LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Appendice au Chapitre XII

[page 1]

Proposition (?) ([1]). *Soit X dans* Cat*, avec b, c dans X tels que*

a) $b \times c$ est dans X.

b) $\forall\ x$ dans X, $b(x)$ ($\overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Hom}_X(x,b)$) et $c(x)$ sont $\neq \emptyset$, i.e. $X/b \longrightarrow X$ et $X/c \longrightarrow X$ sont surjectifs sur les objets.

Alors X est $\mathbf{W}_\infty$-asphérique. ([2])

Le fait que b soit un plus grand élément de $\operatorname{Ob} X$ assure déjà la 0-connexité.

Pour la 1-connexité, prouvons que dans le groupoïde fondamental $\Pi(X)$, $a \overset{\text{déf}}{=} b \times c$ devient un élément final.

$$\begin{tikzcd}
b \times c \arrow[r] \arrow[d] & b \\
c &
\end{tikzcd}$$

Pour ceci, prouvons d'abord que $\forall\ x$ dans X, tous les éléments de $a(x) = b(x) \times c(x)$ sont égaux dans $\operatorname{Fl} \Pi(X)$. En effet, comme $b \times c \longrightarrow b$ est [un] isomorphisme, donc [un] monomorphisme dans $\Pi(X)$, cela montre déjà que si $\beta, \beta' \in b(x)$, $\gamma, \gamma' \in c(x)$, d'où (β,γ), (β,γ'), $(\beta',\gamma') \in b(x) \times c(x)$, on a $(\beta,\gamma) = (\beta,\gamma')$ dans $\Pi(X)$ (puisque $\operatorname{pr}_1(\beta,\gamma) = \operatorname{pr}_1(\beta,\gamma')$, et de même (en utilisant que pr_2 est [un] isomorphisme, donc [un] monomorphisme) $(\beta,\gamma') = (\beta',\gamma')$). Donc tous les $(\beta,\gamma) \in b(x) \times c(x) = a(x)$ sont égaux dans $\operatorname{Fl} \Pi(X)$. Pour achever de prouver que a est objet final de $\Pi(X)$, il suffit de voir que toute flèche *dans* $\Pi(X)$ d'un $x \in \operatorname{Ob} X$ dans a, provient d'une flèche $x \longrightarrow a$ dans X. Mais une flèche dans $\Pi(X)$ est obtenue par un chemin dans X

$$\begin{tikzcd}
x = x_0 \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "\alpha_0"'] & x_1 \arrow[d, "\alpha_1"] & x_2 \arrow[l, "u_2"'] \arrow[r] \arrow[dl, "\alpha_2"] & \cdots & x_{2N} = a \arrow[l, "u_{2N}"'] \\
 & a. & & &
\end{tikzcd}$$

Prenons une flèche $\alpha_0 : x \longrightarrow a_0$ dans X, je dis que la

[page 2]

classe d'homotopie du chemin c (i.e. son image dans $\operatorname{Fl}(\Pi(X))$ est égale à celle de u_0. Pour le voir, choisissons pour tout $i \in [0, 2N]$ une flèche $\alpha_i : x_i \longrightarrow a$. (Ça existe grâce à l'hypothèse b)). Je dis que pour chaque $i \in [0, 2N]$, le triangle

[1] Cf. pages 11 ff. pour les contrexemples-clef.

[2] Faux, cf. plus bas. X est 1-connexe, mais pas nécessairement 2-connexe.

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[rr, "c_i"] \arrow[dr, "\alpha_0"'] & & x_i \arrow[dl, "\alpha_i"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

dans $\Pi(X)$ est commutatif, où c_i désigne la classe d'homotopie du chemin de x_0 à x_i définie par les u_i ($i \in [1, i]$) [plutôt ($i \in [1, 2N]$)]. Nous le faisons par récurrence sur i, l'assertion est triviale si $i = 0$ (c_0 représente l'application identitique). Le diagramme

