LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre XII

Caractérisation de W_∞. Foncteurs W-propres, W-lisses etc. Sommes amalgamées et carrés W-cocartésiens dans Cat.

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX 2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Pour les quelques corrections évidentes, ou rares commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés. Un point d'interrogation entre crochets signifie que l'on n'est pas sûr du mot qui précède.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

[page 1]

19.11.90

I Caractérisation de W_∞.

Je voudrais caractériser W_∞ en tant que partie de Fl(Cat), par ses propriétés comme localiseur, et sans faire appel à la connaissance de notions utilisant déjà W_∞, comme la propreté etc. Je voudrais tout au moins des propriétés sur un localiseur W, familières pour W_∞, qui soient si fortes qu'elles impliquent $W \subseteq W_\infty$. Bien sûr, dans les démonstrations je me permets d'utiliser tout ce que je sais sur W_∞.

Bien sûr, il faudra au moins une forme de saturation, peut-être très faible, je présume le suivant suffira ([1]).

W(1) (Axiome de saturation.) a) Les identités sont dans W, b) si f, g [sont] composables et deux parmi f, g, gf sont dans W, le troisième aussi, c) si $fg \in W$, $gf \in W$, alors $f, g \in W$.

Une propriété particulièrement cruciale, qui déjà distingue W_∞ de l'ensemble des homotopismes (notion trop stricte à beaucoup d'égards), est l'axiome que j'ai appelé L4 bis :

W(2) (Axiome de localisation.) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche dans Cat$/S$, telle que $\forall\, s \in \operatorname{Ob} S$, $f_s : X/s \longrightarrow Y/s$ soit dans W (on dira que f est dans W 'localement sur S '). Alors $f \in W$.

[Les axiomes W(1) etc. sont appelés aussi 1 etc. dans l'original.]

Dans le cas $Y = S$, cela donne

Corollaire : *Si $f : X \longrightarrow Y$ est W-asphérique, i.e. $y\backslash X \longrightarrow y\backslash Y$* [plutôt $X/y \longrightarrow Y/y$] *dans W pour tout $y \in \operatorname{Ob} Y$, alors $f \in W$* ([2]).

Proposition 1. *Si W satisfait* W(1) *et* W(2)*, les propriétés suivantes sur W sont équivalentes :*

a) Pour tout X dans Cat*, $X \times \mathbf{\Delta}^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^X} X$ est dans W (i.e. $\mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow e$ est 'universellement dans W ').*

b) Si X dans Cat *a un objet final, alors X est W-asphérique, i.e. $X \longrightarrow e$ est dans W.*

c) Tout homotopisme est dans W.

[1] (non, j'ai dû le renforcer en 2 [?]).

[2] On peut considérer la validité du corollaire comme une variante affaiblie W(2 bis) de W(2) ci-dessus. Dans la proposition 1, on n'utilise que W(2 bis), forme faible de W(2).

DÉMONSTRATION. b) $\Longrightarrow$ a) ([3]), car pour voir que $\mathrm{pr}_1 \in W$, en appliquant le corollaire ci-dessus, il faut prouver que $\forall\, x \in X$

$$(*) \qquad (X \times \mathbf{\Delta}^1)/x \longrightarrow X/x$$

est dans W. Or

$$(X \times \mathbf{\Delta}^1)/x \simeq X/x \times \mathbf{\Delta}^1,$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}^1 \arrow[d] & X \times \mathbf{\Delta}^1 \arrow[l] \arrow[d] & X/x \times \mathbf{\Delta}^1 \arrow[l] \arrow[d] \\ e & X \arrow[l] & X/x \arrow[l] \end{tikzcd}$$

`[la flèche verticale à droite est ajoutée]` et les deux catégories X/x, $X/x \times \mathbf{\Delta}^1$ sont W-asphériques car elles ont un objet final, donc $(*)$ est dans W par saturation faible W(1).

a) $\Longrightarrow$ c). Je rappelle que

$$f : X \longrightarrow Y$$

`[page 2]`

est un homotopisme s'il existe

$$g : Y \longrightarrow X$$

telle que

$$(*) \qquad gf \sim \mathrm{id}_X, \quad fg \sim \mathrm{id}_Y,$$

où la relation $(\sim)$ désigne l'homotopie dans $\underline{\mathrm{Hom}}(X, X)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(Y, Y)$ respectivement (définie par chemins allant d'un élément à l'autre). Prouvons le

Lemme. *Supposons que W satisfait* W(1) *et le* a) *de la proposition, i.e. $X \times \mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow X$ dans W pour tout X dans* Cat. *Alors si X, Y* `[sont]` *dans* Cat *et f, g dans $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ sont homotopes, on a*

$$\mathrm{hot}_W(f) = \mathrm{hot}_W(g).$$

De plus, $f \in W$ si et seulement si $g \in W$.

Il suffit de le prouver quand il existe un homomorphisme $f \longrightarrow g$. Cela peut s'interpréter par l'existence d'une flèche

$$X \times \mathbf{\Delta}^1 \xrightarrow{F} Y$$

dont les restrictions à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ respectivement soient f, g. Pour prouver que $\mathrm{hot}_W(f) = \mathrm{hot}_W(g)$, il suffit de prouver que

$$i_0, i_1 : X \longrightarrow X \times \mathbf{\Delta}^1 \qquad x \longmapsto (x, 0),\ x \longmapsto (x, 1)$$

[3] n'utilise W(1) que sous forme faible, sans la condition de saturation c). NB Seul b) $\Longrightarrow$ c) utilise W(2 bis), les implications a) $\Longrightarrow$ c) $\Longrightarrow$ b) sont valables sous la seule hypothèse W(1).

sont égales dans Hot_W, puisque

$$f = F \circ i_0, \quad g = F \circ i_1.$$

Or cela résulte du fait que ce sont des sections de $X \times \mathbf{\Delta}^1$ sur X, et que dans Hot_W la projection $X \times \mathbf{\Delta}^1 \xrightarrow{p} X$ est `[un]` isomorphisme (donc $i_0 = i_1 = p^{-1}$ dans Hot_W). De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "f"'] & X \times \mathbf{\Delta}^1 \arrow[d, "F"] \\ & Y, \end{tikzcd}$$

où $i_0 \in W$, montre que $f \in W$ si et seulement si $F \in W$, et de même $g \in W$ si et seulement si $F \in W$, donc $f \in W \iff g \in W$.

Revenons à $(*)$, on voit que dans Hot_W $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, donc f et g sont des Hot_W-isomorphismes inverses l'un de l'autre. D'autre part, $gf \in W$, $fg \in W$, puisque $\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y \in W$. Donc on gagne, si on a formulé W(1) de façon assez forte. On a prouvé donc a) $\Longrightarrow$ c).

c) $\Longrightarrow$ b) est trivial, puisque si X a un objet final, $X \longrightarrow e$ est un homotopisme.

`[page 3]`

On doit bien sûr par la suite supposer que W satisfait aux conditions équivalentes de la proposition. On prendra p. ex. la forme

W(3) (Axiome de l'élément final.) Si X a un objet final, alors X est W-asphérique.

Corollaire 1. *Pour que $f : X \longrightarrow Y$ soit W-asphérique, il faut et il suffit que les X/y soient W-asphériques* ($y \in \mathrm{Ob}\, Y$).

Car pour que
$$\begin{tikzcd} X/y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y/y \arrow[dl] \\ & e & \end{tikzcd}$$
soit dans W, comme Y/y est W-asphérique (objet final), il faut et il suffit que X/y le soit aussi.

Corollaire 2. *Si X dans* Cat *a un objet initial, il est W-asphérique.* (En effet, $X \longrightarrow e$ est un homotopisme, et on applique prop. 1.) ([4])

Je mettrai pour mémoire

Corollaire 3. *Tout homotopisme dans* Cat *est dans W. Si $f, g : X \rightrightarrows Y$ dans* Cat *sont homotopes, alors elles sont égales dans* Hot_W*, et f est dans W si et seulement si g l'est.*

Proposition 2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat. Si $f \in W$, $f^\circ \in W^\circ$ `[plutôt` $f^\circ \in W$`]`.

[4] C'est donc l'énoncé dual de l'axiome W(3) de l'objet final.

On utilise la démonstration de I, p. 75, à l'aide de la catégorie nommée $\Phi(X)$ ($\mathrm{Ob}\,\Phi(X) = \mathrm{Fl}(X)$, mais avec une notion de flèche dans $\Phi(X)$ un peu particulière). On trouve que $f \in W \iff \Phi(f) \in W$, et de même $f^\circ \in W \iff \Phi(f) \in W$.

NB. Dans la démonstration de la proposition 2, comme dans celle de la proposition 1 (pour l'implication b) $\Longrightarrow$ a)), on n'a utilisé la propriété de localisation W(2) que sous la forme faible du corollaire, i.e. sous la forme f W-asphérique $\Longrightarrow f \in W$.

Corollaire (de la prop. 2) : *Soit* $W \subseteq \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat})$ *satisfaisant l'axiome* W(1) (saturation). *Alors la conjonction des axiomes* W(2), W(3) *équivaut à celle des axiomes duaux* W(2′), W(3′) ([5]).

Il suffit de prouver que 1,2,3 $\Longrightarrow$ 2′,3′.

`[page 4]`

Pour 2′ `[plutôt 3′]`, c'est le corollaire 2 ci-dessus. Pour 3′ `[plutôt 2′]`, cela résulte aussitôt de la proposition 2. (NB Cet énoncé resterait valable, si on aurait pris W(2) sous la forme faible seulement, cf. le NB page précédente.)

Je dois encore mettre un axiome de la forme L5, L6 (cf. VI, p. 43-44). Mais l'énoncé de ces axiomes utilise la notion de Hot-fibrés, ou de foncteurs parfaits, i.e. fait appel à la connaissance de W_∞, ce que j'aimerais éviter (si je peux). Je dois donc introduire la notion de W-fibration, sur le modèle de ce que j'ai fait dans le contexte des dérivateurs, dans I (cf. p. 111-126). On introduit la notion de **D**-fibration à la page 117 (prop. 5), par `[des]` conditions équivalentes, dont certaines ont un sens en termes de la donnée de W sans plus. Soit donc

$$f : X \longrightarrow Y$$

dans Cat et considérons les conditions

a) Si $Y'' \longrightarrow Y'$ dans Cat/Y est dans W, alors $X'' \longrightarrow X'$ aussi (le changement de base par $X \longrightarrow Y$ transforme W dans W).

a′) Comme a), mais avec Y'', Y' W-asphériques.

a$_1$) Comme a), dans le cas particulier où Y' a un objet final et Y'' est la catégorie ponctuelle.

a$_2$) Dual de a$_1$), avec objet initial de Y'.

On a donc

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \mathrm{a} \arrow[d, Rightarrow] & W\text{-fibration ultraforte} & \\ & & \mathrm{a}' \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & W\text{-fibration forte} & \\ W\text{-fibration gauche} & \mathrm{a}_1 & & \mathrm{a}_2 & W\text{-fibration droite} \end{tikzcd}$$

[5] Itou si on remplace dans cet énoncé W(2) par W(2 bis).

et dans le cas $W = W_\infty$ toutes ces conditions sont équivalentes. J'ai envie `[de]` prendre la plus forte de ces conditions, mais je dois me donner des moyens pour trouver des W-fibrations en un sens aussi fort. Par exemple j'aurais envie de savoir que si X

`[page 5]`

est dans Cat, alors $\underline{\mathrm{Ch}}_\infty(X) \longrightarrow X \times X$ ou $\underline{\mathrm{Ch}}(X) \longrightarrow X \times X$ est une W-fibration. Dans les deux cas, et (disons) pour W_∞, je le prouve en prouvant que p est à la fois lisse, et propre. Il faudrait donc revoir les notions de lissité et de propreté dans le contexte de la donnée d'un W.

Si je me rappelle bien, la propriété a$'$) `[plutôt` $\mathtt{a_1}$`)]` était quelque chose d'assez aisément vérifiable, il suffisait de supposer que les

$$X_y \longrightarrow X/y \qquad \text{et} \qquad X/y \longrightarrow X/y'$$

(pour $y \in \mathrm{Ob}\, Y$ resp. $u : y \longrightarrow y'$ dans $\mathrm{Fl}\, Y$) sont dans W, et que ça reste vrai par tout changement de base - ce qui revient à la condition a_1) sur f. On pourrait donc formuler une condition sur W ainsi :

W(4) (Axiome des W-fibrations ([6]).) Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat satisfaisant la condition de W-fibration a_1) ci-dessus (p. 4), alors elle satisfait même à a), i.e. le changement de base par f transforme flèches dans W en flèches dans W ([7]).

Grâce à la proposition 2, il s'ensuit que la condition duale a_2) sur f implique la condition de W-fibration forte, donc l'axiome W(4), en apparence asymétrique, signifie aussi que les quatre conditions de fibration sur f sont équivalentes, il est donc en fait symétrique.

NB Je ne vois pas, sans axiomes supplémentaires sur W, comment passer de a_1 à a$'$ seulement. La difficulté, c'est de montrer, moyennant a_1 seulement, que si Y est W-asphérique, l'inclusion $X_y \longrightarrow X$ (où $y \in \mathrm{Ob}\, Y$) est dans W. Dans le contexte des dérivateurs $\mathbf{D}$, cela se voyait par voie $\mathbf{D}$-cohomologique.

Cet axiome très fort suffit à impliquer que si X, Y sont W-fibrés sur S, et si $f : X \longrightarrow Y$ est un S-morphisme qui est dans W, alors $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ est dans W ($\forall\, s \in S$). Montrons déjà au moins l'inverse.

`[page 6]`

Proposition 3. *Soient X, Y dans* Cat$/S$*, $f : X \longrightarrow Y$ une S-flèche. Supposons (X, Y W-fibrés) que $\forall\, s \in S$, $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ soit dans W, alors $f \in W$* ([8]).

Il s'impose d'utiliser l'axiome de localisation, donc de regarder les f/s induits par f

[6] Voir variante affaiblie suffisante, dans le NB p. 10. Voir encore [?] de variantes pages 13, 14 ci-dessous.

[7] i.e. une W-fibration à gauche est une fibration ultraforte.

