LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre XV

Théorèmes de factorisation
(Modèles (2))

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX\,2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Seules quelques corrections mineures évidentes ont été effectuées. Pour les rares ajouts ou commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

maltsin@math.jussieu.fr

G. Maltsiniotis

[page 1]

1 Construction fondamentale : la suite transfinie de factorisation d'une flèche f.

Soit $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie, stable par "petites" (*i.e.* $\mathfrak{U}$-petites) $\varinjlim$ filtrantes. Soit

(1.1) $$C_0 \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$$

un *petit* ensemble de flèches, on se propose de construire pour toute flèche f de $\mathcal{M}$, une factorisation

(1.2) $$f = p\, i\,, \qquad i \in \widetilde{C_0} = ((C_0)_*)^*\,, \quad p \in (C_0)_*\,.$$

Pour ceci, on va construire une suite ordinale de foncteurs

(1.3) $$\begin{cases} \qquad f \longmapsto X_\alpha(f) = X_\alpha(C_0, f) \\ X_\alpha : \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M} \end{cases}$$

et des homomorphismes fonctoriels

(1.4) $$i_\alpha(f) : \mathrm{source}\, f \longrightarrow X_\alpha(f)\,,$$

(1.5) $$p_\alpha(f) : X_\alpha(f) \longrightarrow \mathrm{but}\, f\,,$$

de sorte qu'on aura le diagramme (où $X = \mathrm{source}\, f$, $Y = \mathrm{but}\, f$)

(1.6) $$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_\alpha(f)"'] & & Y \\ & X_\alpha(f) \arrow[ur, "p_\alpha(f)"'] & \end{tikzcd}\,,$$

ce diagramme étant commutatif

(1.7) $$f = p_\alpha(f) i_\alpha(f)\,.$$

On peut dire aussi qu'on a une section du foncteur canonique de "composition", transposé de $\boldsymbol{\Delta}_1 \longrightarrow \boldsymbol{\Delta}_2$, donné par $0 \longmapsto 0$, $1 \longmapsto 2$:

(1.8) $$\left\{ \begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Nerf}}_2(\mathcal{M}) \arrow[r, "\gamma", shift left] & \underline{\mathrm{Nerf}}_1(\mathcal{M}) \arrow[l, dotted, "\Phi_\alpha", shift left] \end{tikzcd} = \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})\,, \right.$$

Φ comme "factorisation",

[page 2]

où

$$\Phi_\alpha(f) \;=\; \{\; X \xrightarrow{i_\alpha(f)} X_\alpha(f) \xrightarrow{p_\alpha(f)} Y \;\} \tag{1.9}$$

avec $p_\alpha(f)i_\alpha(f) = f$. La fonctorialité de 1.4 et 1.5, ou celle de Φ_α, *i.e.* de 1.9, s'exprime par le fait que tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u_X"'] & Y \arrow[d, "u_Y"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

dans $\mathcal{M}$, interprété comme flèche $u = (u_X, u_Y)$ de f dans f' dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$, donne naissance au double carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_\alpha(f)"] \arrow[d, "u_X"] & X_\alpha(f) \arrow[r, "p_\alpha(f)"] \arrow[d, "X_\alpha(u)"] & Y \arrow[d, "u_Y"] \\ X' \arrow[r, "i_\alpha(f')"] & X_\alpha(f') \arrow[r, "p_\alpha(f')"] & Y' . \end{tikzcd} \tag{1.11}$$

N.B. Quand on voudra expliciter la dépendance de ces constructions par rapport à C_0, on écrira

$$X_\alpha(C_0, f)\;, \qquad i_\alpha(C_0, f)\;, \qquad p_\alpha(C_0, f)\;, \qquad \Phi_\alpha(C_0, f)\;,$$

ou

$$X_\alpha(C_0, -) \;\text{ ou }\; X_\alpha^{C_0}\;, \qquad i_\alpha(C_0, -) \;\text{ ou }\; i_\alpha^{C_0} \qquad \textit{etc.}\;,$$

au lieu de $X_\alpha(f)$, $i_\alpha(f)$, ...

Voici les propriétés essentielles du système inductif ordinal des $X_\alpha(f)$ ou $\Phi_\alpha(f)$.

[page 3]

1. $X_0(f) = X$, $i_0(f) = \mathrm{id}_X$, $p_0(f) = f$ (*i.e.* la factorisation $\Phi_0(f)$ de f est la factorisation triviale $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \xrightarrow{f} Y$).

2.

$$\begin{aligned} X_{\alpha+1}(f) &= X_1(p_\alpha(f)) \\ i_{\alpha+1}(f) &= i_1(p_\alpha(f)) \circ i_\alpha(f) \\ p_{\alpha+1}(f) &= p_1(p_\alpha(f)) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \underbrace{X}_{=\,\text{source}\, f} \arrow[r, "i_\alpha(f)"] \arrow[rr, bend left, "f"] & X_\alpha(f) \arrow[r, "p_\alpha(f)"] \arrow[d, bend right, "i_1(p_\alpha(f))"'] & Y \\ & \underbrace{X_1(p_\alpha(f))}_{=\,X_{\alpha+1}(f)} \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

ou mieux

$$
(1.12)\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & & & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
X \arrow[r, "i_\alpha(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & X_\alpha(f) \arrow[rr, "p_\alpha(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
X \arrow[r] & X_\alpha(f) \arrow[r, "i_1(p_\alpha(f))"] & \underbrace{X_1(p_\alpha(f))}_{=X_{\alpha+1}(f)} \arrow[r, "p_1(p_\alpha(f))"] & Y\ .
\end{tikzcd}
$$

Le morphisme de transition $X_\alpha(f) \longrightarrow X_{\alpha+1}(f)$ est

$$X_\alpha(f) \xrightarrow{i_1(p_\alpha(f))} X_1(p_\alpha(f)) \ = \ X_{\alpha+1}(f)\ .$$

3. Si α est un ordinal limite, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_\alpha(f) & = & \varinjlim\limits_{\alpha'<\alpha} X_{\alpha'}(f). \\ i_\alpha(f) & = & \text{morphisme canonique de } X = X_0(f) \text{ dans la limite in-} \\ & & \text{ductive.} \\ p_\alpha(f) & = & \text{limite projective des } p_{\alpha'}(f) : X_{\alpha'}(f) \longrightarrow Y. \end{array}\right.$$

(On peut considérer la limite inductive définissant $X_\alpha(f)$ comme une limite dans $X\backslash\mathcal{M}/Y\ldots$)

Les morphismes de transition

$$X_{\alpha'}(f) \longrightarrow X_\alpha(f) \qquad (\ \alpha' \ < \ \alpha\ )$$

sont les morphismes canoniques relatifs au système inductif des $X_{\alpha'}(f)$.

`[page 4]`

On peut donc dire que la suite ordinale des factorisations fonctorielles $\Phi_\alpha(f)$ de f variable, se déduit de la factorisation fonctorielle $\Phi_1(f)$ de f en

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1(f)"] \arrow[rr, bend left, "f"] & X_1(f) \arrow[r, "p_1(f)"] & Y
\end{tikzcd}
$$

par "itération transfinie à droite", *i.e.* en regardant les opérations Φ_α comme des foncteurs

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_\alpha : \ \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}) \\ f & \longmapsto & p_\alpha(f)\ , \end{array}\right. \qquad ^{(1)}$$

munis d'homomorphismes fonctoriels (au-dessus de $\mathcal{M}$)

$$\mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})} \longrightarrow p_\alpha\ .$$

[1] **N.B.** p_α respecte les structures de catégories *sur* $\mathcal{M}$, via les foncteurs but : $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M}$, *i.e.* $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$ est considérée comme objet de $\mathrm{CAT}/\mathcal{M}$.

Ainsi, si on considère

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}) & \text{comme objet de } \mathrm{CAT}/\mathcal{M} \text{ par le foncteur } f \longmapsto \mathrm{but}\, f \\ \text{où} & \text{CAT est la catégorie des catégories } \textit{éléments de } \mathfrak{V}\text{, univers} \\ & \text{tel que } \mathfrak{U} \in \mathfrak{V}\text{, d'où } \mathrm{Cat} \overset{\text{(déf)}}{=} \mathrm{Cat}^{\mathfrak{U}},\ \mathcal{M},\ \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}) \in \mathrm{CAT}\ , \end{cases}$$

on a un endofoncteur p_1 de $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$ sur $\mathcal{M}$, et un homomorphisme fonctoriel

(1.13) $$i_1 \ : \ \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})/\mathcal{M}} \longrightarrow p_1\ , \qquad \textit{i.e.} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_1(f)"'] & & Y \\ & \underbrace{X_1(f)}_{=\,\mathrm{source}\, p_1(f)} \arrow[ur, "p_1(f)"'] & \end{tikzcd}\ ,$$

et la description de la suite ordinale des endofoncteurs p_α de $\underline{\mathrm{Fl}}\,\mathcal{M}/\mathcal{M}$ résulte de cette seule donnée, compte tenu que les petites limites filtrantes existent dans les fibres de $\underline{\mathrm{Fl}}\,\mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{but}} \mathcal{M}$.

