mathrm{a}' \implies \mathrm{b}' \implies \mathrm{c},$$

et il reste à prouver que c $\Longrightarrow$ a. Comme a est autoduale, étant équivalente à a′, b′, elle est aussi équivalente aux conditions duales de celles-ci, a″ et b″ (cf. cor. 2, page 75). On est ramené à prouver que si c) est satisfait, et si on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

[1] garder a″) et b″), conditions duales de a′), b′) [a″) et b″) étaient barrés].

[2] *c′) (version homologique). 1°) en termes d'images directes de groupoïdes localement constants, et 2°) en termes des* $R^i f_!(L)$ [plutôt $L_i f_!(L)$], *pour* L *faisceau abélien localement constant.*

cartésien dans Cat, si p est une Hot-équivalence, q aussi. On utilise le critère d'Artin-Mazur.

1°) Si F est un faisceau d'ensembles localement constant sur X, il faut prouver que $H^0(X,F) \xrightarrow{\sim} H^0(X', q^*F)$.

[page 128]

Mais

$$H^0(X,F) \simeq H^0(Y, \underbrace{f_*(F)}_{\substack{\text{localement constant} \\ \text{par hypothèse c)}}}) \quad \underbrace{\xrightarrow{\quad\sim\quad}}_{\substack{\text{car } p \\ \text{Hot-équivalence}}} \quad H^0(Y', p^* f_*(F)),$$

mais

$$p^* f_*(F) \xrightarrow{\sim} f'_*(q^*(F)),$$

car $f_*(F)$ et $f'_*(q^*F)$ se calculent 'fibre par fibre' par hypothèse. Donc

$$H^0(X,F) \simeq H^0(Y', f'_*(q^*(F))) \simeq H^0(X', q^*(F)),$$

q.e.d.

2°) Si F est un faiscau en groupes localement constant sur X, il faut prouver

$$H^1(X,F) \xrightarrow{\sim} H^1(X', q^*F).$$

Le fait que c'est injectif résulte déjà de 1°), qui implique que le foncteur

$$\begin{array}{ccc} F\text{-torseurs sur } X & \longrightarrow & q^*(F)\text{-torseurs sur } X' \\ P & \longmapsto & f^*P \end{array}$$

est pleinement fidèle, par l'argument bien connu utilisant les faisceaux $\mathcal{H}$om. Il faut voir que ce foncteur est essentiellement surjectif.

[page 129]

On a un homomorphisme de suites exactes d'ensembles ponctués

$$\begin{tikzcd}
H^1(Y, f_*F) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"] & H^1(X,F) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & \overbrace{H^0(Y, R^1 f_*(F))}^{\ni\, \eta} \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\gamma"] & H^2(Y, f_*F) \arrow[d, "\delta"] \\
H^1(Y', f'_*F) \arrow[r, "u'"] & \underbrace{H^1(X', F')}_{\ni\, \xi'} \arrow[r, "v'"] & \underbrace{H^0(Y', R^1 f'_*(F'))}_{\ni\, \eta'} \arrow[r, "w'"] & H^2(Y', f'_*F')
\end{tikzcd}$$

([3]), où les faisceaux f_*F, $R^1 f_*(F)$ sont localement constants par hypothèse et se calculent fibre par fibre, les faisceaux $f'_*(F')$ et $R^1 f'_*(F')$ aussi, qui implique que ces derniers sont

[3]où on a posé $F' = q^*(F)$.

canoniquement isomorphes (par les flèches de changement de base) aux images inverses de leurs homologues $f_*(F)$, $R^1 f_*(F)$. Comme p est une Hot-équivalence, cela implique que les flèches α, γ sont `[des]` isomorphismes. Donc si $\xi' \in H^1(X', F')$, son image η' dans $H^0(Y', R^1 f'_*(F'))$ provient d'un $\eta \in H^0(Y, R^1 f_*(F))$ bien déterminé. Il faut voir que cet η provient d'un $\xi \in H^1(X, F)$. Ceci (si je me rappelle bien) est possible si et seulement si une certaine obstruction $w(\eta)$ dans $H^2(Y, f_*(F))$ est dans le sous-ensemble neutre du H^2. **NB** Le champ sur $Y^\wedge$ des F-torseurs sur les $X^\wedge/U$ qui remontent η est une $\mathcal{F} = f_*F$-gerbe $\mathcal{G}_\eta$, et il faut voir qu'elle est neutre. Mais il y a mieux à faire :

`[page 130]`

On note que cette gerbe $\mathcal{G}$ est localement constante (puisqu'elle correspond à un lien $f_*(G)$ localement constant) et que $\mathcal{G}'$ est son image inverse. Mais comme p est une Hot-équivalence, il s'ensuit que le foncteur

$$\underline{\Gamma}(Y, \mathcal{G}) \longrightarrow \underline{\Gamma}(Y', \mathcal{G}')$$

est une équivalence de catégories, donc ξ' provient (à isomorphisme près) d'un unique ξ de $\underline{\Gamma}(Y, \mathcal{G})$, q.e.d.