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[rr, "c_i"] \arrow[rrrr, bend left, "c_{i+1}"] \arrow[dr, "\alpha_0"'] & & x_i \arrow[rr, "u_{i+1}"] \arrow[dl, "\alpha_i"] & & x_{i+1} \arrow[dlll, "\alpha_{i+1}"] \\ & a & & & \end{tikzcd}$$

montre qu'il suffit de prouver que pour $i \in [0, 2N-1]$ le triangle

$$\begin{tikzcd} x_i \arrow[rr, "u_{i+1}"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & x_{i+1} \arrow[dl, "\alpha_{i+1}"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

est commutatif dans $\Pi(X)$. (**NB** u_{i+1} est en sens directe ou rétrograde, suivant que i est paire ou impaire.) Mais cela résulte du fait que l'image de $\mathrm{Hom}_X(x_i, a)$ (resp. $\mathrm{Hom}_X(x_{i+1}, a)$)

[page 3]

dans $\mathrm{Fl}\,\Pi(X)$ est réduite à un seul élément.

Ainsi on trouve que X *est* 1-*connexe.* Il y a donc de l'espoir! Il reste à prouver

$$H^i(X, M) = 0, \qquad i \geq 2, \quad M \text{ coefficient constant.}$$

J'ai regardé le cas lorsqu'on a ceci : $b = c$, $\mathrm{Ob}\, X = \{b, b \times b\}$, $\mathrm{Hom}_X(b \times b)$ [plutôt $\mathrm{Hom}(b \times b, b)$] $= \{$ réunion disjointe des ensembles $u \circ \mathrm{pr}_1$ et $u \circ \mathrm{pr}_2$, avec $u \in \mathrm{Hom}_X(b, b) = G$ un monoïde quelconque $\}$. Alors X° est fibrée, via $I \longmapsto b^I$, sur la sous-catégorie pleine S de Ens formée de $\{0\}$ et $\{0, 1\}$, et donc X est cofibrée (en particulier propre) sur $S^\circ \overset{\text{déf}}{=} T$. (NB $S^\circ = T$ a un objet initial, mais non un objet final. Sa cohomologie à valeurs dans un préfaisceau quelconque n'est pas toujours triviale, cf. ci-dessous.)

On trouve ['On trouve' barré]

$$H^n(X, M) \Longleftarrow H^p(T, \underbrace{R^q f_*(M_X)}_{= \mathcal{H}^q}), \qquad \text{où } f : X \longrightarrow S^\circ$$

[$n = p + q$]. J'admet ici (provisoirement) ceci :

$$\begin{aligned} H^p(T, F) &= 0\,, && \text{pour } p \geq 2, \text{ tout } F \in T^\wedge, \\ H^0(T, F) &= \mathrm{Ker}\,\delta\,, \\ H^2(T, F) &= \mathrm{Coker}\,\delta\,, \end{aligned}$$

où $\delta : F_0 \longrightarrow F_1$ est défini comme la différence $\delta = p_1^* - p_2^*$, où p_1, p_2 sont les deux projections de $\{0,1\} \simeq \{0\}^2$ dans $T = S^\circ$. On a de plus

$$(\mathcal{H}^q)_0 = H^q(G,M), \qquad (\mathcal{H}^q)_1 = H^q(G \times G, M),$$

et

$p_1^*,\ p_2^* \ :\ H^q(G,M) \rightrightarrows H^q(G{\times}G,M)$ sont les transposés de pr_1, $\mathrm{pr}_2 : G \times G \longrightarrow G$.

[page 4]

On vérifie aisément que

$$H^0(T,\mathcal{H}^q) = 0 \qquad \text{si } q \geq 1,$$

et il reste

$$H^n(X,M) \simeq H^1(S,\mathcal{H}^{n-1}) = \operatorname{Coker}(\delta : H^{n-1}(G) \longrightarrow H^{n-1}(G \times G)).$$

Cela donne, pour $n = 2$,

$$\begin{aligned} H^2(X,M) &\simeq \operatorname{Coker}\Big(\delta : \operatorname{Hom}_{\mathrm{mon}}(G,M) \longrightarrow \underbrace{Hom_{\mathrm{mon}}(G \times G, M)}_{\operatorname{Hom}_{\mathrm{mon}}(G,M) \times \operatorname{Hom}_{\mathrm{mon}}(G,M)}\Big) \\ &\simeq \operatorname{Coker}\Big(u \longmapsto (u,-u) : H \longrightarrow H \times H\Big), \end{aligned}$$

où H est le groupe abélien $\operatorname{Hom}_{\mathrm{mon}}(G,M)$.

