LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre XIII

Catégories de modèles (1)

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX\,2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède. Les index, la liste des axiomes, le glossaire, et les références bibliographiques à la fin du chapitre ont été compilés par les éditeurs. Les numéros des pages dans les index sont ceux de l'original.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

`[page 1]`

1 Couples de Quillen (Φ, Ψ)

Je veux d'abord donner une variante affaiblie de la notion de triple de Quillen ("model category" de Quillen). Ce ne sera pas une notion tout-à-fait autoduale – ainsi il y aura *deux* variantes affaiblies, duales l'une de l'autre.

Mais avant encore, un sorite sur les LLP (left lifting property) et RLP (right lifting property) ([1]). Soit $\mathcal{M}$ une catégorie quelconque (le plus souvent, $\mathcal{M}$ sera grande). On considère des parties

$$\Phi,\ \Psi\ \subset\ \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$$

et on définit des applications

$$\boxed{\begin{array}{ccc}\Phi & \longmapsto & \Phi_* \\ \Psi & \longmapsto & \Psi^*\end{array}} \qquad \mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$$

`[plutôt` $\mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M}))$`, où pour tout ensemble` E`,` $\mathfrak{P}(E)$ `désigne l'ensemble des parties de` E`]` par

$$\begin{aligned} \Phi_* &= \{\text{ensemble des } p \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \text{ qui ont la RLP par rapport à } \Phi\} \\ \Psi^* &= \{\text{ensemble des } i \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \text{ qui ont la LLP par rapport à } \Psi\}, \end{aligned}$$

et ensuite

$$\boxed{\begin{array}{ccc}\Phi & \longmapsto & \widetilde{\Phi} \\ \Psi & \longmapsto & \overline{\Psi}\end{array}} \qquad \mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$$

`[plutôt` $\mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M}))$`]` par

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi} &= (\Phi_*)^* \\ \overline{\Psi} &= (\Psi^*)_* \ . \end{aligned}$$

`[page 2]`

Je résume les propriétés les plus immédiates de ces opérations dans une

Proposition 1.

a) $\Phi \longmapsto \Phi_*$, $\Psi \longmapsto \Psi^*$ *sont des applications décroissantes de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ `[plutôt` $\mathfrak{P}(\mathrm{Fl}(\mathcal{M}))$`]` *dans lui-même, pour la relation d'ordre* $\subset$*, et* $\Phi \longmapsto \widetilde{\Phi}$*,* $\Psi \longmapsto \overline{\Psi}$ *des applications croissantes.*

[1] donner définition en forme, avec renvoi à Quillen.

b) *On a*

$$\Phi \subset \widetilde{\Phi},$$

et pour qu'on ait $\Phi = \widetilde{\Phi}$, *il faut et il suffit que* Φ *soit de la forme* Ψ^*. *On dit alors que* Φ *est* clos à gauche ([2]). *L'ensemble des parties de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *closes à gauche est stable par intersections quelconques* ([3]), *et* $\widetilde{\Phi}$ *est la plus petite partie close de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *qui contienne* Φ *et la plus grande partie* Φ' *de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *telle que* $\Phi'_* = \Phi_*$ *(ou telle que* $\Phi'_* \supset \Phi_*$*).*

Énoncés symétriques pour Ψ *: on a*

$$\Psi \subset \overline{\Psi},$$

on a $\Psi = \overline{\Psi}$ *si et seulement si* Ψ `[est]` *de la forme* Φ_*, *on dit alors que* Ψ *est* clos à droite. *L'ensemble des parties de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *closes à droite est stable par intersections quelconques* ([4]), *et* $\overline{\Psi}$ *est la plus petite partie close à droite contenant* Ψ, *et aussi la plus grande partie* Ψ' *de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *telle que* $\Psi'^* = \Psi^*$ *(ou telle que* $\Psi'^* \supset \Psi^*$*).*

`[page 3]`

c) *Les applications*

$$\Phi \longmapsto \Phi_*, \qquad \Psi \longmapsto \Psi^*$$

établissent des bijections inverses l'une de l'autre entre l'ensemble des parties Φ *closes à gauche de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, *et l'ensemble des parties* Ψ *closes à droite. C'est un anti-isomorphisme d'ensembles ordonnés. On a alors*

$$(\Phi \cap \Phi')_* = \begin{array}{l} \textit{partie close à droite de } \mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \textit{ “engendrée par } \Phi_*, \Phi'_*\textit{”}, \\ \text{i.e. } \texttt{[la]} \textit{ plus petite partie close à droite contenant } \Phi_*, \\ \Phi'_*, \text{ i.e. } \overline{\Phi_* \cup \Phi'_*} \end{array}$$

`[pour Φ, Φ' parties closes à gauche]`, *plus généralement*

$$(\bigcap_i \Phi_i)_* = \overline{\bigcup_i (\Phi_{i\,*})}$$

pour toute famille $(\Phi_i)_{i \in I}$ *de parties closes à gauche de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$. *Formules duales* `[pour des parties closes à droite]`

$$\begin{cases} (\Psi \cap \Psi')^* = \widetilde{\Psi^* \cup \Psi'^*} \\ (\bigcap_j \Psi_j)^* = \widetilde{\bigcup_j (\Psi_j^*)} \ . \end{cases}$$

d) *Si* $\Phi, \Psi \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, *alors on a*

$$\Phi \subset \Psi^* \iff \Psi \subset \Phi_*, \qquad \textit{on écrit alors } \Phi \longleftrightarrow \Psi,$$

cela signifie que Φ *a la LLP pour* Ψ, *ou que* Ψ *a la RLP pour* Φ.

[2] Donner définition en forme.
[3] de façon précise, $\bigcap_i(\Psi_i^*) = (\bigcup_i \Psi_i)^*$
[4] de façon précise, on a $\bigcap_i(\Phi_{i\,*}) = (\bigcup_i \Phi_i)_*$

`[page 4]`

Proposition 2. *Soit Φ une partie close à gauche de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$*. Alors Φ satisfait les conditions* a) b) c) *ci-dessous :*

a) Φ *contient les isomorphismes, et est stable par composition, et par cochangement de base (*i.e. *si on a*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \end{tikzcd}$$
carré cocartésien dans $\mathcal{M}$, avec $i \in \Phi$, on a $i' \in \Phi$).

b) Φ *stable par facteurs directs (en tant que partie de l'ensemble des objets de* $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$*).*

c) Φ *"stable par limites inductives ordinales", dans le sens suivant : Soit I un ensemble bien ordonné, $(A_i)_{i\in I}$ un système inductif dans $\mathcal{M}$, tel que les $u_{ji} : A_i \longrightarrow A_j$ soient dans Φ, et $A_{i_0} \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i<i_0} A_i$ si $i_0 \in I$ est un élément limite. Supposons que $A = \varinjlim_I A_i$ existe. Alors $\forall\, i_0 \in I$, la flèche canonique $A_{i_0} \longrightarrow A$ est dans Φ.*

Il y a un énoncé dual pour une partie Ψ close à droite ; elle contient les isomorphismes, est stable par composition et par changement de base, par facteurs directs, et enfin stable par limites projectives ordinales.

`[page 5]`

On aura une réciproque partielle dans les catégories accessibles. C'est pour l'énoncé de cette réciproque que j'ai mis à part la condition $b)$ de stabilité par facteurs directs, au lieu de la bloquer avec a).

Définition 1.

a) (Pour mémoire.) RLP, LLP, la relation $\Phi \longleftrightarrow \Psi$ entre parties de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ (relation non symétrique !).

b) (Pour mémoire.) Partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ close à gauche, close à droite.

c) Soit $\Phi \longleftrightarrow \Psi$. On dit que le couple (Φ, Ψ) a la *propriété de factorisation de Quillen*, si *toute* flèche f de $\mathcal{M}$ se factorise en

$$f = pi, \qquad i \in \Phi,\ p \in \Psi.$$

On dit que (Φ, Ψ) est un *couple de Quillen* si c'est un couple associé par `[les]` propriétés LLP et RLP ($\Phi \longleftrightarrow \Psi$), et `[si]` elles `[les parties` Φ `et` Ψ`]` sont closes (*i.e.* $\Phi = \Psi^*$, $\Psi = \Phi_*$), et si elles ont la propriété de factorisation de Quillen.

J'énonce dès maintenant le résultat technique essentiel, assurant l'existence de beaucoup de couples de Quillen :

`[page 6]`

Théorème 1. *Supposons que $\mathcal{M}$ soit* accessible, *et stable par (petites) limites inductives. (Il doit suffire stabilité par sommes amalgamées, et par $\varinjlim$ filtrantes, voire ordinales ...). Soit Φ_0 une* petite *partie de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$*,* $\Psi = (\Phi_0)_*$*, et Φ une partie de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *telle que*

$$\Phi_0 \subset \Phi \subset \Psi^* \ (= \widetilde{\Phi}_0).$$

Alors :

a) *Pour que Φ soit close à gauche,* i.e. $\Phi = \widetilde{\Phi}_0$*, il faut et il suffit qu'elle satisfasse les conditions* a) b) c) *de la proposition* 2*. Quand il en est ainsi, le couple* (Φ, Ψ) *est un couple de Quillen.*

b) *Supposons seulement que Φ satisfasse aux conditions* a), c) *de la proposition* 2 *(à l'exclusion de la condition* b) *des facteurs directs) – donc on ne peut affirmer que Φ soit close à gauche. Néanmoins,* $(\Phi, \underbrace{\Psi}_{= \Phi_*})$ *satisfait à la propriété de factorisation de Quillen.*

Remarque. Dans la démonstration, l'existence de $\Phi_0 \subset \Phi$, qui joue le rôle d'un petit ensemble de "générateurs" (à gauche) pour Φ, joue un rôle essentiel. Il y aurait lieu de développer la notion de *parties accessibles*

`[page 7]`

de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, qui impliquerait l'existence d'un petit ensemble $\Phi_0 \subset \Phi$ tel que $\Phi \subset \widetilde{\Phi}_0$, et qui aurait la propriété que

Φ accessible $\Longrightarrow$ Φ_* accessible

Ψ accessible $\Longrightarrow$ Ψ^* accessible.

Tout couple (Φ, Ψ) de parties closes associées ($\Phi = \Psi^*$, $\Psi = \Phi_*$) et accessible, serait donc un couple de Quillen.

2 Catégories de Quillen faibles, et construction d'icelles (Théorème-scholie conjectural)

Dans toute la suite, on se donne une *catégorie de modèles*

$(\mathcal{M}, W)$, où $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$

W faiblement saturée (5) :

a) W contient les isomorphismes.

b) Si deux parmi f, g, gf `[sont]` dans W, le troisième aussi.

On veut décrire des données supplémentaires un peu plus faibles que celles d'une catégorie de modèles de Quillen. On suppose données des parties

$$C,\ F,\ TC,\ TF\ \subset\ \mathrm{Fl}(\mathcal{M}),$$

avec les propriétés suivantes. Comme axiome préliminaire, je pose

M 0 Stabilité de $\mathcal{M}$ par $\varprojlim$ finies et $\varprojlim$ [plutôt $\varinjlim$] finies.

[page 8]

M 1 Propriété de relèvement-prolongement

$$C \longleftrightarrow TF, \qquad TC \longleftrightarrow F.$$

M 2 Propriété de factorisation pour (C, TF), (TC, F).

M 3 Stabilité de F par composition et par changement de base, de C par composition et cochangement de base, F et C contiennent les isomorphismes.

M 4 Stabilité de TF par composition et changement de base, de TC par composition et cochangement de base, et TF et TC contiennent les isomorphismes.

M′ $TC \subset C \cap W$, $TF \subset F \cap W$.

M″ $C \subset \underbrace{\mathrm{Cof}_W}_{W\text{-cofibrations}}$, $F \subset \underbrace{\mathrm{Fib}_W}_{W\text{-fibrations}}$.

[Un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}$ est une W-fibration si pour tout diagramme de carrés cartésiens de la forme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[l] \arrow[d] & X'' \arrow[l, "t"'] \arrow[d] \\
Y & Y' \arrow[l] & Y'' \arrow[l, "s"]
\end{tikzcd},$$

si $s \in W$, alors $t \in W$. La notion de W-cofibration est la notion duale.]

Dans le cas de Quillen (Q-*catégories de modèles*), M′ est renforcé en

$$TC = C \cap W, \qquad TF = F \cap W,$$

et il n'y a pas d'axiome M″. L'axiome M″ équivaut à la propriété de "propriety", correspondant aux Q-catégories de modèles *propres.*

Proposition 3. *Supposons les conditions* M 0 *(pour mémoire),* M 1, M 2, M′, M″ *satisfaites. Alors en remplaçant C, TC par les saturés pour les propriétés de stabilité de contenir les isomorphismes, d'être stable par composition et par cochangement de base, et F, TF par celles de contenir les isomorphismes et d'être stable par composition et par changement de base, on trouve C', TC', F', TF' satisfaisant*

[5] C'est l'axiome M 5 de Quillen.

`[page 9]`

à tous les axiomes M 1 à M 4, M′, M''.

DÉMONSTRATION. La proposition 2 nous assure que M 1 continue à être satisfait, et pour M 2 c'est trivial. M 3 et M 4 seront valables par construction. D'autre part, M″ reste valable, car Cof_W a les stabilités requises pour C', et Fib_W celles requises pour F'. Reste à prouver M′, *i.e.*

$$TC' \subset C' \cap W, \qquad TF' \subset F' \cap W,$$

et pour ceci il suffit de voir que $C' \cap W$ resp. $F' \cap W$ a les stabilités requises pour TC' resp. TF'. Cela résulte du

Lemme. *Soit C une partie de* Cof_W*. Si C contient les isomorphismes, il en est de même de $C \cap W$. Si de plus C est stable par composition resp. par cochangement de base, il en est de même* `[de]` $C \cap W$*. Énoncé dual pour une partie F de* Fib_W*.*

Cela provient du fait que

$$\boxed{\mathrm{Cof}_W \cap W = W^{\mathrm{univ}}\ ({}^{6})} \overset{\text{déf}}{=}$$ ensemble des flèches $A \longrightarrow B$ telles que pour tout $A \longrightarrow A'$, $A' \longrightarrow B' = A' \vee_A B$ est dans W.

est lui-même stable par composition et par cochangement de base, et que l'on a bien sûr, si $C \subset \mathrm{Cof}_W$,

$$C \cap W \;=\; C \cap (\mathrm{Cof}_W \cap W) \;=\; C \cap W^{\mathrm{univ}}.$$

`[page 10]`

Donc il reste à prouver le

Corollaire 1. *Supposons qu'il existe des parties $C, F, TC, TF \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ satisfaisant* M 2, M′ ([7])*,* M″*. Alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{Cof}_W \cap W &= W^{\mathrm{univ}} \\ \mathrm{Fib}_W \cap W &= W_{\mathrm{univ}}\ ({}^{8}). \end{aligned}$$

Pour voir ceci, montrons p. ex. le deuxième (le premier s'en déduira par dualité).

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[from=u, "f"'] & Y' \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad f \in \mathrm{Fib}_W,\ f \in W \Longrightarrow f' \in W.$$

[6]flèches *coüniversellement* dans W, ou *W-équivalences coüniverselles.*

[7]On n'a pas besoin de tout M′, seulement de $TC \subset W$, $TF \subset W$.

[8]Flèches $f : X \longrightarrow Y$ *universellement* dans W, *i.e.* telles que pour tout $Y' \longrightarrow Y$, $f' : X' = X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ soit dans W.

On a mieux :

Proposition 4. *Supposons que toute flèche de $\mathcal{M}$ se factorise en pi, avec $i \in W$ et $p \in \mathrm{Fib}_W$. Alors, si X, Y sont dans $\underline{\mathrm{Fib}}_W S \subset \mathcal{M}/S$* `[sous-catégorie pleine de` $\mathcal{M}/S$ `formée des` $r : Z \longrightarrow S$`, où` $r \in \mathrm{Fib}_W$`]`*, alors toute $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{M}/S$ qui est dans W_S* `[formé des flèches au-dessus de` S `qui sont dans` W`]` *est dans W_S^{u},* i.e. *elle reste dans W après tout changement de base $S' \longrightarrow S$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd} \qquad p, q \in \mathrm{Fib}_W$$

Énoncé dual pour les flèches de $S\backslash\underline{\mathrm{Cof}}_W \subset S\backslash\mathcal{M}$ `[sous-catégorie pleine de` $S\backslash\mathcal{M}$ `formée des` $i : S \longrightarrow Z$`, où` $i \in \mathrm{Cof}_W$`]`*, une telle flèche qui est dans W est S-coüniversellement dans W, si toute flèche de $\mathcal{M}$ se factorise en qj, avec $j \in \mathrm{Cof}_W$ et $q \in W$.*

`[page 11]`

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] X \arrow[dr, "f\in W"] \arrow[dd] & & \overline{X'} \arrow[ll] \arrow[dr, "\overline{f'}\in W"] \arrow[dd] & & X' \arrow[ll, "i_X"'] \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd] & \\ & Y \arrow[dl] & & \overline{Y'} \arrow[ll] \arrow[dl] & & Y' \arrow[ll, "i_Y"'] \arrow[dl] \\ S & & \overline{S'} \arrow[ll, "F"] & & S' \arrow[ll, "i"', "TC"] & \end{tikzcd}$$

On factorise $S' \longrightarrow S$ en $S' \xrightarrow{i} \overline{S'} \xrightarrow{p} S$, avec $\underline{i \in W,\ p \in \mathrm{Fib}_W,}$ par M 2. Donc $f \in W \Longrightarrow \overline{f'} \in W$. Comme $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Fib}}_W S$, on a $\overline{X'}, \overline{Y'} \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Fib}}_W \overline{S'}$, et comme $i : S' \longrightarrow \overline{S'}$ est dans W, donc aussi i_X, i_Y, on a $f' \in W$ par M 5 (saturation faible de W).

Commentaire sur Proposition 3. On peut être encore plus exigeant, en demandant dans M 3, M 4 également la stabilité par facteurs directs, et (quand seuls M 1, M2, M$'$, M$''$ sont satisfaits) en saturant C, TC, F, TF également pour cette stabilité supplémentaire. La proposition 2 assure encore que M 1 continue à être vérifié (et M 2, M 3, M 4 trivialement), on voit qu'il en est ainsi encore de M$'$, M$''$ à condition qu'on renforce l'axiome de saturation faible M 5 sur W par

stabilité de W par facteurs directs,

ce qui implique en effet que Cof_W, Fib_W sont stables par facteurs directs, ainsi que W^{univ} et W_{univ}.

`[page 12]`

Il ne semble pas que les axiomes M 0 à M 4, plus M$'$ et M$''$ suffisent à développer les suites exactes de suspension et de cosuspension. Il faut un petit chouia de plus :

Définition 2. J'appelle *pré-Q-catégorie de modèles à gauche,* la donnée de $\mathcal{M}$ et de W, C, F, TC, $TF \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, satisfaisant les axiomes M 0 à M 5, M′, M″, plus la forme renforcée de la première inclusion dans M′

$$\mathrm{M}'_0\ (\mathrm{g}) \qquad TC = C \cap W \qquad (\text{non seulement } TC \subset C \cap W).$$

De même, on définit la *pré-Q-catégorie de modèles à droite,* par la condition

$$\mathrm{M}'_0\ (\mathrm{d}) \qquad TF = F \cap W.$$

NB Quand les deux conditions sont satisfaites à la fois, alors la donnée de TC, TF résulte déjà de celle de W, C, F, et on a simplement une Q-catégorie de modèles "propre" (au sens de QUILLEN).

Scholie. Pour moi, l'introduction de C, TC, F, TF est purement auxiliaire – ce qui m'importe, ce sont les propriétés de W. Ainsi, l'existence de C, TC, F, TF satisfaisant aux axiomes faibles M 0 à M 4, M′, M″, du fait qu'elle donne les factorisations

`[page 13]`

dont il est question dans `[1a]` proposition 3, entraîne la propriété remarquable de W énoncée dans cette proposition, et dans le corollaire qui la précède. De même, ces propriétés de factorisation ([9]) assurent l'existence d'une bonne théorie des fibres et cofibres W-homotopiques sans besoin de référence dans cette théorie à C, TC, F, TF (dont l'introduction donne tout au plus des petits compléments . . .). Mais je ne vois pas comment, à partir des seules hypothèses de factorisation, prouver la propriété cruciale d'exactitude pour les carrés W-cartésiens, et W-cocartésiens, nécessaire pour pouvoir développer la suite *exacte* de cosuspension et de suspension. C'est pour avoir cette exactitude que l'introduction auxiliaire, et transitoire, de l'attirail (C, TC, F, TF) est utile, l'axiome supplémentaire à gauche $TC = C \cap W$ assurant (sauf erreur) l'exactitude des carrés W-cartésiens, et l'axiome à droite $TF = F \cap W$ celle des carrés W-cocartésiens. (Chose à vérifier avec plus de soin que je ne l'ai fait à présent.) Une fois ceci obtenu, et éventuellement itou pour les $(\mathcal{M}(I), W(I))$ pour toute catégorie-diagramme I, on peut

`[page 14]`

totalement oublier ces ensembles auxiliaires – j'ai envie en tous cas de les oublier.