3^o) Soit F faisceau abélien localement constant sur X, il faut voir `[que]`

$$(*) \qquad H^i(X, F) \xrightarrow{\sim} H^i(X', F') \qquad (F' = q^*F),$$

pour tout $i \in \mathbf{N}$. Mais les deux termes sont l'aboutissement des suites spectrales de Leray, de termes initiaux

$$\begin{aligned} E_2^{pq} &\simeq H^p(Y, R^q f_*(F)) \\ E_2'^{pq} &\simeq H^p(Y', R^q f'_*(F')), \end{aligned}$$

et $(*)$ est associé à un homomorphisme de suites spectrales, qui pour les termes initiaux est

$$(**) \qquad H^p(Y, R^q f_*(F)) \xrightarrow{\sim} H^p(Y', R^q f'_*(F)),$$

associé à

$$(***) \qquad p^*(R^q f_*(F)) \longrightarrow R^q f'_*(F').$$

Mais par hypothèse les $R^q f_*(F)$, $R^q f'_*(F')$ sont localement constants et se calculent fibre par fibre,

`[page 131]`

d'où il résulte que les homomorphismes de changement de base $(***)$ sont `[des]` isomorphismes, et comme il s'agit de faisceaux localement constants et que p est une Hot-équivalence, il s'ensuit que $(**)$ est `[un]` isomorphisme, donc aussi $(*)$ sur les aboutissements, q.e.d.

Définition 1. Sous les conditions équivalentes du théorème 1, on dit que f est une Hot-*fibration.*

Proposition 1. *Cette notion est stable par changement de base (trivial), par composition (formel sur a)). Pour que f soit une* Hot*-fibration, il faut et il suffit que f* `[plutôt` f^o`]` *le soit.*

Proposition 2. *Soit $f : X \longrightarrow S$ une* Hot*-fibration. Alors $s \longmapsto \mathrm{hot}(X_s)$ est un système local sur S, à valeurs dans* Hot*. Donc les X_s pour s dans une même composante connexe de S sont* Hot*-isomorphes entre eux (mais pas canoniquement, si cette composante n'est pas 1-connexe).*

Théorème 2. *Soit*
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$
un diagramme commutatif dans Cat*, avec p, p' des* Hot*-fibrations, et soit $S_0 \subseteq S$ une partie de S telle que $S_0 \longrightarrow \pi_0(S)$ soit surjectif. Pour que f soit une* Hot*-équivalence, il faut et il suffit que les $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ $(s \in S_0)$ le soient.*

a) La suffisance se prouve comme tantôt, avec le critère de Artin-Mazur.

`[page 132]`

Notons que l'hypothèse sur S_0 assure que si F, F' sont deux faisceaux d'ensembles localement constants sur S, et $u : F \longrightarrow F'$ un homomorphisme tel que $u_s : F_s \xrightarrow{\simeq} F'_s$ pour $s \in S$, alors u est `[un]` isomorphisme.

1°) Soit F un faisceau d'ensembles localement constant sur X, F' son image inverse sur X', il faut prouver
$$H^0(X,F) \xrightarrow{\simeq} H^0(X',F').$$
Or
$$H^0(X,F) \simeq H^0(Y, \underbrace{f_*(F)}_{\substack{\text{localement}\\ \text{constant sur } S}}) \longrightarrow H^0(Y, f'_*(F')) \simeq H^0(X',F'),$$
il faut prouver que
$$(*) \qquad p_*(F) \xrightarrow{\simeq} p'_*(F')$$
est `[un]` isomorphisme. Or par hypothèse sur p, p', les deux faisceaux sont localement constants et se calculent fibre par fibre, d'où résulte que $(*)$ est un isomorphisme pour les fibres en $s \in S_0$, donc un isomorphisme partout. OK.

2°) Il en résulte déjà, si F est un faisceau en *groupes,* que le foncteur
$$(F\text{-torseurs sur } X) \longrightarrow (F\text{-torseurs sur } X')$$
est pleinement fidèle, donc $H^1(X,F) \longrightarrow H^1(X',F')$ `[est]` injectif; il reste à prouver que ce foncteur est essentiellement surjectif. À cause de la pleine fidélité, c'est *local sur S* (**NB** On voit directement que l'hypothèse fait sur les $s \in S_0$ implique la même hypothèse pour tout $s \in S$, en utilisant le fait que p, p' sont des fibrations) ([4]). Donc on est ramené au cas où $S = S/s_0$ a un objet final s_0.

[4]Les hypothèses faites sont bel et bien locales sur S (du moins si $S_0 = S$).