[page 5]

(1.14) $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1(f)"] \arrow[dr, "f"'] & X_1(f) \arrow[r, "i_1(p_1(f))"] \arrow[d, "p_1(f)"] & X_2(f) \arrow[r] \arrow[dl, "p_2(f)"] & \cdots \arrow[r] & X_\alpha(f) \arrow[r, "i_1(p_\alpha(f))"] \arrow[dlll, "p_\alpha(f)"] & X_{\alpha+1}(f) \arrow[r] \arrow[dllll, "p_{\alpha+1}(f) = p_1(p_\alpha(f))"] & \cdots \\ & Y & & & & & \end{tikzcd}$$

Donc, pour achever de définir la suite ordinale des $X_\alpha(f)$ (munie des $i_\alpha(f)$, $p_\alpha(f)$), ou des $p_\alpha(f)$ (munie des $i_\alpha(f)$), il reste à décrire $X_1(f)$, $i_1(f)$, $p_1(f)$.

La propriété essentielle de ce triple dont nous aurons besoin est la suivante :

(1.15) **Fact**(C_0) (propriété de factorisation par rapport à C_0).
Pour tout diagramme commutatif

$$D : \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \qquad \text{avec } i \in C_0\ ,$$

d'où un diagramme traits pleins

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[d, "i"'] & & X \arrow[d, "i_D"] \arrow[dr, dotted, "i_1(f)"] \arrow[dd, dotted, bend right, "f"'] & \\ B \arrow[r] & X_D \overset{\text{déf}}{=} & X \amalg_A B \arrow[r, dotted, "u_D"] \arrow[d, "p_D"] & X_1(f) \arrow[dl, dotted, "p_1(f)"] \\ & & Y\ , & \end{tikzcd}$$

il existe un homomorphisme de la factorisation $f = p_D i_D$ de f dans la factorisation $f = p_1(f) i_1(f)$.

Pour formuler cette condition, j'ai utilisé l'existence des sommes amalgamées X_D, *i.e.* la condition sur C_0 :

[page 6]

(1.16) Les flèches $i \in C_0$ sont coquarrables, *i.e.* pour un diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \\ B & \end{tikzcd}$$

avec $i \in C_0$, la somme amalgamée existe.

Mais on peut formuler 1.15 aussi ainsi, indépendamment de l'hypothèse (1.16) :

(1.17) Pour tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "v"] & Y \end{tikzcd} \quad ,$$

avec $i \in C_0$, il existe un carré commutatif traits pleins

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "i_1(f)"] \\ B \arrow[r, "v_1"] \arrow[dr, dotted, "v"] & X_1(f) \arrow[d, dotted, "p_1(f)"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

tel que $v = p_1(f) v_1$.

Ceci a pour conséquence le

Corollaire 1 (de 1.17). *Soit $f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, et α un ordinal ($\in \mathfrak{U}$). Pour tout carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X_\alpha(f) \arrow[d, "p_\alpha(f)"] \\ B \arrow[r, "v"] & Y \end{tikzcd}$$

il existe un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X_\alpha(f) \arrow[d, "\text{trans.}"] \arrow[dd, bend left=60, dotted, "p_\alpha(f)"] \\
B \arrow[r, "v_1"] \arrow[dr, dotted, "v"'] & X_{\alpha+1}(f) \arrow[d, dotted, "p_{\alpha+1}(f)"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

tel que

$$v \;=\; p_{\alpha+1}(f)\, v_1\ .$$

[page 7]

Corollaire 2. *Soit π un cardinal ($\in \mathfrak{U}$) tel que pour toute flèche $i : A \longrightarrow B$ dans C_0, la source A soit π-accessible. Soit α un ordinal grand devant π* (i.e. *tel que l'ensemble ordonné I_α des ordinaux $\alpha' < \alpha$ soit grand devant π) – p. ex. α le premier ordinal dont le cardinal soit $> \pi$. Alors pour toute flèche $f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, on a $p_\alpha(f) \in (C_0)_*$.*

Démonstration. Cela signifie que pour tout carré commutatif

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X_\alpha(f) \arrow[d, "p_\alpha(f)"] \\
B \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dotted, "w"] & Y\ ,
\end{tikzcd}$$

avec $i \in C_0$, la flèche pointillée w (avec $wi = u$, $p_\alpha(f)w = v$) existe. Or

$$X_\alpha(f) = \varinjlim_{\alpha' \in I_\alpha} X_{\alpha'}(f)\ ,$$

donc A étant π-accessible et I_α grand devant π, u provient d'une flèche $u_{\alpha'} : A \longrightarrow X_{\alpha'}(f)$, et (quitte à remplacer α' par $\alpha'' > \alpha'$ et $u_{\alpha'}$ par le composé $u_{\alpha''} : A \longrightarrow X_{\alpha'}(f) \longrightarrow X_{\alpha''}(f)$) on peut supposer $p_{\alpha'}(f)u_{\alpha'} = vi$, *i.e.* que $(*)$ provient d'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u_{\alpha'}"] \arrow[d, "i"'] \arrow[rr, bend left, dotted, "u"] & X_{\alpha'}(f) \arrow[r, dotted, "\text{trans.}"'] \arrow[d, "p_{\alpha'}(f)"'] & X_\alpha(f) \arrow[dl, dotted, "p_\alpha(f)"] \\
B \arrow[r, "v"] & Y\ ,
\end{tikzcd}$$

et appliquant le corollaire 1, on trouve

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u_{\alpha'}"] \arrow[d, "i"'] & X_{\alpha'}(f) \arrow[d, "\text{trans.}"] & \\
B \arrow[r, "v_1"] \arrow[dr, dotted, "v"'] & X_{\alpha'+1}(f) \arrow[r, dotted, "\text{trans.}"] \arrow[d, "p_{\alpha+1}(f)"] & X_\alpha(f) \arrow[dl, dotted, "p_\alpha(f)"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

avec $v = p_{\alpha+1}(f)v_1$, et on prendra

$$w \ = \ \mathrm{trans}_{\alpha,\alpha'+1} \circ v_1 \ .$$

`[page 8]`

Mais on veut une factorisation de f, flèche quelconque dans $\mathcal{M}$, en

$$f \ = \ p\, i \ , \qquad \text{avec} \ \ p \in (C_0)_* \ \ et \ \ i \in \widetilde{C_0} \ ,$$

donc il faut encore énoncer une propriété, assurant que les $i_\alpha(f)$ sont dans $\widetilde{C_0}$. On aura même quelque chose de plus précis. Introduisons

(1.18) $\quad C_0' \ = \$ plus petit sous-ensemble de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ contenant C_0, stable par cochangement de base (chaque fois qu'il existe).

$\quad C_0'' \ = \$ ensemble des flèches qui sont soit dans C_0', soit des sommes amalgamées d'une famille *non vide* de telles flèches $A \xrightarrow{i_\alpha} B_\alpha$ de même source A, $i_\alpha \in C_0'$; la flèche $A \longrightarrow B = \coprod_\alpha^{(A)} B_\alpha$ est dans C_0''.

(La condition 1.16 implique que les éléments de C_0' sont coquarrables, et cela suffit, avec la condition de stabilité de $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ filtrantes, à assurer que les sommes amalgamées infinies envisagées existent dans $\mathcal{M}$.)

N.B. C_0'' est *égal* au plus petit ensemble de flèches contenant C_0 et stable par cochangement de base et par petites sommes amalgamées. `[Si les petites sommes existent dans` $\mathcal{M}$`, alors` C_0'' `est aussi l'ensemble des flèches obtenues par cochangement de base à partir de sommes de flèches de` C_0`.]`

(1.19) $\quad C_0''' \ = \$ plus petit sous-ensemble de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ contenant C_0'', et stable de plus par limites inductives ordinales strictes, *i.e.* pour un système inductif ordinal $(A_\alpha)_{\alpha<\alpha_0}$, tel que pour α ordinal limite on ait $A_\alpha \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{\alpha' \in I_\alpha} A_{\alpha'}$, si les morphismes de transition $i_{\beta,\alpha} : A_\alpha \longrightarrow A_\beta$ sont dans C_0''', de même les morphismes canoniques

$$A_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} \varinjlim_{\beta \in I_{\alpha_0}} A_\beta \ . \quad [2]$$

`[page 9]`

La proposition 2, p. 4 de XIII assure que l'on a

$$C_0''' \subset \widetilde{C_0} .$$

Ceci posé, voici la deuxième propriété essentielle de la factorisation $f = p_1(f)i_1(f)$ (la première étant 1.17) :

(1.20) Pour toute flèche $f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, on a $i_1(f) \in C_0''$.

Il en résulte aussitôt, par récurrence ordinale :

(1.21) Pour toute flèche $f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ et tout ordinal $\alpha \in \mathfrak{U}$, on a $i_\alpha(f) \in C_0'''$, a fortiori $i_\alpha(f) \in \widetilde{C_0}$.