D'où

$$H^2(X,M) \ \simeq\ H = \operatorname{Hom}_{\mathrm{mon}}(G,M).$$

Donc

> X est 2-connexe si et seulement si le groupe *abélien* enveloppant du monoïde G est nul.

Ainsi, si G est un groupe abélien $\neq 0$, X *n'est pas* 2-connexe.

Corollaire. $\Psi = \begin{tikzcd}[row sep=small] & b_0 \\ a_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & c_0 \end{tikzcd}$ *n'est* pas *totalement* $\mathbf{W}_\infty$*-asphérique; i.e. si on a un diagramme* $\begin{tikzcd}[row sep=small] & b \\ a \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & c \end{tikzcd}$ *dans une catégorie* $X \in \operatorname{Ob}\mathrm{Cat}$, *tel que sa somme amalgamée dans* $X^\wedge$ *soit égale à* e_X, *il ne s'ensuit pas que* X *soit* $\mathbf{W}_\infty$*-asphérique.* (Mais peut-être voudra bien être 1-connexe?)

[page 5]

Question. *Y-a-t-il d'autres objets totalement* $\mathbf{W}_\infty$*-asphériques de* Cat*, que les catégories ayant un objet final?* Je suspecte à présent que non – donc que l'on ne peut améliorer substantiellement sur la notion déjà connue d'immersion ouverte de Dwyer.

Dans le diagramme

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\substack{\text{cocart.}\\ \text{et cart.}}"] & X \arrow[d, "q"] & T \arrow[l, hook', dotted, "j"'] \arrow[d, dotted, "\text{iso}"] \\ U' \arrow[r, hook, "i'"] & X' & T', \arrow[l, hook', dotted, "j'"'] \end{tikzcd}$$

prenons

$$U = \Psi,\quad T = \{t\} = e \text{ catégorie finale,}$$
$$t \text{ objet final de } X,$$
$$\text{i.e. } H_t = (u \longmapsto \mathrm{Hom}_X(u,t)) = e_U \in \mathrm{Ob}\, U^\wedge \ (^3).$$

Prenons pour U' la catégorie dont il est question dans la 'proposition' hypothétique (et fausse) p. 1 avec $b = c$, plus précisément une catégorie avec deux objets b et $b \times b$, un groupe (voire un monoïde) G d'automorphismes `[(voire d'endomorphismes)]` de b, et les autres flèches celles qui s'en déduisent, en exigeant que $b \times b$ soit bel et bien le carré cartésien de b. On trouve une catégorie cofibrée (donc propre) sur la catégorie T opposée de celle des ensembles finis de la forme $\{0\}$ et $\{0,1\}$ (deux objets) avec comme fibres B_G et $B_{G\times G}$ respectivement (B_π = catégorie avec un seul objet, et monoïde d'endomorphismes π). Le foncteur

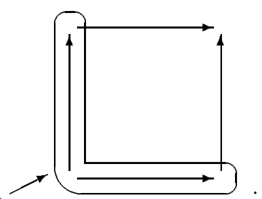
$$U = \Psi \longrightarrow U'$$

est celui donné par le diagramme

[page 6]

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & b \\ b \times b \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & \\ & b \end{tikzcd}$$

[3]i.e. X déduit de $U = \Psi$ en lui rajoutant un objet final t – donc $X \simeq \mathbf{\Delta}^1 \times \mathbf{\Delta}^1$,



Ψ .

dans U', et les hypothèses a), b) de la page 1 assurent que la somme amalgamée $\varinjlim$ de ce diagramme dans $U'^\wedge$ est $e_{U'}$, i.e. que

$$p_!(e_U) = e_{U'}.$$

Il s'ensuit que dans la somme amalgamée, X' envisagée dans $(*)$, l'unique élément t' de T' est objet final de X'. On a vu que U' est 1-connexe, mais non 2-connexe si le groupe abélien enveloppant de G (i.e. $G/$(groupe des commutateurs) dans le cas où G est un groupe) n'est pas réduit à 1. L'exemple le plus économique s'obtient en prenant $G = \{\pm 1\}$ le groupe à deux éléments. C'est donc un cas où dans $(*)$ on a

$$i \in W \text{ (et même } i \text{ asphérique)}, \qquad \text{mais } i' \notin W,$$

et qui a l'avantage sur l'exemple plus sophistiqué de la page 103 (prop. 10) de ne mettre en jeu que des catégories finies – et même fort petites !