Mon espoir, c'est que pour une W donnée, même si on n'arrive pas à trouver une structure de triple de Quillen (W, C, F) associée (p. ex. parce qu'il n'y en aurait pas), on peut trouver à la fois des quintuplets (W, C, F, TC, TF) qui soient des pré-Quillen à gauche, et des quintuplets (d'*autres* quintuplets !) qui soient des pré-Quillen à droite.

Voici le genre d'énoncé en forme, pour le moment conjectural voire totalement heuristique, auquel je songe :

Théorème-scholie conjectural : *On suppose que $\mathcal{M}$ est stable par $\varinjlim$ "quelconques", et par $\varprojlim$ finies, et que W est stable par $\varinjlim$ filtrantes (en plus de la saturation faible).*

[9] sous une forme légèrement renforcée il est vrai – il faut une factorisation *fonctorielle* pour f . . .

1 *Alors* Cof_W *et* W^{univ} *ont les propriétés de stabilité* a) *et* c) *de la proposition* 2 (p. 4), *et aussi la propriété de stabilité* b) *par facteurs directs, pourvu que* W *lui-même l'a.*

2 *Supposons* $\mathcal{M}$ accessible, *de sorte qu'on dispose du théorème* 1. *Conditions équivalentes sur* W *:*

[page 15]

a) *Il existe une partie petite* C_0 *de* Cof_W*, et* TC_0 *de* W^{univ}*, telles que*

$$TF \overset{\text{déf}}{=} C_{0*} \subset W, \qquad (TC_0)_* \overset{\text{déf}}{=} F \subset \mathrm{Fib}_W.$$

a′) *Il existe un quadruplet* (C, TC, F, TF) *de parties de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$*, satisfaisant les conditions* M 1 *à* M 4, M′, M″ *de la page* 6 ([10]).

a″) *Comme* a′), *en supposant* M′ *sous forme renforcée avec* M'_0 (g), i.e. *on a une structure de pré-Q-catégorie de modèles à gauche* ($TC = C \cap W$)*.*

b) *On a*

$$(\mathrm{Cof}_W)_* \subset W, \qquad (W^{\mathrm{univ}})_* \subset \mathrm{Fib}_W$$

(donc $(\mathrm{Cof}_W)_* \subset \mathrm{Fib}_W \cap W$ *puisque* $(\mathrm{Cof}_W)_* \subset (W^{\mathrm{univ}})_*$ ([11]))*.*

b′) *On a*

$$(\mathrm{Cof}_W)_* \subset W_{\mathrm{univ}}, \qquad (W^{\mathrm{univ}})_* \subset \mathrm{Fib}_W.$$

3 *Pour qu'il existe un quadruplet qui, avec* W*, définisse une pré-Q-catégorie de modèles à droite* ($TF = F \cap W$) ([12]), *il faut et il suffit qu'on ait* b′) *ci-dessus, ainsi que*

$$(W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}} \ \textit{ est clos à droite.}$$

[page 16]

4 *Les hypothèses préliminaires sur* $(\mathcal{M}, W)$*, y inclus l'accessibilité, ainsi que les conditions équivalentes dans* 2 *, sont stables par passage de* $(\mathcal{M}, W)$ *à* $(\mathcal{M}(I), W(I))$*. Mais qu'en est-il de la condition dans* 3 *? Est-elle conséquence des conditions dans* 2 *(*i.e. *leurs est-elle équivalente) ?*

Je vais esquisser la démonstration du théorème-scholie, pour cerner le travail technique qui reste à faire.

1°) Est de la vérification de routine.

2°) Voici les implication ± tautologiques entre les conditions envisagées :

$$(*) \qquad a'' \Longrightarrow a' \overset{?}{\Longrightarrow} a \Longrightarrow b \Longleftarrow b',$$

[10] avec C, TC clos à gauche, F, TF clos à droite.

[11] $W^{\mathrm{univ}} \subset \mathrm{Cof}_W$.

[12] On suppose toujours $\mathcal{M}$ accessible dans 3° et 4°, avec en plus F, TF (et C, TC) closes à droite (resp. à gauche).

mais je vois que $a' \implies a$ n'est nullement tautologique, et peut-être même faux après tout ! ([13]). Il faudrait supposer que dans `[le]` quadruplet (C, F, TC, TF), F et TF sont clos à droite, et plus précisément, que $F = (TC)_*$, $TF = C_*$, ce qui sera le cas p. ex. si on a une structure de Q-catégorie de modèles "close" ("closed model category"), au sens de Quillen. Les autres trois implications dans $(*)$ sont bel et bien tautologiques.

$a \implies a'$. On peut dans a) supposer

$$TC_0 \subset C_0$$

(quitte à remplacer C_0 par $C_0 \cup TC_0$), puis, grâce à

`[page 17]`

1°) (W^{univ} et Cof_W sont clos à gauche), posant

$$\overline{TC_0} = TC, \qquad \overline{C_0} = C, \qquad \texttt{[plutôt}\ \ \widetilde{TC_0} = TC, \qquad \widetilde{C_0} = C,\texttt{]}$$

on aura $TC \subset W^{\text{univ}}$, $C \subset \mathrm{Cof}_W$. Passant de TC_0 à TC, de C_0 à C, on a perdu seulement que ces parties de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ soient petites. Mais par le théorème 1, posant

$$F = (TC)_*, \qquad TF = C_*,$$

les couples de parties closes (à gauche – à droite)

$$(C, TF), \qquad (TC, F)$$

satisfont à la condition de factorisation de Quillen. On aura alors les propriétés M 1 à M 4, plus les inclusions $TC \subset C \cap W$ (car $TC \subset W^{\text{univ}} \subset W$, et $TC \subset C$ par construction), et $C \subset \mathrm{Cof}_W$ de M′ et M″. Il reste à vérifier $TF \subset F \cap W$, $F \subset \mathrm{Fib}_W$, mais $F\ (= (TC)_*) \subset \mathrm{Fib}_W$ par hypothèse, et $TF\ (= C_*) \subset W$ aussi ; d'autre part $TF \subset F$ résulte de $TC \subset C$.

$a' \implies a''$. On veut donc, en plus des conditions M 1 à M 4 et M′, M″, la condition

$$TC = C \cap W \ (= C \cap W^{\text{univ}}).$$

L'idée, c'est de remplacer le couple

`[page 18]`

$$C,\ TC \qquad (C \subset \mathrm{Cof}_W,\ TC \subset C \cap W),$$

donnant naissance à

$$F = (TC)_*, \qquad TF = C_*,$$

par

$$C,\ C \cap W\ (\supset TC),$$

[13] C'est pourquoi je l'ai modifié, en renforçant a') par `[la condition de la note 10]`.

ce qui ne change pas le couple (C, TF), mais bien le couple (TC, F), remplacé par

$$\underbrace{(TC)'}_{\supset TC} = \underbrace{C \cap W}_{= C \cap W^{\text{univ}}}, \qquad F' = \underbrace{(TC')_*}_{\subset F}$$

(on a remplacé F par un F' plus petit) ([14]). Le seul problème, c'est si (TC', F') satisfait encore à la condition de factorisation de Quillen. Ce sont des parties closes (à gauche pour TC', à droite pour F') "duales" l'une de l'autre,

$$TC' = F'^*, \qquad F' = TC'_*,$$

mais comme on ne sait pas si TC' est de la forme $\widetilde{TC'_0}$, avec TC'_0 petite, on n'est pas sûr que la conclusion du théorème 1 s'applique. Mais si on suppose dans a') que C est une partie *accessible* de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ (*i.e.*, étant déjà close à gauche, que $C = \widetilde{C_0}$, C_0 petit),

`[page 19]`

alors je présume qu'on pourra prouver qu'il en est de même de $C \cap W$ (W elle-même étant accessible, grâce à la condition de stabilité par petites $\varinjlim$ filtrantes), donc le théorème 1 s'applique bel et bien à $TC' = C \cap W$. Mais si on garde a') telle quelle, alors il faudrait sans doute prouver que a') *implique* a') sous la forme plus forte, avec C *accessible.* Mais comme on a $a' \Longrightarrow a$, et qu'on vient d'établir que $a \Longrightarrow a'$ sous cette forme plus forte, on gagne (modulo le fait conjectural admis sur les parties admissibles `[plutôt accessibles]` de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$).

Il reste donc à prouver

$$b \Longrightarrow a, \qquad b \Longrightarrow b',$$

et il suffit de prouver la première implication, car on sait que $a) \Longrightarrow a')$, et que a') implique que

$$\mathrm{Fib}_W \cap W = W_{\text{univ}}$$

(cor. 1, page 10), donc $(\mathrm{Cof}_W)_* \subset W$ et $(W^{\text{univ}})_* \subset \mathrm{Fib}_W$ (*i.e.* b)) impliquent, comme $(\mathrm{Cof}_W)_* \subset (W^{\text{univ}})_*$ (car $W^{\text{univ}} \subset \mathrm{Cof}_W$), $(\mathrm{Cof}_W)_* \subset W \cap \mathrm{Fib}_W = W_{\text{univ}}$, ce qui est la partie à établir de b') (l'autre $(W^{\text{univ}})_* \subset \mathrm{Fib}_W$ étant tautologiquement contenue dans b).

`[page 20]`

Notons maintenant que b) n'est autre que la variante affaiblie de a), quand on omet de spécifier que C_0, TC_0 doivent être petits. Donc le seul problème, pour $b \Longrightarrow a$, c'est de voir ceci :

Lemme conjectural ([15]).

1. *Si on a une partie close à gauche* Φ *de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$*, telle que* $\Phi_* \subset \mathrm{Fib}_W$ *(resp.* $\Phi_* \subset W$*), alors il existe une partie* petite $\Phi_0 \subset \Phi$*, telle que* $\Phi_{0*} \subset \mathrm{Fib}_W$ *(resp.* $\Phi_0 \subset W$*).*

2. *Si* C, C' *sont deux parties closes à gauche de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$*, si* C *et* C' *sont accessibles, il en est de même de* $C \cap C'$.

[14]NB TC' sera encore clos à gauche comme intersection de deux parties closes à gauche.

[15]Ce lemme a l'air un peu faux, mais ça doit pouvoir s'arranger ...

Je crois que c'est bel et bien vrai sous les hypothèses faites sur $\mathcal{M}$, W – qui doivent impliquer que dans un sens convenable, W est une partie accessible de l'ensemble $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ des flèches de la catégorie accessible $\mathcal{M}$. Il doit en résulter qu'une partie de $\mathcal{M}$ construite explicitement en termes de W, telle Fib_W, est elle-même accessible, et le lemme doit sortir de là.

Ainsi, 2° est prouvé, modulo ce lemme d'accessibilité, qu'il me faudra prouver $\pm$ en même temps que le théorème 1 (que je n'ai fait ici qu'énoncer).

`[page 21]`

Prouvons 3°. Supposons d'abord qu'il existe un quadruplet "clos" (C, TC, F, TF), s'insérant dans un "pré-quintuplet de Quillen clos" qui soit une Q-catégorie de modèles à droite, *i.e.*

$$TF \;=\; F \cap W \;=\; F \cap W_{\mathrm{univ}}.$$

Prouvons alors `[que]`

$$(*) \qquad \underbrace{(W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}}}_{A_W} \qquad \text{est clos à droite.}$$

En effet, on a

$$TC \;\subset\; W^{\mathrm{univ}},$$

d'où

$$(W^{\mathrm{univ}})_* \;\subset\; (TC)_* \;=\; F,$$

donc

$$A = (W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}} \;\subset\; F \cap W_{\mathrm{univ}} \overset{\text{(par hyp.)}}{=} TF,$$

or TF est clos à droite et contenu dans W_{univ}, d'où

$$\overline{A} \;\subset\; TF \;\subset\; W_{\mathrm{univ}},$$

et comme $(W^{\mathrm{univ}})_*$ est clos à droite, on a aussi

$$\overline{A} \;\subset\; (W^{\mathrm{univ}})_*,$$

d'où $\overline{A} \subset W_{\mathrm{univ}} \cap (W^{\mathrm{univ}})_* = A$, donc A est clos à droite, q.e.d.

Prouvons la réciproque, *i.e.* supposons satisfaites les conditions de 2°, *plus* la condition $(*)$ ci-dessus. On doit construire le quadruplet.

`[page 22]`

Notons d'abord, pour nous y reconnaître, que les relations $b')$ de 2°), et les relations transposées (compte tenu que Cof_W et W^{univ} sont clos à gauche, par 1°), savoir

$$\begin{cases} (\mathrm{Cof}_W)_* \;\subset\; W_{\mathrm{univ}} \quad , \quad (W^{\mathrm{univ}})_* \;\subset\; \mathrm{Fib}_W \\ (W_{\mathrm{univ}})^* \;\subset\; \mathrm{Cof}_W \quad , \quad (\mathrm{Fib}_W)^* \;\subset\; W^{\mathrm{univ}}, \end{cases}$$

donnant ([16]) les deux diagrammes carrés d'inclusions

[16] compte tenu de $W^{\mathrm{univ}} \subset \mathrm{Cof}_W$, $W_{\mathrm{univ}} \subset \mathrm{Fib}_W$ et des inclusions transposées.

(I) $$\begin{tikzcd} & W^{\mathrm{univ}} \arrow[dr, hook] & \\ (\mathrm{Fib}_W)^* \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{Cof}_W \\ & (W_{\mathrm{univ}})^* \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$ [17]

et

(II) $$\begin{tikzcd} & (W^{\mathrm{univ}})_* \arrow[dl, hook] & \\ \mathrm{Fib}_W & & (\mathrm{Cof}_W)_* \arrow[ul, hook] \arrow[dl, hook] \\ & W_{\mathrm{univ}} \arrow[ul, hook, "\alpha"] & \end{tikzcd} ,$$

dont le premier est transposé (par $\Phi \longmapsto \Phi^*$) du second, et où les 8 ensembles de flèches envisagés, à l'exception de Fib_W et W_{univ} (reliés par α dans le carré II) sont clos (les quatre ensembles de I clos à gauche, et les deux ensembles de II non intéressés par α, clos à droite).

`[page 23]`

Les "pré-quintuplets de Quillen clos", associés à W, correspondent au choix de parties closes à gauche TC et C, s'insérant dans le diagramme (I) comme montré dans I′ ci-dessous, et donnent lieu par transposition à F et TF comme dans II′ ci-dessous,

(I′) $$\begin{tikzcd} & & W^{\mathrm{univ}} \arrow[dr, hook] & \\ & TC \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{Cof}_W \\ (\mathrm{Fib}_W)^* \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & C \arrow[ur, hook] & \\ & (W_{\mathrm{univ}})^* \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

(II′) $$\begin{tikzcd} & & (W^{\mathrm{univ}})_* \arrow[dl, hook] & \\ & F \arrow[dl, hook] & & (\mathrm{Cof}_W)_* \arrow[ul, hook] \arrow[dl, hook] \\ \mathrm{Fib}_W & & TF \arrow[ul, hook] \arrow[dl, hook] & \\ & W_{\mathrm{univ}} \arrow[ul, hook] & & \end{tikzcd} ,$$

le "hic" étant donc de choisir TC et C assez grandes pour qu'on ait

$$\underbrace{(TC)_*}_{=F} \subset \mathrm{Fib}_W, \qquad \underbrace{C_*}_{=TF} \subset W_{\mathrm{univ}} \qquad -$$

[17]**NB** On a ces carrés d'inclusions, chaque fois qu'on a un système de Quillen (W, C, F, TC, TF) *clos.*

`[page 24]`

et les inclusions stipulées dans 2°, b') assurent qu'on peut bel et bien trouver TC et C, quitte à les prendre les plus grandes possibles, $TC = W^{\mathrm{univ}}$, $C = \mathrm{Cof}_W$ – auquel cas, d'ailleurs, on aura

$$TC \;=\; C \cap W^{\mathrm{univ}},$$

i.e. on a une pré-Q-catégorie de modèles à gauche. Mais il s'agit d'assurer maintenant, par contre, que

$$TF \;=\; F \cap W_{\mathrm{univ}},$$

ce qui implique, on vient de le voir, (en notant $(W^{\mathrm{univ}})_* \subset F$) que

$$(*) \qquad \overline{(W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}}} \;\subset\; \overline{F \cap W_{\mathrm{univ}}} = \overline{TF} = TF \subset W_{\mathrm{univ}}.$$

Inversement, si $(*)$ est satisfait, prenons

$$F = (W^{\mathrm{univ}})_*$$

le plus petit possible, *i.e.* $C = W^{\mathrm{univ}}$ `[plutôt` $TC = W^{\mathrm{univ}}$`]` le plus grand possible. On doit donc prendre

$$TF \;=\; F \cap W_{\mathrm{univ}} \;=\; (W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}},$$

et cet ensemble est bien clos à droite par hypothèse.

Corollaire. *Supposons la condition* b$'$) *du théorème-scholie satisfaite. Les conditions suivantes* a), b) *sur W sont équivalentes (et impliquent la condition de 3° du théorème-scholie).*

`[page 25]`

a) $(W^{\mathrm{univ}})_* \cap \overline{W_{\mathrm{univ}}} = (\mathrm{Cof}_W)_*$.

b) $\widetilde{W^{\mathrm{univ}} \cup (W_{\mathrm{univ}})^*} = \mathrm{Cof}_W$, i.e. Cof_W *est la partie close à gauche engendrée par* W^{univ} *et* $(W_{\mathrm{univ}})^*$,

et ces conditions impliquent

c) *qu'il existe une structure de* triple clos de Quillen (W, C, F) *incluant W (donc avec $TC = W \cap C$, $TF = W \cap F$) (lequel sera clos au sens de Quillen si et seulement si W* `[est]` *stable par facteurs directs – car C et F sont déjà stables spontanément).*

Il suffit en effet de prendre alors

$$TC \;=\; W^{\mathrm{univ}}, \qquad C \;=\; \mathrm{Cof}_W.$$

Mais je doute que l'existence d'un triple clos de Quillen (W, C, F) suffise à impliquer les conditions a), b) ci-dessus, ni même la condition plus faible

$$(W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}} \;=\; (\mathrm{Cof}_W)_*$$

qui signifie *exactement* que $C = \mathrm{Cof}_W$, $TC = W^{\mathrm{univ}}$, et leurs transposés $TF = (\mathrm{Cof}_W)_*$, $F = (W^{\mathrm{univ}})_*$ forment une catégorie de Quillen close.

`[page 26]`

Conditions sur $(\mathcal{M}, W)$ avec

$a)$ $\mathcal{M}$ stable par $\varprojlim$ finies et $\varinjlim$ (petites),

$b)$ W stable par $\varinjlim$ filtrantes,

$c)$ $\mathcal{M}$ accessible.

I

a existence d'un système de Quillen faible (W, C, TC, F, TF) (clos si on y tient)

$\Updownarrow$

b existence d'un système de Quillen faible exact à gauche $(TC = C \cap W)$.

$\Updownarrow$

c $\underbrace{(\mathrm{Cof}_W)_* \subset W,\ (W^{\mathrm{univ}})_* \subset \mathrm{Fib}_W}_{(*)}$ $(\Longleftrightarrow\ (\mathrm{Cof}_W)_* \subset W_{\mathrm{univ}},\ (W^{\mathrm{univ}})_* \subset \mathrm{Fib}_W)$.

$\Uparrow$

II

a existence d'un système de Quillen faible exact à droite $(TF = F \cap W)$

$\Updownarrow$

d On a $(*)$, et de plus $(W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}}$ clos à droite.

$\Updownarrow$

b existence d'un système de Quillen clos (closed model category), $TC = C \cap W$, $TF = F \cap W$, $F = (TC)_*$, $TF = C_*$, $TC = F^*$, $C = (TF)^*$.

$\Updownarrow$

c Posant $TC = W^{\mathrm{univ}}$, $F = (TC)_*$, $TF = F \cap W_{\mathrm{univ}}$, $C = (TF)_*$, on trouve avec W un système de Quillen clos.

$\Uparrow$

III

$C = \mathrm{Cof}_W$ et $TC = W^{\mathrm{univ}}$ font partie (avec W) d'un système de Quillen clos (donc $F = (W^{\mathrm{univ}})_*$, $TF = (\mathrm{Cof}_W)_*$, $W = TF \circ TC$).

$\Updownarrow$

`[On a]` $(*)$, et de plus $(W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}} = (\mathrm{Cof}_W)_*$.

$\Uparrow$

IV

On a $(*)$ et $\mathrm{Cof}_W = \widehat{(W_{\mathrm{univ}})^* \cup W^{\mathrm{univ}}}$.

$\Updownarrow$

On a $(*)$ et $(W^{\mathrm{univ}})_* \cap \overline{W_{\mathrm{univ}}} = (\mathrm{Cof}_W)_*$.