Donc si α est grand devant π (*cf.* cor. 2, page 7), la factorisation $f = p_\alpha(f)i_\alpha(f)$ satisfait

(1.22) $\left\{\begin{array}{l} f = p_\alpha(f)i_\alpha(f), \text{ avec } i_\alpha(f) \in C_0''' \subset \widetilde{C_0} = \Phi \texttt{ [à ne pas} \\ \texttt{confondre avec } \Phi_\alpha\texttt{]}, p_\alpha(f) \in C_{0*} = \Psi, \text{ lorsque } \alpha \text{ est} \\ \text{grand devant } \pi, \text{ les sources des } i \in C_0\ \pi\text{-accessibles.} \end{array}\right.$

Il reste à construire le foncteur $f \longmapsto X_1(f)$, avec $i_1(f)$, $p_1(f)$, satisfaisant les conditions (1.17) et (1.20), sous l'hypothèse (1.16) que les $i \in C_0$ sont coquarrables. On considère alors, pour $f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ fixé, l'ensemble $\Delta(f)$ (ou $\Delta(C_0, f)$) de *tous* les diagrammes D de la forme (1.15), avec $i \in C_0$, et on pose

(1.23) $$X_1(f) = \coprod_{D\in\Delta(f)}{}^{(X)} X_D$$

(somme amalgamée sous X, *i.e.* somme indexée

`[page 10]`

par $\Delta(f)$ dans $X\backslash\mathcal{M}$), le morphisme $X \xrightarrow{i_1(f)} X_1(f)$ étant le morphisme costructural, et le morphisme $X_1(f) \xrightarrow{p_1(f)} Y$ étant celui ayant pour composantes les p_D. En somme, on fait "au plus économique" (et au plus naturel) pour assurer la validité de (1.17), sous la forme équivalente (1.15). D'autre part, par définition de C_0', C_0'', les i_D sont dans C_0', et $i_1(f)$ est dans C_0'', ce qui est (1.20) [3].

Pour résumer :

Théorème 1. *Soient $\mathcal{M}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie stable par $\mathfrak{U}$-limites inductives filtrantes, $C_0 \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ un petit ensemble de flèches de $\mathcal{M}$. On suppose les flèches $i \in C_0$ coquarrables. Cela assure la définition d'un endofoncteur $f \longmapsto p_1(f)$ de $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$, et d'un homomorphisme fonctoriel $i_1 : \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})} \longrightarrow p_1$,* i.e. *$i_1(f) : f \longrightarrow p_1(f)$, induisant l'identité sur les objets buts de f et de $p_1(f)$,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i_1(f)"] \arrow[dr, "f"'] & & X_1(f) \arrow[dl, "p_1(f)"] \\ & Y , & \end{tikzcd}$$

[2] $C_0 \subset C_0' \subset C_0'' \subset C_0'''$

[3] Il faudrait quand même expliciter la dépendance fonctorielle de $X_1(f)$ par rapport à f !!!

d'où par itération un système inductif ordinal d'endofoncteurs $f \longmapsto p_\alpha(f)$ *de* $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$*, et d'homomorphismes* $i_\alpha : \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})} \longrightarrow p_\alpha$, i.e.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i_\alpha(f)"] \arrow[dr, "f"'] & & X_\alpha(f) \arrow[dl, "p_\alpha(f)"] \\ & Y \ , & \end{tikzcd}$$

formant un système inductif ordinal de factorisations de f *fonctorielles en* f*.*

[page 11]

Ceci posé, on a :

a) *Pour tout ordinal* α*, on a* $i_\alpha(f) \in \Phi$*.*

b) *Supposons que les sources des* $i \in C_0$ *soient accessibles et soit alors* π *un cardinal dans* $\mathfrak{U}$ *tel qu'elles soient* π*-accessibles. Alors pour tout nombre ordinal* α *grand devant* π*, on a* $p_\alpha(f) \in C_{0*}$*, donc*

$$f \;=\; p_\alpha(f)\, i_\alpha(f) \qquad \textit{avec} \qquad i_\alpha(f) \in \Phi \ , \qquad p_\alpha(f) \in \Psi \ .$$

On a un résultat légèrement plus précis, que voici :

Corollaire 1. *Soit* Φ_0 *une partie de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *telle que*

$$C_0'''' \;\subset\; \Phi_0 \;\subset\; \Phi \qquad (\textit{d'où } C_0 \subset \Phi_0 \subset \Phi)\ , \tag{1.24}$$

où $C_0'''' \subset \Phi$ *est définie dans* 1.19*, p.* 8*. Par exemple, si* Φ_0 *est une partie de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *satisfaisant*

$$C_0 \;\subset\; \Phi_0 \;\subset\; \Phi \ ,$$

et stable par cochangement de base, par petites sommes amalgamées (*cf.* (1.18), p. 8), *par* $\varinjlim$ *ordinales strictes* (*cf.* (1.19), p. 8), *elle satisfait* (1.24). (**N.B.** *Si* $\mathcal{M}$ *admet des sommes amalgamées simples, de tels* Φ_0 *existent trivialement, il suffit de prendre* $\Phi_0 = \Phi$*.*)

[page 12]

Ceci posé, pour toute flèche f *dans* $\mathcal{M}$*, et tout ordinal* α*, on a*

$$i_\alpha(f) \;\in\; \Phi_0 \ .$$

Corollaire 2. *Supposons que les sources des flèches* $i \in C_0$ *soient accessibles, et soit* Φ_0 *comme dans le corollaire* 1 (p. ex. $\Phi_0 = C_0''''$). *Alors le couple* (Φ_0, Ψ) *est un précouple de Quillen,* i.e.

a) $\Phi_0 \longleftrightarrow \Psi$, i.e. $\Psi \subset \Phi_{0*}$ (*ou ce qui revient au même,* $\Phi_0 \subset \Psi^*$), *et*

b) *on a la propriété de factorisation de Quillen.*

Cela implique donc que Φ $(= \widetilde{C_0} = \widetilde{\Phi_0})$ *est formé des flèches qui sont facteurs directs de flèches de* Φ_0*. Donc si* Φ_0 *est stable par facteurs directs, on a* $\Phi_0 = \Phi$, i.e. Φ_0 *est clos à gauche.*

2 Variation des factorisations $f = p_\alpha i_\alpha$ avec la partie C_0 génératrice

Je dis que le système inductif ordinal de foncteurs $p_\alpha = p_\alpha^{C_0} : \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$,

`[page 13]`

muni des flèches

$$i_\alpha^{C_0} \ : \ \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})} \longrightarrow p_\alpha^{C_0} \ ,$$

dépend fonctoriellement de C_0, quand on considère C_0 comme un élément de l'ensemble ordonné des *petites* parties de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, formées de flèches coquarrables (donc de l'ensemble ordonné

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{U}\text{-petites}}(\mathrm{Fl}_{\mathrm{coquar.}}(\mathcal{M})) \quad).$$

Si on a une inclusion

(2.1) $$C_0 \hookrightarrow C_1 \ ,$$

on en déduit pour tout ordinal α un homomorphisme fonctoriel

(2.2) $$u_\alpha \ = \ u_\alpha^{C_1,C_0} \ : \ X_\alpha^{C_0} \longrightarrow X_\alpha^{C_1} \ ,$$

rendant commutatifs les carrés déduits de $f : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{M}$,

(2.3) $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_\alpha^{C_0}(f)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & X_\alpha^{C_0}(f) \arrow[r, "p_\alpha^{C_0}(f)"] \arrow[d, "u_\alpha(f)"] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ X \arrow[r, "i_\alpha^{C_1}(f)"] & X_\alpha^{C_1}(f) \arrow[r, "p_\alpha^{C_1}(f)"] & Y \end{tikzcd} \ ,$$

et compatible avec les morphismes de transition pour α variable,

(2.4) $$\begin{tikzcd} X_\alpha^{C_0} \arrow[r, "\mathrm{trans}_{\beta,\alpha}^{C_0}"] \arrow[d, "u_\alpha"'] & X_\beta^{C_0} \arrow[d, "u_\beta"] \\ X_\alpha^{C_1} \arrow[r, "\mathrm{trans}_{\beta,\alpha}^{C_1}"] & X_\beta^{C_1} \end{tikzcd} \ .$$

`[page 14]`

Pour définir les u_α, satisfaisant aux conditions précédentes, il suffit de les définir pour $\alpha = 1$ "et d'itérer" :

(2.5) $$\begin{tikzcd} & X_1^{C_0}(f) \arrow[dr, "p_1^{C_0}(f)"] \arrow[dd, "u_1(f)"] & \\ X \arrow[ur, "i_1^{C_0}(f)"] \arrow[dr, "i_1^{C_1}(f)"'] & & Y \\ & X_1^{C_1}(f) \arrow[ur, "p_1^{C_1}(f)"'] & \end{tikzcd} \ .$$

Or $X_1^{C_0}(f)$ est défini comme une somme directe dans $X \backslash \mathcal{M} / Y$, relative à un ensemble d'indices $\Delta(C_0, f)$ *contenu* dans $\Delta(C_1, f)$ – et la famille d'objets dont on prend la somme directe étant induite d'une famille (non petite) dont l'ensemble d'indices serait $\Delta(\mathrm{Fl}_{\mathrm{coquar.}}(\mathcal{M}), f)$, savoir formé de *tous* les diagrammes carrés

$$D : \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "v"] & Y \end{tikzcd} \qquad \text{avec } i \text{ coquarrable sans plus ,}$$

la définition des X_D, i_D, p_D associés à D ne dépendant que de D, et non de l'ensemble C_0 ou C_1 de flèches coquarrables qui contient i. Ceci dit, la flèche $u_1(f)$