[8] *Sans* axiome W(4). C'est la première fois qu'on a besoin de W(2) sous sa forme forte, à l'exclusion de W(2 bis).

$$\begin{tikzcd} X/s \arrow[r, "f/s"'] & Y/s \\ X_s \arrow[u, "i_s^X"] \arrow[r, "f_s"] & Y_s \arrow[u, "i_s^Y"'] \end{tikzcd} .$$

La condition a_1 suffit à impliquer que i_s^X et i_s^Y sont dans W, donc f/s est dans W si et seulement si f_s l'est. On n'a pas eu à utiliser l'axiome W(4), et il suffisait de supposer que X, Y soient fibrés 'W-cohomologiques' (ou W-fibrés à gauche) sur S, ou dualement, des W-fibrés à droite.

De plus :

Corollaire (9). *Soit $S_0 \subseteq \mathrm{Ob}\, S$ une partie de S telle que $S_0 \longrightarrow \pi_0(S)$ surjectif. Alors dans la proposition 3 il suffit de supposer $f_s \in W$ pour $s \in S_0$.*

Il suffit de voir que si $u : s \longrightarrow s'$ est une flèche dans S, alors $f_s \in W \iff f_{s'} \in W$. On utilise le fait que $f_s \in W \iff f/s \in W$, et de même pour $f_{s'}$. Donc à voir que $f/s \in W \iff f/s' \in W$. Or on a

$$\begin{tikzcd} X/s \arrow[r, "f/s"] \arrow[d, "X/u"'] & Y/s \arrow[d, "Y/u"] \\ X/s' \arrow[r, "f/s'"] & Y/s' \end{tikzcd} ,$$

où X/u et Y/u sont dans W, d'où le résultat.

Mais revenons à la réciproque : si $f \in W$, alors a-t-on $f_s \in W_S$? `[plutôt` $f_s \in W$`?]` Il y a un argument dans ce sens dans VI, p. 23, que je vais reprendre. L'idée est celle-ci. On considère la composante connexe Y_0 de Y `[plutôt` S_0 `de` S`]` contenant s, et on construit un

`[page 7]`

W-fibré (au *sens fort* a))

$$S' \longrightarrow S_0 \subseteq S$$

avec S' *W-asphérique.* Comme $X \longrightarrow Y$ sur S est dans W, il en sera donc de même de $X' \longrightarrow Y'$ sur S'. Comme les fibres de X', Y' en s' s'identifient à celles de X, Y en l'image de s' dans S, on est ramené au cas où S est W-asphérique. Mais alors on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X_s \arrow[u, "i_s^X"] \arrow[r, "f_s"] & Y_s \arrow[u, "i_s^Y"'] \end{tikzcd} ,$$

[9] Sans axiome W(4).

où i_s^X, i_s^Y sont dans W, car déduites de $\{s\} \longrightarrow S$ (qui est dans W, S étant W-asphérique) par les changements de base W-fibrants $X \longrightarrow S$, $Y \longrightarrow S$. Donc $f \in W \implies f_s \in W$.

NB On n'a utilisé la propriété de fibration pour X, Y qu'au sens a$'$) ([10]).

Il faut donc prouver, si on peut, le

Lemme (?) ([11]). *Soit S un objet* 0*-connexe de* Cat. *Alors il existe un objet W-asphérique S' de* Cat, *et une W-fibration (au sens* fort *de a), page 4) $S' \longrightarrow S$.*

L'idée naturelle, c'est de prendre, pour $s_0 \in \operatorname{Ob} S$ fixé,

$$S' = \underline{\mathrm{Ch}}(S; s_0, -) \qquad \text{ou} \qquad S' = \underline{\mathrm{Ch}}_\infty(S; s_0, -),$$

et la flèche

$$\beta : c \longmapsto \text{but } c : S' \longrightarrow S.$$

On sait que S' est W_∞-aphérique et que β est W_∞-fibrante (et même parfaite). Il faut voir que S' est aussi W-asphérique, et β W-fibrante. Il faut donc revoir la démonstration dans le cas de W_∞, et prouver qu'elle se transforme à W,

`[page 8]`

moyennant les axiomes qu'il faut sur W. J'ai envie de regarder d'abord le choix $S' = \underline{\mathrm{Ch}}(S; s_0, -)$, sans passage à une limite inductive qui m'obligerait à mettre un axiome de limites sur W. Les propriétés homotopiques délicates et essentielles de $\underline{\mathrm{Ch}}(S)$ sont établies dans VII, p. 157-169, savoir que dans le diagramme

$$S \xrightarrow{i_S} \underline{\mathrm{Ch}}(S) \xrightarrow{p_S} S \times S,$$

$i_S \in W_\infty$ et p_S est une W_∞-fibration (en fait, *propre* et *lisse* pour W_∞) ([12]). Le fait que $i_S \in W$ `[plutôt` $i_S \in W_\infty$`]` implique que les foncteurs source et but

$$\underline{\mathrm{Ch}}(S) \underset{\beta}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} S \qquad \sigma = \mathrm{pr}_1 \circ p_S,\ \beta = \mathrm{pr}_2 \circ p_S$$

sont dans W_∞ (puisque $\sigma i_S = \beta i_S = \mathrm{id}_S$). Comme ce sont des Hot-fibrations, il en résulte que les fibres $\underline{\mathrm{Ch}}(S; s, -)$ resp. $\underline{\mathrm{Ch}}(S; -, s)$ sont Hot-asphériques. Mais même en admettant que σ, β sont dans W et sont des W-fibrations, je ne peux en conclure tout de suite que les fibres sont W-asphériques - il y aurait cercle vicieux! Il me faut donc une démonstration directe.

Considérons le foncteur

$$\begin{array}{c} \underline{\mathrm{Ch}}(S; s, -) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \underline{Ty} \end{array} \quad ,$$

[10]Et même, dans a$'$) on pourrait exiger que $Y'' = e$, Y' W_ω-asphérique, où W_ω `[est]` défini page 14, $W_\omega \subseteq W \cap W_\infty$ ...

[11]Est prouvé moyennant l'axiome W(4) (+ des petites vérifications ultérieures).

[12]Dans l'énoncé des 'propriétés essentielles' de $\underline{\mathrm{Ch}}(S)$, on peut travailler avec W_ω, la plus petite partie de Fl(Cat) satisfaisant les axiomes W(1), W(2 bis), W(3) (cf. page 14), donc $W_\omega \subseteq W \cap W_\infty$.

c'est un foncteur Cat-fibrant, donc W-lisse (je devrai développer la notion de W-lissité ([13]) avec soin, j'admettrai pour le moment les propriétés formelles familières, et les justifierai par la suite). À cause de la W-lissité, pour prouver $p \in W$, il suffit de

`[page 9]`

prouver que les fibres de p sont W-asphériques ([14]). Or les fibres sont les $Z_\tau = \underline{\mathrm{Ch}}_\tau(S; s, -)$, qui sont des catégories *contractiles* (i.e. $Z_\tau \longrightarrow e$ est un homotopisme), donc W-asphériques par W(3) (cf. cor. 3, page 3).

D'autre part, si on admet que $\underline{\mathrm{Ch}}(S) \xrightarrow{p_S} S \times S$ est W-lisse (et W-propre), donc $\underline{\mathrm{Ch}}(S) \xrightarrow{\sigma_S} S$ aussi, étant à fibres W-asphériques comme on vient de voir, il s'ensuit que $\sigma_S \in W$, d'où $S \xrightarrow{i_S} \underline{\mathrm{Ch}}(S)$ aussi dans W (puisque $\sigma_S \circ i_S = \mathrm{id}_S$). Donc il reste à prouver seulement que

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Ch}}(S) \xrightarrow{p_S} S \times S$$

est W-propre et W-lisse. Il en résultera que

$$\underline{\mathrm{Ch}}(S; s_0, -) \xrightarrow{\beta} S$$

est lui aussi W-propre et W-lisse, car déduit de p_S par le changement de base

$$S \longrightarrow S \times S \qquad s \longmapsto (s_0, s).$$

Il faut ensuite voir que W-lisse et W-propre implique la propriété de W-fibration *sous sa forme la plus forte* a) (alors que je prévois qu'a priori on ne l'aura que sous les formes faibles a$_1$, a$_2$ - pas même sous la forme a$'$). C'est ici donc que l'axiome W(4) des W-fibrations sera essentiel ([15])!

Voici l'argument pour la lissité de $(*)$, dans loc. cit. p. 161 ff. Il faut prouver que pour $c \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Ch}}(S)$, et une flèche $u \in \mathrm{Fl}(S \times S)$ `[plutôt` $(u,v) \in$ `Fl`$(S \times S)$`]`, une certaine catégorie de 'relèvements de u de source c ' `[plutôt 'relèvements de` (u,v) `de but` c `']`, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(c,u,v)$, est W-asphérique ([16]). Pour ceci, on la compare à une catégorie $\mathcal{C}'$ à objet final, donc contractile et a fortiori W-asphérique, à l'aide de deux foncteurs

$$\mathcal{C} \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}',$$

et des homotopies $\varphi\psi \sim \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$ (sans mérite, $\mathcal{C}'$ étant contractile)

`[page 10]`

et $\psi\varphi \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ (on trouve même une flèche $\psi\varphi \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$). Ainsi φ est un homotopisme, donc une W-équivalence (cor. 3, p. 3), donc $\mathcal{C}$ est W-asphérique, $\mathcal{C}'$ l'étant. La propreté de p_S équivaut à la lissité de $p_{(S^\circ)}$, elle est donc prouvée du même coup.

---

[13] $f : X \longrightarrow Y$ est W-lisse si les $X_y \longrightarrow y\backslash X$ sont W-asphériques.
[14] On utilise ici W(2 bis), pas $W(2)$.
[15] sous la forme affaiblie W(4a$''$) (p. 13).
[16] En fait, on prouve que $\mathcal{C}(c,u,v)$ est *contractile*, donc elle est W_ω-asphérique.

Ainsi, le lemme de la page 7 est prouvé, moyennant l'axiome W(4) qui assure qu'une flèche qui est à la fois W-lisse et W-propre, satisfait à la condition très forte a) des W-fibrations.

NB En fait, il suffirait, au lieu de l'axiome W(4) sous sa forme forte, de supposer qu'une $f : X \longrightarrow Y$ qui est à la fois 'homotopiquement lisse' et 'homotopiquement propre', i.e. les fibres des $X/x \longrightarrow Y/y$ et des $x\backslash X \longrightarrow y\backslash Y$ sont contractiles (donc W-asphériques pour tout W satisfaisant W(1,2,3)), soit W-fibration forte. Énonçons quand même ce que nous avons prouvé.

Proposition 4. *Si W satisfait* W(1,2,3) ([17]) (nous le supposons toujours par la suite) *plus* W(4) (sous une forme un peu affaiblie suffisante, cf. remarque précédente), *on a ceci: Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche dans* Cat$/S$*, avec X, Y des W-fibrés sur S. Si $f \in W$, alors $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ est dans W pour tout $s \in S$.*

Je me demande si j'en sais assez pour pouvoir prouver

$$W \subseteq W_\infty.$$

Il faut quand même éliminer des cas canularesques, comme $W = \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat})$, donc mettre l'axiome

W(5) (Axiome de connexité ([18]).) Si $f : X \longrightarrow Y$ est dans W, $\pi_0(f) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ `[est]` bijectif.

`[page 11]`

Je factorise alors f en ([19])

$$X \xrightarrow{i} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y,$$

avec $\bar{f}$ une W_∞-fibration et une W-fibration ([20]), $i \in W \cap W_\infty$ - cela marche finallement, par la construction de VII, p. 170-171 (de Cartan-Serre), à partir des propiétés de $Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(Y) \longrightarrow Y \times Y$ sans plus. Comme $\bar{f}i = f \in W$ et $i \in W$, on en déduit $\bar{f} \in W$. Comme $i \in W_\infty$, on en conclut $f \in W_\infty \iff \bar{f} \in W_\infty$. Donc pour prouver que f est dans W_∞, on est ramené au cas où f est une W-fibration et une W_∞-fibration. Mais alors la proposition 4 nous montre que les fibres de f sont W-asphériques ([21]), et il suffit de voir qu'elles sont W_∞-asphériques (proposition 3 ([22]) appliquée à W_∞). Ainsi on est ramené au cas où $Y = e$, i.e. à prouver que si X dans Cat est W-asphérique, il est W_∞-asphérique.

Soit $x_0 \in \mathrm{Ob}\, X$, considérons comme tantôt

$$E = \underline{\mathrm{Ch}}(X, x_0, -) \xrightarrow{p} X,$$

[17] Pour W(2), il le suffit sous la forme W(2 bis).

[18] Voir à ce sujet le corollaire page 22.

[19] À nouveau, dans ces arguments on a intérêt à travailler avec W_ω.

[20] en fait, $\bar{f}$ est à la fois W_∞-parfait (i.e. W_∞-lisse et propre) et W-parfait (en fait, W_ω-parfait).

[21] on n'a utilisé ici que cette propriété sur les fibres, comme consequence de W(4). (On utilise W(4) sous sa forme la plus faible W(4b″), cf. pages 13, 14).

[22] on n'utilise la proposition 3 que dans le cas $Y = S$, pour lequel W(2 bis) suffit.

on sait que E est $W \cap W_\infty$-asphérique, et que c'est une fibration pour W et pour W_∞. Comme X est W-asphérique (comme E), $p \in W$, donc à nouveau par la proposition 4 ([23]), les fibres de p sont W-asphériques, en particulier (par W(5)) 0-connexes. On a donc prouvé le

[page 12]

Lemme. ([24]) *Soit* (X, x_0) *dans* $\mathrm{Cat}_\bullet$. *Si* X *est* W*-asphérique, alors* $\Omega(X, x_0) \overset{\text{déf}}{=} \underline{\mathrm{Ch}}(X; x_0, x_0)$ *l'est aussi* (moyennant les axiomes W(1,2,3,4) sur W)*. Donc (par itération) les* $\Omega^n(X, x_0)$ *sont* W*-asphériques* ($\forall\, n \in \mathbf{N}$).