Cas $\mathcal{M} = \mathrm{Cat}$, $W = \mathbf{W}_\infty$. On sait que II est satisfait, par THOMASON. Donc on a

$$(\mathrm{Cof}_W)_* \subset W_{\mathrm{univ}}, \qquad (W^{\mathrm{univ}})_* \subset \mathrm{Fib}_W, \qquad (W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}} \text{ clos à droite.}$$

J'ai pu prouver directement les deux premières inclusions (*i.e.* I), mais pas que $(W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}}$ soit clos à droite. (Je devrais au moins essayer!) ([18]). On n'a pas IV, *i.e.* on a

$$(W^{\mathrm{univ}})_* \cap \overline{W_{\mathrm{univ}}} \neq (\mathrm{Cof}_W)_*$$

car

$$(W^{\mathrm{univ}})_* \cap \overline{W_{\mathrm{univ}}} \not\subset W_{\mathrm{univ}}$$

(contient les $X \longrightarrow e$ avec X discrète), donc on a

$$(W^{\mathrm{univ}})_* \cap \overline{W_{\mathrm{univ}}} \underset{\neq}{\supset} \underbrace{(W^{\mathrm{univ}})_* \cap W_{\mathrm{univ}}}_{\text{n'est } pas \text{ l'orthogonal de } W^{\mathrm{univ}} \cup (W_{\mathrm{univ}})^*} .$$

[page 27]

3 Catégorie de Quillen (deuxième mouture)

On se donne toujours un couple

$$(\mathcal{M}, W), \qquad W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M}), \qquad W \text{ faiblement saturé,}$$

$\mathcal{M}$ satisfait M 0 (stabilité par $\varprojlim$ finies et $\varinjlim$ finies).

Définition 1 : Une *structure de Quillen faible* associée à la catégorie de modèles $(\mathcal{M}, W)$ est la donnée de quatre parties (C, TC, F, TF) de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, satisfaisant les conditions suivantes.

M 1 $C \longleftrightarrow TF$, $TC \longleftrightarrow F$ (*i.e.* $TF \subset C_*$, $F \subset (TC)_*$).

M 2 Propriété de factorisation de Quillen pour (C, TF) et (TC, F).

M 3 Stabilité de C par composition et par cochangement de base, de F par composition et changement de base – C et F contiennent les isomorphismes.

M 4 Stabilité similaire pour TC et TF.

M′ $TC \subset C \cap W$, $TF \subset F \cap W$.

M″ $C \subset \mathrm{Cof}_W$, $F \subset \mathrm{Fib}_W$.

On dit que la structure de Quillen est *exacte* si elle satisfait à l'axiome supplémentaire

[18] Il suffirait de savoir que $\overline{W_{\mathrm{univ}}} \cap \mathrm{Fib}_W = W_{\mathrm{univ}}$, ce qui impliquerait que III et IV sont équivalents ([19]).

[19] Mais c'est faux, p. ex. si X [est une] catégorie discrète non vide, $X \longrightarrow e$ est dans $\overline{W_{\mathrm{univ}}} \cap \mathrm{Fib}_W$.

M 2 bis $\quad W = TF \circ TC.$

On dit qu'elle est *exacte à gauche* si elle satisfait l'axiome supplémentaire

$\mathbf{M}'_0$ (g) $\quad TC = C \cap W$ (au lieu de $TC \subset C \cap W$ seulement),

exacte à droite si elle satisfait

$\mathbf{M}'_0$ (d) $\quad TF = F \cap W$ (au lieu de $TF \subset F \cap W$ seulement) ([20]).

`[page 28]`

Remarque.

a) Une structure de Quillen exacte à gauche ou exacte à droite est exacte.

b) Si on a une donnée (C, TC, F, TF) satisfaisant M 1, M 2, M$'$, M'', quand on sature C, TC à gauche et F, TF à droite, pour les stabilités précisées dans M 2, M 3, on trouve une structure de Quillen. (Tous les axiomes sont évidents, sauf M$'$, pour lequel je renvoie à p. 9, 10, notamment prop. 4.) Si on avait M 2 bis, cela sera encore vérifié (a fortiori) après saturation, *i.e.* on a une structure de Quillen exacte.

Définition 1 bis. La structure de Quillen faible est dite *structure de Quillen* (tout court) si elle est exacte à gauche et à droite, ou (comme on dit) "biexacte", alors (C, F) determine déjà (C, TC, F, TF). (Ça correspond exactement aux "model categories" de QUILLEN `[propres]`.) On dit que la structure de Quillen faible est *close* si on a

$$C \leftrightarrow\!\!\!\!\!+\; TF\ , \qquad TC \leftrightarrow\!\!\!\!\!+\; F\ ,$$

i.e. $TF = C_*$, $C = (TF)^*$ et $F = (TC)_*$, $TC = F^*$ ([21]). Une structure de Quillen faible à la fois biexacte (*i.e.* pas faible du tout !) et close est appelée structure de Quillen *parfaite.* (Ça correspond exactement à la "closed model category" `[propre]` de QUILLEN.)

`[page 29]`

Remarque. Pour qu'une structure de Quillen faible soit parfaite, il suffit qu'elle soit biexacte et qu'on ait

$$C = (TF)^*, \qquad F = (TC)_*$$

(ce qui implique déjà que $TC = F^*$, $TF = C_*$, *i.e.* que TC est clos à gauche et TF clos à droite). C'est prouvé dans Quillen. Ça implique aussi que W est fortement saturé – c'est le pays de cocagne !

[20] **NB** Si C, F, W `[sont]` stables par facteurs directs (donc aussi $C \cap W$ et $F \cap W$), alors l'exactitude à gauche $TC = C \cap W$ *équivaut* à l'exactitude à droite $TF = F \cap W$, et implique que C, TC, F, TF sont *clos* (à gauche pour C, TC, à droite pour F, TF).

[21] Cela signifie aussi que C, TF, TC, F sont stables par facteurs directs. On dit que la structure de Quillen faible est *close à gauche* (resp. *à droite*) si C, TC (resp. F, TF) sont clos à gauche (resp. à droite).

Scholie : Le couple $TC \longleftrightarrow F$, satisfaisant à la condition de factorisation de Quillen, et satisfaisant $TC \subset W$, $F \subset \mathrm{Fib}_W$, permet déjà de développer une théorie satisfaisante des fibres W-homotopiques dans $\mathcal{M}$ – mais sans propriété d'exactitude pour les carrés W-cartésiens. Dualement, la donnée de $C \longleftrightarrow TF$, avec factorisation, et $TF \subset W$, $C \subset \mathrm{Cofib}_W$, donne une bonne théorie des cofibres W-homotopiques, mais sans propriété d'exactitude pour les carrés W-cocartésiens. La structure de Quillen faible réunit ces deux données duales l'une de l'autre, avec en plus le lien supplémentaire entre ces deux donnés, par $TC \subset C$, $TF \subset F$ (stipulé dans M'). Cette donnée assure déjà que

$$\underbrace{\mathcal{M}_{\mathrm{cf}}}_{\substack{\text{sous-catégorie pleine}\\ \text{de } \mathcal{M} \text{ formée des}\\ \text{objets fibrants et}\\ \text{cofibrants à la fois}}} W_{\mathrm{cf}}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}W^{-1} = \mathrm{Ho}_W$$

[page 30]

est une équivalence, mais non pas que le foncteur localisation

$$\mathcal{M}_{\mathrm{cf}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{cf}} W_{\mathrm{cf}}^{-1}$$

est un simple passage au quotient sur les flèches, *i.e.* que si X, Y sont dans $\mathcal{M}_{\mathrm{cf}}$, alors

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_W(X,Y)}_{\stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}_W}(X,Y)}$$

soit surjectif. Ceci est assuré par l'axiome d'exactitude M 2 bis,

$$W \;=\; TF \circ TC.$$

Avec ce seul axiome, on n'a pas de caractérisation sympathique de la relation d'équivalence dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)$ définie par la flèche $(*)$ (pour X, Y dans $\mathcal{M}_{\mathrm{cf}}$).

Si on a exactitude à gauche,

$$TC = C \cap W \qquad (\Longleftrightarrow\; TC = C \cap W^{\mathrm{univ}}),$$

alors cette relation d'équivalence est celle engendrée par la relation de *Q-homotopie à droite* ([22], [23]) (impliquée par la Q-homotopie à gauche), et la catégorie quotient ainsi définie

$$\pi_{\mathrm{d}}\mathcal{M}_{\mathrm{cf}} \;=\; \pi\mathcal{M}_{\mathrm{cf}} \;\simeq\; \mathrm{Ho}_W,$$

s'envoie dans $\pi_{\mathrm{d}}\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$,

$$\pi\mathcal{M}_{\mathrm{cf}} \longrightarrow \pi_{\mathrm{d}}\mathcal{M}_{\mathrm{c}},$$

et ce foncteur peut être interprété (sauf erreur)

[22] Il semblerait que la relation de Q-homotopie à droite est une relation d'équivalence, dès que Y [est] dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ et sans supposer la structure de Quillen faible exacte à droite ou à gauche.

[23] **NB** D'après Baues, il semblerait que sur $\mathcal{M}_{\mathrm{cf}}$, cette relation d'homotopie à droite équivaut à la relation d'homotopie à gauche, et que celle-ci ne dépend pas du cylindre choisi …

`[page 31]`

comme un *adjoint à droite* (pleinement fidèle) du foncteur de localisation

$$\pi_{\mathrm{d}}\mathcal{M}_{\mathrm{c}} \longrightarrow (\pi_{\mathrm{d}}\mathcal{M}_{\mathrm{c}})W_{\mathrm{c}}^{-1} \simeq \mathrm{Ho}_W,$$

et Ho_W se déduit de $\pi_{\mathrm{d}}\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$ par un *calcul de fractions à gauche.* Dualement, si on a exactitude à droite, *i.e.* $TF = F \cap W$ ($\Longleftrightarrow$ $TF = F \cap W_{\mathrm{univ}}$), alors la relation d'équivalence pertinente sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$, pour X, Y dans $\mathcal{M}_{\mathrm{cf}}$, est la Q-homotopie à gauche (impliquée par la Q-homotopie à droite), et cette fois la flèche naturelle de $\pi_{\mathrm{g}}\mathcal{M}_{\mathrm{cf}} = \pi\mathcal{M}_{\mathrm{cf}} \simeq \mathrm{Ho}_W$ dans $\pi_{\mathrm{d}}\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ `[plutôt` $\pi_{\mathtt{g}}\mathcal{M}_{\mathtt{f}}$`]`,

$$\underbrace{\pi\mathcal{M}_{\mathrm{cf}}}_{\simeq \mathrm{Ho}_W} \longrightarrow \pi_{\mathrm{d}}\mathcal{M}_{\mathrm{f}} \qquad \texttt{[plutôt } \pi_{\mathtt{g}}\mathcal{M}_{\mathtt{f}}\texttt{]}$$

est un *adjoint à gauche* (pleinement fidèle) du foncteur de localisation

$$\pi_{\mathrm{d}}\mathcal{M}_f \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{f}}W_{\mathrm{f}}^{-1} \simeq \mathrm{Ho}_W \qquad \texttt{[plutôt } \pi_{\mathtt{g}}\mathcal{M}_f \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathtt{f}}W_{\mathtt{f}}^{-1} \simeq \mathrm{Ho}_W\texttt{]},$$

et la localisée s'explicite par un calcul de fractions à droite.

Dans le cas biexacte (*i.e.* celui des véritables structures de Quillen), les deux relations de Q-homotopie dans $\mathcal{M}_{\mathrm{cf}}$ (plus généralement dans $\mathrm{Hom}(X, Y)$, si X dans $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$ et Y dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$)

`[page 32]`

coïncident, et deviennent même particulièrement simples. (Car si $f, g : X \rightrightarrows Y$, avec X cofibrant et Y fibrant, alors $f \sim g$ peut se tester sur *n'importe quel* “objet cylindre” pour X, ou sur *n'importe quel* “objet chemins” pour Y.)

Dans le cas où la structure de Quillen faible est exacte à gauche, *i.e.* où la relation d'équivalence pertinente dans $\mathrm{Fl}\,\mathcal{M}_{\mathrm{cf}}$ est la Q-homotopie à droite, alors l'axiome d'exactitude est vérifié pour les carrés W-cartésiens, mais je doute qu'il en soit de même pour les carrés W-cocartésiens ([24]). (Si on ne fait une hypothèse supplémentaire, p. ex. l'exactitude à droite de la structure de Quillen.) Si on n'a que l'exactitude (mais ni à gauche ni à droite), il semble qu'on ne peut en conclure l'exactitude ni des carrés W-cartésiens, ni des carrés W-cocartésiens, donc pas celle des suites de cosuspension (loop sequences), ni des suites de suspension. On pourrait donc penser que la condition d'exactitude, à elle seule, ne sert pas à grand

`[page 33]`

chose pour le formalisme homotopique dans les catégories de fractions Ho_W etc. Mais on a pourtant ceci : soit $\Psi = \begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 2 \end{tikzcd}$, et supposons que $(\mathcal{M}, W)$ *et* $(\mathcal{M}(\Psi), W(\Psi))$ `[où pour toute petite catégorie` I`,` $\mathcal{M}(I)$ `désigne la catégorie des préfaisceaux sur` I `à valeurs dans` $\mathcal{M}$`, et` $W(I)$ `est la partie de` $\mathtt{Fl}(\mathcal{M}(I))$ `formée des morphismes`

[24] Il semble pourtant que c'est le cas, d'après BAUES, cf. annotation marginale correspondante page 30.

`de préfaisceaux qui sont dans` W `"argument par argument"]` admettent une structure de Quillen faible exacte. Alors dans $\mathcal{M}$ les carrés W-cartésiens sont W-exactes, donc on a dans $\mathcal{M}$ des suites exactes longues de cosuspension (exact loop sequences) ([25]). (L'hypothèse sur $(\mathcal{M}(\Psi), W(\Psi))$ sert uniquement à assurer que toute flèche de $\mathrm{Ho}_{W(\Psi)} = \mathcal{M}(\Psi)W(\Psi)^{-1}$ est isomorphe à une flèche provenant d'une flèche de $\mathcal{M}(\Psi)$ lui-même. Mais c'est là une propriété apparemment très délicate, et je ne connais d'autre façon de l'obtenir que via l'existence d'une structure de Quillen faible exacte.) Dualement, si $(\mathcal{M}, W)$ et $(\mathcal{M}(\Phi), W(\Phi))$ admettent des structures de Quillen faibles exactes, alors les carrés W-cocartésiens dans $\mathcal{M}$ sont W-exacts, et on trouve (si $\mathcal{M}$ est ponctué) des suites exactes longues de suspension.

`[page 34]`

Ceci montre que si, pour une catégorie de modèles $(\mathcal{M}, W)$ donnée, on s'intéresse à “faire de l'algèbre homotopique” pour tous les couples $(\mathcal{M}(I), W(I))$ à la fois, avec I dans Cat, il suffit (si on veut avoir une bonne théorie des fibres et cofibres W-homotopiques dans ces catégories, y inclus la propriété de W-exactitude pour les carrés W-cartésiens et pour les carrés W-cocartésiens) de disposer pour chaque $(\mathcal{M}(I), W(I))$ d'une structure de Quillen faible exacte sans plus.

Ceci nous montre donc l'intérêt de développer des critères, pour une $(\mathcal{M}, W)$, assurant qu'il en est bien ainsi. À ce sujet, je note que je ne sais comment vérifier l'exactitude d'une structure de Quillen *que si* je dispose de l'exactitude à gauche, ou à droite. C'est dire que je dois dégager en fait des conditions sur $(\mathcal{M}, W)$ qui assurent (disons) que les $(\mathcal{M}(I), W(I))$ admettent des structures de Quillen faibles exactes à gauche.

`[page 35]`

Les structures de Quillen faibles pour les $(\mathcal{M}(I), W(I))$ seront déduites d'une structure de Quillen faible pour $(\mathcal{M}, W)$, de la façon suivante : elles seront toutes *“closes à droite”, i.e.*

$$F(I) = (TC(I))_*, \qquad TF(I) = (C(I))_*, \tag{1}$$

en particulier (pour $I = e$)

$$F = (TC)_*, \qquad TF = C_*,$$

ce qui implique déjà (puisque $C \subset \mathrm{Cof}_W$, $TC \subset W^{\mathrm{univ}}$)

$$(\mathrm{Cof}_W)_* \subset W, \qquad (W^{\mathrm{univ}})_* \subset \mathrm{Fib}_W \tag{2}$$

(d'où $(\mathrm{Cof}_W)_* \subset W_{\mathrm{univ}}$). En vertu de (1), pour définir les structures de Quillen faibles pour les $(\mathcal{M}(I), W(I))$, il suffit de définir $C(I)$, $TC(I)$, et même, comme on veut l'exactitude à gauche, *i.e.*

$$TC(I) = C(I) \cap W(I) \tag{3}$$

[25] il semble que je me suis canulé ici, et je doute que le résultat évoqué soit exact.

(en particulier

$$TC \;=\; C \cap W \quad), \tag{4}$$

il reste à définir C. On définira $C(I)$ "argument par argument", *i.e.* pour $f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I))$

$$f \in C(I) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_s^*(f) \in C \;\text{ pour tout } s \in \mathrm{Ob}\, I, \tag{5}$$

où

$$\alpha_s : e \longrightarrow I \qquad \texttt{[est]} \text{ défini par } \alpha_s(e) = s.$$

Il en résulte d'ailleurs aussitôt, par (3),

$$f \in TC(I) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_s^*(f) \in TC \;\text{ pour tout } s \in \mathrm{Ob}\, I. \tag{6}$$

`[page 36]`

On suppose donc que $(\mathcal{M}, W)$ admet une structure de Quillen faible exacte à gauche et close à droite (C, TC, F, TF), définie en termes de

$$C \;\subset\; \mathrm{Fl}(\mathcal{M}),$$

par

$$TC \;=\; C \cap W, \qquad F \;=\; (TC)_*, \qquad TF = C_*.$$

Pour que cela donne bel et bien une structure de Quillen faible (forcément exacte à gauche et close à droite), il faut simplement vérifier les conditions suivantes.

i) Factorisation pour $(C, TF = C_*)$ et $(TC = C \cap W, F = (TC)_*)$ – on reviendra sur ce point.

ii) Stabilité de C par composition et cochangement de base, et C contient les isomorphismes (d'où résultera la stabilité similaire de $TC = C \cap W$, compte tenu que $C \subset \mathrm{Cof}_W$) (NB Les stabilités idoines pour F, TF sont triviales par définition $F = (TC)_*$, $TF = C_*$.)

iii) $C \subset \mathrm{Cof}_W$, $\underbrace{C_*}_{= TF} \subset W$, $(C \cap W)_* \subset \mathrm{Fib}_W$.

Pour vérifier, de même, que $(C(I), TC(I), F(I), TF(I))$ soit une structure de Quillen faible pour $W(I)$, il faut vérifier les conditions similaires à i) ii) iii) . Or (ii) pour $C(I)$ résulte aussitôt de la condition (ii) pour C. Il reste à examiner (iii) et (i).

[page 37]

Les inclusions de (iii).

L'inclusion

$$C \ \subset \ \mathrm{Cof}_W$$

implique que toute $f \in C(I)$ est dans Cof_W argument par argument. Cela implique que f est dans $\mathrm{Cof}_{W(I)}$, comme on voit aussitôt sur la définition – je l'explicite en le

Lemme 1 : *Soit $f : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ une flèche de $\mathcal{M}(I)$. Pour que f soit dans* $\mathrm{Cof}_{W(I)}$ (resp. *dans* $\mathrm{Fib}_{W(I)}$), *il* suffit *que pour tout s dans* $\mathrm{Ob}\, I$, *$\alpha_s^*(f)$ soit dans* Cof_W (resp. *dans* Fib_W). *Itou (pour mémoire) pour une condition pour que $f \in W(I)$ – là il faut et il suffit que $\alpha_s^*(f) \in W \ \forall \ s \in \mathrm{Ob}\, I$.*

Nous allons appliquer ce même lemme pour établir les inclusions

$$C(I)_* \ \subset \ W(I), \qquad (C(I) \cap W(I))_* \ \subset \ \mathrm{Fib}_{W(I)}.$$

Donc il suffit de voir que

$$\begin{aligned} \alpha_s^*(C(I)_*) \ &\subset \ C_* & (\subset \ W) \\ \alpha_s^*((\underbrace{C(I) \cap W(I)}_{(C\cap W)(I)})_*) \ &\subset \ (C \cap W)_* & (\subset \ \mathrm{Fib}_W), \end{aligned}$$

et plus généralement

$$\alpha_s^*(\Phi(I)_*) \ \subset \ \Phi_* \tag{7}$$

pour toute (?) partie Φ de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, définissant donc $\Phi(I) \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I))$ terme à terme.