[page 15]

dans (2.5) n'est autre que l'inclusion canonique d'une somme amalgamée partielle, indexée par $\Delta(C_0, f)$, dans la somme amalgamée correspondante à l'ensemble d'indices plus grand. La fonctorialité de cette flèche $u_1(f)$, pour f variable, "est immédiate", elle résulte de la commutativité du carré, associé à un morphisme $v = (v_X, v_Y)$ de flèches

$$(2.6) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v_X"'] & Y \arrow[d, "v_Y"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd} ,$$

savoir le diagramme d'applications entre ensembles d'indices

$$(2.7) \qquad \begin{tikzcd} \Delta(C_0, f) \arrow[r, hook, "u_1(f)"] \arrow[d, "\substack{\text{dépendance fonctorielle} \\ \text{en } f \text{ de } \Delta(C_0,f)}"'] & \Delta(C_1, f) \arrow[d, "\substack{\text{dépendance fonctorielle} \\ \text{en } f \text{ de } \Delta(C_1,f)}"] \\ \Delta(C_0, f') \arrow[r, hook, "u_1(f')"] & \Delta(C_1, f') \end{tikzcd}$$

(commutativité qui revient à dire que $\Delta(C_0, f)$ peut être considéré comme un foncteur en le couple (C_0, f) comme objet de la catégorie produit $\underline{\mathfrak{P}_{\text{pet.}}(\text{Fl}_{\text{coquar.}}(\mathcal{M}))} \times \underline{\text{Fl}}(\mathcal{M})$ ...). Le carré commutatif (2.7) est la partie "indices" d'un carré commutatif entre familles d'objets $\mathcal{X}(C_0, f)$, $\mathcal{X}(C_0, f')$, $\mathcal{X}(C_1, f)$, $\mathcal{X}(C_1, f')$,

[page 16]

indexés par ces ensembles, savoir les $X_D^{C_0}$ et les $X_D^{C_1}$ relatifs aux diagrammes D impliquant, soit la flèche f, soit la flèche f' ...

Or la construction canonique du système inductif ordinal p_α, avec les $i_\alpha : \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})} \longrightarrow p_\alpha$, est fonctorielle par rapport à la donnée initiale p_1, i_1 – je n'explicite pas le détail de la fonctorialité, bien que je devrais ...

3 Majoration des cardinaux

Je suppose à présent que $\mathcal{M}$ est muni d'une *filtration cardinale*

$$(3.1) \qquad (\mathrm{Filt}^\pi)_{\pi \geq \pi_0} \qquad (\pi_0, \pi \text{ cardinaux dans } \mathfrak{U})$$

(SGA 4 I 9.12, p. 149), les Filt^π stables par sommes amalgamées simples (chaque fois qu'elles existent), donc aussi par sommes amalgamées infinies indexées par des ensembles d'indices de cardinal $\leq \pi$. On suppose de plus que tout objet de Filt^{π_0} soit accessible, et on désigne par π_1 le plus petit cardinal tel que $\pi_1 \geq \pi_0$ et que les objets de Filt^{π_0} soient π_1-accessibles. Désignant, pour tout cardinal, par $\mathcal{M}_\pi$ le sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ formé des objets π-accessibles, on aura alors pour tout $\pi \geq \pi_1$ (*loc. cit.* 9.16)

(3.2) $$\mathcal{M}_\pi \subset \mathrm{Filt}^\pi \subset \mathcal{M}_{(\pi^{\pi_0})} \qquad (\text{si } \pi \geq \pi_1)\ ,$$

[page 17]

donc si $\pi^{\pi_0} = \pi$, p. ex. si $\pi = 2^c$ avec $c \geq \pi_0$, on aura

(3.2 bis) $$\mathrm{Filt}^\pi = \mathcal{M}_\pi\ .$$

(Si on admet l'hypothèse du continu généralisée, on a $\pi^{\pi_0} = \pi$ pour tout $\pi > \pi_0$, donc $\mathrm{Filt}^\pi = \mathcal{M}_\pi$ si $\pi \geq \pi_1$ et $\pi > \pi_0$.)

Je pose, pour tout cardinal $\pi \geq \pi_0$,

(3.3) $$\mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M}) = \{\, f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M}) \mid \text{source et but de } f \text{ sont dans } \mathrm{Filt}^\pi \,\}$$

– ce qui sans doute donne une filtration cardinale sur $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$ (mais ce n'est pas là notre souci ...). Mon but à présent, c'est de dégager des conditions sur $C_0 \subset \mathrm{Fl}_{\text{coquar.}}(\mathcal{M})$ (petite partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$) et sur le cardinal π, et l'ordinal α, pour que l'on ait

(3.4) $$\begin{aligned} f \in \mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M}) \ \overset{?}{\Longrightarrow}\ & X_\alpha(f) \in \mathrm{Filt}^\pi \\ & (i.e.\ p_\alpha(f) \in \mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M}), \text{ ou encore } i_\alpha(f) \in \mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M}))\ . \end{aligned}$$

Plus généralement, je me propose de donner une estimation de la "cardinalité" de $X_\alpha(f)$, pour C_0 fixé, en fonction de C_0, de f, de α, plus exactement, en fonction des trois cardinaux $\pi(C_0)$, $\pi(f)$, $\pi(\alpha)$ définis comme

(3.5) $$\begin{cases} \pi(C_0) = \text{plus petit cardinal tel que } C_0 \subset \mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M}) \\ \pi(f) = \pi(\{f\}) = \text{plus petit cardinal tel que } f \in \mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M}) \\ \pi(\alpha) = \mathrm{card}\,\alpha\ . \end{cases}$$

Donc je cherche une fonction

[page 18]

cardinale de variables cardinales φ, telle que l'on ait

(3.6) $$X_\alpha(f) \in \mathrm{Filt}^\pi \qquad \text{si} \qquad \pi = \varphi(\underbrace{\pi(C_0)}_{r}, \underbrace{\pi(f)}_{s}, \underbrace{\pi(\alpha)}_{t})\ .$$

L'estimation cruciale concernera sûrement le cas $\alpha = 1$. Notons que $X_1^{C_0}(f) = X_1(f)$ est défini comme une somme amalgamée (en général infinie) d'objets X_D, pour un ensemble $\Delta(C_0, f) = \Delta(f)$ de diagrammes, savoir les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

avec $i \in C_0$. Pour un i fixé, et un f fixé, le cardinal de l'ensemble des diagrammes de ce type est majoré par celui de $\mathrm{Hom}(A, X) \times \mathrm{Hom}(B, Y)$. On a $A, B \in \mathrm{Filt}^r$, $X, Y \in \mathrm{Filt}^s$, donc il nous faut une majoration de

$$\operatorname{card} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A, X) \ , \qquad A \ \in \ \mathrm{Filt}^r \ , \qquad X \ \in \ \mathrm{Filt}^s \ .$$

[page 19]

Voici les majorations essentielles dans ce sens :

Proposition 3.1. *Soit* π_0 *le cardinal initial de la filtration cardinale* $(\mathrm{Filt}^\pi)_{\pi \geq \pi_0}$ *envisagé,* π_1 *le plus petit cardinal* $\geq \pi_0$ *tel que les objets de* Filt^{π_0} *soient* π_1*-accessibles,* $C_1 = \operatorname{card} \underbrace{\widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}^{\pi_1}(\mathcal{M})}}_{= \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}^{\pi_1})}$ [4]*. Pour tout cardinal* $\pi \geq \pi_0$*, je désigne par* $\mathcal{M}^\pi$ *la sous-catégorie strictement pleine de* $\mathcal{M}$ *dont l'ensemble des objets est* Filt^π*. Enfin, si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie, je désigne par* $\widetilde{\mathcal{C}}$ *l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de* $\mathcal{C}$*.* [5]

1°) *Si* $r \geq \sup(\pi_1, C_1)$*, on a*

$$\operatorname{card} \big(\underbrace{\widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}^r(\mathcal{M})}}_{= \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}^r)}\big) \ \leq \ 2^{(r^{\pi_0})} \quad (= 2^r, \ \textit{si } r = 2^c, \ \textit{avec } c \geq \pi_0) \ . \tag{3.7}$$

2°) *Si* $r, s \geq \sup(\pi_1, C_1)$*, et si* $A \in \mathrm{Filt}^r$*,* $X \in \mathrm{Filt}^s$*, on a*

$$\begin{array}{lll} (3.8) & \operatorname{card} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A, X) \ \leq \ s^{(r^{\pi_0})} & \multirow{2}{*}{} \\ (3.9) & \operatorname{card} \widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}^r / X)} \ \leq \ s^{(r^{\pi_0})} & \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{lll} = & s^r & \textit{si } r = 2^c, \ \textit{avec } c \geq \pi_0 \ , \\ = & s & \textit{si } s = 2^{c'}, \ \textit{avec } c' \geq r^{\pi_0} \ . \end{array} \right.$$

N.B. Si on admet l'hypothèse du continu généralisée, qui implique que $\pi^{\pi'} = \pi$ si $\pi > \pi'$ (π cardinal infini, $\pi' \geq 1$), alors prenant r tel que $r > \pi_0$, les formules précédentes donnent (avec de plus $r \geq \sup(\pi_1, C_1)$) :

$$\operatorname{card} \widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}^r(\mathcal{M})} \ \leq \ 2^r \ , \tag{3.7 bis}$$

$$\operatorname{card} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A, X) \ \leq \ s^r \qquad (\text{si } A \in \mathrm{Filt}^r, \ X \in \mathrm{Filt}^s) \ , \tag{3.8 bis}$$

$$\operatorname{card} \widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}^r / X)} \ \leq \ s^r \qquad (\text{si } X \in \mathrm{Filt}^s) \ . \tag{3.9 bis}$$

Sans hypothèse du continu, ces formules sont aussi valables pour r de la forme 2^c, avec $c \geq \pi_0$. Ce sont ces dernières formules qui on l'air les plus naturelles. Pour (3.8 bis) et (3.9 bis), je signale que le deuxième membre s^r est le cardinal de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(A, X)$, où A, X sont deux ensembles tels que $\operatorname{card} A = r$, $\operatorname{card} X = s$. On ne peut donc espérer améliorer (3.8 bis) ! Pour la

---

[4] *cf.* plus bas la notation $\widetilde{\mathcal{C}}$.