Corollaire. *Si de plus* W *satisfait l'axiome* W(5) *de connexité, alors* X *est* W_∞*-asphérique.*

En effet, 'on sait' que cela signifie que tous les $\Omega^n(X, x_0)$ sont 0-connexes. Or l'axiome de connexité W(5) assure que W-asphérique implique 0-connexe.

Mais le 'on sait' est un tout petit peu léger ([25]). Pour le justifier, il faudrait, ou bien que je fasse le lien avec la théorie 1/2-simpliciale classique, et prouver que les Ω^n que je construis sont 'les bons', i.e. que leur nerf redonne bien (à isomorphisme près dans Hot) les Ω^n classiques (??). En particulier, que le $\pi_0(\Omega^n(X, x_0))$ est bien le $\pi_n(X, x_0)$ 'de tout le monde'. Ou bien que je prouve directement que la 0-connexité des $\Omega^n(X, x_0)$ équivaut à la W_∞-asphéricité de X, définie cohomologiquement à la ARTIN-MAZUR. C'est donc un travail qu'il me faudra faire absolument. Mais ce n'est plus qu'un simple travail de routine, et je peux énoncer dès maintenant le

Théorème 1. ([26],[27],[28]) *Soit* $W \subseteq \mathrm{Fl(Cat)}$ *satisfaisant les conditions* W(1,2,3,4,5) (axiome de saturation, de localisation, de l'objet final, de fibration, de connexité)*. Alors*

$$W \subseteq W_\infty.$$

Corollaire. *On peut caractériser* W_∞ *comme la plus grande partie de* Fl(Cat) *satisfaisant aux*

[page 13]

conditions W(1) *à* W(5) *précédentes.*

Bien sûr, on aimerait un axiome 6 plus intéressant, qui joint aux précédents assure que $W = W_\infty$ ([29]). Ou est-ce que ces propriétés assurent déjà que $W = W_\infty$? Pour le voir, il faudrait peut-être que j'en sache plus sur la structure des objets W_∞-asphériques? Si c'était faux, je songe à un axiome de 'descente homotopique', qui impliquerait qu'un objet W_∞-asphérique est aussi W-asphérique.

[23] en fait, la condition W(4b″) sur W.

[24] Utilise W(1, 2 bis, 3, 4b″) sur W.

[25] C'est prouvé fort simplement dans le corollaire du 'theorème 1', page 190.

[26] Il suffit même de W(4) sous une forme affaiblie, avec des foncteurs 'fibrants' dans un sens 'absolu'. Cf. le NB p. 10 - et surtout, cf. pages 13, 14.

[27] NB Au lieu de W(5), il suffit de supposer $W \neq \mathrm{Fl(Cat)}$, cf. th. 2, p. 20.

[28] Les hypothèses utiles sur W sont finalement W(1), W(2 bis), W(3), W(4b″), et $W \neq \mathrm{Fl(Cat)}$.

[29] Cf. axiome W(6) page suivante.

Je note dès maintenant que si des W_i $(i \in I)$ satisfont aux axiomes W(1) à W(5), il en est de même de $\bigcap_i W_i$ ([30]). Donc il y a un plus petit ensemble de flèches W_ω satisfaisant à ces conditions. S'il n'est égal à W_∞, i.e. si les axiomes W(1) à W(5) ne caractérisent déjà W_∞, ce serait un localiseur vraiment très intéressant.

Je me rends compte que je n'ai utilisé qu'une forme assez faible de l'axiome W(4) - essentiellement, la validité de la proposition 4. Je vais résumer différentes variantes de l'axiome de fibration.

W(4)

a_1) Si $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat est une W-fibration gauche, c'est une W-fibration ultraforte.

a_2) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une W-fibration droite, c'est une W-fibration ultraforte.

a$'$) Si $f : X \longrightarrow Y$ est W-parfait, i.e. à la fois W-propre et W-lisse ([31]), alors f est une W-fibration ultraforte.

a$''$) Si $f : X \longrightarrow Y$ est à la fois homotopiquement propre et homotopiquement lisse (cf. NB page 10), f est une W-fibration ultraforte. (Il vaut mieux dire : Si f est W_ω-parfait, c'est une W-fibration ultraforte.)

b) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche dans Cat$/S$, avec X et Y des W-fibrés sur S. Si $f \in W$, alors $\forall\, s \in S$, $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ est `[dans]` W.

b$'$) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche de Cat$/S$ qui soit W-parfaite et W_∞-parfaite, alors $f \in W$ implique que les fibres de f sont W-asphériques. (Il vaut mieux dire : Si f est W_ω-parfait, il est une W-fibration ultraforte.) `[Plutôt : Soit` $f : X \longrightarrow Y$ `une flèche dans` Cat$/S$ `telle que` $X \longrightarrow S$ `et` $Y \longrightarrow S$ `soient` W_ω`-parfaites. Si` $f \in W$`, alors` $\forall\, s \in S$`,` $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ `est dans` W`.]`

`[page 14]`

b$''$) Soit $W_\omega \subseteq W \cap W_\infty$ la plus petite partie de Fl(Cat) satisfaisant les conditions W(1,2,3) ([32]) (axiomes de saturation, de localisation, de l'objet final). Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche dans Cat qui soit W_ω-parfaite. Si $f \in W$, alors les fibres de f sont W_ω-asphériques `[plutôt` W`-asphériques]`.

Entre ces propriétés de W, on a les implications tautologiques (sauf a$''$) $\Longrightarrow$ b), qui est essentiellement la proposition 4)

[30] C'est vrai pour tout ensemble d'axiomes dans la nature d'axiomes de stabilité.
[31] ce qui implique que c'est une W-fibration gauche *et* droite.
[32] Il vaut mieux prendre W(2 bis) au lieu de W(2), pour trouver W_ω la plus petite possible!

$$
\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{c}
\mathrm{a} = (\mathrm{a}_1 \Longleftrightarrow \mathrm{a}_2)\\
\Downarrow\\
\mathrm{a}'\\
\Downarrow\\
\mathrm{a}''
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}\text{En fait,}\\ \text{toutes ces}\\ \text{conditions sont}\\ \text{équivalentes}\end{array}\\
\Downarrow\\
\mathrm{b}\\
\Downarrow\\
\mathrm{b}'\\
\Downarrow\\
\mathrm{b}''
\end{array}
$$

([33]).

Eh bien, dans le lemme page 12, il suffisait de supposer que W satisfait à la version la plus faible b″) de l'axiome des fibrations (sept versions!). En effet, les fibrations $\bar{X} \longrightarrow Y$ et $E \longrightarrow X$ utilisées dans la démonstration du lemme sont W_ω-parfaites, et il suffisait de savoir que si elles sont dans W, alors les fibres sont W-asphériques.

Mais je ne pense pas que même la version la plus forte W(4a) de l'axiome des fibrations, jointe aux trois axiomes précédents et à W(5) (connexité), implique $W = W_\infty$. Il faudrait tout au moins y joindre l'axiome

W(6) (Axiome des limites filtrantes.) Soit $X = \varinjlim_i X_i$ une limite inductive filtrante dans Cat. Si les X_i sont W-asphériques, X aussi.

Ceci devrait être équivalent à la propriété, en apparence plus forte, en termes de flèches de W :

Proposition 5. *Supposons qu'on ait* W(6) (en plus de W(1) à W(4) ([34])),

`[page 15]`

et soit

$$(f_i)_{i\in I} : (X_i)_{i\in I} \longrightarrow (Y_i)_{i\in I}$$

[33] Je reviens sur les diverses variantes de W(4) plus bas, p. 53-56.

[34] W(4) sous la forme la plus faible W(4b″) .

un homomorphisme de systèmes inductifs dans Cat, *indexé par un ensemble ordonné filtrant, soient* $X = \varinjlim X_i$, $Y = \varinjlim Y_i$, $f = \varinjlim f_i$, $f : X \longrightarrow Y$. *Si* f_i *est dans* W *pour tout* i, *alors* $f \in W$.

On factorise chaque f_i en

$$X_i \xrightarrow{\alpha_i} \bar{X}_i \xrightarrow{\bar{f}_i} Y_i, \qquad \alpha_i \in W_\omega,\ \bar{f}_i \in \operatorname{Parf} W_\omega$$

([35]) suivant le système breveté. La construction étant fonctorielle, les $\bar{X}_i$ forment eux aussi un système inductif. De plus, comme le foncteur $S \longrightarrow \underline{\mathrm{Ch}}(S)$ qui donne naissance à la factorisation canonique des morphismes, commute aux $\varinjlim$ filtrantes (immédiat), il s'ensuit que, si on pose

$$\bar{X} = \varinjlim_i \bar{X}_i$$

et qu'on regarde les flèches

$$X \xrightarrow{\alpha} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y, \qquad \alpha = \varinjlim \alpha_i,\ \bar{f} = \varinjlim \bar{f}_i,$$

avec $\bar{f}\alpha = \bar{f}$, cette factorisation de f est bien sa factorisation canonique. Donc $\alpha \in W$, $\bar{f} \in \operatorname{Parf} W_\omega$. Ceci vu, en vertu de prop. 3, $f \in W$, i.e. $\bar{f} \in W$, est vrai si les fibres de $\bar{f}$ sont W-asphériques. Mais les fibres de $\bar{f}$ s'interprètent comme limites inductives filtrantes de fibres des $\bar{f}_i$, lesquelles sont W-asphériques par la condition W(4b″) des fibrations. Donc l'axiome W(6) donne ce qu'il faut.

Conjecture (hardie? sotte?). *Si* $W \subseteq \mathrm{Fl(Cat)}$ *satisfait les axiomes* W(1) *à* W(6) *(avec* W(4) *sous sa forme la plus faible* W(4b″) ([36])*), alors* $W = W_\infty$.

`[page 16]`

Mais il est bien possible qu'il faille renforcer un peu W(1) (saturation), en exigeant que tout rétracte d'un $f \in W$ soit dans W.

Remarque. Considérons, pour $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $W_n \subseteq \mathrm{Fl(Cat)}$ des 'n-équivalences d'homotopie' dans Cat :

$$f \in W_n \iff \pi_0(f) \text{ bijectif, et } \pi_i(f,x) : \pi_i(X,x) \longrightarrow \pi_i(Y, f(x)) \text{ bijectif pour } 0 < i \leq n.$$

Je croyais que ça satisfaisait à tout ce qu'on peut demander à un localiseur, sans avoir pris la peine de l'écrire avec soin. Ma ça ne peut satisfaire à W(1) jusqu'à W(4b″), puisqu'on n'a pas $W_n \subseteq W_\infty$!

W(1) est trivial sur la définition (et on a sans larmes même la *saturation forte* de W_i, i.e. si f dans Cat est `[un]` isomorphisme dans $\mathrm{Hot}_{W_i} = (\mathrm{Cat})W_i^{-1}$, alors $f \in W_i$). Je crois me rappeler avoir vérifié W(2), par la même méthode que pour W_∞, en utilisant un critère cohomologique à la Artin-Mazur, pour exprimer $f \in W_i$, et en utilisant les suites spectrales de Leray pour $X \longrightarrow S$ et $Y \longrightarrow S$. La condition W(3) est trivialement satisfaite puisque $W_n \supseteq W_\infty$ et qu'elle l'est pour W_∞. Donc ça canule là où je m'y

[35] W_ω introduit dans la condition W(4b″), page 14.

[36] et peut-être W(2) sous la forme plus faible W(2 bis).

attendais le moins : l'axiome des fibrations. Prenons la forme faible : Soit $f : X \longrightarrow Y$ une W_ω-fibration et $f \in W_i$, les fibres X_s sont elles W_i-asphériques ([37])? On peut supposer X et Y 0-connexes, soit $x \in X_s$, la suite exacte d'homotopie donne

$$\underset{\text{si } i \leq n-1}{\pi_{i+1}(X) \xrightarrow{\text{iso}} \pi_{i+1}(Y)} \longrightarrow \pi_i(X_s) \longrightarrow \underset{\text{si } i \leq n}{\pi_i(X) \xrightarrow{\text{iso}} \pi_i(Y)},$$

donc

$$\pi_i(X_s) = 1 \qquad \text{si } 0 \leq i \leq n-1,$$

mais pour $i = n$ on trouve

[page 17]

$$\pi_n(X_s) = \operatorname{Coker}\left(\pi_{n+1}(X) \longrightarrow \pi_{n+1}(Y)\right),$$

il n'y a aucune raison que ce soit nul, comme ça devrait si $X_s \longrightarrow e$ était dans W_n.

Il est vrai que parfois on renforce justement la condition pour W_n, disons qu'on définit $W'_n \subseteq W_n$ par

$$f \in W'_n \iff \begin{cases} \text{a)} \quad \pi_0(f) \text{ bijectif,} \\ \text{b)} \quad \pi_i(f,x) : \pi_i(X,x) \longrightarrow \pi_i(Y, f(x)) \text{ bijectif pour } 0 < i \leq n \text{ et } x \in X, \\ \text{c)} \quad \pi_{n+1}(f,x) : \pi_{n+1}(X,x) \longrightarrow \pi_{n+1}(Y, f(x)) \textit{ surjectif,} \end{cases}$$

c'est à dire aussi

$$f \in W'_n \iff \begin{cases} \text{les `fibres homotopiques' } Z \text{ de } X \longrightarrow Y \text{ (i.e. les fibres de } \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y) \\ \text{sont } n\text{-connexes, i.e. 0-connexe et } \pi_i(Z_y, z) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Alors X dans Cat sera W'_n-asphérique si et seulement s'il est W_n-asphérique, i.e. n-connexe. Donc par la forme 2 de la définition de W'_n, l'axiome W(4b″) est satisfait. Il faut croire que ça pèche ailleurs! Peut-être déjà la saturation.

Si gf et g sont dans W'_i, il n'est pas forcément de même de f,

car si $\bar{g}\bar{f}$ (et donc $\bar{g}$) est surjectif, il n'en est par forcément de même pour $\bar{f}$! Donc W'_n ne mérite pas le nom de 'localiseur'.