[page 38]

En explicitant la chose, on trouve la condition

$$\alpha_{s\,!}(\Phi) \subset \Phi(I) \qquad \text{pour tout } s \in \mathrm{Ob}\, I,$$

pour que ça marche, *i.e.* on veut que

$$i \in \Phi \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_{s\,!}(i) \in \Phi(I), \quad \textit{i.e.} \ \ \alpha_t^*(\alpha_{s\,!}(i)) \in \Phi \ \ \forall \ t \in \mathrm{Ob}\, I.$$

Or le foncteur $\alpha_t^* \alpha_{s\,!}$ s'explicite comme

$$A \longmapsto \underbrace{\mathrm{Hom}_I(t,s) \times A}_{\substack{\text{somme de } \mathrm{Hom}_I(t,s) \\ \text{copies de } A \text{ dans } \mathcal{M}}},$$

donc il faut supposer Φ *stable par sommes directes* (du type envisagé $\mathrm{Hom}_I(t,s) \times A$). C'est bien le cas pour $\Phi = C$ et $\Phi = C \cap W$ et pour des sommes directes *finies,* grâce à (ii). On trouve donc le

Lemme 2.

a) *Soit I dans* Cat *telle que les sommes directes de type* $\mathrm{Hom}_I(t,s)$ *existent dans* $\mathcal{M}$. *(P. ex. on suppose que I est* finie, *plus généralement que les* $\mathrm{Hom}_I(t,s)$ *sont des ensembles finis ; ou que les "petites" sommes directes existent dans $\mathcal{M}$.) Soit Φ une partie de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, *stable par ce type de sommes directes, et soit $\Phi(I) \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I))$ la partie correspondante. Alors pour tout $s \in \mathrm{Ob}\, I$, on a*

[page 39]

$$\alpha_s^*(\Phi(I)_*) \subset \Phi_*.$$

b) *Supposons que les* $\mathrm{Hom}_I(t,s)$ *soient finis (p. ex. I finie). Alors l'hypothèse de* a) *s'applique pour $\Phi = C$ et pour $\Phi = C \cap W$, donc la condition* (iii) *p. 36 est satisfaite pour la structure $(W(I), C(I), TC(I), F(I), TF(I))$ dans $\mathcal{M}(I)$. Même conclusion sans hypothèse de finitude sur les* $\mathrm{Hom}_I(t,s)$, *quand on suppose $\mathcal{M}$ stable par "petites" sommes directes, et C et W stables également par de telles sommes directes.*

NB Vu le scholie plus haut, il est parfaitement raisonnable de se borner au besoin aux catégories I *finies* – vu que la catégorie de ces I est stable par les produits $I \longmapsto I \times \Psi$, $I \longmapsto I \times \Phi$.

Il reste, pour être heureux, à vérifier la condition de factorisation (i) pour (C, TF), (TC, F), mais aussi et surtout pour les $(C(I), TF(I), TC(I), F(I))$. C'est dire que de partir même d'une structure de Quillen close (pays de cocagne)

[page 40]

ne nous avance guère à lui tout seul, faute de savoir que l'axiome de factorisation se conserve, en passant de $(\mathcal{M}, W, \ldots)$ à $(\mathcal{M}(I), W(I), \ldots)$.

C'est ici que le théorème de factorisation du no. 1 doit s'avérer providentiel. Mais pour pouvoir l'appliquer aux couples $(C(I), C(I)_*)$, $(TC(I), TC(I)_*)$, il faut (en plus de l'accessibilité de $\mathcal{M}$, ce qui est une condition fort anodine) des conditions de stabilité très fortes pour $C(I)$, $TC(I)$ ([26]). À vrai dire, il reste la stabilité de C et de $C \cap W$ par limites inductives ordinales (ce qui impliquera la même stabilité pour les $C(I)$, $(C \cap W)(I) = C(I) \cap W(I)$).

À dire vrai, je vois peu de chances de trouver une structure de Quillen faible (C, TC, F, TF) associé à W, et satisfaisant toutes les conditions dites, y compris celle de stabilité de C et de $C \cap W$ par $\varinjlim$ ordinales, sans supposer que W elle-même ne soit déjà stable par (petites) limites inductives filtrantes.

[page 41]

On peut songer à utiliser une factorisation *fonctorielle* des flèches dans $\mathcal{M}$ en

$$\begin{aligned} f = pi \quad \text{avec} \quad & i \in TC, \quad p \in F \\ \text{ou} \quad & i \in C, \quad\ \ p \in TF, \end{aligned}$$

[26] Plus les *petits* systèmes de générateurs pour C, TC.

pour déduire une factorisation similaire pour les flèches f de $\mathcal{M}(I)$, en

$$\begin{aligned} f = pi \quad \text{avec} \quad & i \in TC(I), \quad p \in F(I) \\ \text{ou} \quad & i \in C(I), \quad\;\; p \in TF(I), \end{aligned}$$

où $C(I), TC(I), F(I), TF(I)$ sont ici définis via C, TC, F, TF “argument par argument”. Mais l'ennui, c'est que en procédant de cette façon naïve, on n'aura plus nécessairement $C(I) \longleftrightarrow TF(I)$, $TC(I) \longleftrightarrow F(I)$. Il faut considérablement rapetisser $TF(I)$ et $F(I)$, pour avoir une propriété RLP par rapport à $C(I)$ resp. $TC(I)$.

Donc je ne vois guère d'autre moyen de s'en tirer, dans ce contexte général, qu'en supposant la stabilité de W par $\varinjlim$ filtrantes (ce qui n'est après tout pas très méchant).

[page 42]

Bon gré, mal gré, on revient à la situation envisagée dans le paragraphe 2. On va réénoncer l'essentiel de ce qui a été pressenti alors :

Théorème 2 (encore un peu conjectural). *Soit $(\mathcal{M}, W)$ une catégorie de modèles, avec W (comme toujours) faiblement saturée, mais de plus on suppose $\mathcal{M}$ stable par petites $\varinjlim$ et par $\varprojlim$ finies, et W stable par $\varinjlim$ filtrantes, enfin $\mathcal{M}$ accessible. Considérons les conditions suivantes :*

a) *Il existe une structure de Quillen faible pour W, exacte à gauche, close à droite, (C, TC, F, TF).*

a′) *Comme* a), *mais avec de plus C, TC clos à gauche (*i.e. *on a une structure de Quillen faible close), et C, TC de la forme $\widetilde{C_0}$, $\widetilde{TC_0}$, où C_0 et TC_0 sont petits.*

a″) *Il existe $C_0 \subset \mathrm{Cof}_W$, $TC_0 \subset W^{\mathrm{univ}}$, parties petites, telles que $C_{0*} \subset W$, $(TC_0)_* \subset \mathrm{Fib}_W$.*

b) *On a*

$$(\mathrm{Cof}_W)_* \subset W_{\mathrm{univ}}, \qquad (W^{\mathrm{univ}})_* \subset \mathrm{Fib}_W$$

(d'où résulte, Cof_W et W^{univ} étant clos à gauche, que

$$(W_{\mathrm{univ}})^* \subset \mathrm{Cof}_W, \qquad (\mathrm{Fib}_W)^* \subset W^{\mathrm{univ}} \qquad).$$

[page 43]

Ces conditions impliquent que pour toute I dans Cat, *il existe une structure de Quillen faible exacte à gauche et close pour $W(I)$ dans $\mathcal{M}(I)$. Une telle structure se définit, en termes d'une structure similaire C, $TC = C \cap W$, $F = (TC)_*$, $TF = C_*$ pour W, par*

$$C(I) \;=\; \Big\{ f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I)) \;\Big|\; \alpha_s^*(f) \in C \;\; \forall\, s \in \mathrm{Ob}\, I \Big\},$$

puis

$$\begin{aligned} TC(I) &= C(I) \cap W(I) = \left\{ f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I)) \,\middle|\, \alpha_s^*(f) \in TC \ \ \forall\, s \in \mathrm{Ob}\, I \right\} \\ F(I) &= (TC(I))_* \\ TF(I) &= C(I)_* \,. \end{aligned}$$

Corollaire-Scholie. *Ces conditions impliquent que pour tout I dans* Cat*,* $(\mathcal{M}(I), W(I))$ *donne lieu à une bonne théorie des fibres et cofibres $W(I)$-homotopiques, avec carrés $W(I)$-cartésiens $W(I)$-exacts, et carrés $W(I)$-cocartésiens $W(I)$-exacts – donc avec des suites* exactes *longues de cosuspension et de suspension, dans le cas où $\mathcal{M}$, donc aussi $\mathcal{M}(I)$, est une catégorie avec objet neutre.*

`[page 44]`

Je m'occuperai de la démonstration du théorème précédent, ainsi que du théorème de factorisation du paragraphe 1, quand j'aurai mes notes sur les catégories et foncteurs accessibles et filtrations cardinales. En attendant, j'ai envie déjà d'expliciter un peu plus le formalisme auquel on parvient moyennant les hypothèses faites ci-dessus. (Je suis à peu près sûr tout au moins que la condition a'') suffit à impliquer toutes les autres. Et c'est bien sous la forme a'') que ces conditions vont se vérifier en pratique, je présume, notamment dans le cas où $\mathcal{M} = \mathrm{Cat}$.)

4 Les variances u^*, u_*, $u_!$ pour $(\mathcal{M}(I), W(I))$ (I variable)

Je suppose les conditions du paragraphe précédent vérifiées pour $(\mathcal{M}, W)$ (cf. théorème p. 42), et choisis une structure de Quillen faible close et exacte à gauche (C, TC, F, TF) pour W, d'où pour tout I dans Cat

`[page 45]`

une structure de Quillen faible close et exacte à gauche $(C(I), TC(I), F(I), TF(I))$ pour $W(I)$, dans $\mathcal{M}(I)$, décrite page 43. Soit maintenant

$$u \,:\, I' \longrightarrow I$$

une flèche dans Cat, d'où une flèche

$$u^* \,:\, (\mathcal{M}(I), W(I)) \longrightarrow (\mathcal{M}(I'), W(I')).$$

On sait, vu que $\mathcal{M}$ est stable par $\varinjlim$ quelconques et aussi (étant de plus accessible) par $\varprojlim$ quelconques, que u^* admet des foncteurs adjoints à gauche et à droite,

$$u_!,\ u_* \,:\, \mathcal{M}(I') \longrightarrow \mathcal{M}(I),$$

et je me propose ici de résumer les propriétés les plus immédiates de u^* et de $u_!$, u_* par rapport aux structures de Quillen faibles envisagées.

Proposition 1 : *Avec les notations précédentes, on a les relations :*

$$(1) \qquad u^*(C(I)) \subset C(I'), \qquad u^*(TC(I)) \subset TC(I').$$

$$(2) \qquad u_*(F(I')) \subset F(I), \qquad u_*(TF(I')) \subset TF(I).$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} u^*(F(I)) \subset F(I') &\iff u_!(TC(I')) \subset TC(I) \\ u^*(TF(I)) \subset TF(I') &\iff u_!(C(I')) \subset C(I). \end{aligned}$$

D'autre part, je ne sais rien dire de positif pour les inclusions

$$\begin{aligned} u_*(C(I')) \ &\subset \ C(I), \quad u_*(TC(I')) \ \subset \ TC(I) \\ u_!(F(I')) \ &\subset \ F(I), \quad u_!(TF(I')) \ \subset \ TF(I). \end{aligned}$$

Si ce n'est que pour un u tant soit peu général (u pas un isomorphisme, disons), u_* n'a aucune envie

[page 46]

d'être compatible avec les structures C, TC (propriété d'exactitude homotopique à droite, moralement, vu que u_* est exact à gauche et en général pas du tout à droite), ni $u_!$ avec les structures F, TF (commentaire dual à donner, $u_!$ est exacte à *droite*, et n'a pas envie d'être "homotopiquement exact à gauche").

DÉMONSTRATION de (1), (2), (3). Les relations (1) sont évidentes par définition. Les relations (2), (3) le sont à peine moins, vu la propriété soritale générale suivante, dont la place serait au paragraphe 1 :

Proposition 2. *Soit*

$$C' \underset{u^*}{\overset{u_!}{\rightleftarrows}} C$$

un couple de foncteurs adjoints $(u_!, u^*)$, *et soit* $\Phi' \subset \mathrm{Fl}(C')$, $\Psi \subset \mathrm{Fl}(C)$. *Alors*

$$(u_!(\Phi') \longleftrightarrow \Psi) \qquad \iff \qquad (\Phi' \longleftrightarrow u^*(\Psi)).$$

Corollaire. (C'est le même énoncé, avec seulement des notations changées.) *Supposons que* $u^* : C \longrightarrow C'$ *admette un adjoint à* droite u_* *(pas forcément un adjoint à gauche)*

$$C' \underset{u_*}{\overset{u^*}{\leftrightarrows}} C,$$

soit $\Phi \subset \mathrm{Fl}(C)$, $\Psi' \subset \mathrm{Fl}(C')$, *alors*

$$(u^*(\Phi) \longleftrightarrow \Psi') \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\Phi \longleftrightarrow u_*(\Psi')).$$

C'est la proposition 2 pour $C'_0 \underset{u_0^*}{\overset{u_{0\,!}}{\rightleftarrows}} C_0$, avec $C'_0 = C$, $C_0 = C'$, $(u_{0!} : C \longrightarrow C') = u^*$, et $(u_0^* : C' \longrightarrow C) = u_*$.

[page 47]

Pour les inclusions (2), on utilise le corollaire de la proposition 2 pour les couples $\Phi = TC(I)$, $\Psi' = F(I')$, resp. $\Phi = C(I)$, $\Psi' = F(I')$ [plutôt $\Psi' = TF(I')$], et on applique (1) qui donne $u^*(\Phi) \longleftrightarrow \Psi'$, d'où $\Phi \longleftrightarrow u_*(\Psi')$, ce qui n'est autre que (2). Pour les équivalences (3), on utilise la proposition 2, en faisant $\Psi = F(I)$, $\Phi' = TC(I')$ resp. $\Psi = TF(I)$, $\Phi' = C(I')$.

Corollaire 1 (de la proposition 1) : *Supposons* $u : I' \longrightarrow I$ *telle que pour tout* $i \in \mathrm{Ob}\, I$, *la catégorie* $i\backslash I'$ *soit discrète* ([27]) *(p. ex.* I' *discrète). Alors on a*

$$\begin{cases} u_!(C(I')) \;\subset\; C(I), \quad u_!(TC(I')) \;\subset\; TC(I) \\ u^*(F(I)) \;\subset\; F(I'), \quad u^*(TF(I)) \;\subset\; TF(I'). \end{cases}$$

En effet, les relations de la deuxième ligne équivalent (à cause de (3)) à celles de la première. Il faut prouver que si f dans $\mathrm{Fl}\,\mathcal{M}(I')$ est dans $C(I')$ resp. $TC(I')$, $u_!(f)$ est dans $C(I)$ resp. $TC(I)$, ce qui signifie aussi que $\alpha_s^*(u_!(f))$ est dans C resp. TC, pour tout $s \in \mathrm{Ob}\, I$. Or le foncteur

$$\alpha_s^* u_! \;:\; \mathcal{M}(I') \longrightarrow \mathcal{M}$$

s'explicite par la formule bien connue

$$\alpha_s^*(u_!(X')) \overset{\text{déf}}{=} u_!(X')(s) \;\simeq\; \varinjlim_{i' \in s\backslash I'} X'(i').$$

Comme

[page 48]

$s\backslash I'$ est discrète, on a donc l'isomorphisme fonctoriel en X' dans $\mathcal{M}(I')$

$$\alpha_s^*(u_!(X')) \;\simeq\; \coprod_{(s', x\,:\, s \longrightarrow u(s'))\ \text{dans Ob}\,(s\backslash I')} X'(s'),$$

donc si $f : X' \longrightarrow Y'$, $\alpha_s^*(u_!(f))$ s'explicite comme une somme directe dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$ de flèches de la forme

$$f_{s'} \;:\; X'(s') \longrightarrow Y'(s'),$$

[27] Plus généralement, il suffit que toute composante connexe Z_α de $i\backslash I'$ ait un objet initial e_α, de sorte que $\varinjlim_{i\backslash I'} X'(i') \simeq \coprod_{\alpha \in \pi_0(i\backslash I')} X'(e_\alpha)$. C'est le cas notamment si $I' \longrightarrow I$ est un isomorphisme local, p. ex. une immersion ouverte.

lesquelles sont dans C resp. TC puisque f est dans $C(I')$ resp. $TC(I')$. Comme C, TC sont stables par sommes directes quelconques (C, TC étant clos à gauche), on gagne.

Corollaire 2. *Soit I dans* Cat, *et* $f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I))$. *Pour que f soit dans $F(I)$* (resp. *dans* $TF(I)$), *il* faut *que* $\forall\, s \in \mathrm{Ob}\, I$, $f_s : X(s) \longrightarrow Y(s)$ *le soit.* (Mais cette condition n'a pas du tout l'air d'être suffisante!) *En particulier, soit* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}(I)$, *alors* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}(I)_f \Longrightarrow X(s) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_f \ \ \forall\, s \in \mathrm{Ob}\, I$.

On applique le corollaire 1 à $\alpha_s : e \longrightarrow I$.

Scholie. La proposition 1 (relation (1)) montre que le foncteur u^* transforme carrés W-cocartésiens en itou, suites exactes longues de suspension en itou – c'est "l'exactitude à droite homotopique" de u^*. On s'attend à ce qu'il en soit de même pour les carrés cartésiens et les suites exactes

[page 49]

longues de cosuspension, mais pour le prouver il faudra un travail, qu'on fera dans la suite.

Les relations (2) montrent que le foncteur u_* transforme carrés W-cartésiens en itou, donc suites exactes longues de cosuspension en itou. Je ne m'attends *pas* à ce qu'il en soit de même en général pour les carrés W-cocartésiens – *i.e.* que u_* soit "homotopiquement exact à droite", et non seulement à gauche. Mais il faudrait au moins que je fasse des exemples (avec I', I des catégories finies ordonnées).

Quant à $u_!$, la proposition ne dit rien de bien palpable à son sujet. Néanmoins on s'attend à ce que $u_!$ transforme carrés W-cocartésiens en itou – c'est la moindre des choses! Ou peut-être je fais erreur, en confondant les foncteurs u_*, $u_!$ envisagés ici, avec les foncteurs similaires

$$\mathrm{HO}_W(I') \underset{u_*^W}{\overset{u_!^W}{\rightrightarrows}} \mathrm{HO}_W(I),$$

adjoints à gauche resp. à droite de

$$\mathrm{HO}_W(I') \xleftarrow{u_W^*} \mathrm{HO}_W(I),$$

induit par

$$u^* \ : \ (\mathcal{M}(I), W(I)) \longrightarrow (\mathcal{M}(I'), W(I')).$$

Mais en général u_*, $u_!$ ne sont pas compatibles

[page 50]

avec les localiseurs $W(I')$, $W(I)$, donc ils ne doivent pas être confondus avec les foncteurs $u_!^W$, u_*^W. Donc j'ai été peut-être hâtif, dans ce que j'ai dit au sujet de u_* et de $u_!$. Je serai obligé d'étudier la situation de très près, quand j'essayerai de construire les foncteurs u_*^W et $u_!^W$. Pour le moment, je n'ai encore aucune assurance que les conditions envisagées pour $(\mathcal{M}, W)$ suffisent à assurer l'existence de u_*^W, $u_!^W$ – pas même pour I, I' des ensembles ordonnés finis!

Corollaire 1. *Soit* $X \in \mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}}$, *alors pour toute* $\alpha : s \longrightarrow t$ *dans I qui est* [un] monomorphisme, $X(\alpha) : X(t) \longrightarrow X(s)$ *est dans* F.

(On applique [le] corollaire 1 (p. 47) à $\tilde{\alpha} : \mathbf{\Delta}_1 \longrightarrow I$.)

Proposition 3. ([28]) *Soit X dans $\mathcal{M}(\mathbf{\Delta}_1)$, $X = (X_0 \xleftarrow{\alpha} X_1)$. Alors X est dans $\mathcal{M}(\mathbf{\Delta}_1)_{\mathrm{f}}$ si et seulement si X_0, X_1* [sont] *dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$ et $\alpha \in F$.*

Corollaire 2. *Soit $I' \overset{u}{\hookrightarrow} I$* [une] immersion ouverte. *Alors pour $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}}$, $\varprojlim_I X(i) \longrightarrow \varprojlim_{I'} X(i)$ est dans F.*

5 Catégories de modèles quillénisables

Je reviens au cas général d'une catégorie de modèles $(\mathcal{M}, W)$.

Définition 1. On dit que $(\mathcal{M}, W)$ est *quillénisable* s'il existe une structure de Quillen faible *exacte* (C, TC, F, TF) pour $\mathcal{M}$.

C'est là une condition autoduale, mais que je ne sais vérifier en pratique que moyennant l'exactitude soit à gauche, soit à droite – donc par une condition plus forte qui détruit la symétrie. C'est pour la sauvegarder dans la mesure du possible que j'introduis la définition précédente, ainsi que la

Définition 2. Soit, en plus de $(\mathcal{M}, W)$, Diag $\subset$ Cat une sous-catégorie pleine de Cat. On dit que

[page 51]

W est *quillénisable sur* Diag, si pour tout I dans Diag, $(\mathcal{M}(I), W(I))$ est quillénisable.