[5] Signalons qu'on a toujours $\operatorname{card} \widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{C})} \geq \operatorname{card} \widetilde{\mathcal{C}}$ car $\widetilde{\mathcal{C}} \hookrightarrow \widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{C})}$ via $\mathrm{cl}(X) \longmapsto \mathrm{cl}(\mathrm{id}_X)$.

`[page 20]`

première formule (3.7 bis), notons que l'on a égalité lorsque $\mathcal{M}$ est la catégorie des couples (A, B), A un ensemble et B une partie de A, avec les flèches évidentes, et qu'on définit $\mathcal{M}^\pi$ (pour $\pi \geq \pi_0$) comme la sous-catégorie strictement pleine formée des (A, B) tels que $\operatorname{card} A \geq \pi$.

Démonstration de 3.1. Prouvons d'abord la formule (3.8),

$$\operatorname{card}\operatorname{Hom}(A, X) \;\leq\; s^{(r^{\pi_0})} \qquad \begin{cases} \text{si } A \in \operatorname{Filt}^r,\ X \in \operatorname{Filt}^s, \\ r \geq \pi_1,\ s \geq \sup(\pi_1, C_1). \end{cases}$$

(**N.B.** Je n'utiliserai pas $r \geq C_1$, postulé dans 3.1 1°.) J'écris `[<<J'écris>> rayé]`

$$\begin{aligned} A &= \varinjlim_I A_i\ , \quad \operatorname{card} I \;\leq\; r^{\pi_0}\ , \quad A_i \;\in\; \operatorname{Filt}^{\pi_0}\ , \\ X &= \varinjlim_J X_j\ , \quad \operatorname{card} J \;\leq\; s^{\pi_1}\ , \quad X_j \;\in\; \operatorname{Filt}^{\pi_1}\ , \qquad J \text{ grand devant } \pi_1\ . \end{aligned}$$

On aura

$$\operatorname{Hom}(A, X) \;\simeq\; \varprojlim_{i \in I}\ \underbrace{\operatorname{Hom}(A_i, \varinjlim_J X_j)}_{\overset{(6)}{\simeq}\ \varinjlim_{j\in J}\ \underbrace{\operatorname{Hom}(A_i, X_j)}_{\text{de cardinal} \leq C_1}}\ ,$$

donc pour tout $i \in I$

$$\operatorname{Hom}(A_i, X) \;\leq\; \operatorname{card}(J) \times C_1 \;\leq\; s^{\pi_1} \times C_1 \;=\; s^{\pi_1}\ ,$$

car $s \geq C_1$, donc $s^{\pi_1} \geq C_1$, d'où

$$\operatorname{card}(\varprojlim_{j \in I} \operatorname{Hom}(A_i, X)) \;\leq\; (s^{\pi_1})^{\operatorname{card} I} \;\leq\; \underbrace{(s^{\pi_1})^{(r^{\pi_0})}}_{s^{\pi_1 r^{\pi_0}}}\ .$$

Comme $r \geq \pi_1$, on a $r^{\pi_0} \geq \pi_1$, donc $r^{\pi_0}\pi_1 = r^{\pi_0}$, d'où

$$\operatorname{card}\operatorname{Hom}(A, X) \;\leq\; s^{(r^{\pi_0})}\ ,$$

c'est bien la formule (3.8). Pour en tirer une estimation pour $\mathcal{M}^r/X$ (avec $X \in \operatorname{Filt}^s$),

`[page 21]`

je vais d'abord majorer le cardinal des classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{M}^r/X$, *i.e.* des flèches à isomorphisme près (dans $\mathcal{M}^r$)

$$A \longrightarrow X\ , \qquad X \text{ fixé dans } \operatorname{Filt}^s,\ A \text{ variable dans } \mathcal{M}^r\ .$$

On aura

$$A \;=\; \varinjlim_{i \in I} A_i \qquad \text{avec } A_i \in \operatorname{Filt}^{\pi_0},\ I \text{ ensemble ordonné de cardinal} \leq r^{\pi_0}\ .$$

[6] car les $A \in \operatorname{Filt}^{\pi_0}$ sont π_1-accessibles.

Pour I fixé, le cardinal de l'ensemble des systèmes inductifs indexés par I, dans $\mathcal{M}^{\pi_0}/X$, à isomorphisme près, peut se majorer ainsi : pour tout $i \in I$, il faut choisir A_i dans $\mathcal{M}^{\pi_0}$ (mais seule sa classe dans $\widetilde{\mathcal{M}^{\pi_0}}$ importe), donc c'est majoré par card $\widetilde{\mathcal{M}^{\pi_0}} \leq C_0$ [7], et pour tous les i, par card $I \times C_0 \leq r^{\pi_0} \times C_0$, et si $r \geq C_0$, donc $r^{\pi_0} \geq C_0$, on trouve une majoration des choix possibles du système des *objets* A_i dans $\mathcal{M}^{\pi}$, à isomorphisme près, par r^{π_0}. Si on se donne de plus les morphismes de transition $A_i \longrightarrow A_j$ pour $i < j$, cela fait pour chaque paire comparable, élément de $I \times I$, un choix majoré par C_0, donc encore une majoration par $\underbrace{\operatorname{card}(I \times I)}_{=(\operatorname{card} I)^2 = \operatorname{card} I} \cdot C_0 \leq r^{\pi_0} \cdot C_0 = r^{\pi_0}$. Donc l'ensemble des systèmes inductifs en question, à isomorphisme près, pour I fixé, est de cardinal $\leq r^{\pi_0} \cdot r^{\pi_0} = r^{\pi_0}$. Enfin, les *homomorphismes* d'un système inductif donné dans X sont majorés par card $I \times s^{(r^{\pi_0})}$ (par (3.8) déjà prouvé), donc par

$$r^{\pi_0} \cdot s^{(r^{\pi_0})} \;=\; s^{(r^{\pi_0})} \qquad (\text{puisque } r^{\pi_0} \leq s^{(r^{\pi_0})}) \;.$$

Au total, pour I fixé, l'ensemble des systèmes inductifs à isomorphisme près, indexés par I, à valeurs dans $\mathcal{M}^r/X$, est

`[page 22]`

de cardinal majoré par $\underbrace{r^{\pi_0}}_{\substack{\text{nombre des}\\ \text{systèmes inductifs}\\ \text{dans } \mathcal{M}^{\pi}\text{, à}\\ \text{isomorphisme près}}} \cdot \underbrace{s^{(r^{\pi_0})}}_{\substack{\text{nombre des}\\ \text{flèches d'un}\\ \text{tel système inductif}\\ \text{dans } X}} = s^{(r^{\pi_0})}$.

Mais il faut maintenant faire varier I, à isomorphisme près, dans la catégorie des ensembles ordonnés (filtrants *etc.*) de cardinal $\leq \lambda = r^{\pi_0}$. On voit de suite que cet ensemble de classes d'isomorphie (qui peut s'interpréter comme un ensemble quotient d'un certain ensemble de parties d'un ensemble fixe I_0 de cardinal λ) est de cardinal $\leq 2^{\lambda}$. On trouve donc finalement

$$\operatorname{card} \widetilde{\mathcal{M}^r/X} \;\leq\; s^{(r^{\pi_0})} \cdot 2^{(r^{\pi_0})} \;=\; s^{(r^{\pi_0})} \;,$$

sous condition que

$$r \;\geq\; \sup(\pi_1, C_0) \;, \qquad s \;\geq\; \sup(\pi_1, C_1) \;.$$

Il faut prouver l'inégalité similaire pour card $\widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}^r \mathcal{M}}$ (3.9). Or, comme pour A, B dans $\mathcal{M}^r$, on a, si $r \geq \sup(\pi_1, C_1)$,

$$\operatorname{card} \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(A, B) \;\leq\; r^{(r^{\pi_0})}$$

en vertu de (3.8) où on fait $s = r$, on trouve que

$$\begin{aligned} \operatorname{card} \widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}^r/X)} \;&\leq\; \Big(\operatorname{card} \widetilde{\mathcal{M}^r/X}\Big)^2 \cdot r^{(r^{\pi_0})} \\ &\leq\; s^{(r^{\pi_0})} \cdot r^{(r^{\pi_0})} \\ &=\; s^{(r^{\pi_0})} \qquad \text{si } s \geq r \;. \end{aligned}$$

(On va regarder plus bas les cas $s \leq r$ [8]). C'est bien la formule (3.9).

[7] On a posé ici $C_0 = \operatorname{card} \widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}^{\pi_0}}$, donc $C_0 \leq C_1$.
[8] *cf.* cor. 2, page 23.