Procédons maintenant comme dans la proposition 11, en désignant par U'' la catégorie déduite de U' en lui ajoutant un objet

`[page 7]`

final, et soit

$$p' : U' \longrightarrow U''$$

l'inclusion, de sorte que

$$p'_!(e_{U'}) \;=\; (p'p)_!(e_U) = U' \quad \text{en tant qu'objet dans } U''^\wedge$$
$$\text{(sous-préfaisceau du préfaisceau final } e_{U''}\text{).}$$

Considérons

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p''=p'p"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart. et cart.}"] & X \arrow[d, "q''"] & T \arrow[l, hook', dotted, "j"'] \arrow[d, dotted, "\text{iso}"] \\
U'' \arrow[r, hook, "i''"] & X'' & T''. \arrow[l, hook', dotted, "j''"']
\end{tikzcd}$$

Cette fois U, X *et* U'' sont $\mathbf{W}_\infty$-asphériques (et même contractiles toutes trois), donc i, p'' sont dans W, pourtant X'' n'est pas $\mathbf{W}_\infty$-asphérique (donc $i'', q'' \notin \mathbf{W}_\infty$), car pour qu'elle le soit, i.e. pour que $i'' \in \mathbf{W}_\infty$, il faudrait (prop. 7, cor. page 85 ([4])) que i'' soit $\mathbf{W}_\infty$-asphérique, i.e. que U''/t'' soit $\mathbf{W}_\infty$-asphérique. Mais par construction $U''/t'' \simeq U'$, qui n'est *pas* $\mathbf{W}_\infty$-asphérique.

Voilà un exemple encore plus simple d'un foncteur $f : \Psi \longrightarrow X$ tel que $f_!(e_\Psi)$ ne soit pas $\mathbf{W}_\infty$-asphérique, i.e. d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & b \\
a \arrow[ur, "\beta_0"] \arrow[dr, "\gamma_0"'] & \\
 & c
\end{tikzcd}$$

[4] pas encore démontré !

[page 8]

dans une catégorie V, telle que la limite inductive $L = b \amalg_a c$ *dans* $V^\wedge$ soit un objet non asphérique de $V^\wedge$, i.e. V/L soit non asphérique. Je sais qu'il faut, pour un tel contre-exemple, que $a \longrightarrow b$ et $a \longrightarrow c$ ne soient pas des monomorphismes. L'idée, c'est de prendre un exemple universel où ces flèches ne soient pas [des] monomorphismes, en prenant

[page 9]

$$V = \left(\begin{tikzcd} & & b \\ 0 \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] & a \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\ & & c \end{tikzcd} \right)$$

avec

$$\beta\lambda = \beta\mu \qquad \text{et} \qquad \gamma\lambda = \gamma\mu$$

les deux seules flèches non identiques, en plus des quatre flèches marquées β, γ, λ, μ.

On trouve que

$$b \amalg_a c \xrightarrow{\sim} e_X \qquad \text{(somme amalgamée dans } V^\wedge\text{)}.$$

Pourtant V n'est pas asphérique, ni même 1-connexe : il est homotope à la sous-catégorie ouverte $V_0 = (0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightrightarrows}} a)$, car on a une rétraction $V \xrightarrow{r} V_0$ (envoyant b et c sur a), et une flèche $ir \longrightarrow \mathrm{id}_V$ (où $i : X_0 \hookrightarrow X$ est l'inclusion). Donc V a le même type d'homotopie *que* V_0, qui est un cercle. Donc on a intérêt à prendre ce V, où $\tilde{V}$ déduit de V en rajoutant un élément final e,

$$\tilde{V} = \left(\begin{tikzcd} & & b \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & a \arrow[ur] \arrow[dr] & & e \\ & & c \arrow[ur] & \end{tikzcd} \right),$$

comme U', pour les contre-exemples pages 6 et 7.