En pratique, j'utiliserai cette définition dans le cas où Diag = Cat, ou alors, qu'il satisfasse au moins les propriétés de stabilité utiles pour le domaine d'un dérivateur : stable par $\varprojlim$ finies, par sommes finies – eventuellement par $\varinjlim$ finies, etc ([29]).

Exemple 1 : Celui des paragraphes 3, 4, où on a dégagé des conditions sur $(\mathcal{M}, W)$, avec $\mathcal{M}$ une "grosse" catégorie et $\mathcal{M}$ accessible, pour que W soit quillénisable sur Cat tout entier. C'est le cas qui me paraît à présent le plus intéressant.

Exemple 2 : Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, et $\mathcal{M} = K^\bullet(A)$ la catégorie des complexes de cochaînes à valeurs dans $\mathcal{A}$, $W = W_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des quasi-isomorphismes, donc

$$\mathcal{M}W^{-1} \;=\; K^\bullet(\mathcal{A})W_{\mathcal{A}}^{-1} \;\simeq\; D^\bullet(\mathcal{A}), \qquad \text{catégorie dérivée de } \mathcal{A}.$$

On définit aussi $\mathcal{M}^+$, $\mathcal{M}^-$, $\mathcal{M}^{\mathrm{b}}$, avec les localiseurs induits $W_{\mathcal{A}}^+$, $W_{\mathcal{A}}^-$, $W_{\mathcal{A}}^{\mathrm{b}}$, et les catégories de fractions $D^+(\mathcal{A})$, $D^-(\mathcal{A})$, $D^{\mathrm{b}}(\mathcal{A})$. Ou

[page 52]

encore, pour I dans Cat,

$$\mathcal{M}(I) \;=\; K^\bullet(\mathcal{A}(I))$$

[28] Comparer avec le lemme p. 63 et sa démonstration (plus exactement, le corollaire du lemme).

[29] Je supposerai que Diag contient tout au moins les catégories provenant d'ensembles ordonnés finis.

$$W(I) \;=\; \underbrace{W_{\mathcal{A}(I)}}_{\text{quasi-isomorphismes}} \;\subset\; \mathrm{Fl}(K^\bullet(\mathcal{A}(I))),$$

et de même pour $\mathcal{M}^\alpha(I)$, $W^\alpha(I)$ ($\alpha \in \{+,-,\mathrm{b}\}$), du moins *si I est finie.* Il y a aussi les sous-catégories $K^{\geq 0}(\mathcal{A})$ et $K^{\leq 0}(\mathcal{A})$ des complexes de cochaînes resp. de chaînes au sens strict (avec $K^i = 0$ si $i \geq 0$, resp. si $i \leq 0$ `[plutôt si` $i < 0$`, resp. si` $i > 0$`]`). On aura pour I quelconque

$$\begin{cases} K^{\geq 0}(\mathcal{A})(I) & \simeq & K^{\geq 0}(\mathcal{A}(I)) \\ W^{\geq 0}_{\mathcal{A}}(I) & = & W^{\geq 0}_{\mathcal{A}(I)}, \end{cases}$$

et de même pour $K^{\leq 0}$, $W^{\leq 0}$.

D'après Quillen page 1.2, $(K^+(\mathcal{A}), W^+_{\mathcal{A}})$ est quillénisable si $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs, $(K^-(\mathcal{A}), W^-_{\mathcal{A}})$ l'est si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs. Il ne dit rien pour $(K^\bullet(\mathcal{A}), W_{\mathcal{A}})$ sans plus – pourtant on fait de l'algèbre cohomologique avec $D^\bullet(\mathcal{A})$ sans plus, et même sans faire d'hypothèse d'existence d'injectifs ou de projectifs. J'ai un peu oublié ce que Verdier a fait à ce sujet – je devrais quand même regarder sa thèse (!), ou bien l'exposé de Hartshorne.

`[page 53]`

Toujours est-il qu'on a là des exemples de type tout différent de ceux envisagés dans 1°. Ainsi, il n'y a pas à supposer que $\mathcal{M}$ soit stable par petites $\varinjlim$ – $\mathcal{M}$ peut même être une petite catégorie, elle l'est si et seulement si $\mathcal{A}$ elle même l'est. Si $\mathcal{A}$ est stable par (petites) $\varinjlim$ filtrantes, et est accessible (p. ex. a une petite famille génératrice, et les $\varinjlim$ filtrantes sont exactes), alors $K^\bullet(\mathcal{A})$ etc. ([30]) ont les mêmes propriétés, et $(K^+(\mathcal{A}), W^+_{\mathcal{A}})$ est quillénisable sur Cat tout entier ([31]). (C'est le cas où on sait que $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs, et l'algèbre cohomologique se fait surtout à coups de résolutions injectives ...) Dans ce cas on sait que les

$$u_* \;:\; D^+(I', \mathcal{A}) \longrightarrow D^+(I, \mathcal{A})$$

existent comme adjoints à droite des

$$u^* \;:\; D^+(I, \mathcal{A}) \longrightarrow D^+(I', \mathcal{A}),$$

mais je ne suis plus trop sûr si on sait définir u_* aussi sur $D(I', \mathcal{A})$ tout entier, et je doute que $u_!$ existe sans hypothèse sur u (genre : dimension cohomologique finie). Sans doute on doit toujours avoir

$$u_! \;:\; D^-(I', \mathcal{A}) \longrightarrow D^-(I, \mathcal{A}),$$

`[page 54]`

adjoint à gauche de

$$u^* \;:\; D^-(I, \mathcal{A}) \longrightarrow D^-(I', \mathcal{A}).$$

[30] !!

[31] attention, $K^+(\mathcal{A})$ n'est *pas* stable par $\varinjlim$ filtrantes infinies – donc on ne peut appliquer le tapis des paragraphes 2, 3 directement à K^+.

Mais je ne sais plus trop s'il faut s'attendre à pouvoir définir $u_!$ sur $D(I', \mathcal{A})$ tout entier, en dehors d'hypothèses genre dimension cohomologique finie. La triste vérité, c'est que j'ai $\pm$ oublié la théorie des foncteurs dérivés ! (Il faudrait que je demande encore à JEAN MALGOIRE de m'envoyer des textes canoniques.)

Scholie. Si $(\mathcal{M}, W)$ est quillénisable sur Diag $\subset$ Cat (et même sans qu'il soit quillénisable), il définit un prédérivateur $\mathbf{D}_{\mathcal{M},W}$ sur Diag. On posera parfois

$$\mathrm{HO}_{\mathcal{M},W}(I) \;\text{ ou }\; \mathrm{HO}_W(I) \;=\; \mathbf{D}_{\mathcal{M},W}(I).$$

L'hypothèse quillénisable implique, sur chacune de ces catégories homotopiques, la structure (relativement faible) "triangulée", provenant des suites *exactes* de suspension et de cosuspension ([32]). (Le caractère quillénisable assure l'exactitude de ces suites ...) Les foncteurs $u^* : \mathrm{HO}_W(I) \longrightarrow \mathrm{HO}_W(I')$

[page 55]

sont "homotopiquement exacts" dans le sens des ces structures "triangulées" (non commutatives), *i.e.* transforment suites exactes de suspension resp. de cosuspension en itou.

Quels sont les axiomes des dérivateurs qui sont vérifiés sous la seule hypothèse quillénisable ? **Der** 1 [voir chapitre I, p. 43] l'est sans hypothèse aucune sur la catégorie de modèles $(\mathcal{M}, W)$:

$$\mathrm{HO}_W(\coprod_\alpha I_\alpha) \;\simeq\; \prod_\alpha \mathrm{HO}_W(I_\alpha)$$

pour une famille *finie* d'objets I_α dans Diag. L'axiome de localisation **Der** 2 [voir chapitre I, p. 43] l'est sous l'hypothèse que W soit *fortement saturé,* et quillénisable. On utilise le fait que toute flèche de $\mathrm{HO}_W(I)$ provient, à isomorphisme près, d'une flèche dans $\mathcal{M}(I)$. (C'était là un des points qui restait en suspens dans VI, dans la théorie de HOT_W, $W \subset \mathrm{Fl(Cat)}$ un localiseur fondamental ...)

L'axiome **Der** 3, nouvelle mouture [voir chapitre I, pp. 111-112], implique un localiseur fondamental $\mathbf{W} \subset \mathrm{Fl(Cat)}$ (pas forcément $\mathbf{W}_\infty$) ([33]). La forme la plus forte serait celle-ci : si

$$u \;:\; I' \longrightarrow I$$

[page 56]

est dans $\mathbf{W}$, on veut que le foncteur u^* induise une *équivalence*

$$u^*_{\mathrm{lc}} \;:\; \mathrm{HO}^{\mathrm{lc}}_W(I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HO}^{\mathrm{lc}}_W(I').$$

Mais je doute qu'on soit armé pour vérifier un axiome aussi fort, sans avoir au moins une théorie des opérations $u_!$ ou u_*. On pourrait à tout hasard poser cet axiome en prenant $\mathbf{W} = \mathbf{W}_\alpha \overset{\text{déf}}{=}$ le plus petit localiseur fondamental satisfaisant W (1 à 7) (le plus grand de

[32] Dans le cas où $\mathcal{M}$ est ponctuée par [un] objet neutre. Sinon, il y a la structure associée aux carrés cartésiens et cocartésiens. Il serait assez intéressant d'axiomatiser une telle espèce de structure.

[33] Il est naturel ici de supposer que $\mathbf{W}$ satisfait à tous les "bons axiomes" sur les localiseurs fondamentaux W (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) [voir chapitre XII].

ces localiseurs étant $\mathbf{W}_\infty$). Pour l'instant, la façon de vérifier cet axiome (en termes de la donnée $(\mathcal{M}, W)$) est pour moi un mystère $\pm$ total. (Mais je sais le vérifier pour HOT_W, quand $W \subset \mathrm{Fl(Cat)}$ satisfait W (1, 2, 3, 4, 5, ...).)

Je vais m'en occuper, une fois que j'aurai une maîtrise raisonnable sur le formalisme de u_*, $u_!$ relatif aux $u : I' \longrightarrow I$ dans Diag. L'hypothèse quillénisable seule semble trop grossière pour assurer l'existence de $u_!$ ou de u_* dans des cas intéressants.

[page 57]

6 Catégorie de modèles quillénisables, et foncteurs $u_!$, u_*

Définition 1 :

ⓐ On dit que $(\mathcal{M}, W)$ est *quillénisable uniformément à gauche* sur Diag, si on peut trouver une structure de Quillen faible (C, TC, F, TF) pour $\mathcal{M}$ qui soit *close,* et qui de plus ait la propriété suivante : pour I dans Cat, soient $C(I)$, $TC(I) \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I))$ définis par

$$(u : X \longrightarrow Y) \in C(I) \text{ (resp. } TC(I)) \text{ si et seulement si } \forall\, s \in \mathrm{Ob}\, I,$$
$$u_s : X_s \longrightarrow Y_s \text{ est dans } C(I) \text{ (resp. } TC(I)).$$

Soit de plus
$$F(I) = TC(I)_*, \qquad TF(I) = C(I)_*.$$

La condition envisagée, c'est que pour tout I *dans* Diag, $(C(I), TC(I), F(I), TF(I))$ est une structure de Quillen faible *close exacte* pour $W(I)$ ([34]).

ⓑ On dit que $(\mathcal{M}, W)$ est *quillénisable sur Diag uniformément et exactement* [à] *gauche*, si on a de plus $TC = C \cap W$, *i.e.* si (C, TC, F, TF) est exacte à gauche, donc défini par C seul, via

$$TC = C \cap W, \qquad F = (TC)_*, \qquad TF = C_* \qquad ([35])$$

On a vu au paragraphe 3 que si $\mathcal{M}$ est stable par petites $\varinjlim$ et accessible, et W stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, enfin si

[34] (C, TC, F, TF) est appelé alors une *quillénisation uniforme à gauche* de $(\mathcal{M}, W)$ sur Diag.

[35] On dit que $(C, \ldots)$, ou simplement C, définit une *quillénisation uniforme et exacte à gauche* de $(\mathcal{M}, W)$ sur Diag.

[page 58]

W admet une structure de Quillen faible (C, TC, F, TF) qui soit close et exacte à gauche – alors les conditions de la définition 1 sont satisfaites.

D'autre part, notons que la proposition 1 page 45 et ses corollaires, y inclus la proposition 3 (page 50) et ses corollaires, sont valables dès lors que les quillénisations des $(\mathcal{M}(I), W(I))$ envisagés sont définies "uniformément à gauche" par une quillénisation uniforme à gauche (pas nécessairement exacte à gauche) de $(\mathcal{M}, W)$ sur Diag.

La quillénisation uniforme gauche nous servira à établir l'existence des images directes homotopiques u_*, pour certains u. La quillénisation uniforme droite, dualement, aura comme conséquence principale l'existence des $u_!$ homotopiques pour certains $u : I' \longrightarrow I$ dans Diag.

Je vais résumer ce que j'ai pu établir jusqu'à présent dans ce sens, dans le

[page 59]

Théorème-scholie : *Soit* (C, TC, F, TF) *une quillénisation uniforme gauche de* W *sur* Diag $\subset$ Cat.

1) *Soit* $u : I' \longrightarrow I$ *une flèche dans* Diag. *On suppose* Diag *accordé à* $\mathcal{M}$ *de façon que pour* u*, flèche dans* Diag*, les* $\varprojlim$ *dans* $\mathcal{M}$ *(de type* I'/i*) requises pour assurer l'existence de*

$$u_* : \mathcal{M}(I') \longrightarrow \mathcal{M}(I)$$

existent dans $\mathcal{M}$. *(C'est O.K. si* I, I' [sont] *finies,* $\mathcal{M}$ *étant supposée stable par* $\varinjlim$ *finies de toutes façons.) On sait* (prop. 1, page 45) *que* u_* *induit*

$$(*) \qquad u_*^{\mathrm{f}} : \mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}} \longrightarrow \mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}}.$$

On dit que u *est* admissible (à gauche) pour la quillénisation uniforme gauche donnée de W sur Diag, *si* u_*^{f} *est compatible avec les localiseurs* $W(I')_{\mathrm{f}}$, $W(I)_{\mathrm{f}}$, i.e. *si* $f' : X' \longrightarrow Y'$ *dans* $\mathcal{M}(I')$, X', Y' *fibrants,* $f' \in W(I')$ *implique* $u_*(f') \in W(I)$. *On dit que* Z *dans* Diag *est* admissible (pour la quillénisation uniforme gauche donnée de W sur Diag ...) *si le foncteur* $Z \longrightarrow e$ *est admissible. Ceci posé :*

   a) *Pour que* u *soit admissible, il suffit que les* I'/s *pour* $s \in \mathrm{Ob}\, I$*, le soient. NB il y a une réciproque, quand* I *est ordonné, donc les* $I'/s \longrightarrow I'$ *des immersions ouvertes.*

[page 60]

   b) *Tout ensemble ordonné fini est admissible. Plus généralement (sauf erreur) tout ensemble ordonné* I *tel que l'espace topologique associé à* I° *soit noethérien (*i.e. *toute suite croissante d'ouverts de* I° *est stationnaire, ou encore toute suite croissante de fermées de* I *est stationnaire), et si de plus toute partie fermée irréductible de* I° *admet un point générique,* i.e. I° *est (non seulement un espace noethérien, mais aussi) un espace topologique* sobre. *(Pour* I*, cela signifie que toute partie ouverte filtrante croissante de* I *admet un plus grand élément.)*

c) *En particulier, si I', I sont des ensembles ordonnés finis, alors tout $u : I' \longrightarrow I$ est admissible. Il en est de même, plus généralement, si I, I' sont des ensembles ordonnés et I'° est un espace noethérien sobre.*

2) *Supposons $u : I' \longrightarrow I$ admissible. Considérons*

$$u_*^W \ : \ \underbrace{\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}} W(I')_{\mathrm{f}}^{-1}}_{\simeq \mathrm{HO}_W(I')} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}} W(I)_{\mathrm{f}}^{-1}}_{\mathrm{HO}_W(I)},$$

induit par u_*. Ce foncteur est adjoint à droite de $u_W^* : \mathrm{HO}_W(I) \longrightarrow \mathrm{HO}_W(I')$.

[page 61]

De plus, l'homomorphisme canonique (pour $s \in \mathrm{Ob}\, I$, $X' \in \mathrm{Ob}\, \mathrm{HO}_W(I')$)

$$u_*^W(X')(s) \ \simeq \ p_{s\,*}(X'|I'/s) \ \stackrel{\text{déf}}{=} \ \underset{\overleftarrow{I'/s}}{\mathrm{holim}}_W (X'|I'/s)$$

(où $p_s : I'/s \longrightarrow e$) est un isomorphisme, si on suppose que les I'/s sont admissibles (on dira alors que u est strictement *admissible).*

Corollaire. *Sur le domaine formé des ensembles ordonnés finis, le prédérivateur* HO_W *satisfait (en plus des axiomes* **Der** 1, **Der** 2*) aux axiomes* **Der** 4 *et* **Der** 5 *(existence des images directes u_*, adjoints à droite des foncteurs u^*, et calcul standard des fibres d'une image directe).*

DÉMONSTRATION du théorème-scholie.

1°) *a*) est immédiat. Pour *b*), on procède par récurrence sur le cardinal n de l'ensemble ordonné fini I, les cas $n \in \{0, 1\}$ étant triviaux. Supposons donc $n \geq 2$, et le théorème prouvé pour les $n' < n$. Je distingue deux cas : si I admet un plus grand élément a, alors, désignant par $\alpha : e \longrightarrow I$ le foncteur de valeur a, par $p : I \longrightarrow e$ la projection, on sait que l'on a

$$p_* \ \simeq \ \alpha^*, \qquad i.e. \ \underset{\overleftarrow{I}}{\lim}\, X_i \simeq X_a,$$

d'où le fait que sur $\mathcal{M}(I)$ tout entier

[page 62]

(pas seulement sur $\mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}}$), p_* est compatible aux localiseurs $W(I)$, W.

Si I n'a pas de plus grand élément, alors l'ensemble M des ses éléments maximaux est de cardinal ≥ 2, on peut donc l'écrire $M = M_1 \amalg M_2$, et on aura

$$I \ = \ I_1 \cup I_2, \qquad \text{où } I_1 = I/M_1,\ I_2 = I/M_2$$

sont deux ouverts de I, différents de I, donc de cardinaux n_1, $n_2 < n$. Considérons aussi $I_0 = I_1 \cap I_2$, c'est un ouvert de cardinal $< n$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} & I_1 \arrow[dr, dotted] & \\ I_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & I = I_1 \cup I_2 \\ & I_2 \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

correspond à une flèche

$$u \,:\, I \longrightarrow \Psi = \begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 2 \end{tikzcd} \quad ,$$

avec

$$I_1 \;=\; I/1, \qquad I_2 \;=\; I/2, \qquad I_0 \;=\; I/0.$$

L'hypothèse de récurrence et a) impliquent que u est admissible. Comme un composé de foncteurs admissibles est admissible (tautologiquement, via $(vu)_* \simeq v_*u_*$), on est réduit finalement au

[page 63]

Lemme. *La catégorie* $\Psi = \begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 2 \end{tikzcd}$ *est admissible.*

Ceci va résulter du

Corollaire ([36]). *Soit* $X_\bullet = \begin{tikzcd}[row sep=small] & X_1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] \\ X_0 & \\ & X_2 \arrow[ul, "\alpha_2"] \end{tikzcd}$ *dans* $\mathcal{M}(\Psi)$*. Pour que* $X_\bullet$ *soit fibrant, il faut et il suffit que l'on ait*

a) X_0*,* X_1*,* X_2 *sont fibrants, et*

b) α_1*,* $\alpha_2 \in F$*.*

La nécessité de a) est cas particulier du corollaire 2, page 48, celle de b) est cas particulier du corollaire 1 page 50. Pour la suffisance (dont on n'aura pas besoin pour le théorème), on sait montrer que dans le diagramme commutatif à traits pleins

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[dr, "TC"] \arrow[dd] & A_0 \arrow[d, dash] \arrow[dr, "TC"] & A_2 \arrow[l] \arrow[d, dash] \arrow[dr, "TC"] & \\ & B_1 \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "h_1"'] \arrow[d] & B_0 \arrow[dl, dotted, "h_0"'] \arrow[d] & B_2 \arrow[l] \arrow[dl, dotted, "h_2"'] \\ X_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & X_0 & X_2 \arrow[l, "\alpha_2"] & \end{tikzcd} ,$$

avec trois flèches marquées TC, on peut trouver h_1, h_0, h_2 laissant le diagramme commutatif (trois triangles et deux carrés commutatifs à respecter). Pour ceci, on commence par choisir h_0 de façon à rendre le triangle vertical médian commutatif – c'est possible car X_0 est fibrant, $A_0 \longrightarrow B_0$ dans TC.

[36]**NB** Il y a une variante évidente, caractérisant les X tels que $X \longrightarrow e$ soit dans $TF(\Psi)$ comme ceux pour lesquels X_0, X_1, X_2 sont fibrants *triviaux,* et α_1, $\alpha_2 \in TF$.