Par contre, W_n me paraît excellent, si on ne lui demande pas l'impossible - de satisfaire à un 'axiome de fibration' qui semble bien (à peu de choses près) caractériser le seul W_∞ parmi les 'bons' localiseurs. En tous cas l'axiome de connexité W(5) est satisfait, et l'axiome des limites filtrantes W(6) aussi. Par ailleurs W(1) (et même la saturation forte), W(2), W(3) sont satisfaits par tout $W_{\mathbf{D}}$ associé à un dérivateur - ce qui confirme à nouveau leur importance. Les axiomes W(4) (l'axiome 'draconien' des fibrations, $\pm$ spécial à W_∞), W(5) (connéxité) et

[37] $\omega > \infty$, $W_\omega \subset W_\infty \subset W_n$

[page 18]

W(6) (limites) m'apparaissent comme de nature plus spéciale, je ne songerais à imposer aucun d'eux pour l'usage terminologique de 'localiseur fondamental'.

II Perplexités sur les axiomes et la terminologie.

Dans I et la plupart du temps, en travaillant avec les dérivateurs, j'ai supposé $\boxed{W_{\mathbf{D}} \supseteq W_\infty}$, hypothèse qui m'a parue essentielle (à tort ([38]) ou à raison). On voit donc que si $W_{\mathbf{D}}$ satisfait à l'axiome de fibrations W(4), même sous sa forme la plus faible W(4b″), il est *égal* à W_∞. Cela montre bien que cet axiome doit être vu comme pratiquement une *caractérisation* de W_∞ (parmi les localiseurs fondamentaux qui contiennent W_∞ – et ces localisateurs me paraissent les plus importants, et peut-être les seuls vraiment utiles).

La théorie des **D**-fibrations dans I, p. 111-126, a été faite dans l'esprit qu'on vient de dire, en supposant $W_{\mathbf{D}} \supseteq W_\infty$. La notion de **D**-fibrations à laquelle je m'étais finalement arreté était par suite différente des notions envisagées ici dans un esprit différent (page 4). Elle revient à tester la condition a) (trop forte presque toujours, sauf pour $W = W_\infty$), caractérisant les W-fibrations ultrafortes, par des $Y'' \longrightarrow Y'$, où Y'', Y' sont tous deux W_∞-asphériques (ce qui est plus exigeant que W-asphérique). C'est seulement quand Y'' et Y' sont W_∞-asphériques (au lieu de W-asphériques), qu'on demande que $X'' \longrightarrow X'$ soit dans W. On trouve donc

[page 19]

une notion moins exigeante que celle de W-fibration forte. Si on dénote ici cette condition par b), on trouve (sous réserve que $W_\infty \subseteq W$), avec les notations de la page 4 ([39])

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{a} \arrow[d, Rightarrow] & W\text{-fibration ultraforte} & \\
 & & \mathrm{a}' \arrow[d, Rightarrow] & W\text{-fibration forte} & \\
 & & \mathrm{b} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & W\text{-fibration} & \\
W\text{-fibration gauche} & \mathrm{a}_1 & & \mathrm{a}_2 & W\text{-fibration droite.}
\end{tikzcd}$$

a_1), a_2) étaient aussi appelées **D**-fibrations cohomologique resp. **D**-fibrations homologiques ([40]). Quand **D** satisfait Der 3a′ (I, p. 111) sur les **D**-coefficients localement constants sur les X W_∞-asphériques, alors les notions b), a_1), a_2) sont équivalentes. (Je présume que c'est le cas pour tous les **D** et tous les W vraiment intéressants.) Par contre, j'ai l'impression que la notion de W-fibration forte, voire ultraforte, n'est guère utilisable que dans le cas $W = W_\infty$, où elle coïncide avec les précédentes. C'est dire qu'on peut probablement oublier la terminologie, et se rappeler par contre que dans le cas $W = W_\infty$, les

[38] à *tort* il s'avère maintenant.

[39] Cf. la bonne notion de W-fibration dans un contexte où on ne suppose pas $W_\infty \subseteq W$, dans th. 3 et déf. 3, p. 51, 52.

[40] Non, c'est une notion encore plus forte, à coups de coefficients localement constants, cf. I, p. 121.

W-fibrations ont des propriétés d'une force extrême, s'exprimant par les deux propriétés dégagées dans W(4a) et W(4b).

`[page 20]`

Dans la théorie de HOT_W, influencé par la réflexion générale sur les dérivateurs et l'axiome Der 3b, j'ai travaillé sous l'hypothèse $W \supseteq W_\infty$, mais en utilisant un axiome de fibration L5 = W(4b) qui, il s'avère, implique finalement $W = W_\infty$. J'ai l'impression que je n'ai jusqu'à présent (propriétés de $f_!$ pour HOT) pas utilisé $W \supseteq W_\infty$, donc ça peut être utile, comme 'ça ne coûte pas plus cher' (et oblige d'être plus attentif à ce qu'on utilise), de laisser tomber $W \supseteq W_\infty$ (impliquant $W = W_\infty$), et de mettre par contre sur W des axiomes aussi forts (notamment de fibration) que les propriétés de W_∞, 'sans se priver en rien'. Je supposerai donc W(1), W(2), W(3), W(4a) (la forme la plus forte de l'axiome de fibration, cf. pages 13, 14) - c'est tout ce qui a été utile jusqu'à présent. Si on y joint W(5) (axiome de connexité) ça implique $W \subseteq W_\infty$. Mais pour l'instant je ne crois pas en avoir un besoin.

Mais méditant sur la question, je crois avoir trouvé le

Théorème 2 (!) ([41]) : *Soit* $W \subseteq \mathrm{Fl(Cat)}$ *satisfaisant* W(1,2,3,4b″). *Si* W *ne satisfait pas à* W(5)*, alors* $W = \mathrm{Fl(Cat)}$*.*

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat, tel que $\pi_0(f)$ ne soit pas bijectif. Soit I la catégorie discrète ayant pour ensemble d'objets l'ensemble $\pi_0(Y)$, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & I, & \end{tikzcd}$$

d'autre part un foncteur d'une catégorie dans une catégorie discrète est toujours W_ω-parfait, donc p, q sont des W-fibrations. Comme

`[page 21]`

$f \in W$, il s'ensuit $f_i \in W$ pour tout $i \in I$ ([42]).

Si $\pi_0(f)$ n'était pas surjective, prenant i qui n'est pas dans l'image, on aurait $X_i = \emptyset \longrightarrow Y_i \neq \emptyset$, qui serait dans W. Soit donc

$$f : X = \emptyset \longrightarrow Y$$

dans W. Alors $\forall\ Z$ dans Cat, $f \times \mathrm{id}_Z : \underbrace{X \times Z}_{=\emptyset} \longrightarrow Y \times Z$ est dans W (car Z est

[41] Cf. pour un résultat plus fort XV 9.12, p. 133 bis. **NB** Le résultat est plus général, mais pas vraiment plus fort, car il ne donne pas $W = \mathrm{Fl(Cat)}$.

[42] On utilise W(4) sous forme plus forte que W(4b″)!

W-fibrée sur e), donc $\emptyset \longrightarrow Y \times Z$ est dans W. Donc aussi la projection
$$\begin{tikzcd} Y \times Z \arrow[rr] & & Y. \\ & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Comme cette projection est une W-fibration, il s'ensuit par W(4b″) que ses fibres sont W-asphériques. Comme $Y \neq \emptyset$, il y a une telle fibre, elle est $\simeq Z$. Donc Z est W-asphérique. Donc on trouve que *toute* catégorie Z dans Cat est W-asphérique. Donc toute flèche $Z \longrightarrow Z'$ dans Cat est dans W, q.e.d.

Supposons maintenant $\pi_0(f)$ surjective, mais non injective. Il y aurait une fibre de $\pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y) = I$ qui serait de cardinal > 1. En prenant le f_i correspondant, on trouve $X_i \longrightarrow Y_i$ avec Y_i 0-connexe et $\operatorname{card} \pi_0(X_i) \geq 2$. Donc on est ramené au cas

$$f : X \longrightarrow Y \qquad \begin{cases} f \in W \\ Y \text{ 0-connexe} \\ \operatorname{card} \pi_0(X) \geq 2. \end{cases}$$

Considérons la factorisation canonique

$$X \xrightarrow{i_f} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y,$$

avec $i_f \in W$, donc $\bar{f} \in W$. Donc par W(4b″) les fibres de $\bar{f}$ sont W-asphériques. Mais on voit tout de suite, en décomposant $\bar{X}$ suivant les composantes connexes X_i de X, que ces fibres ont un π_0 de cardinalité $\geq \operatorname{card} \pi_0(X) \geq 2$. Donc on est ramené au cas où $Y = e$, i.e.

$$X \ W\text{-asphérique}, \qquad \operatorname{card} \pi_0(X) \geq 2.$$

Considérons $X \times X$, qui est aussi W-asphérique, et l'application diagonale

[page 22]

$$d : X \longrightarrow X \times X = Y,$$

qui est donc dans W. Mais $\pi_0(d)$ s'identifie à l'application diagonale $\pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(X) \times \pi_0(X)$, qui n'est pas surjective puisque $\operatorname{card} \pi_0(X) \geq 2$. Donc pour la première partie, $W = \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat})$.

Donc sous forme plus positive :

Corollaire. *Soit* $W \subseteq \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat})$ *qui satisfait à* W(1,2,3,4b″), *et telle que* $W \neq \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat})$. *Alors* W *satisfait l'axiome de connexité* W(5), *et par suite (th. 1, page 12)* $W \subseteq W_\infty$.

III Classes remarquables de foncteurs liés à W.

Finalement, j'appelerai *'localiseur fondamental'* une partie W de Fl(Cat) satisfaisant les trois conditions suivantes :

(i) Saturation W(1) (cf. rappel p. 1).

(ii) Axiome de l'élément final W(3) (page 3).

(iii) La variante affaiblie W(2 bis) de l'axiome de localisation W(2) donnée dans le corollaire page 1 (anciennement c'était L4′ dans Pursuing Stacks).

Quand j'aurai besoin de plus sur W, je le dirai explicitement. Ces trois axiomes ont suffi pour pratiquement tout ce que j'ai fait avec W dans Pursuing Stacks, la seule exception étant un usage (si je me rappelle) unique, quelque part, d'une variante affaiblie de W(2) (pour les S-foncteurs *cartésiens* entre S-catégories *fibrées* - si sur toute fibre il est dans W, il est lui-même dans W).

On suppose donc par la suite donné un localiseur fondamental

$$W \subseteq \mathrm{Fl(Cat)}.$$

Proposition 1. *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *dans* Cat. *Conditions équivalentes :*

a) Pour tout isomorphisme local $Y' \longrightarrow Y$, $f' : X' \longrightarrow Y'$ *est* $\in W$.

b) Même condition, dans le cas particulier $Y' = Y/y \longrightarrow Y$, *donc* $\forall\ y \in Y$, $X/y \simeq X \times_Y (Y/y)$ *est* W*-asphérique.*

`[page 23]`

Définition 1. Sous ces conditions équivalentes a), b) de la proposition 1, on dit que f est W*-asphérique.* On dit `[que]` f est W*-coasphérique* si f° est W-asphérique, i.e. si les $y\backslash X$ sont W-asphériques (pour $y \in \mathrm{Ob}\,Y$).

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver b) $\Longrightarrow$ a). Par définition d'un isomorphisme local, on voit que la condition b) est stable par changement de base $Y' \longrightarrow Y$, avec Y' un isomorphisme local (puisque les $Y'/y' \xrightarrow{\sim} Y/y$, donc $X'/y' \xrightarrow{\sim} X/y$). Il suffit donc de voir que si f satisfait à b), alors $f \in W$. Mais c'est l'axiome W(2 bis).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & & & \\
Y & & Y' \arrow[ll] & \\
& Y/y \arrow[ul] & & Y'/y' \arrow[ll] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Remarque. Si f a un adjoint à droite g, alors pour tout $y \in Y$, $X/y \simeq X/g(y)$, donc X/y a un objet final et est donc W-asphérique. Donc si f a un adjoint à droite (à gauche), alors f est W-asphérique (W-coasphérique).

Mais même si f n'a pas d'adjoint à droite, il y a quand même un adjoint généralisé

$$g : Y \longrightarrow X^\wedge$$

et on a

$$X/y \simeq X/g(y) \qquad \text{(pour l'inclusion pleinement fidèle } X \hookrightarrow X^\wedge\text{)},$$

donc $\mathrm{Top}(X/y)$ s'identifie au topos induit $\mathrm{Top}(X)/g(y)$. La condition f W-asphérique signifie donc que les faisceaux $g(y)$ dans $\mathrm{Top}(X)$ sont

`[page 24]`

W-asphériques. Pour de nombreuses autres formulations équivalentes, je renvoie à Pursuing Stacks.

Proposition 2. *Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans* Cat. *Si f et g sont W-asphériques (W-coasphériques), de même gf. Si gf et f sont W-asphériques (W-coasphériques), g aussi.*

Rappel. Un morphisme $p : S' \longrightarrow S$ dans Cat est un *isomorphisme local* si $\forall\, s' \in \mathrm{Ob}\, S'$, le morphisme induit

$$p_{s'} : S'/s' \xrightarrow{\simeq} S/s \qquad (s = p(s'))$$

est un isomorphisme : p induit un isomorphisme sur les 'localisées' de S' et S en s' et $s = p(s')$ respectivement. Il est immédiat que cette notion est stable par composition, que si gf et g sont des isomorphismes locaux, alors f l'est aussi, que tout isomorphisme est un isomorphisme local. De plus, les isomorphismes locaux sont *stables par changement de base,* ce qui résulte du fait (trivial et important) que si on a un carré cartésien dans Cat

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ S \arrow[from=u, "f"'] & S', \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

et si $x' \in \mathrm{Ob}\, X'$ a pour image x, s', s dans X, S', S, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} X/x \arrow[d, "f/x"'] & X'/x' \arrow[l, "q/x'"'] \arrow[d, "f'/x'"] \\ S/s & S'/s' \arrow[l, "p/s'"] \end{tikzcd}$$

est également cartésien. (Donc si p/s' est `[un]` isomorphisme, q/x' aussi.)

[page 25]

Revenons à la proposition 2. La stabilité de la notion de morphisme asphérique par composition résulte aussitôt de la forme a) de la condition. De même pour la condition que si gf et f sont W-asphériques, g aussi - il faut montrer que si $Z' \longrightarrow Z$ est [un] isomorphisme local, alors g' est dans W, or l'hypothèse implique que $g'f'$ et f' le sont.