[page 10]

2.6. Contre-exemples pour la totale asphéricité.

Je me suis finalement convaincu que

$$\Psi = \left\{ \begin{tikzcd} & b_0 \\ a_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & c_0 \end{tikzcd} \right\}$$

n'est *pas* totalement asphérique (pour le localiseur $\mathbf{W}_\infty$ – dans le présent numéro, on supposera $W = \mathbf{W}_\infty$), ou ce qui revient au même, qu'on peut avoir un diagramme de type Ψ

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} & b \\ a \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\ & c \end{tikzcd}$$

dans une catégorie $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}$, dont la limite inductive $b \amalg_a c$ dans $Z^\wedge$ soit le préfaisceau final e_Z, i.e. tel que l'on ait

$$b(z) \amalg_{a(z)} c(z) \xrightarrow{\sim} \text{ensemble ponctuel}$$

pour tout objet z de Z (où $a(z) = \mathrm{Hom}_Z(a, z)$ `[plutôt` $\mathrm{Hom}_Z(z, a)$`]`) sans que pour autant Z soit asphérique, ni même 1-connexe ([5]). L'exemple le plus simple que j'ai trouvé, est l'exemple 'universel' d'un diagramme $(*)$ où ni l'une ni l'autre des deux flèches $a \longrightarrow b$, $a \longrightarrow c$ n'est `[un]` monomorphisme (car si elle l'est, alors on peut prouver que Z est bel et bien asphérique, comme nous verrons par la suite). C'est la catégorie

$$Z = \left\{ \begin{tikzcd} & & b_0 \\ 0_0 \arrow[r, shift left, "\lambda_0"] \arrow[r, shift right, "\mu_0"'] & a_0 \arrow[ur, "\beta_0"] \arrow[dr, "\gamma_0"'] & \\ & & c_0 \end{tikzcd} \right\}$$

`[page 11]`

déduite de Ψ en lui rajoutant un objet 0_0, relié à a_0 par deux flèches distinctes λ_0, μ_0, telles que

$$\beta_0\lambda_0 = \beta_0\mu_0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_0\lambda_0 = \gamma_0\mu_0,$$

ces deux flèches composées étant, avec les quatre flèches β_0, γ_0, λ_0, μ_0 marquées sur le diagramme, les seules (six) flèches non identiques de Z. Ψ immergée dans Z comme un fermé, de complémentaire la catégorie ponctuelle réduite à 0_0. (NB L'immersion fermée $\Psi \longrightarrow Z$ n'est pas immersion de Dwyer, i.e. (comme Z est le plus petit ouvert de Z contenant Ψ) n'est pas coasphérique, car la catégorie $0\backslash\Psi$, cofibrée sur Ψ avec fibres discrètes, de cardinal 2 en a_0 et 1 en b_0 et c_0, est la catégorie

$$\begin{tikzcd} a'_0 \arrow[r] \arrow[dr] & \tilde{b}_0 \\ a''_0 \arrow[ur] \arrow[r] & \tilde{c}_0 \end{tikzcd}$$

[5] faux – il est 1-connexe forcément ([6]), mais non 2-connexe.

[6] cf. commentaire XII, p. 101.

i.e.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & {} & \\ {} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {} \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & {} & \end{tikzcd} \quad ,$$

qui a le type d'homotopie du cercle.) Ni l'immersion ouverte $\{0_0\} \longrightarrow Z$, car $\{0_0\}/a_0$ est la catégorie discrète de cardinalité 2.

L'inclusion $i : Z_0 \longrightarrow Z$ de

$$Z_0 \ = \ (\ 0_0 \underset{\mu_0}{\overset{\lambda_0}{\rightrightarrows}} a_0\ )$$

dans Z est un homotopisme ([7]) (car il existe une rétraction évidente r de Z sur Z_0 ([7]), et une flèche $ir \longrightarrow \mathrm{id}_Z$), donc Z est homotope à Z_0, qui a le type d'homotopie du cercle, donc n'est pas 1-connexe.

`[page 12]`

D'autre part, la vérification de

$$b_0 \amalg_{a_0} c_0 \ = \ e_Z \qquad \text{dans } Z^\wedge$$

est immédiate.