`[page 64]`

Ensuite, on voit séparément pour h_1, h_2, qu'on peut les trouver en satisfaisant chacune aux deux contraintes de commutativité (1 triangle vertical et un carré penché). Pour h_1 p. ex. l'existence se voit sur le diagramme carré auxiliaire (traits pleins)

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "TC"] \arrow[d] & B_1 \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "h_1"'] \arrow[dr, dotted, "\alpha_1^B"] & \\
& & B_0 \arrow[dl, dotted, "h_0"] \\
X_1 \arrow[r, "F", "\alpha_1^X"'] & X_0 &
\end{tikzcd} .$$

NB C'est la démonstration de la proposition 3, page 50.

Le corollaire (partie "il faut") étant vu, le lemme en résulte, car on sait que si on a un homomorphisme f de carrés cartésiens X, Y

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[dl, "p_1^X"'] \arrow[dd, "f_1"' near end] & & X_3 \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dd, "f_3"] \\
X_0 \arrow[dd, "f_0"'] & & X_2 \arrow[ll, "p_2^X"' near start] \arrow[dd, "f_2" near start] & \\
& Y_1 \arrow[dl, "p_1^Y"'] & & Y_3 \arrow[ll] \arrow[dl] \\
Y_0 & & Y_2 \arrow[ll, "p_2^Y"'] &
\end{tikzcd} ,$$

avec

$$p_1^X,\ p_2^X,\ p_1^Y,\ p_2^Y \ \text{ fibrants } \texttt{[appartenant à } F\texttt{]} \text{ (il suffit même } p_1^X \text{ et } p_1^Y \text{ fibrant),}$$

et

$$f_0,\ f_1,\ f_2\ \in\ W,$$

alors $f_3 \in W$. (Ça a été vu dans la théorie des produits fibrés W-homotopiques `[voir chapitre XII, p. 253]`, et la vérification

`[page 65]`

directe est immédiate.) De l'hypothèse initiale pertinente que $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & X_1 \arrow[dl] \\ X_0 & \\ & X_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$ et $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & Y_1 \arrow[dl] \\ Y_0 & \\ & Y_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$ sont fibrants, on n'a besoin d'utiliser qu'un petit bout, p. ex. que p_1^X et p_1^Y sont fibrants, qui assure que les deux carrés X, Y sont W-homotopiquement cartésiens, ce qui suffit à impliquer alors que $f_0,\ f_1,\ f_2\ \in\ W \Longrightarrow f_3 \in W$.

Je vais essayer de généraliser ce raisonnement, pour traiter le cas d'un ensemble ordonné I qui peut être infini, mais tel que I° soit noethérien et sobre, donc toute suite croissante de parties fermées de I, et toute suite décroissante de parties ouvertes, est stationnaire, et de plus toute partie ouverte filtrante croissante a un plus grand élément.

On veut prouver que I est admissible, et par "récurrence noethérienne" on est ramené à prouver ceci : $(*)$ Si I est tel que pour tout ouvert $I' \subset I$, avec $I' \neq I$, I' soit admissible, alors I aussi.

$(*)$ admis, prouvons que $I = I_0$ est admissible.

[page 66]

S'il ne l'était, par $(*)$ il existerait $I_1 \subset I_0$, $I_1 \neq I_0$, tel que I_1 non admissible. De même, il y aurait $I_2 \subset I_1$, $I_2 \neq I_1$, non admissible etc. – on aurait construit une suite strictement décroissante d'ouverts I_n de I, contrairement au caractère noethérien de I°.

Prouvons $(*)$, et distinguons encore deux cas.

a) I° est irréductible, donc admet un point générique, *i.e.* un plus petit élément, *i.e.* I admet un plus grand élément. Ce cas a déjà été traité tantôt – toute catégorie avec objet final est admissible.

b) I° est réductible, donc réunion de deux fermés I_1°, I_2° distincts de I°, donc I est réunion de deux ouverts I_1, I_2 distincts de I. Alors par l'hypothèse dans $(*)$, I_1, I_2 et $I_0 = I_1 \cap I_2$ sont admissibles. On termine alors comme tantôt, étant ramené à l'admissibilité

de $\Psi = $
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 1 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 2 \end{tikzcd}$$
!

[page 67]

Prouvons la partie *c*) du théorème-scholie, partie 1°). Cela résulte de *a*), une fois vu que pour $s \in I$, I'/s satisfait aux mêmes hypothèses que I'. Or I étant ordonné, I/s est une sous-catégorie ouverte de I, donc I'/s une sous-catégorie ouverte de I', dont $(I'/s)^{\circ}$ un sous-ensemble ordonné fermé de I'°. Ce dernier étant noethérien et sobre, il en est de même de tout fermé, d'où la conclusion.

Prouvons la partie 2°) du théorème-scholie. Considérons

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(I')_{\mathrm{c}} \arrow[r, hook, dotted] & \mathcal{M}(I') & \mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}} \arrow[l, hook', dotted] \arrow[d, "u_*^{\mathrm{f}}"] \\
\mathcal{M}(I)_{\mathrm{c}} \arrow[r, hook, dotted] \arrow[u, "u_{\mathrm{c}}^*"] & \mathcal{M}(I) \arrow[u, "u^*"] & \mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}} \arrow[l, hook', dotted]
\end{tikzcd}$$
,

où u^* et a fortiori u_{c}^* sont compatibles avec $W(I)$, $W(I')$, et par hypothèse u_* est compatible avec $W(I')_{\mathrm{f}}$, $W(I)_{\mathrm{f}}$. En passant aux catégories de fractions, on trouve

`[page 68]`

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(I')_{\mathrm{c}}W(I')_{\mathrm{c}}^{-1} \arrow[r, dotted, "\sim"] & \mathrm{HO}_W(I') & \mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}} \arrow[l, dotted, "\sim"'] \arrow[d, "u_*^W"] \\
\mathcal{M}(I)_{\mathrm{c}}W(I)_{\mathrm{c}}^{-1} \arrow[r, dotted, "\sim"] \arrow[u, "u_W^*"] & \mathrm{HO}_W(I) & \mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}} \arrow[l, dotted, "\sim"']
\end{tikzcd}
$$

`[plutôt` $\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}}W(I')_{\mathrm{f}}^{-1}$ `(resp.` $\mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}}W(I)_{\mathrm{f}}^{-1}$`) au lieu de` $\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}}$ `(resp.` $\mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}}$`)]` et on veut montrer que u_W^* et u_*^W sont adjoints, de façon précise trouver un isomorphisme bifonctoriel, pour F *dans* $\mathcal{M}(I)_{\mathrm{c}}$ et G' *dans* $\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}}$

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_W(u^*F, G') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_W(F, u_*G')$$

(où Hom_W désigne le Hom dans $\mathrm{HO}_W(I')$ resp. $\mathrm{HO}_W(I)$). Comme F est dans $\mathcal{M}(I)_{\mathrm{c}}$, u^*F est dans $\mathcal{M}(I')_{\mathrm{c}}$, et comme G' est dans $\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}}$, u_*G' est dans $\mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}}$. Il s'ensuit que les deux membres de $(*)$ sont des quotients des deux membres dans la bijection canonique

$$(**) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(I')}(u^*F, G') \xrightarrow[\sim]{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(I)}(F, u_*G').$$

Il faut simplement montrer que cette dernière transforme la relation d'équivalence pertinente R' du premier membre,

`[page 69]`

en celle R du second.

Je dis que l'on a de toute façon

$$R \ \leq \ \alpha(R')$$

sans hypothèse d'admissibilité sur u, *i.e.* que la bijection invese de $(**)$ donne par passage aux quotients un homomorphisme

$$(***) \qquad \mathrm{Hom}_W(u^*F, G') \longleftarrow \mathrm{Hom}_W(F, u_*G'),$$

forcément surjectif, et de plus fonctoriel en F `[,` G' `barré]`, variables dans $\mathrm{HO}_W(I)$ et $\mathrm{HO}_W(I')$ respectivement. En effet, on définit la flèche $(*$ bis$)$ `[plutôt` $(***)$`]` comme composé

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathrm{Hom}_W(F, u_*G') \arrow[r, "{\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}_{\substack{\text{car } u^* \text{ est}\\ \text{compatible avec}\\ W(I),\ W(I') \text{ sur}\\ \mathcal{M}(I) \text{ tout entier,}\\ \text{et on interprète}\\ \text{les deux membres}\\ \text{comme des Hom}\\ \text{dans } \mathcal{M}(I)W(I)^{-1}\\ \text{et } \mathcal{M}(I')W(I')^{-1}.}}}"'] & \mathrm{Hom}_W(u^*F, u^*u_*G') \arrow[d, "{\substack{\text{composition}\\ \text{avec l'homomorphisme}\\ \text{d'adjonction } u^*u_*G' \longrightarrow G'}}"] \\
 & \mathrm{Hom}_W(u^*F, G').
\end{tikzcd}
$$

Cela implique donc que le foncteur sur $\mathrm{HO}_W(I)$ $F \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{HO}_W(I')}(u^*F, G')$ est, sinon représentable, du moins quotient terme à terme du foncteur représenté par u_*G' ([37]).

[page 70]

Mais supposons maintenant que u soit admissible. Alors je vais définir la flèche en sens initial $(*)$ (p. 68) de la façon suivante : Je choisis une flèche

$$i' : u^*F \longrightarrow F' \qquad \text{avec } i' \in TC \subset C \cap W,\ F' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}}$$

(donc en fait $F' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}(I')_{\mathrm{cf}}$, car u^*F est cofibrant), et par adjonction la flèche i' correspond à

$$i : F \longrightarrow u_*F'.$$

Je considère le diagramme (commutatif!)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F', G') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda : f' \mapsto f' \circ i'"'] & \mathrm{Hom}(u_*F', u_*G') \arrow[d, "\mu : f \mapsto f \circ i"] \\
\mathrm{Hom}(u^*F, G') \arrow[r, "\text{adj.}"] & \mathrm{Hom}(F, u_*G')\ .
\end{tikzcd}$$

On note que l'on a encore F' cofibrant (car u^*F l'est et $i' \in TC \subset C$), donc $\mathrm{Hom}_W(F', G')$ est un quotient de $\mathrm{Hom}(F', G')$, et λ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_W(F', G') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_W(u^*F', G')$$

(car $i' \in TC \subset W$). Comme F', $G' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}}$ et que u_*^{f} est compatible avec $W(I')_{\mathrm{f}}$, $W(I)_{\mathrm{f}}$, il s'ensuit que la flèche horizontale α

[page 71]

est compatible avec les relations d'équivalence définies par

$$\mathrm{Hom}(F', G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{W(I')}(F', G') \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Hom}(u_*F', u_*G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{W(I)}(u_*F', u_*G')\ .$$

Et il en est de même de la flèche $\mu : f \longmapsto f \circ i$, trivialement. Donc la flèche d'adjonction $\mathrm{Hom}(u^*F, G') \longrightarrow \mathrm{Hom}(F, u_*G')$ est compatible avec les relations R, R', ce qui achève de prouver que $(**)$, page 68, induit une bijection $(*)$, page 68.

Ceci montre donc

1°) que pour un objet fixé G' dans $\mathrm{HO}_W(I')$ (qu'on peut toujours supposer, à isomorphisme près, provenir de $\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}}$), le foncteur

$$F \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{HO}_W(I')}(u_W^*F, G')$$

est représentable – *i.e.* le foncteur u_W^* admet un adjoint à gauche, et

2°) que cet adjoint à gauche se calcule comme $u_*(G')$ (quand l'argument G' est pris fibrant) – vu que l'homomorphisme $(***)$, page 69, est *fonctoriel en F*. (A posteriori il s'ensuit qu'il est aussi fonctoriel en G' ...)

[37] Mais il n'est pas clair, sans hypothèse supplémentaire sur la situation, que ce foncteur représentable puisse être choisi en dépendance fonctorielle de G', envisagé dans $\mathrm{HO}_W(I')$.

[page 72]

Le dernier énoncé dans 2° du théorème-scholie résulte du calcul de u_*^W, compte tenu que $I'/s \longrightarrow I'$ est un isomorphisme local, donc le foncteur image inverse envoie

$$\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}} \longrightarrow \mathcal{M}(I'/s)_{\mathrm{f}},$$

donc si G' est dans $\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}}$,

$$u_*(G')(s) \simeq p_{s*}(G'|I'/s)$$

est un calcul de $p_{s*}^W(G'|I'/s)$.

Cela achève la démonstration du théorème-scholie sur les images directes.

Commentaires.

1) Ce théorème me paraît loin d'être satisfaisant, c'est un pis-aller. J'avais espéré, avec les hypothèses du paragraphe 3, qu'on aurait l'existence des u_*^W pour *toute* flèche $u : I' \longrightarrow I$ dans Cat. Je doute à présent que ce soit le cas, mais n'ai pas encore réussi de faire un contre-exemple. Les cas test les plus importants pour la question d'admissibilité d'une catégorie I me paraissent les suivants :

a) I catégorie discrète infinie (disons dénombrable). La question revient ici à celle-ci : soient $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ dans W, avec X_i, Y_i fibrants, *i.e.* dans F [*i.e.* $X_i \longrightarrow e$, $Y_i \longrightarrow e$ dans F]. Alors $f = \prod f_i : \prod X_i \longrightarrow \prod Y_i$ est-il dans W ?

[page 73]

b) I catégorie

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots,$$

i.e. la catégorie ordonnée associée à l'ensemble ordonné $\mathbf{N}$, pour la relation d'ordre ordinaire $m \leq n$. Donc $\mathcal{M}(I)$ est formée des systèmes *projectifs* dans $\mathcal{M}$, indexés par $\mathbf{N}$. On prouve facilement (en procédant comme dans le corollaire du lemme p. 63) que $\mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}}$ est formée des systèmes projectifs

$$X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow X_n \xleftarrow{p_n} X_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

tels que les X_i soient dans $\mathcal{M}_{\mathrm{f}}$, et les p_n dans F. La question est donc : si $X_\bullet$, $Y_\bullet$ sont fibrants et $f_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ est telle que $f_i \in W$ pour $i \in \mathbf{N}$, alors a-t-on $\varprojlim f_i : X_\infty \longrightarrow Y_\infty$ dans W ?

Si la reponse est affirmative pour $\mathbf{N}$ (pour un W et une quillénisation donnée), elle l'est aussi pour toute catégorie discrète dénombrable, comme on le voit aussitôt. Mais je ne vois pas comment déduire même *a*) des axiomes, disons pour un triplet de Quillen clos (closed model category) tel que $\mathcal{M}$ soit de plus stable par $\varinjlim$ filtrantes, que celles-ci soient exactes, et qu'il y ait

[page 74]

un petit ensemble de générateurs dans $\mathcal{M}$ (donc $\mathcal{M}$ est accessible), que W soit stable par $\varinjlim$ filtrantes. Je devrais demander à THOMASON s'il connait un contre-exemple.

c) Les deux exemples précédents étaient des catégories ordonnées. Comme exemple typique de catégorie non-ordonnée, où je ne vois pas ce qui se passe, je signale $I = B_G$, G un groupe (donc un seul objet, avec un groupe d'automorphismes G). Aussi le cas de $\mathbf{\Delta}[1] = \{\mathbf{\Delta}_0, \mathbf{\Delta}_1\}$ (sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Delta}$) n'est pas clair pour moi.

2) On aimerait pouvoir traiter de façon duale l'existence des $u_!^W$, à défaut de mieux. Dans l'hypothèse de départ du paragraphe 4 sur $(\mathcal{M}, W)$, cela amène donc à changer de tactique. Cette fois, on devra supposer l'existence d'une quillénisation close *exacte à droite* pour W (ce qui est plus exigeant, semble-t-il, qu'une telle structure exacte à gauche, dans le cas envisagé), donc

$$TF \;=\; F \cap C,$$

[page 75]

et de plus encore C, TC tels qu'on ait

$$C \;=\; \widetilde{C_0}, \qquad TC \;=\; \widetilde{TC_0}$$

avec C_0, TC_0 petits ([38]). On posera maintenant

$$\begin{aligned} F(I) &= \{f \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}(I) \;\mid\; f_s \in F \quad \forall\, s \in \mathrm{Ob}\, I\} \\ TF(I) &= \{f \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}(I) \;\mid\; f_s \in TF \quad \forall\, s \in \mathrm{Ob}\, I\}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} C(I) &= TF(I)^* \\ TC(I) &= F(I)^* \,. \end{aligned}$$

L'espoir (que je devrai vérifier ultérieurement), c'est qu'on obtient ainsi une quillénisation uniforme à droite de W, sur Cat tout entier. Le seul problème, c'est la validité des axiomes de factorisation de $f \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}(I)$ en $f = pi$, avec $i \in TC$, $f \in F$, et aussi avec $i \in C$, $f \in TF$. J'ai bon espoir que c'est vrai – cela se réduit essentiellement à voir que $(C(I), TF(I))$ et $(TC(I), F(I))$, soit $(\Phi(I), \Psi(I))$, satisfont en plus de $\Phi(I) = \Psi(I)^*$, à $\Psi(I) = \Phi(I)_*$ (*i.e.* $\Psi(I)$ est clos à droite), et que $\Phi(I)$ est accessible (tout comme $\Phi = \Phi(e)$). Si ça marche, on aura donc l'existence

[38] On dit alors que C, TC (en tant que parties closes à droite `[plutôt à gauche]`) sont "accessibles".

`[page 76]`

de $u_!$ pour u un foncteur entre catégories ordonnées finies, et sous des conditions légèrement plus générales. (P. ex. $u : I' \longrightarrow I$ avec I ordonnée, I' ordonnée et à espace sous-jacent noethérien et sobre.) Peut-être que cette fois, l'hypothèse que W est stable par $\varinjlim$ filtrantes va quand même servir ! Ainsi, le cas des catégories discrètes, et des catégories filtrantes à gauche comme $\mathbf{N}^\circ$, ne va plus poser de problèmes à cause de cela. Il y a donc de l'espoir ! Tout ensemble ordonné qui est $\varinjlim$ filtrante de sous-ensembles ordonnés *fermés* noethériens et sobres, est alors W-admissible à droite. Mais qu'en est-il de catégories de type $\Gamma = B_G$ p. ex. ? ? ?

`[page 77]`

7 Filtrations cardinales et parties accessibles d'une grosse catégorie

Je me réfère à la théorie des foncteurs et catégories accessibles de SGA 4, I, §9 (p. 138-178). Je me donne une grosse catégorie (toujours une $\mathfrak{U}$-catégorie) E avec une *filtration cardinale* (croissante)

$$\Big(\mathrm{Filt}^\pi(E)\Big)_{\pi\geq\pi_0}, \qquad \pi_0 \text{ un cardinal infini fixé,}$$

par les sous-catégories strictement pleines $\mathrm{Filt}^\pi(E)$. On a `[SGA 4, I, 9.12]`

a) $\mathrm{Filt}^\pi(E)$ essentiellement petite, *i.e.* équivalente à une petite catégorie (*i.e.* à une catégorie appartenant à $\mathfrak{U}$).

b) E satisfait L_{π_0} (*i.e.* E est stable par $\varinjlim$ de type I, quand I est un ensemble ordonné grand devant π_0), et $\mathrm{Filt}^\pi(E)$ est stable par les limites inductives filtrantes indexées par I grand devant π_0, et tel que $\mathrm{card}\, I \leq \pi$.

c) Pour tout $\pi \geq \pi_0$, et pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, E$, on a

$$X \simeq \varinjlim_{i\in I} X_i,$$

où les X_i `[sont]` dans $\mathrm{Filt}^\pi(E)$, et où I est un ensemble ordonné grand devant π. De plus, si $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Filt}^{\pi'}(E)$, avec $\pi' > \pi$, on peut prendre I tel que $\mathrm{card}\, I \leq \pi'^\pi$ (donc si $\pi' = 2^{c'}$ avec $c' \geq \pi$, d'où $(\pi')^\pi = (2^{c'})^\pi = 2^{c'\pi} = 2^{c'} = \pi'$, on aura $\mathrm{card}\, I \leq \pi'$). (**NB** Si on admet l'hypothèse du continu généralisée, on aura toujours $\pi'^\pi = \pi'$, donc $\mathrm{card}\, I \leq \pi'$.) ([39])

[39]NB *b*) et *c*) impliquent que $E = \bigcup_{\pi\geq\pi_0} \mathrm{Filt}^\pi(E)$.