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "r"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[from=u, "f"'] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "g'"] \\ Z & Z' \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

Corollaire 1. *L'image inverse d'un $f : X \longrightarrow Y$ qui est W-asphérique (resp. W-coasphérique) par un isomorphisme local (resp. par un coïsomorphisme local) est W-asphérique (W-coasphérique).*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & X' \arrow[l] \arrow[d] & X'' \arrow[l] \arrow[d] \\ Y & Y' \arrow[l, "\text{iso local}"'] & Y'' \arrow[l, "\text{iso local}"'] \end{tikzcd}$$

Résulte formellement de la définition par a) et du fait qu'un composé de deux isomorphismes locaux (resp. coïsomorphismes locaux) est itou.

NB Bien sûr, la notion de foncteur W-asphérique n'est pas stable par changement de base quelconque. Par exemple, l'inclusion $X = \{y_0\} \longrightarrow Y$ est W-asphérique si et seulement si les catégories discrètes $\mathrm{Hom}(y_0, y)$ sont W-asphériques, i.e. (sous réserve que l'on ait W(5), axiome de connexité) si et seulement si les $\mathrm{Hom}(y_0, y)$ sont de cardinal 1, i.e. y_0 *objet initial* de Y. Mais si $Y \neq \{y_0\}$, prenant y dans Y, $y \neq y_0$, et posant $Y' = \{y\} \longrightarrow Y$, on a $X' = X \times_Y Y' = \emptyset$ et $\emptyset \longrightarrow e$ n'est pas asphérique!

[page 26]

Par contre, on s'attend que les morphismes W-asphériques soient stables par changements de base *W-lisses* (qui généralisent les isomorphismes locaux), et les morphismes W-coasphériques par changements de base W-propres. Cf. plus bas.

Corollaire 2. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans* Cat *une* équivalence *de catégories. Alors f est W-asphérique et W-coasphérique.*

En effet, f a un adjoint à gauche et un adjoint à droite, et on utilise la remarque page 23.

Proposition 3. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans* Cat*. Conditions équivalentes :*

a) Pour tout $y \in \mathrm{Ob}\, Y$, le foncteur d'inclusion

$$(*) \qquad X_y \longrightarrow X/y$$

est W-coasphérique.

b) Pour tout $x_0 \in X$, le morphisme induit pour les colocalisées

$$x_0\backslash X \longrightarrow y_0\backslash Y \qquad (\textit{où } y_0 = f(x_0))$$

est à fibres W-asphériques.

c) Pour tout morphisme $\mathbf{\Delta}^1 = Y' \longrightarrow Y$, considérons $X' = X \times_Y Y'$ sur $\mathbf{\Delta}^1$, l'inclusion $X'_1 \longrightarrow X'$ de la fibre fermée de X' (fibre sur le point fermé de Y') est W-coasphérique.

d) Pour toute flèche $u_0 : y_0 \longrightarrow y_1$ dans Y, et tout x_0 dans X_{y_0}, la catégorie $X(x_0; u_0)$ formée des flèches $u' : x_0 \longrightarrow x$ dans X de source x_0, et qui relèvent u `[plutôt` u_0`]`*, est W-asphérique.*

`[page 27]`

DÉMONSTRATION. Pour expliciter la condition a), il faut expliciter la catégorie $\xi_0\backslash(X_y)$, pour un objet quelconque $\xi_0 = (x_0, u_0)$ de X/y, $x_0 \in \mathrm{Ob}\, X$,

$$u_0 : y_0 \longrightarrow y_1 = y \quad \text{dans } Y\text{, avec } y_0 = f(x_0).$$

Cette catégorie $\xi_0\backslash X_{y_1}$ s'explicite alors comme la catégorie des x_1 dans X_{y_1}, *munis* d'une flèche de ξ_0 dans l'image $\xi_1 = (x_1, \mathrm{id}_{f(x_1)} = \mathrm{id}_{y_1})$ de x_1 dans X/y_1 dans ξ_0 `['dans` ξ_0`' à effacer]`, i.e. d'une flèche u de x_0 dans x_1, telle que $f(u)$ donne lieu au triangle commutatif dans Y, i.e. $f(u) = u_0$.

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[dd, dash] & & \\
 & & x_0 \arrow[ull, "u"'] \arrow[dd, dash] \\
y_1 & y_1 \arrow[l, dash, "\mathrm{id}"'] & \\
 & & y_0 \arrow[ull, "f(u)"] \arrow[ul, "u_0"']
\end{tikzcd}$$

Donc c'est la catégorie notée $X(x_0; u_0)$ dans d). On voit tout de suite qu'elle est aussi isomorphe à la fibre de $x_0\backslash X \longrightarrow y_0\backslash Y$ en l'élément u_0 de $y_0\backslash Y$, dont il est question dans b). D'où l'équivalence de a) b) c). D'autre part, la donnée de u_0 dans Y équivaut à celle d'un foncteur $\mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow Y$, comme dans c), et pour exprimer alors que $\underbrace{X'_1}_{\simeq X_{y_1}} \longrightarrow X'$ est coasphérique, il suffit d'exprimer que les $x'\backslash X'_1$ ($x' \in \mathrm{Ob}\, X'$) sont W-asphériques. Or c'est trivial si $x' \in \mathrm{Ob}\, X'_1$ (objet initial), donc il suffit de le vérifier pour x' dans $X'\backslash X'_1 = X'_0 \simeq X_{y_0}$. Alors x' s'identifie à un élément x_0 de X_{y_0}, et on vérifie tout de suite que $x_0\backslash X'_1$ est isomorphe à la catégorie $X(x_0; u_0)$ de d). Cela achève la démonstration.

`[page 28]`

Définition 2. Sous les conditions de la proposition 3, on dit que f est *W-propre.* On dit que f est *W-lisse* si f° est W-propre, i.e. si les morphismes d'inclusion $(*)$ `[plutôt` $X_y \longrightarrow y\backslash X$`]` sont W-asphériques etc. (conditions duales de celles de la proposition 3).

Remarque. La condition a) de la proposition 3 est satisfaite en particulier si l'inclusion $(*)$ a un adjoint à gauche (cf. remarque page 23). Cela signifie que les catégories $X(x_0; u)$ ont un objet initial. Cela signifie aussi que la catégorie X sur Y est Cat-cofibrée sur Y au sens faible, i.e. qu'il existe, pour $u_0 : y_0 \longrightarrow y_1$ flèche dans Y, et x_0 dans X_{y_0}, un objet $u_{0*}(x_0)$ dans X_{y_1} qui représente le foncteur covariant $X_{y_1} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$, $x_1 \longmapsto \mathrm{Hom}_u(x_0, x_1)$. Ainsi, si X est Cat-cofibrée au sens faible sur Y, et a fortiori si elle est Cat-cofibrée, alors $f : X \longrightarrow Y$ est W-propre. Dualement, si f est faiblement Cat-fibrée, f est `[`W`-]`lisse.

Proposition 4. ([43]) *La notion de morphisme W-propre est stable par composition, par changement de base. Les coisomorphismes locaux sont propres (trivial sur b)), a fortiori les isomorphismes sont propres, les immersions fermées sont propres.*

Énoncé dual pour les morphismes lisses : stabilité par changement de base, par composition, les isomorphismes locaux sont lisses, notamment les immersions ouvertes.

`[page 29]`

La stabilité par changement de base est immédiate sur la forme c). La stabilité par composition `[est]` moins triviale :

$$\begin{tikzcd}
x & X \arrow[d, "f"] & x\backslash X \arrow[l] \arrow[d] & \bar{X} \arrow[l] \arrow[d] \\
y & Y \arrow[d, "g"] & y\backslash Y \arrow[l] \arrow[d] & \bar{Y} \arrow[l] \arrow[d] \\
z & Z & z\backslash Z \arrow[l] & \{u\} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Dans le diagramme à carrés cartésiens ci-contre `[plutôt dont les deux carrés de droite sont cartésiens]` (déduit de $x \in \mathrm{Ob}\, X$, d'où $y = f(x)$, $z = g(y) = gf(x)$, et de $u \in \mathrm{Ob}\, z\backslash Z$), il faut prouver que $\bar{X}$ est W-asphérique. On sait que $\bar{Y}$ l'est (g propre) et que $\bar{X} \longrightarrow \bar{Y}$ est à fibres W-asphériques. Il suffit donc d'utiliser la proposition 5 ci-dessous, et la remarque immédiate

Lemme. *Si f est propre, il en est de même de $x\backslash f : x\backslash X \longrightarrow y\backslash Y$, pour tout x dans X, $y = f(x)$.*

---

[43] Dire aussi : Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, si gf et f W-lisses, alors g est lisse en les points de $\mathrm{Im}\, f$, idem pour propre.

En effet, si u' est dans $x\backslash X$ et v' dans $y\backslash Y$, et si x', y' sont leurs images dans X, Y respectivement, alors

$$u'\backslash(x\backslash X) \simeq x'\backslash X, \qquad v'\backslash(y\backslash Y) \simeq y'\backslash Y,$$

et la flèche entre les deux s'identifie à la flèche de localisation

$$x'\backslash X \longrightarrow y'\backslash Y.$$

Proposition 5. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans* Cat*, supposons f W-propre ou W-lisse, et à fibres W-asphériques, alors $f \in W$ (et même f est* universellement *dans W, i.e. il est dans W et le reste par tout changement de base).*

[page 30]

Comme les hypothèses sont stables par changement de base, il suffit de prouver $f \in W$. Supposons p. ex. f propre, prouvons que f est W-*asphérique*, i.e. que les X/y ($y \in \mathrm{Ob}\, Y$) sont W-asphériques. Mais $X_y \longrightarrow X/y$, étant W-coasphérique par hypothèse de propreté, est dans W (par W(2 bis)), et comme X_y est W-asphérique par hypothèse, X/y aussi. Mais par W(2 bis), f W-asphérique $\Longrightarrow f \in W$. Le cas f lisse est dual.

Remarque. Ainsi, si f est propre, s'il est à fibres W-asphériques il est 'universellement W-asphérique', i.e. est et reste W-asphérique par tout changement de base. Inversement, si f est universellement dans W (pas forcément propre), alors en particulier ses fibres sont W-asphériques. Mais ça n'implique bien sûr pas que f soit propre, ou lisse ([44]).

Corollaire. *Si W satisfait* W(2) (pas seulement W(2 bis))*, alors pour un S-morphisme $X \longrightarrow Y$ de catégories qui sont toutes deux W-propres sur S, ou toutes deux W-lisses, si $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ est dans W pour tout $s \in S$, alors $f \in W$.*

[page 31]

Supposons p. ex. f propre, considérons, pour $s \in \mathrm{Ob}\, S$

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "i_s^X"'] & Y_s \arrow[d, "i_s^Y"] \\ X/s \arrow[r, "f/s"] & Y/s, \end{tikzcd}$$

comme X, Y [sont] propres, les flèches verticales sont dans W (il suffirait de beaucoup moins que la propreté ...), donc $f_s \in W \Longrightarrow f/s \in W$. Ainsi, '$f$ est dans W localement sur S', ce qui implique $f \in W$ par W(2).

[44] Mais 'universellement dans W' implique déjà 'universellement W-asphérique', puisque la notion de W-asphéricité est définie par [la] proposition 1 a).

Proposition 6. *Soit*

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ S \arrow[from=u, "f"'] & S', \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

cartésien dans Cat*. Si f* `[est]` *W-asphérique, p W-lisse, alors f' est W-asphérique.*

Il faut prouver `[que]` $X' \times_{S'} S'/s'$ est W-asphérique ($s' \in \mathrm{Ob}\, S'$). Soit $s = p(s')$, on a

$$\begin{tikzcd} S & & S' \arrow[ll, "p"'] & \\ & S/s \arrow[ul] & & S'/s', \arrow[ll, "p_0"] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

avec p_0 W-lisse (lemme p. 28 `[plutôt 29]`) et à fibres W-asphériques, donc une W-équivalence universelle (prop. 5). Comme l'image inverse de X sur S/s est W-asphérique (hypothèse pour f), il `[s'ensuit]`

`[page 32]`

que dans le carré cartésien ci-contre `[ci-dessous]`

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X/s \arrow[d] & X'/s' \arrow[l, "W"'] \arrow[d] \\ S/s & S'/s' \arrow[l, "W"] \end{tikzcd}$$

les flèches horizontales sont dans W, et la première flèche verticale l'est par hypothèse sur f, donc la seconde aussi, donc X'/s' `[est]` W-asphérique.

Corollaire (généralise `[la]` prop. 6, obtenue en faisant $Y = S$). *Soit $p : S' \longrightarrow S$* `[un]` *morphisme W-lisse dans* Cat*. Alors le foncteur changement de base*

$$\mathrm{Cat}/S \longrightarrow \mathrm{Cat}/S'$$

est compatible avec les localiseurs W_S^{g}, $W_{S'}^{\mathrm{g}}$, i.e. transforme $f : X \longrightarrow Y$ qui est dans W localement *sur S, dans $f' : X' \longrightarrow Y'$ dans W localement sur S'.*

Cette fois, on regarde le diagramme similaire à $(*)$

$$\begin{tikzcd} X/s \arrow[dd] \arrow[dr, "f/s"] & & X'/s' \arrow[ll, "W"'] \arrow[dd] \arrow[dr, "f'/s'"] & \\ & Y/s \arrow[dl] & & Y'/s' \arrow[ll, "W"'] \arrow[dl] \\ S/s & & S'/s', \arrow[ll, "W"] & \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont dans W, donc $f/s \in W$ (hypothèse) implique $f'/s' \in W$.

[page 33]

Dualement, si p est W-propre, le foncteur image inverse est compatible avec les localiseurs W_S^{d}, $W_{S'}^{\mathrm{d}}$.