On va utiliser cette flèche

$$\Psi \longrightarrow Z$$

pour construire des exemples intéressants (et déchirants) de sommes amalgamées

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "q"] \\ U' \arrow[r, hook, "i'"] & X', \end{tikzcd}$$

avec i immersion ouverte, telle qu'on ait même

$$i : \ U \longrightarrow \overline{U} \qquad \text{est asphérique, donc dans } W,$$

alors que pourtant on aura

$$i' : \ U' \longrightarrow \overline{U'} \qquad \notin W,$$

et ce qui mieux (ou pis) est,

$$p \in W \qquad \text{mais} \qquad q \notin W$$

[7]faux, il n'y a pas de rétraction du tout! En fait, Z est la *suspension* de la $\rightrightarrows$, qui a le type d'homotopie (topologique) du cercle, et il a donc le type d'homotopie de la 2-sphère.

(et éventuellement, en même temps, $i \in W$ mais $i' \notin W$). De plus (contrairement aux constructions des propositions 10, 11 (p. 101-107)), les catégories envisagées pourront toutes être finies. Je suis particulièrement intéressé par le cas où X est un 'carré'

$$X = \Phi_n \times \Phi_m \qquad (n, m \geq 2),$$

et où U est son 'bord'

$$U = \dot{X} \overset{\text{déf}}{=} (\dot{\Phi}_n \times \Phi_m) \cup (\Phi_n \times \dot{\Phi}_m).$$

[page 13]

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d] & a' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
b \arrow[r] & t_1 & {} \arrow[l] & \cdots \\
b' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & {} \arrow[u] & {} \arrow[l] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & & &
\end{tikzcd}$$

Proposition. *Soient $n, m \geq 2$, et considérons l'inclusion $U = \partial X \overset{i}{\hookrightarrow} X$ du bord du 'carré' $X = \Phi_n \times \Phi_m$ dans X. C'est une immersion ouverte W-asphérique, de façon précise, les U/t ($t \in \dot{U} = \bar{U} \backslash U$) sont isomorphes à e (catégorie ponctuelle) ou à* $\Phi = \begin{tikzcd}[row sep=small] & {} \arrow[dl] \\ {} & \\ & {} \arrow[ul] \end{tikzcd}$ *(catégorie avec élément final), sauf pour les quatre éléments t_i des quatre 'coins' de $\dot{U}$, où c'est la catégorie*

$$\tilde{\Psi} = \left(\begin{tikzcd}[row sep=small] & & a' \arrow[dl] \\ & a & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & b & \\ & & b' \arrow[ul] \end{tikzcd} \right)$$

n'ayant pas d'élément final. Donc $U \overset{i}{\longrightarrow} X$ n'est pas immersion ouverte de Dwyer (mais $U \longrightarrow X \backslash \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ l'est …). Ceci posé, je dis que $i : U \longrightarrow X$ n'est pas une W-cofibration.

DÉMONSTRATION. Soit

$$F \hookrightarrow U$$

l'inclusion dans $U = \partial X$ de la catégorie-coin [$V =$] $\begin{array}{ccc} 0 & \to & a \\ \downarrow & & \\ b & & \end{array}$ (cf. figure), isomorphe à Ψ. On voit aussitôt que c'est une immersion fermée de Dwyer (le plus petit ouvert de U contenant Ψ est justement la catégorie $\tilde{\Psi} = U/t_1$ de tantôt), donc une W-cofibration. Si $U \longrightarrow X$ était une W-cofibration, il en serait de même du composé $V \longrightarrow X$. On va voir que ce n'est pas le cas.

Soit $\overline{V} = \begin{array}{ccc} 0 & \to & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & \to & t_1 \end{array}$ l'adhérence de V dans X,

[page 14]

et considérons l'inclusion

$$\overline{V} \longrightarrow X,$$

je dis que [c]'est une immersion fermée de Dwyer, i.e. que pour tout $s \in W \backslash \overline{V}$, où W est le plus petit ouvert de X contenant $\overline{V}$, i.e.

$$W = \begin{array}{ccccc} 0 & \to & a & \leftarrow & a' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ b & \to & & \leftarrow & a'' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ b' & \to & b'' & \leftarrow & c, \end{array}$$

la catégorie $s \backslash \overline{V}$ a un objet initial. (Les catégories $s \backslash \overline{V}$ qu'on obtient, à partir des cinq choix possibles pour s, sont $\mathbf{\Delta}^1$ (si $s = a'$ ou b') ou e (pour $s = a''$, b'' ou c)). Donc $\overline{V} \longrightarrow X$ est une W-cofibration.