`[page 78 barrée]`

`[page 79]`

Considérons la représentation de c),

$$X \;=\; \varinjlim_{I} X_i \qquad \begin{cases} X_i \in \mathrm{Filt}^{\pi}, \\ I \text{ grand devant } \pi. \end{cases}$$

Soit

$$\tilde{I} \;=\; \{I' \subset I \mid \operatorname{card} I' \leq \pi, \;\; I' \text{ grand devant } \pi_0\},$$

muni de la relation d'ordre d'inclusion. Pour

$$I' \;\in\; \tilde{I}, \qquad \text{soit} \;\; X_{I'} = \varinjlim_{I'} X_i \;,$$

cette limite existe par L_{π_0} (hypothèse b), elle est dans Filt^{π} par b), donc on a un système inductif

$$(X_{I'})_{I' \in \tilde{I}}, \qquad X_{I'} \in \mathrm{Filt}^{\pi},$$

avec

$$\operatorname{card} \tilde{I} \;\leq\; (\operatorname{card} I)^{\pi},$$

et si $X \in \mathrm{Filt}^{\pi'}$ $(\pi' > \pi)$, prenant

$$\operatorname{card} I \;\leq\; \pi'^{\pi},$$

on aura $\operatorname{card} \tilde{I} \leq (\pi'^{\pi})^{\pi} = \pi'^{\pi^2} = \pi'^{\pi}$, donc

$$\operatorname{card} \tilde{I} \;\leq\; \pi'^{\pi}.$$

Je dis que $\tilde{I}$ est lui aussi *grand devant* π, tout comme I. En effet,

`[page 80]`

soit

$$(I_\alpha)_{\alpha \in A}, \qquad I_\alpha \in \tilde{I}, \qquad \operatorname{card} A \;\leq\; \pi,$$

prouvons qu'il existe $I' \in \tilde{I}$ qui majore les I_α, *i.e.* qui contient $I'_0 = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$. On aura $\operatorname{card} I'_0 \leq \pi^2 = \pi$ (car $\operatorname{card} A \leq \pi$ et $\operatorname{card} I_\alpha \leq \pi$ pour tout α), et il suffit de voir ceci :

`[En fait, l'assertion est évidente : comme` $\operatorname{card} I'_0 \leq \pi$ `, et comme` I `est grand devant` π `,` I'_0 `admet un majorant` i'_0 `dans` I `, et on peut prendre` $I' = I'_0 \cup \{i'_0\}$ `.]`

Lemme 1 : *Soient π_0, π deux cardinaux, avec $\pi \geq \pi_0$, I un ensemble ordonné grand devant π, et I'_0 une partie de I de cardinal $\leq \pi$. Alors il existe une partie I' de I satisfaisant les conditions :* ([40])

a) $I' \supset I'_0$.

b) $\operatorname{card} I' \leq \pi$.

[40]Pourvu qu'on suppose $\pi > \pi_0$, et de plus $\pi^{\pi_0} = \pi$ (p. ex. $\pi = 2^c$ avec $c \geq \pi_0$).

c) I' *grand devant* π_0.

[Le lemme tel qu'il est énoncé est évident pour les mêmes raisons que ci-dessus (même sans l'hypothèse de la note de bas de page). La démonstration qui suit prouve en fait un résultat plus fin :

LEMME $1'$: *Soient* π_0, π *deux cardinaux, avec* $\pi_0 < \pi$ *et* $\pi^{\pi_0} = \pi$, I *un ensemble ordonné grand devant* π_0, *et* I'_0 *une partie de* I *de cardinal* $\leq \pi$. *Alors il existe une partie* I' *de* I *satisfaisant les conditions :*

a) $I' \supset I'_0$.

b) $\operatorname{card} I' \leq \pi$.

c) I' *grand devant* π_0.]

On va essayer de construire I' par récurrence transfinie, en définissant les $I'_\alpha \subset I$ ainsi :

$$\begin{aligned} I'_0 &= I'_0\,, \\ I'_\alpha &= \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} I'_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite,} \\ I'_{\alpha+1} &= \begin{cases} \text{déduit de } I'_\alpha \text{ ainsi : pour toute partie } J \text{ de } I'_\alpha \text{ telle que} \\ \operatorname{card} J \leq \pi_0, \text{ qui n'est pas majorée dans } I'_\alpha, \text{ on choisit} \\ \text{un majorant } i_J \text{ dans } I \text{ ([qui] existe, car } I \text{ [est] grand} \\ \text{devant } \pi, \text{ donc devant } \pi_0) \text{ et } I'_{\alpha+1} \text{ s'obtient en adjoignant} \\ \text{ces } i_J \text{ à } I'_\alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

[page 81]

Soit alors α_0 le premier ordinal qui soit de cardinal $> \pi_0$, et considérons

$$I' = I'_{\alpha_0} = \bigcup_{\substack{\alpha < \alpha_0 \\ i.e.\ \operatorname{card}\alpha \leq \pi_0}} I'_\alpha.$$

Alors I' contient I'_0, il est grand devant π_0, mais quel est son cardinal ? Prouvons par récurrence transfinie que

$$\operatorname{card} I'_\alpha \leq \pi \qquad \text{si } \alpha < \alpha_0,\ i.e.\ \operatorname{card}\alpha \leq \pi_0.$$

C'est O.K. pour $\alpha = 0$ par hypothèse sur I'_0. Si c'est vrai pour I'_α, est-ce vrai pour $I'_{\alpha+1}$? On adjoint à I'_α un ensemble d'éléments i_J qui est de cardinal $\leq \operatorname{card} \mathfrak{P}_{\leq \pi_0}(I'_\alpha)$, donc de cardinal $\leq \operatorname{card}(I'_\alpha)^{\pi_0} \leq \pi^{\pi_0}$, et si on suppose

$$\pi^{\pi_0} = \pi,$$

on gagne. Supposons enfin que α soit un ordinal limite (de cardinal $\leq \pi_0$). Donc on a

$$I'_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} I'_\beta,$$

donc

[page 82]

$$\operatorname{card} I'_\alpha \ \leq \ \underbrace{(\operatorname{card}\alpha)\pi}_{\leq \pi\pi = \pi^2 = \pi} \qquad \text{puisque les } \operatorname{card} I'_\beta \leq \pi,$$

on gagne encore.

On trouve enfin, par le même argument,

$$\operatorname{card} I'_{\alpha_0} \ \leq \ \underbrace{(\operatorname{card}\alpha_0)\pi \leq \pi^2}_{\substack{\text{si } \operatorname{card}\alpha_0 \leq \pi, \\ i.e. \text{ si } \pi_0 < \pi}} = \pi,$$

donc on gagne encore.

Ainsi, on a trouvé un deuxième système inductif

$$(X_{\tilde{\imath}})_{\tilde{\imath}\in\tilde{I}}$$

du même type que le système initial, ayant comme limite inductive X (qu'il ait même limite inductive est immédiat). Mais qu'a-t-on gagné ? Ceci : dans $\tilde{I}$ toute partie de cardinal $\leq \pi$ et grande devant π_0 est non seulement *majorée* dans $\tilde{I}$, mais même y admet une borne supérieure. Cela résulte du

[page 83]

Lemme 2 : *Soit I grand devant $\pi > \pi_0$, avec $\pi^{\pi_0} = \pi$* `[il suffit` $\pi \geq \pi_0$`]` *(cf. lemme 1). Soit $(I'_\alpha)_{\alpha\in A}$ un ensemble de parties de I qui sont dans $\tilde{I}$,* i.e.

a) *de cardinal $\leq \pi$, et*

b) *grandes devant π_0,*

et supposons que $\operatorname{card} A \leq \pi$ *et que A, ordonné par inclusion, soit grand devant π_0. Alors $I' = \bigcup_{\alpha\in A} I'_\alpha$ est encore dans $\tilde{I}$,* i.e. *I' est de cardinal $\leq \pi$ (car de cardinal $\leq \pi^2 = \pi$), et de plus, grande devant π_0.* (Vérification immédiate.)

Ainsi, on a prouvé ceci :

Proposition 1. *Soit E* `[une]` *grosse catégorie, avec filtration cardinale* $(\mathrm{Filt}^\pi)_{\pi\geq\pi_0}$. *Soit π un cardinal avec*

$$\pi > \pi_0, \qquad \pi^{\pi_0} = \pi \qquad (p.\ ex.\ \pi = 2^c,\ avec\ c \geq \pi_0) \quad [\pi \geq \pi_0 \ \texttt{suffit}].$$

Alors pour tout X dans E, on peut trouver un système inductif $(X_i)_{i\in I}$, de limite X, avec

a) $$\begin{cases} X_i \in \mathrm{Filt}^\pi \ \ \textit{pour tout } i \in I, \\ I \ \textit{grand devant } \pi, \end{cases}$$

satisfaisant aux conditions supplémentaires suivantes :

b) *Toute partie J de I de cardinal $\leq \pi$, et grande devant π_0, admet une borne supérieure i_J dans I.*

c) *On a, sous ces conditions*

[page 84]

$$X_{i_J} \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i\in J} X_i.$$

De plus, si $X \in \mathrm{Filt}^{\pi'}$ *avec* $\pi' > \pi$, *on peut prendre* I *de cardinal* $\le \pi'^{\pi}$ *(donc de cardinal* $\le \pi'$ *si* $\pi'^{\pi} = \pi'$, *p. ex. si* $\pi' = 2^{c'}$, *avec* $c' \ge \pi$*).*

Définition. On appelle un système inductif $(X_i)_{i\in I}$, satisfaisant les conditions *a*), *b*), *c*) ci-dessus, un *système inductif bien adapté* (à la filtration cardinale donnée, pour les cardinaux π_0, π donnés), et la représentation correspondante

$$X \xleftarrow{\sim} \varinjlim X_i$$

une *représentation bien adaptée* de X en termes d'objets de Filt^{π}.

NB Quand E est stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, la situation se simplifie considérablement. On peut alors prendre

$$\tilde{I} \;=\; \{I' \subset I \mid \operatorname{card} I' \le \pi,\ I' \text{ filtrant}\}$$

(sans s'encombrer de la condition I' grand devant π_0) et définir encore le système inductif $(X_{I'})_{I'\in\tilde{I}}$ par

$$X_{I'} \;=\; \varinjlim_{i\in I'} X_i \;.$$

On a encore

[page 85]

$$\operatorname{card}\tilde{I} \;\le\; (\operatorname{card} I)^{\pi} \;\le\; \pi'^{\pi} \qquad \text{si } \operatorname{card} I \le \pi'^{\pi}$$

(notamment, si $X \in \mathrm{Filt}^{\pi'}$, et qu'on prenne I comme indiqué dans la condition *c* des filtrations cardinales). De plus, cette fois, le fait que $\tilde{I}$ soit grand devant π est trivial, on a même mieux, à part que I soit filtrante :

(∗) *Toute* partie $(I'_\alpha)_{\alpha\in A}$ de $\tilde{I}$ filtrante et de cardinal $\le \pi$ admet une borne supérieure $\tilde{\imath}_A$,

savoir la réunion (qui est bien filtrante). De plus, le système inductif $(X_{\tilde{\imath}})_{\tilde{\imath}\in\tilde{I}}$ a la propriété plus forte que

$$X_{\tilde{\imath}_A} \xleftarrow{\sim} \varprojlim_{\tilde{\imath}\in A} X_{\tilde{\imath}} \;.$$

Ainsi on a la

Proposition 1 bis. *Supposons* E *stable par petites* $\varinjlim$ *filtrantes, et* Filt^{π} *stable par celles-ci, où* $\pi \ge \pi_0$ *est donné. Alors pour tout* X *dans* E, *on peut trouver un système inductif* $(X_i)_{i\in I}$ *de limite inductive* X, *avec*

a) $X_i \in \mathrm{Filt}^{\pi}$ *pour tout* $i \in I$, I *ensemble ordonné grand devant* π.

b) *Toute partie* J *de* I *filtrante de cardinal* $\le \pi$ *admet une borne supérieure* i_J *dans* I.

c) *Sous ces conditions*

[page 86]

$$X_{i_J} \;=\; \varinjlim_{i\in J} X_i \,.$$

De tels systèmes inductifs seront dits *"parfaitement adaptés"* (à la filtration cardinale donnée, pour le cardinal π donné – π_0 n'y figure plus, si ce n'est comme début de la filtration cardinale sans plus).

Comme pratiquement, on aura à manier surtout des E stables par petites $\varinjlim$ filtrantes, et des filtrations cardinales stables en conséquence (renforcement de la condition b) des filtrations cardinales), c'est le cas, et la notion de *représentation parfaitement adaptée* de X comme $\varinjlim_I X_i$ ($X_i \in \mathrm{Filt}^\pi$), que je mettrai en avant. Le cas "général", où on suppose seulement [que] E satisfait L_{π_0}, est plus alambiqué et se traite moins joliment ([41]).

Définition 2. Soit E munie d'une filtration cardinale stricte $(\underline{\mathrm{Filt}}^\pi)_{\pi\geq\pi_0}$. Soit M une partie de $\mathrm{Ob}\,E$, $\underline{M}$ la sous-catégorie pleine de E qu'elle définit, et soit π un cardinal $\geq \pi_0$. On dit que M est *π-accessible,* où que $\underline{M}$ est *π-accessible,*

[page 87]

si les conditions suivantes sont satisfaites. Pour tout système inductif

$$(X_i)_{i\in I}$$

parfaitement adapté à la filtration cardinale pour π (donc I ensemble ordonné filtrant tel que toute partie filtrante J de cardinal $\leq \pi$ ait une borne supérieure i_J, et $X_{i_J} \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{j\in J} X_j$) ; soit I_M l'ensemble des $i \in I$ tels que $X_i \in M$. Ceci posé, on veut ceci : pour que X ($= \varinjlim X_i$) soit dans M, il faut et il suffit que I_M soit cofinal dans I (de sorte que X apparaît comme $\varinjlim$ filtrante, avec ensemble d'indices I_M grand devant π, d'éléments de $M \cap \underline{\mathrm{Filt}}^\pi \overset{\text{déf}}{=} M^\pi$).

[page 88]

J'ai envie de reprendre la définition de la π-accessibilité de M, pour une filtration cardinale donnée, à coups de conditions équivalentes. Pour tout système inductif $(X_i)_{i\in I}$ dans M [plutôt dans E], je garde la notation

$$I_M \;=\; \{i\in I \mid X_i \in M\}.$$

Je pose, pour tout cardinal $\pi \geq \pi_0$,

$$M^\pi \;=\; M \cap \mathrm{Filt}^\pi.$$

a_π M est l'ensemble des objets de la forme

$$\varinjlim_{i\in I} X_i \;,$$

où les X_i sont dans M^π, et I est grand devant π.

[41] On parlera de filtration cardinale *stricte,* si les $\underline{\mathrm{Filt}}^\pi$ sont stables par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leq \pi$ (et que ces limites filtrantes petites existent dans E).

(b_π) Soit $(X_i)_{i\in I}$ un système inductif dans M `[plutôt dans` E`]` parfaitement adapté à la filtration cardinale pour π, *i.e.* I filtrante et toute partie filtrante J de I de cardinal $\leq \pi$ admet une borne supérieure i_J, et $X_{i_J} \xleftarrow{\sim} \varinjlim_J X_i$, et enfin $X_i \in \mathrm{Filt}^\pi$ pour tout $i \in I$. Soit $X = \varinjlim X_i$. Pour que l'on ait $X \in M$, il faut et il suffit que I_M soit cofinal dans I.

(c_π) $\underline{M}^\pi = \underline{M} \cap \underline{\mathrm{Filt}}^\pi$ est une sous-catégorie de $\underline{M}$ génératrice par épimorphismes stricts, $\underline{M}$ est stable par $\varinjlim$ grandes devant π, enfin pour tout $X \in M$, $\underline{M}^\pi/X$ est une catégorie filtrante.

`[page 89]`

Je présume que ces conditions sont équivalentes.

$b_\pi \Longrightarrow a_\pi$. On suppose b) vérifié, on veut prouver a). D'abord que tout $X \in M$ est de la forme dite $\varinjlim_I X_i$, avec les $X_i \in M^\pi$ et I grand devant π. Par `[la]` proposition 1, on sait qu'on a une présentation parfaite adaptée pour π, $X = \varinjlim_{i\in I} X_i$. Par b) "il faut", la partie I_M de I est cofinale dans I, donc comme I est grand devant π, I_M aussi, et on aura (posant $J = I_M$)

$$X = \varinjlim_{i\in J} X_i, \qquad X_i \in M^\pi, \quad J \text{ grand devant } \pi,$$

O.K. Inversement, prouvons que si X se met sous la forme dite dans a), il est dans M. Cela va résulter du

Lemme 1 : *Si la condition* b) (*ou* a)) *est satisfaite, M est stable par limites inductives grandes devant π.*

Il faut prouver que si

`[page 90]`

$$X = \varinjlim_{i\in I} X_i\ ,$$

avec I grand devant π, les X_i dans M, alors $X \in M$. La condition b) "il suffit" l'assure quand on suppose de plus les X_i dans Filt^π (donc dans M^π), de sorte que l'on aura $I_M = I$, donc I_M cofinal, donc $X \in M$ ([42]). Si on ne suppose pas les X_i dans Filt^π, il faut travailler un peu plus.

Passer tout de suite à la partie de la démonstration ci-dessous, page 96, qui prouve $b) \Longrightarrow a)$. Le reste de la démonstration va prouver le

Lemme 2. *Si tout élément de Filt$^\pi$ est π-accessible, alors* b_π) *(et même* a_π*) implique que M est stable par $\varinjlim$ grandes devant π.*

[42] Pas tout à fait – on y suppose plus, sur le système inductif. On ne peut se dispenser, même dans le cas $X_i \in M^\pi\ \forall\, i \in I$, faire le raisonnement des pages suivantes.

`[page 91]`

Soit

$$\mathcal{C} = \underline{M}^\pi/\mathcal{X}$$

la catégorie suivante. Ses objets sont les triples

$$(Z,i,\alpha) \quad \text{tels que} \quad Z \in M^\pi,\ i \in I,\ \alpha : Z \longrightarrow X_i\ ,$$

les flèches

$$(Z,i,\alpha) \longrightarrow (Z',i',\alpha')$$

sont les couples (u,λ) avec

$$u : Z \longrightarrow Z', \qquad \lambda : i \longrightarrow i', \qquad (i.e. \text{ on a } i \leq i' \text{ et } \lambda \text{ est l'unique flèche de } i \text{ dans } i'),$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & X_i \arrow[d, "\text{transition } \lambda_{i',i}"] \\ Z' \arrow[r, "\alpha'"] & X_{i'} \end{tikzcd}$$

commute. On peut donc définir $\mathcal{C}$ comme le produit fibré dans le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[r, "\text{cofibré}"] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "\mathcal{Z}"'] & I \arrow[d, "\mathcal{X} : X \mapsto X_i"] \\ \underline{M}^\pi & \underline{M}^\pi/E \arrow[l, dotted, "\text{source}"'] \arrow[r, "\text{but}", "\text{cofibré}"'] & E. \end{tikzcd}$$

La fibre $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{C}$ en $i \in I$ est Filt^π/X_i `[plutôt` M^π/X_i`]`. On a, comme $b) \Longrightarrow$ première moitié de $a)$, que $\underline{M}^\pi$ est un

`[page 92]`

système de générateurs stricts de $\underline{M}$ `[cela n'est pas clair sans autres hypothèses sur` $\underline{M}$`]`, et $X_i \in \mathrm{Ob}\,\underline{M}$ par hypothèse,

$$X_i = \varinjlim_{Z \in \mathrm{Ob}\,\underline{M}^\pi/X_i} Z = \varinjlim_{\mathcal{C}_i} \mathcal{Z}|\mathcal{C}_i,$$

donc le système inductif donné $(X_i)_{i\in I}$ sur I à valeurs dans X, se déduit du système inductif (non ordonné en général) sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans $\underline{M}^\pi$, en "intégrant sur les fibres" de $\mathcal{C} \longrightarrow I$. D'ailleurs, comme $\underline{M}^\pi/E \longrightarrow E$ est cofibrée, donc propre, il en est de même de $\mathcal{C} \longrightarrow I$, donc les $\varinjlim$ de $\mathcal{Z}$ sur les fibres $\mathcal{C}_i$ $(= \underline{M}^\pi/X_i)$ forment bien un foncteur covariant $I \longrightarrow E$, dont la limite inductive est celle de $\mathcal{Z}$ ([43]).

[43] **NB** Si on admet la validité de $a)$, alors il en résulte déjà que $\varinjlim_{i\in I} X_i \simeq \varinjlim_{\alpha\in C} Z_\alpha$ est dans M. (Stabilité de M par $\varinjlim$ grandes devant π).

[page 93]

Soit, pour tout $i \in I$, $\tilde{\mathcal{C}}_i$ l'ensemble ordonné

$$\tilde{\mathcal{C}}_i = \{\text{sous-catégories } \mathcal{C}'_i \text{ de } \mathcal{C}_i = \underline{M}^\pi/X_i \mid \operatorname{card} \mathcal{Z}(\mathcal{C}'_i) \leq \pi,\ \ \mathcal{C}'_i \text{ filtrante}\}.$$

J'admets pour l'instant le

Lemme (44). *Pour tout $X \in M$, la catégorie $\underline{M}^\pi/X$ est filtrante. (Sous l'hypothèse* b)*, ou que tout objet de M est de la forme dite dans* a)*.)*

Il en résulte, comme $X_i \in M$, que $\mathcal{C}_i$ est filtrante, donc la réunion des $\mathcal{C}'_i \in \tilde{\mathcal{C}}_i$ est $\mathcal{C}_i$; l'ensemble ordonné $\tilde{\mathcal{C}}_i$ est filtrant, et toute partie $(\mathcal{C}'_{i_\alpha})_{\alpha\in A}$ filtrante et de cardinal $\leq \pi$ de $\tilde{\mathcal{C}}_i$ y admet une borne supérieure $\mathcal{C}'_{i_A}$, savoir la réunion des $\mathcal{C}'_{i_\alpha}$. $\tilde{\mathcal{C}}_i$ est donc un ensemble ordonné π-adapté.