Si $f : X \longrightarrow S$ est W-propre, on va définir un foncteur canonique

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{hot}_*^{X/S,W} : S & \longrightarrow & \mathrm{Hot}_W \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Cat})W^{-1} \\ \text{donné sur les objets par} & s & \longmapsto & \mathrm{hot}_W(X_s). \end{array}$$

Il faut définir, pour une flèche u dans S, $u : s \longrightarrow s'$, une flèche

$$\mathrm{hot}_W(X_s) \longrightarrow \mathrm{hot}_W(X_{s'})$$

dans Hot_W - flèche que nous pouvons noter $\mathrm{hot}_*^{X/S,W}(u)$. On la définit par le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, dotted] \arrow[d, "i_s^X"] & X_{s'} \arrow[d, "i_{s'}^X"] \\ X/s \arrow[r, "X/u"] & X/s', \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont W-coasphériques, donc dans W. Ce sont donc des isomorphismes dans Hot_W, d'où l'unique flèche en pointillés dans Hot_W, rendant le carré commutatif. Sur cette définition il est immédiat que

$$u \longmapsto \mathrm{hot}_W(u)$$

est compatible avec composition, et unités.

Ce foncteur est donc défini en supposant

[page 34]

seulement que les

$$X_y \longrightarrow X/y$$

sont dans W, ce qui est nettement moins fort que propre. Si on suppose que cette hypothèse est satisfaite 'universellement' (i.e. reste satisfaite après tout changement de base $S' \longrightarrow S$) ([45]), alors on a donc, pour tout S' dans Cat/S, un foncteur

$$\mathrm{hot}_*^{X'/S',W} : S' \longrightarrow \mathrm{Hot}_W,$$

et on vérifie tout de suite que ce n'est autre que le composé dans

[45]On dira que f est W-*prépropre.*

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} S' \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\mathrm{hot}_W^{X'/S'}"'] & & S \arrow[dl, "\mathrm{hot}_W^{X/S}"] \\ & \mathrm{Hot}_W & \end{tikzcd}$$

[plutôt $\mathrm{hot}_*^{X'/S',W}$ resp. $\mathrm{hot}_*^{X/S,W}$]. On a des observations duales si X est lisse sur S, plus généralement si les inclusions

$$X_s \longrightarrow s\backslash X$$

sont dans W. On trouve alors un contrafoncteur

$$\begin{cases} S^\circ & \longrightarrow & \mathrm{Hot}_W \\ s & \longmapsto & \mathrm{hot}_W(X_s) \\ u & \longmapsto & \mathrm{hot}^*_{X/S,W}(u) \text{ ou } \mathrm{hot}^*_{X/S}(u) \end{cases}$$

[page 35]

et une compatibilité similaire à $(*)$, si l'hypothèse est satisfaite *universellement* sur S, p. ex. f W-lisse.

Proposition 7. *Supposons $f : X \longrightarrow S$ à la fois W-propre et W-lisse, plus généralement que les morphismes*

$$X_s \longrightarrow X/s, \qquad X_s \longrightarrow s\backslash X \qquad (s \in S)$$

soient dans W, et que cette hypothèse reste verifiée après tout changement de base. Alors les foncteurs correspondants

$$\begin{aligned} \lambda &= \mathrm{hot}_*^{X/S,W} : & S &\longrightarrow \mathrm{Hot}_W \\ \lambda^\circ &= \mathrm{hot}^*_{X/S,W} : & S^\circ &\longrightarrow \mathrm{Hot}_W \end{aligned}$$

transforment toute flèche u de S en [un] *isomorphisme de* Hot_W*, et on a*

$$\lambda^\circ(u) = \lambda(u)^{-1} \qquad \textit{dans} \quad \mathrm{Hot}_W,$$

i.e. $\lambda(u)$ et $\lambda^circ(u)$ sont inverses l'un de l'autre.

DÉMONSTRATION. La donnée de $u : s_0 \longrightarrow s_1$ équivaut à celle de

$$S' = \mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow S,$$

d'où

$$X' = X \times_S S' \qquad \text{sur } S' = \mathbf{\Delta}^1,$$

avec les deux fibres

$$X'_0 \simeq X_{s_0}, \qquad X'_1 \simeq X_{s_1}.$$

L'hypothèse assurant l'existence de λ s'exprime par la condition que

$$X'_1 \longrightarrow X'/1 \simeq X'$$

`[page 36]`

est dans W, de sorte que le diagramme

$$X'_0 \xrightarrow{i_0} X' \underset{W}{\xleftarrow{i_1}} X'_1$$

définit une flèche $\lambda(u) : X'_0 \longrightarrow X'_1$ dans Hot_W, savoir $\lambda(u) = i_1^{-1} i_0$. L'hypothèse qui assure l'existence de λ° s'exprime par la condition symétrique $i_0 \in W$, qui permet de définir la flèche $\lambda^\circ(u) : X'_1 \longrightarrow X'_0$ par $\lambda^\circ(u) = i_0^{-1} i_1$. Quand les deux conditions sont satisfaites simultanément, on voit donc que $\lambda(u)$, $\lambda^\circ(u)$ sont inverses l'un de l'autre.

Remarques. Pour définir λ 'universellement', il n'était pas indispensable de considérer les X/s et les inclusions $X_s \longrightarrow X/s$, au lieu de cela il suffisait de regarder les changements de base $S' = \mathbf{\Delta}^1 \xrightarrow{u} S$, et de faire l'hypothèse que pour tout tel changement de base, l'inclusion $X'_1 \xrightarrow{i_1} X' = X_{(\mathbf{\Delta}^1, u)}$ est dans W. Cette hypothèse est automatiquement stable par changement de base arbitraire. (La W-propreté de $f : X \longrightarrow S$ signifie que $X'_1 \longrightarrow X'$ est non seulement dans W, mais même W-coasphérique.) Dualement, pour la définition 'universelle' de λ°, il suffirait que pour tout changement de base $\mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow S$ comme dessus, l'inclusion $X'_0 \xrightarrow{i_0} X'$ est dans W.

`[page 37]`

La notion la plus faible raisonnable de W-fibré, me semble être celle où on suppose les deux choses à la fois. Les hypothèses qu'on a faites jusqu'à présent, à l'exclusion de la forme forte de W-propreté ou de W-lissité, reviennent toujours à supposer que le *changement de base par* $f : X \longrightarrow S$ transforme certaines flèches dans Cat/S en `[élément de]` W : Pour définir λ, ces flèches sont

$$\text{soit } \{s\} \longrightarrow S/s, \qquad \text{soit } \{1\} \longrightarrow \mathbf{\Delta}^1(\longrightarrow S),$$

pour définir λ°, ce sont

$$\text{soit } \{s\} \longrightarrow s\backslash S, \qquad \text{soit } \{0\} \longrightarrow \mathbf{\Delta}^1(\longrightarrow S),$$

le 'soit' suivant la définition qu'on a adoptée. Dans ces exemples, il s'agit toujours de l'inclusion de l'objet final d'une catégorie S', dans ladite, ou inversement de l'objet initial. Cela montre d'ailleurs (si on exige l'universalité), que la première hypothèse (assurant λ) est *exactement* cela (cas de l'inclusion d'un objet final s' - puisque pour un tel objet, on a $S'/s' \simeq S'$), tandis que la deuxième hypothèse exige moins, seulement pour le cas de $\mathbf{\Delta}^1$. Et dualement pour λ' `[plutôt λ°]`. Mais il convient de noter que pratiquement, la façon la plus commode, et de loin,

`[page 38]`

pour vérifier de telles propriétés, c'est soit par la W-propreté de f, soit par la W-lissité - ce qui ramène à vérifier que certaines catégories bien précisées sont W-asphériques, sans avoir à se soucier de changements de base et de vérifier que les flèches construites en termes de changements de base arbitraires sont dans W. Et l'emploi de la W-propreté et de la W-lissité est d'autant plus sympathique, que ces notions sont stables par composition, alors que toutes les notions dérivées, ainsi que les notions de fibrations à la clef, ont une fâcheuse tendance à ne *pas* être stable par composition.

On pourrait appeler pseudo-W-propre resp. quasi-W-propre (un peu mieux que pseudo) ce qu'on vient de dégager - j'entends des ricanements! Et si on veut les deux à la fois - λ et λ° associés comme on a dit? Je vois le même principe de description avec des $S'' \longrightarrow S'$ sur S, d'exiger que $X'' \longrightarrow X'$ soit transformé en des `[éléments de]` W. Avec les choix suivants qui ont l'air sympathique

`[page 39]`

a$_1$) Y' a un objet final, $Y'' = e$. La définition revient donc à la condition que les

$$X_s \longrightarrow X/s, \qquad X/s' \longrightarrow X/s$$

(pour $s \in \mathrm{Ob}\, S$ où $u : s' \longrightarrow s$ dans S) soient dans W, et que ça reste comme ça après tout changement de base $S' \longrightarrow S$.

a$_2$) Y' a un objet initial, $Y'' = e$, c'est la condition duale à coups de

$$X_s \longrightarrow s\backslash X, \qquad s\backslash X \longrightarrow s'\backslash X.$$

a$_0$) $Y' = \mathbf{\Delta}^1$, $Y'' = e$ ([46]).

b) Y' est contractile, Y'' aussi (ou au choix, Y' contractile, $Y'' = e$)

donc la condition revient à ceci : pour toute Y' sur Y *contractile* (notion indépendante de W, c'est ça son principal avantage) les inclusions des fibres de $X' = X \times_Y Y'$ sur Y' dans X' sont `[dans]` W.

Je sens que même pour des W générales, b) reste du domaine du vérifiable, tandis qu'on mollit si on passe à l'extrême en généralité dans ce sens :

b$'$) Comme b), mais en supposant seulement Y' W-asphérique ([47]).

Enfin (la condition a) de la page 4)

c) Si $Y'' \longrightarrow Y'$ est `[dans]` W sans plus, $X'' \longrightarrow X'$ aussi.

[46] NB a$_1$), a$_2$) sont notés pareil p. 4, mais a$_0$) a été oublié.
[47] C'est essentiellement le a$'$) de p. 4

`[page 40]`

La seule de ces notions qui ait la moindre envie d'être stable par composition, c'est la plus forte c). Par contre, la notion de flèche W-parfaite (cf. déf. 3) est stable spontanément par composition :

Définition 3. On dit que $f : X \longrightarrow S$ est *W-parfaite* si elle est à la fois W-propre et W-lisse.

Dans le cas $W = W_\infty$, toutes les variantes de la page précédente, à l'exclusion seulement de a_0), sont équivalentes. Ce serait intéressant de dégager des conditions minimales sur W pour assurer qu'il en soit ainsi. (Et il se pose la question si dans le cas de W_∞, a_0) suffit pour impliquer le reste - je ne m'y attends guère ...)

Dans le cas général, on a le diagramme d'implications (et encore je me suis limité)

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{c} \arrow[d, Rightarrow] & & W\text{-fibration ultraforte} \\
 & W\text{-parfait} \arrow[dr, Rightarrow] & \mathrm{b}' \arrow[d, Rightarrow] & & W\text{-fibration } W\text{-forte} \\
 & & \mathrm{b} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & W\text{-fibration hot-forte } ({}^{48}) \\
W\text{-fibration gauche} & \mathrm{a}_1 \arrow[dr, Rightarrow] & & \mathrm{a}_2 \arrow[dl, Rightarrow] & W\text{-fibration droite} \\
 & & \mathrm{a}_0 & & W\text{-pseudofibration}
\end{tikzcd}$$

`['`W`-parfait` $\Longrightarrow$ `b' encerclé].`

`[page 41]`

Proposition 8. *Soit $f : X \longrightarrow S$ dans* Cat*. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) f est une W-fibration gauche, i.e. la condition a_1 de la page 39 est vérifiée.

b) f est W-prépropre, et $\forall\ s_0 \longrightarrow s_1$ dans S, $X/s_0 \longrightarrow X/s_1$ est dans W.

c) f est W-prépropre, et une W-pseudofibration, i.e. la condition a_0 de la page 39 est vérifiée.

([49]).

[48] Il semblerait que ce soit ça, finalement, la 'bonne notion' de W-fibration, *équivalente* à a_1 et a_2, lesquelles seraient équivalentes entre elles. Cf. prop. 9, p. 48.

[49] **Corollaire.** *Quand f est* Cat*-cofibrant, alors ces conditions équivalent aussi à ceci : $\forall\ u : s_0 \longrightarrow s_1$ dans S, $u_* : X_{s_0} \longrightarrow X_{s_1}$ est dans W.*

NB Ces conditions sont satisfaites si f est en même temps W-prélisse, cf. prop. 7.

DÉMONSTRATION. On a a) $\Longrightarrow$ b) trivialement (faire $Y'' = Y/s$, $Y'' = Y/s'$ [lien avec l'assertion? Cf. p. 4.]).

b) $\Longleftrightarrow$ c) par le raisonnement de la proposition 7, car en termes de $X' = X_u = X \times_S (\mathbf{\Delta}^1, u)$, la condition b) pour $u : s_0 \longrightarrow s_1$ donné s'interprète dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X'_0 \arrow[dr, "i'_0 \in W"] \arrow[dd, "l"'] & & X'_1 \arrow[dr, "i'_1 \in W"] \arrow[dd, "l"] & \\
& X'/0 \ (\simeq X'_0) \arrow[rr, "\varphi'"] \arrow[dd, "p_0"] & & X'/1 \ (\simeq X') \arrow[dd, "p_1"] \\
X_{s_0} \arrow[dr, "i_0 \in W"'] & & X_{s_1} \arrow[dr, "i_1 \in W"] & \\
& X/s_0 \arrow[rr, "\varphi"] & & X/s_1
\end{tikzcd}$$

[il y a quelques W redondants dans le diagramme original] où i_0, i_1, i'_0, i'_1 sont dans W à cause de l'hypothèse de W-prépropreté (stable par changement de base).

Donc p_0, p_1 sont [dans] W, donc $\varphi \in W$ si et seulement si $\varphi' \in W$, or $\varphi' \in W$ est la condition a_0.

[page 42]

Prouvons enfin que b), c) impliquent a). Comme c) (donc aussi b)) est stable par changement de base, il suffit de montrer ceci : Si S a un objet final e, alors pour tout $s \in \operatorname{Ob} S$, l'inclusion $X_s \xrightarrow{i} X$ est dans W. Or on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X_s \arrow[r, "i_s \in W"] \arrow[dr, "i"'] & X/s \arrow[d, "u \in W \text{ par c) [plutôt par b)]}"] \\
& X/e = X,
\end{tikzcd}$$

qui montre bien $i = ui_s \in W$.