`[page 23]`

Venons-en à la catégorie $\mathcal{M}^r$ elle-même. L'argument de la page 21 montre que l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{M}^r$ indexés par un I fixé, de cardinal $\leq r^{\pi_0}$, comme $A = \varinjlim_i A_i$ avec $A_i \in \mathrm{Filt}^{\pi_0}$, est de cardinal majoré par r^{π_0} (si $r \geq C_0$). Si on fait varier I, on trouve une majoration par $r^{\pi_0} \cdot 2^{(r^{\pi_0})} = 2^{(r^{\pi_0})}$. On en conclut comme tantôt que l'ensemble $\widetilde{\mathrm{Fl}\,\mathcal{M}^r}$ est de cardinal majoré par

$$(2^{(r^{\pi_0})})^2 \times r^{(r^{\pi_0})} \qquad (\text{si } r \geq \sup(\pi_1, C_1)) ,$$

donc par $r^{(r^{\pi_0})}$. Je dis qu'on a

$$r^{(r^{\pi_0})} = 2^{(r^{\pi_0})} ,$$

en effet, on a $\geq$, et pour prouver $\leq$, on note que $r < 2^r$, donc $r^{(r^{\pi_0})} \leq (2^r)^{(r^{\pi_0})} = 2^{r \cdot r^{\pi_0}} = 2^{(r^{\pi_0})}$, O.K. ! Cela établit donc 3.7. Cet argument prouve en fait le

Lemme 3.2. *Soient r un cardinal, r' un cardinal $\geq r$. Alors on a*

$$r^{r'} = 2^{r'} \qquad (= s^{r'} \text{ pour tout } 2 \leq s \leq r) .$$

Corollaire 1. *Soient $r \geq \sup(\pi_1, C_1)$, et $A, X \in \mathrm{Filt}^{\pi}$. Alors*

(3.10) $$\mathrm{card}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(A, X) \leq 2^{(r^{\pi_0})} \qquad (= 2^r \text{ si } r = 2^c, \text{ avec } c \geq \pi_0) .$$

On applique (3.8), qui donne la majoration $r^{(r^{\pi_0})}$, et le lemme 3.2.

On notera qu'on trouve la même majoration pour le cardinal de $\widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}^r)}$ tout entier (3.7) ! De même, (3.9) donne :

Corollaire 2. *Soit $r \geq \sup(\pi_1, C_1)$, et $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}^r$. Alors*

(3.11) $$\mathrm{card}\,\widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}^r/X)} \leq 2^{(r^{\pi_0})} \qquad (= 2^r \text{ si } r = 2^c, \text{ avec } c \geq \pi_0) .$$

c'est donc la formule (3.9) pour $s \leq r$, laissée en suspens.

`[page 24]`

Revenons à la majoration cardinale des $X_\alpha(f)$, où $f : X \longrightarrow Y$ est dans $\mathrm{Fl}^s(\mathcal{M})$, *i.e.* $X, Y \in \mathrm{Filt}^s$. On suppose de plus $C_0 \subset \mathrm{Fl}^r(\mathcal{M})$,

(3.10) $$C_0 \subset \mathrm{Fl}^r(\mathcal{M}) = \mathrm{Fl}(\mathcal{M}^r) , \qquad (f : X \longrightarrow Y) \in \mathrm{Fl}^s(\mathcal{M}) , \quad \text{i.e. } X, Y \in \mathrm{Filt}^s , \quad \text{avec } s \geq r .$$

`[Deux fois (3.10).]` Il y a une difficulté idiote, c'est que $\mathcal{M}^r$ est équivalente à une petite catégorie, mais n'est pas elle-même petite. Même si C_0 ne contenait qu'une seule classe d'isomorphie de flèches de $\mathcal{M}^r$, son cardinal pourrait être (pour r fixé) arbitrairement élevé. Aussi, dans ce qui suit, je dois supposer la condition de "non pléthoricité cardinale" pour C_0 :

(3.11) $\forall\, i \in C_0$, désignant par $C_0(i)$ l'ensemble des $i' \in C_0$ telles que $i \simeq i'$ dans $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, j'impose que $\mathrm{card}\, C_0(i) \leq 2^{(r^{\pi_0})}$ (ce qui est aussi la valeur de la majoration pour le cardinal de $\widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}^r(\mathcal{M})} = \widetilde{\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}^r)}$).

`[Deux fois (3.11).]` Cela implique donc que l'on a $\operatorname{card} C_0 \leq (2^{(r^{\pi_0})})^2 = 2^{(r^{\pi_0})}$,

$$\operatorname{card} C_0 \ \leq \ 2^{(r^{\pi_0})} \ , \tag{3.12}$$

qui est équivalente à (3.11) (moyennant $C_0 \subset \mathrm{Fl}^r(\mathcal{M})$, postulé dans (3.10)).

Il s'ensuit par (3.8) que l'on a

$$\operatorname{card} \Delta(C_0, f) \ \leq \ \underbrace{\operatorname{card}(C_0)}_{\leq 2^{(r^{\pi_0})}} \cdot s^{(r^{\pi_0})} \cdot s^{(r^{\pi_0})} \ \leq \ s^{(r^{\pi_0})} \ .$$

D'autre part, les X_D dont on prend la somme amalgamée sous X, pour obtenir $X_1(f)$, sont dans $\mathcal{M}^s$, si on fait l'hypothèse suivante.

`[page 25]`

(3.13) Les $\mathcal{M}^\pi = \underline{\mathrm{Filt}}^\pi$ sont stables par sommes amalgamées simples, et par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leq \pi$ (pas nécessairement grandes devant π_0) ,

compte tenu que $r \leq s$, donc $\mathcal{M}^r \subset \mathcal{M}^s$, donc A, B, X dans $X_D = B \amalg_A X$ sont dans $\mathcal{M}^s$. Les sommes amalgamées partielles *finies* des X_D sont donc aussi dans $\mathcal{M}^s$, par récurrence sur le cardinal de l'ensemble d'indices. La somme amalgamée infinie apparaît ainsi comme $\varinjlim$ filtrante d'objets de $\mathcal{M}^s$, l'ensemble d'indices étant l'ensemble $\mathfrak{P}^*_\mathrm{f}\Delta(C_0, f)$ des parties finies non vides de $\Delta(C_0, f)$. Cet ensemble est de cardinal majoré par s', si s' est un cardinal *infini* tel que $\operatorname{card} \Delta(C_0, f) \leq s'$. On peut donc prendre $s' = s^{(r^{\pi_0})}$. On a donc prouvé, compte tenu de (3.13) appliqué à $\mathcal{M}^{s'}$, le

Lemme 3.3. *On suppose* (3.10), i.e. $C_0 \subset \mathrm{Fl}^r(\mathcal{M})$, $f \in \mathrm{Fl}^s(\mathcal{M})$, *avec* $s \geq r \geq \sup(\pi_1, C_1)$, *et de plus que* C_0 *satisfait la condition de non-pléthoricité* (3.11) (*ce qu'on peut toujours supposer, quitte à réduire* C_0 *sans changer* $\widetilde{C_0} = \Phi$ *et* $C_{0*} = \Psi$), *et que la filtration cardinale satisfait la condition de stabilité (anodine!)* (3.13). *Posons*

$$s' \ = \ s^{(r^{\pi_0})} \ . \tag{3.14}$$

Alors $X_1(C_0, f)$ *est dans* $\mathcal{M}^{s'}$. *Plus généralement et plus joliment, pour* C_0 *et* r *fixés* (*avec* $C_0 \subset \mathrm{Fl}^r(\mathcal{M})$ *et satisfaisant la condition de non-pléthoricité* (3.11) *relativement à* r), *pour tout cardinal*

`[page 26]`

de la forme

$$s' \ = \ s^t \ , \qquad \textit{avec } t \geq r^{\pi_0},\ s \geq 2 \tag{3.15}$$

(*d'où* $s' \geq 2^{(r^{\pi_0})} > r^{\pi_0} \geq r$), $\underline{\mathrm{Fl}}^{s'}(\mathcal{M})$ *est stable sous le foncteur* $p_1^{C_0} : \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$.

En effet, si on applique la première partie du lemme au couple (r, s'), on trouve que $X_1(f)$ est dans $\mathcal{M}^{s''}$, avec $s'' = s'^{(r^{\pi_0})}$. Mais

$$s'' \ = \ s'^{(r^{\pi_0})} \ = \ (s^t)^{(r^{\pi_0})} \ = \ s^{tr^{\pi_0}} \ \underset{\substack{\text{car } t \geq r^{\pi_0},\\ \text{donc } tr^{\pi_0} = t}}{=} \ s^t \ = \ s' \ ,$$

donc on voit que $f \in \mathrm{Fl}^{s'}$ implique $X_1(f) \in \mathcal{M}^{s'}$, ou ce qui revient au même, $p_1(f) \in \mathrm{Fl}^{s'}$.

Corollaire. *Soient C_0, r, $s' = s^t$ ($t \geq r^{\pi_0}$, $s \geq 2$) comme dessus, et soit α un nombre ordinal tel que*

$$\operatorname{card} \alpha \;\leq\; s' \;=\; s^t \; .$$

Alors $\underline{\mathrm{Fl}}^{s'}(\mathcal{M})$ est stable par le foncteur $p_\alpha = p_\alpha^{C_0}$.

On le voit aussitôt par récurrence transfinie, compte tenu du lemme 3.3, et de l'hypothèse de stabilité (3.13).