Ceci posé, on sait qu'il existe, pour [?] l'inclusion (immersion ouverte)

$$V \hookrightarrow \overline{V} \qquad \text{i.e. } \Psi \hookrightarrow \mathbf{\Delta}^1 \times \mathbf{\Delta}^1,$$

un foncteur $V \longrightarrow V'$, donnant lieu à un carré cocartésien

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} V & \overset{i}{\hookrightarrow} & \overline{V} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{p}} \\ V' & \underset{i'}{\hookrightarrow} & \overline{V'} \end{array}$$

avec

$i, p \in W$ (car V, V', $\overline{V}$ W-asphérique), mais $i', \overline{p} \notin W$ (i.e. $\overline{V'}$ *pas* W-asphérique).

Je rappelle qu'on prend d'abord

$$V'_0 = \left(\begin{tikzcd} & & a \\ 0' \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] & 0 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & & b \end{tikzcd} \right) \qquad \text{avec} \begin{cases} \alpha\lambda = \alpha\mu \\ \beta\lambda = \beta\mu \end{cases}$$

et l'immersion fermée 'identique' de V dans V' [plutôt V'_0]

$$p_0 : V \longrightarrow V'_0$$

[page 15]

(qui est telle que

$$p_{0!}(e_V) = e_{V'_0} \ ),$$

puis on prend pour V' la catégorie obtenue en ajoutant un objet final à V'_0

$$V' = \left(\begin{tikzcd} & & a \arrow[dr, "\rho"] & \\ 0' \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] & 0 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & e \\ & & b \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd} \right) \qquad \text{avec} \begin{cases} \alpha\lambda = \alpha\mu \\ \beta\lambda = \beta\mu \\ \rho\alpha = \sigma\beta \end{cases}$$

et pour p le foncteur composé

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p_0"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & V'_0 \arrow[r, "p_1"] & V', \end{tikzcd}$$

où p_1 est l'inclusion (ouverte). On trouve alors le carré $(*)$, avec $\overline{V'}$ non W-asphérique, ou ce qui revient au même, $i' \notin W$. Car comme $\overline{V'} \backslash V' \simeq \overline{V} \backslash V$ est la catégorie ponctuelle, $i' \in W$ équivaut à V'/t W-asphérique ([8]) (cf. cor. 4, p. 149 dans XII). Or par construction $V'/t \simeq V'_0$, qui n'est pas W-asphérique (dans le cas, disons, où $W \subseteq W_1$, car $\pi_1(V'_0) \simeq \mathbf{Z}$).

[page 16]

Considérons alors le diagramme de carrés cocartésiens

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & \overline{V} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\overline{p}"] & X \arrow[d, "q"] \\ V' \arrow[r, hook, "i'"] & \overline{V'} \arrow[r, hook] & X' \end{tikzcd} \quad .$$

[8] moyennant (W 7 bis).

Comme $\overline{V} \hookrightarrow X$ est `[une]` immersion fermée de Dwyer, le carré de droite est W-cocartésien, donc $(\overline{p} \in W) \iff (q \in W)$, donc (comme $\overline{p} \notin W$) on a

$$p \in W, \qquad \text{mais} \qquad q \notin W,$$

ce qui montre bien que $V \longrightarrow X$ n'est pas une W-cofibration. Factorisant $V \longrightarrow X$ par U (au lieu de $\overline{V}$), on trouve

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "p\in W"'] & U \arrow[r] \arrow[d, "q_U \in W"] & X \arrow[d, "q \notin W"] \\ V' \arrow[r] & U' \arrow[r] & X' \end{tikzcd} ,$$

où $q_U \in W$ puisque $p \in W$ et $V \longrightarrow U$ est `[une]` immersion de Dwyer. Cela rend explicite que $U \longrightarrow X$ n'est pas une W-cofibration, puisque

$$q_U \in W, \qquad \text{mais} \qquad q \notin W,$$

q.e.d.