Dualement, si f est W-prélisse, alors la condition a_0 (f une W-pseudofibration) est équivalente à a_2 (f une W-fibration droite), et signifie aussi que les

$$s_1\backslash X \longrightarrow s_0\backslash X$$

sont dans W. Mais la notion de 'W-fibration' sur laquelle on tombe (si on ne se contente du minable a_0!) est différente dans les deux cas duaux l'un de l'autre. On aimerait dans les deux cas trouver des W-fibrations 'hot-fortes' (condition b), tout au moins en mettant le paquet (s'il le faut) - i.e. pour f W-parfait. Ça revient donc à ceci.

Question : *Soient $X \xrightarrow{f} S$, avec f W-parfait, S contractile, $s \in \operatorname{Ob} S$. L'inclusion $X_s \longrightarrow X$, est-elle dans W ?*

`[page 43]`

On va supposer seulement que f est W-lisse et une W-fibration gauche `[plutôt que` f `est simplement une` W`-fibration à droite, i.e que` f `est` W`-prélisse et une` W`-pseudofibration]` (cf. prop. 8). On va se ramener au cas où X est même fibrant sur S, en introduisant $\Phi_S(X)$ `[catégorie fibrée définie par le foncteur` $S^\circ \longrightarrow \mathrm{Cat}$`,` $s \longmapsto s\backslash X$`]` et

$$X \xrightarrow{i_X} \Phi_S(X).$$

L'ennui, c'est que j'ai fait la théorie de HOT_W jusqu'à maintenant avec l'hypothèse (qui s'avère idiote) que $W \supseteq W_\infty$ - je serai donc obligé de revoir rapidement sous quelles hypothèses plus raisonnables sur W les résultats familiers sont valables. Par exemple j'aimerais que $i_X \in W$ ([50]), de sorte qu'on ait

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, "i_s\in W", "\text{car } X\ W\text{-lisse}"'] \arrow[d, "j_s^X"'] & \Phi_S(X)_s = s\backslash X \arrow[d, "j_s^{\Phi_S(X)}"] \\ X \arrow[r, "i_X\in W"] & \Phi_S(X), \end{tikzcd}$$

on voit donc que pour prouver que l'inclusion j_s^X est `[dans]` W, il suffit de prouver la même chose pour $\Phi_S(X)$, qui est fibrant (pas seulement W-lisse). De plus, l'hypothèse pseudo-fibration sur X passe sûrement à $\Phi_S(X)$ (je réserve les deux vérifications à plus tard ([51])). On est donc ramené au cas de

$$X \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Fib}}_0 S, \qquad S \text{ contractile},$$

à prouver que l'inclusion

$$X_s \longrightarrow X$$

`[page 44]`

est dans W. Je vais prouver ceci :

Lemme. *Soient S dans* Cat*, $X \in \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$, et considérons, pour un S' dans* Cat*,*

$$\begin{array}{ccc} f & \longmapsto & f^*(X/S) = X \times_S (S', f) \\ \underline{\mathrm{Hom}}(S', S)^\circ & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Fib}}_0 S'. \end{array}$$

(Ce foncteur est défini grâce au fait que X est fibrant sur S, et peut s'interpréter donc, à S-équivalence près, en termes d'un foncteur $S^\circ \longrightarrow$ Cat *. . . ([52])). Les flèches de $\underline{\mathrm{Hom}}(S', S)$ sont transformées en flèches $\in W^{\mathrm{d}}_{S'}$.*

---

[50]en fait, $i_X \in (W_\omega)^{\mathrm{d}}_S \subseteq W^{\mathrm{d}}_S \subseteq W_S$.

[51]O.K.

[52]**NB** $\Phi_S(X)$ était même déjà scindée, définie par le foncteur $s \longmapsto s\backslash X$.

En effet, en termes de foncteurs
$$S'^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Cat},$$
si X est définie par
$$S^{\circ} \xrightarrow{\mathcal{X}} \mathrm{Cat},$$
alors $f^*(X)$ est définie par $\mathcal{X} \circ f$, et la flèche
$$\mathcal{X} \circ f \longrightarrow \mathcal{X} \circ g$$
définie par $u : f \longrightarrow g$ n'est autre que $\mathcal{X} * u$. Sa valeur en $s' \in \mathrm{Ob}\, S'$ est obtenue en prenant
$$u(s') : f(s') \longrightarrow g(s'),$$
d'où par $\mathcal{X}$
$$\mathcal{X}(u(s')) : \underbrace{\mathcal{X}(g(s'))}_{(\mathcal{X}\circ g)(s')} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{X}(f(s'))}_{(\mathcal{X}\circ f)(s')}$$
([53]). Mais l'hypothèse $X \in \underline{\mathrm{Fib}}_0 S$ signifie que les $\mathcal{X}(v)$, $v \in \mathrm{Fl}(S)$, sont tous dans W. Donc

[page 45]

$\mathcal{X}$ est dans W fibre par fibre, donc dans $W^{\mathrm{d}}_{S'}$.

Corollaire 1. *Le foncteur du lemme, composé avec*
$$\underline{\mathrm{Fib}}_0 S' \longrightarrow \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S') \overset{\text{déf}}{=} (\underline{\mathrm{Fib}}_0 S')(W^{\mathrm{d}}_{S'})^{-1}$$
se factorise par le groupoïde fondamental de $\underline{\mathrm{Hom}}$ *:*

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(S',S)^{\circ} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Fib}}_0 S' \arrow[d] \\
\prod(\underline{\mathrm{Hom}}(S',S))^{\circ} \arrow[r] & \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S').
\end{tikzcd}$$

Si f, g sont dans une même composante connexe de $\underline{\mathrm{Hom}}(S',S)$, alors f^*X et g^*X sont isomorphes (non canoniquement, en général) dans $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S')$.

Il est plus astucieux de ne pas fixer X et de considérer

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Hom}}(S',S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S), \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S'))$$

correspondant à

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{\mathrm{Hom}}(S',S) & \times & \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) & \longrightarrow & \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S') \\
(f & , & \xi) & \longmapsto & f^*(\xi).
\end{array}$$

Le lemme dira que les flèches de $S' \longrightarrow S$ sont transformées par $(*)$ en isomorphismes, d'où
$$\prod \underline{\mathrm{Hom}}(S',S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S), \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S')),$$

[53] à dégager un énoncé à part.

[page 46]

donc si $f, g : S' \rightrightarrows S$ sont deux foncteurs homotopes, alors

$$f^* \simeq g^* : \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) \rightrightarrows \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S').$$

Il s'ensuit aussitôt ceci

Corollaire 2. *Si f est un homotopisme, $f^* : \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S')$ est une équivalence de catégories.*

En effet, prenant $g : S \longrightarrow S'$ telle que

$$fg \sim \mathrm{id}_S, \qquad gf \sim \mathrm{id}_{S'},$$

on trouve que

$$\begin{aligned} g^* f^* \simeq (\mathrm{id}_S)^* &= \mathrm{id}_{\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)} \\ f^* g^* \simeq (\mathrm{id}_{S'})^* &= \mathrm{id}_{\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S')}, \end{aligned}$$

donc on trouve que (quitte à ajuster ces isomorphismes fonctoriels) f^* et g^* sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre.

J'ai l'impression ([54]) que tout ça ne doit pas utiliser plus que les axiomes standard sur W comme localiseur fondamental, tout au plus W(2) au lieu de la forme faible W(2 bis).

Revenons à X lisse sur S contractile. Le corollaire 2 implique que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hot}_W &\longrightarrow \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) \\ \xi &\longmapsto p_S^*(\xi), \end{aligned}$$

où $p_S : S \longrightarrow e$, est une équivalence. Donc dans la catégorie $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$, X est isomorphe

[page 47]

à un Cat-fibré de la forme $Z \times S \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} S$, avec Z dans Cat. Or pour $X_1 = Z \times S \longrightarrow S$, il est immédiat que $X_{1\,s} \longrightarrow X_1$ est dans W, car un produit cartésien de flèches [dans] W (savoir id_Z et $s \longrightarrow S$) est dans W. (En fait, l'inclusion est même un homotopisme!) Notons maintenant que si X_0, X_1 sont deux objets dans $\underline{\mathrm{Liss}}_0 S$, tels qu'il existe une S-flèche $X_0 \longrightarrow X_1$ qui soit dans W^{d}_S, alors $X_{0\,s} \longrightarrow X_0$ est dans W si et seulement si $X_{1\,s} \longrightarrow X_1$ l'est. En effet, on a

$$\begin{tikzcd} X_{0\,s} \arrow[r, "\in W"] \arrow[d, "i_s^{X_0}"'] & X_{1\,s} \arrow[d, "i_s^{X_1}"] \\ X_0 \arrow[r, "\in W"] & X_1 \end{tikzcd}$$

ici on utilise sans doute W(2), non seulement W(2 bis),

[54] O.K.

qui prouve le résultat.

Il est vrai que le fait que $X = X_0$ et $X_1 = Z \times S$ soient isomorphes dans $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$ n'implique pas, par lui-même, l'existence d'une

`[page 48]`

chaîne d'isomorphismes provenant de flèches dans W^{d}_S. Mais en fait, si dans l'énoncé du corollaire 2 ci-dessus on compare X dans $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$ à $g^*f^*(X)$, grâce à une homotopie $\mathrm{id}_S \sim fg$, on trouve bel et bien une suite de foncteurs $\varphi_i : S \longrightarrow S$, avec $\varphi_0 = \mathrm{id}_S$, $\varphi_N = fg$, et φ_i et φ_{i+1} reliés par une flèche dans $\underline{\mathrm{Hom}}(S,S)$, donc on a une suite d'objets $X_i = \varphi_i^*(X)$ de $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$ (avec $X_0 = X$, $X_N = g^*f^*X$), et X_i et X_{i+1} reliés par une flèche *dans* $\underline{\mathrm{Fib}}_0 S$ (pas seulement dans $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S)$), laquelle flèche est dans $W^{\mathrm{d}}_S = W^{\mathrm{f}}_S$. Donc on gagne, sous réserve de vérifications de routine diverses ([55]). Donc modulo celles-ci, on aura

Proposition 9 ([56],[57]). *Supposons que X dans* Cat$/S$ *soit une W-fibration à gauche (cf. prop. 8). Alors c'est même une W-fibration (au sens de b), page 40, où c'est appelé 'W-fibration* hot*-forte'), en d'autres termes, si $S'' \longrightarrow S'$ est sur S avec S'', S' contractiles, alors $X'' \longrightarrow X'$ est dans W* ([58]). *On a sans doute mieux : si $S'' \longrightarrow S'$ est un homotopisme, alors $X'' \longrightarrow X'$ est dans W.*

`[page 49]`

Prouvons (si nous pouvons) ce complément sympathique. Je précise que j'ai eu à faire l'hypothèse de W-prélissité (où de W-prépropreté) pour être sûr que l'image inverse $X \times_S S'$, par $f' : S' \longrightarrow S$, coïncide bien avec f^* sur les $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W$ - autrement je n'ai aucune chance. 'On sait' (tout est à revoir!) que c'est O.K. dans les trois cas X W-lisse, X W-propre, X une W-fibration (mais en quel sens???). La vérification à faire (quand on travaille avec les W^{d}_S) est celle-ci :

$$(*)\qquad \begin{array}{l} X \xrightarrow{i_X} \Phi_S(X) = Y \text{ est dans } W^{\mathrm{d}}_S \text{ (sans mérite), et} \\ \text{le reste par tout changement de base.} \end{array}$$

Mais pour des $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}/S$ qui sont W-prélisse, la W^{d}_S-équivalence coïncide avec W^{f}_S, laquelle est préservée par changement de base, ainsi que l'hypothèse sur X, Y. Donc on est tranquille.

On est ramené à prouver que si X est W-prélisse sur S et une W-pseudofibration, et si $S' \longrightarrow S$ est un homotopisme, alors $X' \longrightarrow X$ est dans W. Par l'argument de tantôt utilisant $X \longrightarrow \Phi_S(X)$, on se ramène au cas où X est fibrée scindée.

---

[55] O.K.

[56] C'est ok en supposant que W est *fortement* saturé, i.e. $\mathrm{hot}_W(f)$ isomorphisme $\Longrightarrow f \in W$.

[57] Donc W-fibration à gauche $\Longleftrightarrow$ W-fibration à droite $\Longleftrightarrow$ W-fibration.

[58] on trouve seulement que $\mathrm{hot}_W(X'') \longrightarrow \mathrm{hot}_W(X')$ `[est un]` isomorphisme.

[page 50]

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
S' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & S \arrow[d, "p"] \\
& e
\end{tikzcd}$$

La flèche $X' = f^*(X) \longrightarrow X$ s'interprète dans Hot_W comme

$$(*) \qquad p'_!(f^*(\xi)) \longrightarrow p_!(\xi) \ , \qquad \text{où } \xi = \mathrm{hot}_{S,W}(X).$$

Je dis que cette flèche est [un] isomorphisme, i.e. que pour tout $\eta \in \mathrm{Hot}_W$, la flèche transposée

$$(**) \qquad \mathrm{Hom}_W(p_!(\xi), \eta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_W(p'_!(f^*(\xi)), \eta)$$

est [une] bijection. Admettant la formule d'adjonction, la flèche $(**)$ s'interprète comme

$$\mathrm{Hom}_W(\xi, \underbrace{p^*(\eta)}_{\eta_S}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_W(f^*(\xi), \underbrace{p'^*(\eta)}_{f^*(\eta_S)}),$$

i.e.

$$\mathrm{Hom}_W(\xi, \eta_S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_W(f^*(\xi), f^*(\eta_S)),$$

que ce soit [un] isomorphisme résulte donc de f^* pleinement fidèle sur les $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}$. Or on a vu que f^* est une équivalence (cor. 2, page 46).

[page 51]

Je vais reprendre les propositions 9 et 8, un peu mal foutues.