Pour résumer :

Théorème 2. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, et munie d'une filtration cardinale $(\mathrm{Filt}^\pi)_{\pi \geq \pi_0}$, telle que les Filt^π soient stables par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leq \pi$ (pas forcément grandes devant π_0), et par les sommes amalgamées simples qui existent dans $\mathcal{M}$. On suppose que les éléments de Filt^{π_0} soient accessibles, et on désigne par π_1 le plus petit cardinal $\geq \pi_0$, tel que les objets de Filt^{π_0} soient π_1-accessibles. On pose*

[page 27]

$$c_1 \;=\; \operatorname{card} \mathrm{Fl}(\mathcal{M}^{\pi_1}) \;=\; \operatorname{card} \mathrm{Fl}^{\pi_1}(\mathcal{M})$$

(où pour tout $\pi \geq \pi_0$, $\mathcal{M}^\pi$ désigne la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{M}$ définie par Filt^π, et $\mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M}) = \mathrm{Fl}(\mathcal{M}^\pi)$).

Soit C_0 une petite partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, formée de flèches coquarrables, et posons

$$\Phi \;=\; \widetilde{C_0} \;=\; \Psi^* \,, \qquad \textit{où} \;\; \Psi = C_{0*} = \Phi_* \; .$$

*Soit r un cardinal $\geq \sup(\pi_1, c_1)$, et tel que l'on ait $C_0 \subset \mathrm{Fl}^r(\mathcal{M})$. On suppose que C_0 est irrédondant (*i.e. *deux objets de C_0 isomorphes sont égaux), ou plus généralement, que C_0 satisfait la très anodine condition de non-pléthoricité* (3.11) *relativement à r. On considère la suite transfinie des foncteurs $p_\alpha = p_\alpha^{C_0}$ sur $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$* (*cf.* th. 1), *donnant lieu aux factorisations fonctorielles d'une $f \in \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$, $f : X \longrightarrow Y$, en*

$$X \xrightarrow{i_\alpha(f)} X_\alpha(f) \xrightarrow{p_\alpha(f)} Y \; . \tag{3.16}$$

On a alors ce qui suit :

1°) *On a (pour mémoire) $i_\alpha(f) \in \Phi$ pour tout α, et de plus,* si α est grand devant r^{π_0}, *on a aussi $p_\alpha(f) \in \Psi$. Si r' est un cardinal $> r^{\pi_0}$ (p. ex. le cardinal successeur de r^{π_0}), on peut prendre pour α le premier ordinal dont le cardinal soit égal à r'.*

2°) *Pour tout cardinal s de la forme*

$$s \;=\; c^t \qquad \textit{avec} \;\; t \geq r^{\pi_0},\, c \geq 2$$

(donc $s = 2^t$ si on prend $c \leq t$, cf. *lemme 3.2), $\underline{\mathrm{Fl}}^s(\mathcal{M})$ est stable sous les p_α tels que $\operatorname{card} \alpha \leq s$. Si on prend p. ex. pour α le premier ordinal dont le cardinal soit $> r^{\pi_0}$, alors $\underline{\mathrm{Fl}}^s(\mathcal{M})$ est stable par p_α, qui par 1°) réalise donc une factorisation fonctorielle* (3.16) *avec $i_\alpha(f) \in \Phi$, $p_\alpha(f) \in \Psi$.*

`[page 28]`

DÉMONSTRATION. Tout a été prouvé, si on se rappelle que les objets de $\mathcal{M}^r$ sont r^{π_0}-accessibles (*cf.* (3.2)).

4 Compléments sur les structures de Quillen

Définition 4.1. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie. On appelle *précouple de Quillen* dans $\mathcal{M}$ un couple (Φ, Ψ) de parties de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, satisfaisant les deux conditions suivantes.

a) On a $\Phi \longleftrightarrow \Psi$, *i.e.* $\Psi \subset \Phi_*$, ou ce qui revient au même, $\Phi \subset \Psi^*$ – soit encore : pour tout carré commutatif dans $\mathcal{M}$

(4.1.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dotted, "w"] & Y \end{tikzcd} ,$$

avec $i \in \Phi$, $p \in \Psi$, il existe w telle que $wi = u$, $pw = v$.

b) Toute $f \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ se factorise en
$$f \; = \; p\, i\, , \qquad \text{avec } i \in \Phi, \, p \in \Psi \, .$$

On écrit

(4.1.2)
$$\Phi \leftrightarrow\!\!\!\rightarrow \Psi$$

pour indiquer que (Φ, Ψ) est un précouple de Quillen.

On dit que le précouple de Quillen est *clos*, si Φ est clos à gauche, Ψ clos à droit. On va voir plus bas (cor. 2, page 31) que cela implique (donc équivaut à)

(4.1.3)
$$\Phi \; = \; \Psi^* \, , \qquad \Psi \; = \; \Phi_* \, .$$

`[page 29]`

Un précouple de Quillen clos est aussi appelé un couple de Quillen.

Proposition 4.2. *Soit* (Φ, Ψ) *un précouple de Quillen dans* $\mathcal{M}$*, et soit* $j \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ [9]. *On a alors les conditions équivalentes sur* j *:*

a) $j \in \widetilde{\Phi}$.

b) $j \in \Psi^*$.

c) j *est facteur direct d'un* $i \in \Phi$.

c′) j *est facteur direct d'un* $i \in \Phi$ *ayant même source que* j*, plus précisément, il existe un diagramme*

(4.2.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, shift right, "q"'] \\ A \arrow[r, "i"] \arrow[u, shift right, dotted, "\mathrm{id}_A"'] & B' \arrow[u, shift right, dotted, "p"'] \end{tikzcd} ,$$

[9] **N.B.** On utilise seulement que $\Phi \longleftrightarrow \Psi$, et que j peut se mettre sous la forme pi, avec $i \in \Phi$, $p \in \Psi$.

avec $i \in \Phi$, *et*

$$(4.2.2) \qquad qj = i \,, \qquad pi = j \,, \qquad pq = \mathrm{id}_B \,,$$

de sorte que j *est un facteur direct de* $i \in \Phi$, *par* (id_A, q), *admettant la rétraction* (id_A, p).

d) *Pour tout diagramme commutatif traits pleins*

$$(4.2.3) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i"'] & & B \arrow[dl, dotted, bend left, "q"] \\ & B' \arrow[ur, "p"] & \end{tikzcd} ,$$

i.e. *toute factorisation de* j *en* pi, *si on a* $p \in \Psi$, *il existe une section* q *de* B' *sur* B *dans* $A\backslash\mathcal{M}$, i.e. *une flèche* $q : B \longrightarrow B'$ *telle que*

$$pq = \mathrm{id}_B \qquad et \qquad qj = i \,.$$

Démonstration de la proposition. Elle se fait par la suite d'implications suivante, toutes $(\pm)$ tautologiques :

$$(c') \implies (c) \implies (a) \implies (b) \implies (d) \implies (c') \,,$$

[page 30]

dont les quatre premières utilisent seulement l'hypothèse $\Phi \longleftrightarrow \Psi$ (de (a) de la définition 4.1), et la dernière seulement, $(d) \implies (c')$, fait appel à l'hypothèse de factorisation de Quillen ((b) dans 4.1) ; et encore il suffit de la supposer pour j seulement !

$(c') \implies (c)$ tautologie pure, $(c) \implies (a)$ car on sait que $\widetilde{\Phi}$ est stable par facteurs directs (et contient Φ), $(a) \implies (b)$ car $\widetilde{\Phi} \subset \Psi^*$ ($\widetilde{\Phi}$ étant par définition la plus petite partie close à gauche de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ contenant Φ, et Ψ^* étant close à gauche), $(b) \implies (d)$ car on écrit le diagramme donné (4.2.2) (traits pleins) comme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j \in \Psi^*"'] & X \arrow[d, "p \in \Psi"] \\ B \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dotted, "q"] & Y \end{tikzcd} ,$$

en y faisant $Y = B$, $v = \mathrm{id}_B$, et en rebaptisant X par B', et u par i : l'hypothèse (b), $j \in \Psi^*$, signifie que dans un diagramme traits pleins $(*)$, il existe toujours q telle que $qj = u$, $pq = v$, et en l'exprimant dans le cas particulier où $v = \mathrm{id}_B$, on trouve (d).

Reste à prouver $(d) \implies (c')$, en utilisant cette fois l'hypothèse de factorisation sur j, *i.e.* qu'on peut écrire j sous la forme pi :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i"'] & & B \arrow[dl, dotted, bend left, "q"] \\ & B' \arrow[ur, "p"] & \end{tikzcd} ,$$

avec $i \in \Phi$, $p \in \Psi$. En vertu de (d), comme $p \in \Psi$, il existe donc $q : B \longrightarrow B'$ satisfaisant

`[page 31]`

$$pq = \mathrm{id}_B\ , \qquad qj = i\ ,$$

ce qui prouve (c'), puisque $i \in \Phi$.