`[page 17]`

Recollement dans Cat **d'un ouvert et d'un fermé complémentaire.**

`[Supposons donné]`

$$X_0 \underbrace{\hookrightarrow}_{\text{ouvert}} X \underbrace{\hookleftarrow}_{\substack{\text{fermé}\\ \text{complé-}\\ \text{mentaire}}} X_1$$

dans Cat, `[et soit]`

$$\tilde{X}_{01} \subseteq \mathrm{Fl}(X)$$

`[la]` sous-catégorie pleine des flèches de source dans X_0, but dans X_1.

Question. *Ce diagramme*

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & \tilde{X}_{01} \arrow[dl, "p"', "\text{fibrant, fibres les } x_0\backslash X_1"'] \arrow[dr, "q", "\text{cofibrant, fibres les } X_0/x_1"] & \\ X_0 \arrow[dr, "i"'] \arrow[rr, phantom, ""{name=A}] & & X_1 \arrow[dl, "j"] \\ & X, & \end{tikzcd}$$

est-il W-cocartésien?

OK si i W-asphérique ou j W-coasphérique, i.e. $X \longrightarrow \mathbf{\Delta}^1$ lisse ou propre – c'est un cas où on a soit $X_0 \xrightarrow{W} X$, soit $X_1 \xrightarrow{W} X$. Mais même en supposant i ou j dans W, et de plus X asphérique (donc X_0 et X asphériques, ou X_1 et X asphériques), et $W = \mathbf{W}_\infty$, je n'ai pu prouver que le diagramme est cocartésien, i.e. $q \in W$ resp. $p \in W$ ([9]). (Pas non plus si $X_0 \simeq e$, X, X_1 W-asphérique $\Longrightarrow e\backslash X$ W-asphérique, i.e. $X_1 \longrightarrow X$ W-coasphérique ...) Mais j'ai prouvé du moins, dans tous les cas, que

$$(**) \qquad \mathcal{X} \overset{\text{déf}}{=} \int \tilde{X}_{01} \begin{array}{c} \nearrow X_0 \\ \\ \searrow X_1 \end{array} \xrightarrow{\varphi} X$$

est dans $\mathbf{W}_1$.

Chose *fausse* (sauf si i ou j dans $W = \mathbf{W}_\infty$) si on remplace $\tilde{X}_{01}$ par $\tilde{X}'_{01}$, formée des triples (x_0, x_1, c), avec $x_0 \in \operatorname{Ob} X_0$, $x_1 \in \operatorname{Ob} X_1$, $c : x_0 \dashrightarrow x_1$ un *chemin* de x_0 à x_1 dans X! On a

`[page 18]`

donc une situation 'topologique' tout à fait spéciale à la catégorie de modèles Cat, qui ne semble pas avoir d'analogue dans des catégories telles que Esp ou $\mathbf{\Delta}^\wedge$, où pourtant les notions d'ouvert et de fermé complémentaire (avec grain de sel dans $\mathbf{\Delta}^\wedge$) ont un sens.

L'argument catégorique quasi-trivial qui établit que $(**)$ est dans $\mathbf{W}_1$, i.e. induit une équivalence de catégories entre $\operatorname{Rev}(X)$ et

$$\operatorname{Rev}(\mathcal{X}) \;\simeq\; \operatorname{Rev}(X_0) \overset{2}{\times}_{\operatorname{Rev}(\tilde{X}_{01})} \operatorname{Rev}(X_1),$$

me semble devoir s'étendre aux dimensions supérieures, à coups de n-gerbes sur X – mais les fondements sur la théorie des n-gerbes manquent. (Et je n'ai pas eu le courage d'expliciter l'argument même pour $n = 2$ (où pourtant Giraud fournit ce qu'il faut) ([10]).) Aussi je conjecture que φ est tout au moins dans $\mathbf{W}_\infty$, i.e. que le diagramme $(*)$ est W-cocartésien si $W \supseteq \mathbf{W}_\infty$ (et satisfait Loc (6 a')).

[9] Je suppose que W satisfait Loc (6).

[10] Mais j'ai fait quand même une esquisse de vérification pour $n = 2$, qui me convainc qu'on a bien $\varphi \in \mathbf{W}_2$. Et je n'ai pas guère de doute qu'on a même $\varphi \in \mathbf{W}_\infty$.