Théorème 3. *On suppose que W satisfait à* W(1,2,3). *Soit $f : X \longrightarrow S$. Considérons les conditions suivantes.*

a) $\forall\, S'' \longrightarrow S'$ *sur S, avec S'', S'* contractiles, $X'' \longrightarrow X'$ *est dans W.*

a′) $\forall\, S'$ *sur S, avec S' contractile, et $s' \in S'$, l'inclusion*

$$X_{s'} \hookrightarrow X' = X \times_S S'$$

est dans W.

a_1) Comme a′), mais en supposant que S' a un objet final (au lieu de S' contractile).

a_2) Comme a′), mais en supposant que S' a un objet initial.

b_1) *f est W-*prépropre *(i.e. a') est satisfait quand s' est un objet final de S', sans autre condition sur S' dans* Cat$/S$*), et de plus pour toute flèche $s_0 \longrightarrow s_1$ dans S, la flèche induite $X/s_0 \longrightarrow X/s_1$ est dans W (i.e. a'* [plutôt a]*) est satisfait pour $Y/s_0 \longrightarrow Y/s_1$* [plutôt *$S/s_0 \longrightarrow S/s_1$*]*).*

b_2) *f est W-*prélisse *(i.e. a') est satisfait quand s' est un objet initial de S', sans autre condition sur S'), et de plus les flèches $s_0\backslash X \longrightarrow s_1\backslash X$* [plutôt *$s_1\backslash X \longrightarrow s_0\backslash X$*] *(pour $s_0 \longrightarrow s_1$ dans S) sont dans W, (i.e. a'* [plutôt a]*) satisfait pour $s_1\backslash Y \longrightarrow s_0\backslash Y$* [plutôt *$s_1\backslash S \longrightarrow s_0\backslash S$*]*).*

c_1) *f est W-prépropre et une W-pseudofibration, i.e. la condition a') est satisfaite dans les deux cas suivants: 1°) s' est un objet final de S', 2°) $S' = \mathbf{\Delta}^1$.*

c_2) *f est W-prélisse et une W-pseudofibration, i.e. a') dans les deux cas: 1°) s' est objet initial de S', 2°) $S' = \mathbf{\Delta}^1$.*

Toutes ces 8 conditions sont équivalentes. Elles impliquent la suivante :

d) *Soit $S'' \xrightarrow{u} S'$ un homotopisme dans* Cat$/S$*, et considérons $u_X : X'' \longrightarrow X'$. Alors* $\mathrm{hot}_W(u_X)$ *est* [un] *isomorphisme. (Donc si W est fortement saturé, $u_X \in W$. Donc sous cette condition sur W, d) équivaut aux conditions précédentes.)*

[page 52]

Définition 4. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat est une *W-fibration*, si elle satisfait les conditions équivalentes a) à c_2) de la proposition 9.

Corollaire 1. *Si f est W-propre ou W-lisse, pour que f soit une W-fibration, il faut et il suffit que f soit une W-pseudofibration, i.e. que pour $S' = \mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow S$, les inclusions des deux fibres*

$$X'_0 \xrightarrow{i_0} X' \xleftarrow{i_1} X'_1$$

de $X' = X \times_S S'$ soient dans W.

Corollaire 2. *Supposons f* Cat*-fibrant. Alors f est une W-fibration si et seulement si pout toute flèche $u : s \longrightarrow s'$ dans S, $u^* : X_{s'} \longrightarrow X_s$ est dans W. Énoncé dual si f est* Cat*-cofibrant.*

Corollaire 3. *Supposons f W-prépropre et W-prélisse (par exemple f W-parfait). Alors f est une W-fibration.*

Proposition 10. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche dans* $\underline{\mathrm{Fib}}_W S$ ([59]) *(sous-catégorie pleine de* Cat$/S$ *formée des W-fibrés sur S). Si $\forall\, s \in S$, $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ est dans W, alors $f \in W$.*

Considérons

[59] X et Y tous deux prépropres ou tous deux prélisses suffit.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ \Phi_S(X) \arrow[r, "\Phi_S(f)"'] & \Phi_S(Y), \end{tikzcd}$$

où $i_X, i_Y \in W$, donc $\Phi_S(f) \in W \Rightarrow f \in W$. Or le fait que X `[est]` W-fibrée sur S implique que $i_X \in W_S^{\mathrm{f}}$ (il suffit même que X soit prépropre `[plutôt prélisse]` sur S), itou pour Y, i_Y. Donc l'hypothèse $f \in W_S^{\mathrm{f}}$ implique $\Phi_S(f) \in W_S^{\mathrm{f}}$, donc $\Phi_S(f) \in W$ par `[la]` proposition 5 (page 29).

[page 53]

IV Sur l'axiome W(4) et ses variantes.

([60]). J'ai passé des jours à essayer de prouver que toutes ces variantes sont équivalentes. Je vais donner une liste de celles, parmi ces variantes, qui avec le recul me paraissent encore avoir une utilité. (Avec des notations différentes de celles des pages 13-14.)

$\boxed{\mathrm{W(4a)}}$ Toute W-fibration (cf. th. 3, p. 51, déf. 3, p. 52) est ultraforte, ce qui revient à ceci: pour

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[from=u, "f"'] & Y' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

cartésien dans Cat, si $f \in \underline{\mathrm{Fib}}_W$, $p \in W$, alors $q \in W$.

W(4a′) Comme a), en supposant $f \in \mathrm{Parf}_\omega$, i.e. f W_ω-parfait (donc une W_ω-fibration), où $W_\omega \subseteq W$ est la plus petits partie Σ de Fl(Cat) satisfaisant W(1, 2 bis, 3).

$\boxed{\mathrm{W(4b)}}$ Soit un diagramme commutatif $\begin{tikzcd}[column sep=small] X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$ dans Cat, avec $p, q \in \mathrm{Fib}_W$, $f \in W$.

Alors $\forall s \in S$, $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ [est dans W].

W(4b′) Comme b), en supposant [de plus] X et Y fibrés scindés sur S, f compatible avec [les] scindages (donc foncteur cartésien).

W(4b″) Comme b), en supposant p, q *W-parfaits.*

$\boxed{\mathrm{W(4c)}}$ Soit $f : X \longrightarrow Y$, avec $f \in \mathrm{Fib}_W \cap W$, alors les fibres de f sont W-asphériques.

W(4c′) Comme c), en supposant $f \in \mathrm{Parf}_\omega \cap W$. (C'est l'ancien W(4b″), dépouillé du W_∞-parasite.)

[page 54]

J'ai cerclé les notions [encadrées ici] qui ont été vraiment utiles. Pratiquement, on peut parier que c'est la notion la plus forte, W(4a), qui est la seule importante. Voici les implications tautologiques (à l'exception de W(4a′) $\Longrightarrow$ W(4b), qui est démontré dans la démonstration de la proposition 4 (pages 6-10) ([61])).

[60] Cf. aussi partie VI (HOT_W), p. 186-196

[61] Cette démonstration utilise une notion plus forte de W-fibration que celle du théorème 3, p. 51.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{a} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \mathrm{a}' \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \mathrm{b} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\mathrm{b}' & \mathrm{c} \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{b}'' \\
 & \mathrm{c}' &
\end{tikzcd}$$

implication douteuse,
il faut affaiblir
un peu b), en
renforçant la
notion de
W-fibration
utilisée
pour énoncer b)

J'ai surtout sué pour montrer que c$'$) $\Longrightarrow$ c), ou c) $\Longrightarrow$ b), sans y arriver. L'effort m'a permis de me débarrasser de diverses idées fausses, et de les remplacer par des justes, cf. plus bas. Il y a quand même un résultat positif qui surnage :

Proposition 1. *La condition b) (et sans doute même b$'$) et b$''$) ([62]), mais je ne vais pas le prouver ici ...) implique sans doute a) pour $\bar{W}$, le saturé fort de W. En tous cas, si W est fortement saturé, les conditions a), a$'$), b) (et sûrement aussi b$'$) et b$''$)) sont équivalentes.*

Démonstration de b) $\Longrightarrow$ a), quand W est fortement saturé. En fait, moyennant b) (et sans même supposer W fortement saturé), nous allons prouver que si on a

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "f'"] \\
Y & Y' \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}$$

cartésien dans Cat, avec

`[page 55]`

f une W-fibration, et $p \in W$, alors $\underline{q \in \bar{W}}$, i.e. $\mathrm{hot}_W(q)$ `[est un]` isomorphisme. Pour ceci, nous interprétons la flèche q dans Hot_W de la façon suivante. Soit

$$\xi = \mathrm{hot}_{Y,W}(X/Y), \qquad \xi' = p^*(\xi),$$

[62]et en supposant dans le cas de b$''$, que W satisfait la condition des limites inductives W(6 bis), cf. prop. 5 du 'corollaire' de la, page 14.

qui dit que q s'identifie à la flèche canonique

$$(*) \qquad H_\bullet^{\mathrm{HOT}_W}(Y',\xi') \longrightarrow H_\bullet^{\mathrm{HOT}_W}(Y,\xi) \qquad \text{dans } \mathrm{Hot}_W = \mathrm{HOT}_W(e),$$

où on note de plus que $\xi \in \mathrm{HOT}_W(Y)$ est un coefficient *localement constant* sur Y.

Établissons d'abord cette interprétation de q. Notons que comme $X \in \underline{\mathrm{Fib}}_W Y$, l'image inverse $\xi' = p^*(\xi)$ n'est autre que $\mathrm{hot}_{Y',W}(X' = X \times_Y Y')$. D'autre part, si $g : Y \longrightarrow e$, $g' : Y' \longrightarrow e$ sont les flèches structurales, les deux membres de $(*)$ s'interprètent resp. comme $g'_!(\xi')$ et $g_!(\xi)$ (les $g'_!$ et $g_!$ au sens du prédérivateur HOT_W). Or le calcul de $g'_!$, $g_!$ nous donne que les deux membres s'identifient resp. à

$$\mathrm{hot}_W(X'), \qquad \mathrm{hot}_W(X),$$

et nous admettons que la flèche

$$\mathrm{hot}_W(X') \longrightarrow \mathrm{hot}_W(X)$$

n'est autre que $\mathrm{hot}_W(q)$. D'ailleurs, comme X est W-fibrée sur S, par définition pratiquement, ξ est dans $\mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$. Donc il nous suffira de prouver le

[page 56]

Corollaire. *Supposons que W satisfait à W(4b), et soit $p : S' \longrightarrow S$ dans W, $\xi \in \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S)$, $\xi' = p^*(\xi)$. Alors*

$$H_\bullet(S',\xi') \xrightarrow{\sim} H_\bullet(S,\xi)$$

est un isomorphisme dans Hot_W.

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver que pour tout $\eta \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Hot}_W$ on a une bijection pour les $\mathrm{Hom}(-,\eta)$. Par la formule d'adjonction sur S, S', cette application entre les Hom dans Hot_W s'identifie [à]

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{HOT}_W(S)}(\xi,\eta_S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{HOT}_W(S')}(\xi',\eta_{S'}),$$

où $\eta_S = p^*(\eta)$, $\eta_{S'} = p'^*(\eta)$ [plutôt $\eta_S = g^*(\eta)$, $\eta_{S'} = g'^*(\eta)$, où $g : S \longrightarrow e$, $g' : S' \longrightarrow e$ sont les flèches structurales], donc $\eta_{S'} = p^*(\eta_S)$, et la flèche $(*)$ est la flèche sur les Hom induite par le foncteur

$$p^*_{\mathrm{lc}} : \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W^{\mathrm{lc}}(S').$$

Or moyennant l'axiome W(4b) (que nous n'avons pas utilisé jusqu'à présent), ledit foncteur est une *équivalence de catégories* si $p \in W$ (cf. VI, p. 204).

q.e.d.

De peur de les oublier, je vais maintenant faire une liste des petites questions que j'ai élucidées chemin faisant en gribouillant.

1°) Si X, Y sont W-lisses sur S, et $f : X \longrightarrow Y$ un S-morphisme tel que $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ soit W-lisse pour tout $s \in \mathrm{Ob}\,S$, il ne s'ensuit *pas* que f soit W-lisse. Mais c'est pourtant vrai quand X et Y sont fibrées scindées sur S (ce

`[page 57]`

qui implique déjà leur W-lissité sur S), et f compatible avec les scindages et a fortiori cartésien. Énoncé dual pour les catégories cofibrées scindées et les foncteurs strictement cartésiens entre elles qui sont W-propres fibre par fibre : ils sont W-propres.

2°) J'étais intéressé, dans un cas de catégories fibrées scindées X, Y sur S et d'un foncteur strictement cartésien $f : X \longrightarrow Y$, supposé W-parfait fibre par fibre, de conclure que f soit aussi W-parfait. (C'était un cas où de plus on sait que X, Y sont aussi des W-fibrés sur S, i.e. les fonteurs changement de base $X_{s'} \longrightarrow X_s$, $Y_{s'} \longrightarrow Y_s$ sont dans W. Mais ça n'a pas beaucoup servi ...) La question qui restait, en 1°), était celle de la W-*propreté* de f. Mais c'est sans espoir (même pour $Y = S$), en vertu de la brillante

Proposition 2. *Supposons que* $S = 0 \begin{smallmatrix} \nearrow a \\ \searrow b \end{smallmatrix}$ *, et soit* Z *une catégorie sur* S*. Alors* $\Phi(Z)$ *est propre sur* S *si et seulement si* $Z = \emptyset$*.*

Prenons alors dans 2°) ci-dessus $X = \Phi(Z)$, $Y = S$, $f : \Phi(Y) \longrightarrow S$ `[plutôt` $f : \Phi(Z) \longrightarrow S$`]` le morphisme structural (donc les f_s sont W-parfaits), alors f n'est propre que si $X = \emptyset$. Pourtant, si on prend Z W-fibrée sur S, $\Phi(Z)$ l'est aussi, et on a un contre-exemple à 2°).

Mais on s'est quand même convaincu du résultat suivant :

Proposition 3. *Soient* X, Y *catégories fibrées scindées sur* S, $f : X \longrightarrow Y$ S*-foncteur strictement cartésien, tel que*

`[page 58]`

pour tout $s \in S$, $f_s : X_s \longrightarrow Y_s$ *soit* W-fibrant. *Alors,* si W satisfait W(4a), f *est* W-*fibrant.*

(J'espérais avoir que f est W-fibrant 'à l'œil', pour prouver que W(4c) implique W(4b). Mais j'étais obligé de supposer W(4a) ...)