On peut considérer les ensembles ordonnés $\tilde{\mathcal{C}}_i$, pour $i \in I$ variable, comme les fibres d'une application croissante d'ensembles ordonnés

$$p\ :\ \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C},$$

en écrivant

$$\begin{cases} (\mathcal{C}'_i \subset \mathcal{C}_i)\ \leq\ (\mathcal{C}'_j \subset \mathcal{C}_j) \\ \text{si et seulement si } i \leq j, \\ \text{et le foncteur canonique de transition } \mathcal{C}_i \longrightarrow \mathcal{C}_j \text{ applique } \mathcal{C}'_i \text{ dans } \mathcal{C}'_j. \end{cases}$$

On voit donc que $\tilde{\mathcal{C}}$ est lui aussi filtrant et grand devant π.

[page 94]

On définit un système inductif sur $\tilde{\mathcal{C}}$, à valeurs dans $\underline{\mathrm{Filt}}^\pi$, en posant

$$Z_{\mathcal{C}'_i} = \varinjlim_{\alpha \in \mathcal{C}'_i\ (\subset \mathcal{C}_i = \underline{M}^\pi/X_i)} Z_\alpha$$

(où un $\alpha \in \mathcal{C}_i$ est formé, je le rappelle, de $Z_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} X_i$, avec $Z_\alpha \in M^\pi \subset \underline{\mathrm{Filt}}^\pi$). Ces $Z_{\mathcal{C}'_i}$ ne sont plus forcément dans M^π, mais seulement dans Filt^π. (Alors à quoi ça a servi de définir les $\mathcal{C}_i$ eux-mêmes comme $\underline{M}^\pi/X_i$, au lieu de $\underline{\mathrm{Filt}}^\pi/X_i$?)

Le système inductif

$$(Z_{\mathcal{C}'_i})_{\mathcal{C}'_i \in \tilde{\mathcal{C}}_i}$$

est parfaitement bien adapté à la filtration cardinale pour le cardinal π, et il est immédiat que sa $\varinjlim$ est isomorphe à $\varinjlim_{\alpha \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_i = \underline{M}^\pi/X_i} Z_\alpha = X_i \in M$. Donc par b), l'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}_M$ des $\mathcal{C}'_i \in \tilde{\mathcal{C}}_i$ tels que $Z_{\mathcal{C}'_i} \in M$ (donc $Z_{\mathcal{C}'_i} \in M^\pi$) est cofinal dans $\tilde{\mathcal{C}}_i$. Il s'ensuit donc que l'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}_M$ est lui aussi cofinal dans $\tilde{\mathcal{C}}$.

44 Utilise l'hypothèse tacite que les éléments de Filt^π sont π-accessibles.

[page 95]

On vérifie aussi immédiatement que

$$\varinjlim_{\alpha \in \tilde{\mathcal{C}}} Z_\alpha \;=\; \varinjlim X_i \;=\; X,$$

donc, $\tilde{\mathcal{C}}_M$ étant cofinal,

$$\varinjlim_{\alpha \in \tilde{\mathcal{C}}_M} Z_\alpha \;=\; X.$$

Au total, on est arrivé à représenter X sous la forme

$$X \;=\; \varinjlim_{\alpha \in A} X_\alpha,$$

où cette fois les X_α sont *dans* M^π (pas seulement dans M), et A est grand devant π. Mais on ne sait pas que toute partie filtrante B de cardinal $\leq \pi$ de A admet une borne supérieure α_B dans A, et encore moins que $X_{\alpha_B} = \varinjlim_{\alpha \in B} X_\alpha$ ([45]). Donc on ne peut encore appliquer directement b). S'il ne s'agissait que de prouver la deuxième moitié de a), où on suppose déjà les $X_i \in M^\pi$ et I grand devant π, on n'a rien gagné du tout par nos labeurs !

[page 96]

Mais revenons à ce cas

$$X \;=\; \varinjlim X_i \;\left|\; \begin{array}{l} X_i \in M^\pi \\ I \text{ grand devant } \pi, \end{array}\right.$$

et introduisons à nouveau

$$\tilde{I} \;=\; \{I' \subset I \mid I' \text{ filtrant, de cardinal} \leq \pi\},$$

donc cette fois $\tilde{I}$ est bien adapté à π (filtrant, et toute partie filtrante de cardinal $\leq \pi$ a une borne supérieure), et si on pose

$$X_{\tilde{\imath}} \;=\; \varinjlim_{i \in I'_i} X_i,$$

on voit que le système inductif

$$(X_{\tilde{\imath}})_{\tilde{\imath} \in \tilde{I}}$$

est parfaitement adapté à π et la filtration cardinale. De plus, je dis que l'ensemble $\tilde{I}_M$ est *cofinal* dans $\tilde{I}$. En effet, $\tilde{I}_M$ contient le sous-ensemble $\tilde{I}_0$ formé des $I' \in \tilde{I}$ qui ont un plus grand élément – et $\tilde{I}_0$ est bien cofinal ! Maintenant, on peut appliquer

[45] Si on suppose (a_π), cet argument prouve du moins que M est stable par $\varinjlim$ grandes devant π.

[page 97]

le "il suffit" dans b), qui conclue que $X = \varinjlim X_i \in M$, q.e.d.

On a prouvé $b \Longrightarrow a$, sans utiliser l'hypothèse que tout objet de Filt^π est π-accessible. Mais on a utilisé cette hypothèse pour prouver que b (ou a) implique que M est stable par $\varinjlim$ grandes devant π (lemme 2, p. 90).

$a \overset{?}{\Longrightarrow} b$. Le "il suffit" dans b) est conséquence immédiate de a). Il reste à prouver que si, dans le système inductif π-adapté $(X_i)_{i\in I}$ de limite X, on a $X \in M$, alors I_M est cofinal dans I. Mais par hypothèse a), on aura $X = \varinjlim_J Y_j$, avec J grand devant π, les Y_j dans M^π. Admettons que $\mathrm{Filt}^\pi \subset E_\pi$, *i.e.* tout élément de Filt^π, en particulier les X_i, sont π-accessibles.

Je pense que je n'arriverai pas à prouver $a_\pi \Longrightarrow b_\pi$, mais seulement ceci : Si π' est un cardinal $> \pi$ (disons le successeur de π dans la suite ordinale des cardinaux), alors $a_\pi \Longrightarrow b_\pi$.

[page 98]

Ceci va résulter du

Lemme 3. *Soient $X \simeq \varinjlim_I X_i$, $X \simeq \varinjlim_J Y_j$ deux représentations de X sous forme des $\varinjlim$ filtrantes, avec I grand devant π', J grand devant π, avec π, π' deux cardinaux tels que $\pi' > \pi$. On suppose $(X_i)_{i\in I}$ π'-adapté,* i.e. *pour toute partie filtrante I' de I de cardinal $\leq \pi'$, I' a une borne supérieure $i_{I'}$, et $X_{i_{I'}} = \varinjlim_{i\in I'} X_i$. Alors pour tout $i \in I$, on peut trouver une partie I' de I, contenant i,* grande devant π, *de cardinal $\leq \pi'$, et une partie J' de J, enfin un isomorphisme $I' \xrightarrow[\sim]{\lambda} J'$ et une application strictement croissante $\mu : J' \longrightarrow I'$ et des homomorphismes* [fin du chapitre]

Index des notations

Index terminologique

Liste des axiomes

$\mathcal{M}$ catégorie

$W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, $\qquad C, F, TC, TF \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$

M 0 La catégorie $\mathcal{M}$ admet des limites projectives finies et des limites inductives finies.

M 1 Les flèches appartenant à C ont la propriété de relèvement à gauche relativement à celles appartenant à TF, et les flèches appartenant à F ont la propriété de relèvement à droite relativement à celles appartenant à TC.

M 2 Toute flèche de $\mathcal{M}$ se décompose en une flèche de C suivie d'une flèche de TF, et en une flèche de TC suivie d'une flèche de F.

M 3 La partie F de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ est stable par composition et changement de base, C est stable par composition et cochangement de base, F et C contiennent les isomorphismes.

M 4 La partie TF de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ est stable par composition et changement de base, TC est stable par composition et cochangement de base, TF et TC contiennent les isomorphismes.

M 5 Si dans un triangle commutatif de $\mathcal{M}$ deux des trois flèches sont dans W, il en est de même de la troisième ; W contient les isomorphismes.

M′ $TC \subset C \cap W$, $TF \subset F \cap W$.

M″ Les flèches appartenant à C sont des W-cofibrations, et les flèches appartenant à F sont des W-fibrations.

$\mathbf{M}'_0$(g) $TC = C \cap W$.

$\mathbf{M}'_0$(d) $TF = F \cap W$.

M 2 bis $W = TF \circ TC$.

Glossaire

Section 1

- $\Phi \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$

  Φ est *clos à gauche* : il existe $\Psi \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ tel que Φ soit formé des flèches ayant la propriété de relèvement à gauche relativement aux flèches de Ψ.

- $\Psi \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$

  Ψ est *clos à droite* : il existe $\Phi \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ tel que Ψ soit formé des flèches ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux flèches de Φ.

- $\Phi, \Psi \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$

  (Φ, Ψ) a la *propriété de factorisation de Quillen* :

  a) les flèches de Φ ont la propriété de relèvement à gauche relativement aux flèches de Ψ ;

  b) toute flèche f de $\mathcal{M}$ se factorise en

$$f = pi \quad , \qquad i \in \Phi \; , \quad p \in \Psi \; .$$

- (Φ, Ψ) *couple de Quillen* :

  a) (Φ, Ψ) a la propriété de factorisation de Quillen ;

  b) Φ est clos à gauche et Ψ clos à droite.

Section 2

- $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$

  W *faiblement saturé* :

  a) W contient les isomorphismes ;

  b) si deux parmi les trois flèches d'un triangle commutatif sont dans W, la troisième aussi.

- $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$

  Un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}$ est une *W-fibration* ($p \in \mathrm{Fib}_W$) si pour tout diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[l] \arrow[d] & X'' \arrow[l, "t"'] \arrow[d] \\ Y & Y' \arrow[l] & Y'' \arrow[l, "s"] \end{tikzcd} ,$$

si $s \in W$, alors $t \in W$.

- $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$

  Un morphisme $i : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{M}$ est une *W-cofibration* ($i \in \mathrm{Cof}_W$) si pour tout diagramme de carrés cocartésiens

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[d] & A' \arrow[l, "s"'] \arrow[d] & A \arrow[l] \arrow[d, "i"] \\ B'' & B' \arrow[l, "t"] & B \arrow[l] \end{tikzcd} ,$$

  si $s \in W$, alors $t \in W$.

- $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$

  Un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}$ est *universellement dans W*, ou une *W-équivalence universelle* ($p \in W_{\mathrm{univ}}$) si pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[l] \arrow[d, "p'"] \\ Y & Y' \arrow[l] \end{tikzcd} ,$$

  la flèche p' appartient à W.

- $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$

  Un morphisme $i : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{M}$ est *coüniversellement dans W*, ou une *W-équivalence coüniverselle* ($i \in W^{\mathrm{univ}}$) si pour tout carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, "i'"'] & A \arrow[l] \arrow[d, "i"] \\ B' & B \arrow[l] \end{tikzcd} ,$$

  la flèche i' appartient à W.

- *Pré-Q-catégorie de modèles à gauche* (resp. *à droite*) :

  $\mathcal{M}$ et W, C, F, TC, $TF \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ satisfaisant aux axiomes **M 0** à **M 5**, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}''$ et $\mathbf{M}'_0\mathbf{(g)}$ (resp. $\mathbf{M}'_0\mathbf{(d)}$).

- *Q-catégorie de modèles, triple de Quillen* :

  catégorie de modèles au sens de Quillen.

- *Q-catégorie de modèles "close", triple clos de Quillen, catégorie de Quillen close, système de Quillen clos* :

  catégorie de modèles fermée au sens de Quillen.

- *Pré-Quillen à gauche* (resp. *à droite*) :

  pré-Q-catégorie de modèles à gauche (resp. à droite).

- *Pré-quintuplet de Quillen clos* :

  W, C, F, TC, $TF \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ satisfaisant aux axiomes **M 0** à **M 5**, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}''$, C, TC étant clos à gauche et F, TF clos à droite.

- *Système de Quillen faible* :

  W, C, F, TC, $TF \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ satisfaisant aux axiomes **M 0** à **M 5**, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}''$.

- *Système de Quillen faible exact à gauche* (resp. *à droite*) :

  W, C, F, TC, $TF \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ satisfaisant aux axiomes **M 0** à **M 5**, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}''$ et $\mathbf{M}'_0\mathbf{(g)}$ (resp. $\mathbf{M}'_0\mathbf{(d)}$).

Section 3

- $(\mathcal{M}, W)$ *catégorie de modèles* :

  $\mathcal{M}$ catégorie satisfaisant à l'axiome **M 0** ;

  $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ faiblement saturé.

- *Structure de Quillen faible associée à la catégorie de modèles* $(\mathcal{M}, W)$:

  quadruplet (C, F, TC, TF) de parties de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ satisfaisant aux axiomes **M 1** à **M 5**, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}''$.

- *Structure de Quillen faible exacte* :

  structure de Quillen faible satisfaisant en outre à l'axiome **M 2 bis**.

- *Structure de Quillen faible exacte à gauche* (resp. *à droite*) :

  structure de Quillen faible satisfaisant en outre à l'axiome $\mathbf{M}'_0\mathbf{(g)}$ (resp. $\mathbf{M}'_0\mathbf{(d)}$).

- *Structure de Quillen faible close à gauche* (resp. *à droite*) :

  structure de Quillen faible (C, F, TC, TF) telle que C, TC (resp. F, TF) soient clos à gauche (resp. à droite).

- *Structure de Quillen faible close* :

  structure de Quillen faible à la fois close à gauche et à droite.

- *Structure de Quillen* :

  structure de Quillen faible "biexacte" :

  structure de Quillen faible à la fois exacte à gauche et à droite

  = catégorie de modèles de Quillen propre.

- *Structure de Quillen parfaite* :

  structure de Quillen faible "biexacte" et close

  = catégorie de modèles fermée de Quillen propre.

Section 5

- Catégorie de modèles $(\mathcal{M}, W)$ *quillénisable* :

  il existe une structure de Quillen faible *exacte* (C, F, TC, TF) associée à $(\mathcal{M}, W)$.

- $(\mathcal{M}, W)$ *quillénisable sur* Diag $\subset$ Cat :

  pour tout I dans Diag, la catégorie des modèles $(\mathcal{M}(I), W(I))$ est quillénisable.

Section 6

- Catégorie de modèles $(\mathcal{M}, W)$ *quillénisable uniformément à gauche sur* Diag :

  il existe une structure de Quillen faible *close* (C, F, TC, TF) pour $(\mathcal{M}, W)$ telle que pour tout I dans Diag, si l'on définit $C(I)$ et $TC(I)$ "argument par argument" (*), et $F(I)$ et $TF(I)$ par la propriété de relèvement à droite relativement à $TC(I)$ et $C(I)$ respectivement (†), le quadruplet $(C(I), TC(I), F(I), TF(I))$ soit une structure de Quillen faible *close exacte* pour $(\mathcal{M}(I), W(I))$. On dit alors que (C, F, TC, TF) est une *quillénisation uniforme à gauche* de $(\mathcal{M}, W)$ sur Diag).

*Un morphisme de foncteurs $u : X \longrightarrow Y$ de I° vers $\mathcal{M}$ étant dans $C(I)$ (resp. $TC(I)$) si et seulement si pour tout objet i de I, u_i est dans C (resp. TC).

†Un morphisme de $\mathcal{M}(I)$ étant dans $F(I)$ (resp. $TF(I)$) si et seulement si il a la propriété de relèvement à droite relativement aux flèches appartenant à $TC(I)$ (resp. $C(I)$).

- Catégorie de modèles $(\mathcal{M}, W)$ *quillénisable sur* Diag *uniformément et exactement à gauche* :

  $(\mathcal{M}, W)$ admet une quillénisation uniforme à gauche sur Diag (C, F, TC, TF) telle que $TC = C \cap W$ (autrement dit, telle que (C, F, TC, TF) soit une strucure de Quillen faible *exacte à gauche*). On dit alors que (C, F, TC, TF) est une *quillénisation uniforme et exacte à gauche* de $(\mathcal{M},\ W)$ sur Diag.

Section 7

- I ensemble ordonné filtrant, π cardinal

  I grand devant π :

  toute partie de I de cardinal inférieur ou égal à π admet un majorant dans I.

- E catégorie

  Une *filtration cardinale* de E est une filtration croissante

  $$\Big(\mathrm{Filt}^{\pi}(E)\Big)_{\pi \geq \pi_0} \quad , \qquad \pi_0 \text{ un cardinal infini fixé,}$$

  de E par des sous-catégories strictement pleines $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, indexée par les cardinaux $\pi \geq \pi_0$ appartenant à un univers donné, et satisfaisant aux conditions suivantes :

  a) pour tout $\pi \geq \pi_0$, $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$ est équivalente à une petite catégorie ;

  b) la catégorie E admet des limites inductives filtrantes indexées par des ensembles ordonnés I grands devant π_0, et pour tout $\pi \geq \pi_0$, $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$ est stable par les dites limites si $\operatorname{card} I \leq \pi$;

  c) Pour tout $\pi \geq \pi_0$, et pour tout $X \in \operatorname{Ob} E$, il existe un isomorphisme

  $$X \simeq \varinjlim_{i \in I} X_i \ ,$$

  où $(X_i)_{i \in I}$ est un système inductif filtrant dans E, indexé par un ensemble ordonné I grand devant π, et où les X_i sont des objets de $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$. De plus, si $X \in \operatorname{Ob} \mathrm{Filt}^{\pi'}(E)$, $\pi' \geq \pi$, on peut prendre I tel que $\operatorname{card} I \leq \pi'^{\pi}$.

- E catégorie, $(\mathrm{Filt}^{\pi}(E))_{\pi \geq \pi_0}$ filtration cardinale de E, $\pi \geq \pi_0$ cardinal

  Un *système inductif bien adapté* (à la filtration cardinale donnée, pour les cardinaux π_0, π donnés) est un système inductif filtrant $(X_i)_{i \in I}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

  a) I est grand devant π, et pour tout $i \in I$, $X_i \in \mathrm{Filt}^{\pi}(E)$;

  b) Toute partie J de I de cardinal $\leq \pi$, et grande devant π_0, admet une borne supérieure i_J, et on a

  $$X_{i_J} \xleftarrow{\ \sim\ } \varinjlim_{i \in J} X_i \ .$$

Si X est un objet de E, une *représentation bien adaptée* de X, en termes d'objets de $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, est la donnée d'un système inductif bien adapté $(X_i)_{i\in I}$, à la filtration cardinale donnée, pour les cardinaux π_0, π, et d'un isomorphisme

$$X \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I} X_i \ .$$

- E catégorie admettant des petites limites inductives filtrantes

  Une *filtration cardinale stricte* de E est une filtration cardinale $(\mathrm{Filt}^{\pi}(E))_{\pi\geq\pi_0}$ telle que pour tout cardinal $\pi \geq \pi_0$, $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$ soit stable par limites inductives filtrantes.

- E catégorie admettant des petites limites inductives filtrantes

  $(\mathrm{Filt}^{\pi}(E))_{\pi\geq\pi_0}$ filtration cardinale stricte de E, $\quad \pi \geq \pi_0$ cardinal

  Un *système inductif parfaitement adapté* (à la filtration cardinale donnée, pour le cardinal π) est un système inductif filtrant $(X_i)_{i\in I}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

  a) I est grand devant π, et pour tout $i \in I$, $X_i \in \mathrm{Filt}^{\pi}(E)$;

  b) Toute partie J de I filtrante de cardinal $\leq \pi$, admet une borne supérieure i_J, et on a

  $$X_{i_J} \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i\in J} X_i \ .$$

  Si X est un objet de E, une *représentation parfaitement adaptée* de X, en termes d'objets de $\mathrm{Filt}^{\pi}(E)$, est la donnée d'un système inductif bien adapté $(X_i)_{i\in I}$, à la filtration cardinale donnée, pour le cardinal π, et d'un isomorphisme

  $$X \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I} X_i \ .$$

Références

H. J. Baues, "Algebraic Homotopy", Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 15 (1989).

R. Hartshorne, "Residues and Duality", Lecture Notes in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag (1966).

D. G. Quillen, "Homotopical Algebra", Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag (1967).

R. W. Thomason, *Cat as a Closed Model Category,* Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol. XXI-3, pp. 305-324 (1980).

J.-L. Verdier, "Des catégories dérivées des catégories abéliennes", Astérisque, vol. 239 (1996).

SGA 4, I, "Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas", Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, Springer-Verlag (1972).