[page 133]

On a alors

$$\begin{aligned} H^1(X,F) &\simeq H^0(S, R^1p_*(F)) \\ H^1(X',F') &\simeq H^0(S, R^1p'_*(F')), \end{aligned}$$

et on voit encore que

$$R^1p_*(F) \longrightarrow R^1p'_*(F')$$

est [un] isomorphisme (car il se calcule fibre par fibre, et on utilise l'hypothèse sur les f_s), donc induit un isomorphisme

$$H^1(X,F) \longrightarrow H^1(X',F').$$

3^o) Si F est même abélien, on doit prouver

$$H^i(X,F) \xrightarrow{\sim} H^i(X',F')$$

pour tout i, et cela résulte encore de la suite spectrale de Leray pour (p,F) et pour (p',F').

b) Inversement, supposons que f soit une Hot-équivalence, et prouvons que les f_s : $X'_s \longrightarrow X_s$ sont des Hot-équivalences. Je vais utiliser le

Lemme. *Soit $S \in \mathrm{Ob\,Cat}$, S 0-connexe. Alors il existe un $\overline{S} \in \mathrm{Ob\,Cat}$, $\overline{S}$ Hot-asphérique, et $\overline{S} \longrightarrow S$ une Hot-fibration.*

Voyons comment ceci implique le théorème 2 (partie réciproque). On peut supposer S 0-connexe, et on fait le changement de base par $\overline{S} \longrightarrow S$

[page 134]

comme dans le lemme :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & & X \arrow[dl, "p"] & & & \\ & S & & \overline{X'} \arrow[rr, "\overline{f}"] \arrow[dr, "\overline{p'}"'] & & \overline{X} \arrow[dl, "\overline{p}"] \\ & & & & \overline{S} \arrow[ulll, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

Alors $\overline{p'}$ et $\overline{p}$ sont des Hot-fibrations, et comme φ est une Hot-fibration, le changement de base par φ transforme la Hot-équivalence f en une Hot-équivalence $\overline{f}$. Considérons alors $\overline{s} \in \mathrm{Ob}\,\overline{S}$, et le diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{X'} \arrow[r, "\overline{f}"] & \overline{X} \\ \overline{X'}_{\overline{s}} \arrow[u, hook, "i'"] \arrow[r, "\overline{f}_{\overline{s}}"] & \overline{X}_{\overline{s}} \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

Comme $\{\overline{s}\} \longrightarrow \overline{S}$ est une Hot-équivalence, la flèche i qui s'en déduit par le changement de base $\overline{p} : \overline{X} \longrightarrow \overline{S}$ l'est aussi, puisque $\overline{p}$ est une Hot-fibration, et de même pour i'. Ainsi dans le carré commutatif précédent, $\overline{f}$, i et i' sont des Hot-équivalences, donc aussi $\overline{f}_{\overline{s}}$. Mais si $s = \varphi(\overline{s})$, $\overline{f}_{\overline{s}}$ s'identifie à $f_s : X'_s \longrightarrow X_s$. D'ailleurs, il est immédiat que φ, étant une Hot-fibration

`[page 135]`

à source non-vide, et à but connexe, est surjective. (**NB** toutes les fibres d'une même composante connexe de S sont Hot-équivalentes, donc si l'une est non-vide, toutes le sont.) Cela achève la démonstration, modulo le lemme.

Il reste à prouver celui-ci. Comme $S = \emptyset$ `[plutôt` $S \neq \emptyset$`]`, je peux choisir une 'origine'

$$s_0 \in S,$$

et regarder la catégorie

$$\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(S; s_0, -)$$

des chemins infinis dans S, d'origine s_0, fibre de $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(S)$ par le foncteur-source

$$\sigma : \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(S) \longrightarrow S.$$

On sait que les fibres de σ sont Hot-asphériques (VII), et la catégorie construite ici n'est autre que (avec les notations de VII, p. 152) que la catégorie $\overline{S'}$ qui entre dans la factorisation canonique de

$$f : \{s_0\} = S' \longrightarrow S$$

en

$$\{s_0\} = S' \underbrace{\longrightarrow}_{\text{Hot-équivalence}} \overline{S'} \xrightarrow{\overline{f}} S,$$

où ici $\overline{f}$ s'interprète simplement comme le foncteur but (i.e. le foncteur induit sur

`[page 136]`

$\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(S; s_0, -)$ par le foncteur but

$$\beta : \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(S) \longrightarrow S\ \ ).$$

On a prouvé dans loc. cit. que $\overline{f}$ est une Hot-fibration ('propre' et 'lisse'), mais dans un contexte qui semblait faire appel tacitement à la théorie du dérivateur HOT. Donc pour mettre les résultats 'topologiques' de loc. cit. sur une base solide, il faut développer les notions pertinentes de foncteur propre, foncteur lisse, sans référence à une théorie HOT. C'est ce que j'avais d'ailleurs fait déjà en 1983, du temps de Pursuing Stacks, mais sans rédaction en forme à ce sujet. Il me faut donc à présent revenir sur ces notions, de façon un peu systématique. D'ailleurs, j'aurais dû mal à construire un seul foncteur Hot-fibrant (sauf les exemples triviaux, tels les isomorphismes, ou les produits $Y \times Z \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} Y$), si je ne disposais d'une théorie des foncteurs lisses et des foncteurs propres ([5]).

[5] J'exagère un peu quand même – après tout il doit être assez évident que les foncteurs de Thomason-Kan sont des Hot-fibrations (mais il y en a encore un peu trop peu !).