Corollaire 1. *Soit* (Φ, Ψ) *un précouple de Quillen. Alors on a*

(4.3) $\quad \widetilde{\Phi} = \Psi^* =$ *ensemble des objets de* $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$ *qui sont facteurs directs d'éléments de* Φ *,*

et dualement

(4.4) $\quad \overline{\Psi} = \Phi_* =$ *ensemble des objets de* $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$ *qui sont facteurs directs d'éléments de* Ψ *.*

Corollaire 2. *Les conditions suivantes sur le précouple de Quillen* (Φ, Ψ) *sont équivalentes.*

a) *Le précouple est* clos, i.e. $\Phi = \widetilde{\Phi}$, $\Psi = \overline{\Psi}$.

b) $\Phi = \Psi^*$, $\Psi = \Phi_*$.

c) Φ *et* Ψ *sont stables par facteurs directs.*

Soit maintenant

(4.5) $$W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$$

un localiseur, satisfaisant les conditions habituelles

(4.6) $$\begin{cases} a) & W \text{ contient les isomorphismes.} \\ b) & \text{Si } X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \text{ dans } \mathcal{M}, \text{ si deux parmi } f,\ g,\ gf \text{ sont} \\ & \text{dans } W, \text{ alors le troisième aussi.} \end{cases}$$

(W modérément saturé). Supposons de plus données quatre autres parties

(4.7) $$C\ ,\ TC\ , \qquad F\ ,\ TF$$

de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, satisfaisant les conditions suivantes.

(4.8) $$\begin{cases} a) & (C, TF) \text{ et } (TC, F) \text{ sont des précouples de Quillen.} \\ b) & TC \subset C \cap W,\ TF \subset F \cap W. \end{cases}$$

`[page 32]`

Ces propriétés s'explicitent ainsi :

M 1 Propriétés de relèvement-prolongement, $C \longleftrightarrow TF$ et $TC \longleftrightarrow F$.

M 2 Propriété de factorisation de toute flèche f de $\mathcal{M}$ en $f = pi$, avec, au choix, $i \in C$, $p \in TF$, ou $i \in TC$, $p \in F$.

M′ $TC \subset C \cap W$, $TF \subset F \cap W$.

C'est donc une partie des axiomes d'une structure de Quillen faible pour W (XIII, p. 27, déf. 1) – il manque les axiomes de stabilité M 3, M 4, et les axiomes de "propreté" (propriety) M″, savoir $F \subset \mathrm{Fib}_W$, $C \subset \mathrm{Cof}_W$.

Proposition 4.3. *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie, (C, TF) et (TC, F) deux précouples de Quillen dans $\mathcal{M}$, satisfaisant*

$$TC \subset C\,, \qquad TF \subset F\,, \tag{4.3.1}$$

et soit W une partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ dont on ne suppose pour l'instant que 4.6, (b) [10]*, et*

$$W \supset TC\,,\, TF\,, \tag{4.3.2}$$

donc on a

$$TC \subset C \cap W\,, \qquad TF \subset F \cap W\,. \tag{4.3.3}$$

Considérons les conditions de prolongement-relèvement suivantes (a), (a′)*, et les conditions de factorisation* (b), (b′), (c), (d) (*en se rappelant que* $\widetilde{TC} = F^*$*,* $\overline{TF} = C_*$*, en vertu de la proposition* 4.2 (*cor.* 1) *appliquée aux précouples de Quillen* (TC, F)*,* (C, TF)) :

a) $C \cap W \subset \widetilde{TC}$ (*donc* $TC \subset C \cap W \subset \widetilde{TC}$).

a′) $F \cap W \subset \overline{TF}$ (*donc* $TF \subset F \cap W \subset \overline{TF}$).

b) $W \subset TF \circ \widetilde{TC}$.

b′) $W \subset \overline{TF} \circ TC$.

c) $W \subset \overline{TF} \circ \widetilde{TC}$.

d) $W \subset TF \circ TC$ (*donc, par* (4.3.2), $W = TF \circ TC$ *si* W *est stable par composition*). [11]

[page 33]

Alors toutes les conditions sauf la dernière sont équivalentes (*et elles sont donc impliquées par cette dernière*)*. Donc lorsque* TC *ou* TF *sont stables par facteurs directs* (*p. ex. si* TC *est clos à gauche, ou* TF *clos à droite*)*, toutes les conditions envisagées sont équivalentes* (*puisque par le corollaire* 2 *à la proposition* 4.2*, on a alors* $TC = \widetilde{TC}$ *resp.* $TF = \overline{TF}$*, donc* (b′) *resp.* (b) *équivaut alors à* (d)).

Démonstration. Elle se fait par le diagramme d'implications

$$\begin{tikzcd}
 & (d) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(b) \arrow[dr, Rightarrow] & \mathrm{Q} & (b') \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & (c) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(a) \arrow[uu, Rightarrow] & & (a') \arrow[uu, Rightarrow]
\end{tikzcd}\;,$$

[10] On utilise seulement que si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, et si $gf \in W$, alors $f \in W \iff g \in W$. On n'a pas besoin que W contienne les isomorphismes, ni qu'il soit stable par composition.

[11] **N.B.** La condition (a) signifie aussi que $(C \cap W, F)$ est encore un précouple de Quillen, resp. (b) signifie que $(C, F \cap W)$ en est un – et alors cette paire de précouples de Quillen satisfait cette fois à (d), *i.e.* $W = TF' \circ TC'$.

où les quatre implications du carré supérieur Q sont tautologiques. Il suffit donc d'établir les implications

$$(c) \implies (a) \implies (b)\ ,$$

les implications $(c) \implies (a') \implies (b')$ en résultent par dualité.

Supposons donc (c), *i.e.*

$$(*) \qquad W \subset \overline{TF} \circ \widetilde{TC}\ ,$$

et prouvons (a), *i.e.* que

$$C \cap W \subset \widetilde{TC}\ .$$

Mais si $j \in C \cap W$, pour prouver que $j \in \widetilde{TC}$, écrivons $j = pi$, $i \in \widetilde{TC}$, $p \in \overline{TF}$, ce qui est possible par l'hypothèse $(*)$ et $j \in W$.

[page 34]

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j\in C"] \arrow[dr, swap, "i\in\widetilde{TC}"] & B \arrow[d, dotted, bend left, "q"] \\ & B' \arrow[u, swap, "p\in\overline{TF}"] \end{tikzcd} .$$

Utilisons maintenant l'hypothèse $j \in C$ et $C \longleftrightarrow \overline{TF}$, on trouve donc (prop. 3.2, $(a) \implies (d)$) une flèche $q : B \longrightarrow B'$ telle que $pq = \mathrm{id}_B$, $qj = i$, donc j apparaît comme facteur direct de i. Comme $i \in \widetilde{TC}$ et que $\widetilde{TC}$ est stable par facteurs directs, on en conclut $j \in \widetilde{TC}$, *q.e.d.*

$(a) \implies (b)$. On suppose donc

$$(*) \qquad C \cap W \subset \widetilde{TC}\ ,$$

et on veut prouver (b), *i.e.*

$$W \subset TF \circ \widetilde{TC}\ .$$

Soit donc $f \in W$, et factorisons f en pi, avec $i \in C$, $p \in TF$. (O.K. à cause du précouple de Quillen (C, TF)). Comme $TF \subset W$, on a $p \in W$, et comme $pi \in W$, on en conclut $i \in W$ (saturation modérée de W – on doit quand même l'utiliser !). On a donc $i \in C \cap W$, donc $i \in \widetilde{TC}$ par $(*)$, d'où $f \in TF \circ \widetilde{TC}$, *q.e.d.*

Corollaire 1. *Supposons TC stable par facteurs directs. Alors toutes les conditions de la proposition* 4.3 *sont équivalentes, et équivalent à la relation*

$$(4.3.4) \qquad C \cap W = TC\ .$$

Dualement, si TF est stable par facteurs directs, les conditions de la proposition 4.3 *sont toutes équivalentes et équivalent à*

$$(4.3.4') \qquad F \cap W = TF\ .$$

[page 35]

En effet, par le corollaire 2 de la proposition 4.2, l'hypothèse sur TC implique que $TC = \widetilde{TC}$, donc comme $TC \subset C\cap W$, l'hypothèse $C\cap W \subset \widetilde{TC}$ $(= TC)$ équivaut à $C\cap W = TC$.

Corollaire 2. *Supposons C et W stables par facteurs directs. Alors les conditions équivalentes de la proposition* 4.3 *équivalent à*

$$C \cap W \; = \; \widetilde{TC}\ . \tag{4.3.5}$$

Dualement, si F, W sont stables par facteurs directs, les conditions équivalentes de la proposition 4.3 *équivalent à*

$$F \cap W \; = \; \overline{TF}\ . \tag{4.3.5'}$$

En effet, si C et W sont stables par facteurs directs, il en est de même de $C \cap W$, et dès lors si $C \cap W \subset \widetilde{TC}$, comme $C \cap W$ contient TC, on en conclut $\widetilde{C \cap W} = \widetilde{TC}$. Mais comme $C \cap W \longleftrightarrow TC$ et $C \cap W$ est stable par facteurs directs, $C \cap W$ est clos à gauche par corollaire 2 de la proposition 4.2, *i.e.* $C \cap W = \widetilde{C \cap W}$, d'où $C \cap W = \widetilde{TC}$, *q.e.d.*

Corollaire 3. *Supposons les conditions équivalentes* (a) *à* (c) *de* 4.3 *satisfaites, et de plus W* stable par facteurs directs [12]. *Alors les conditions préliminaires* (4.3.1) *et* (4.3.2) *restent satisfaites quand on remplace (C, TF) et (TC, F) par leurs clôtures $(C', TF') = (\widetilde{C}, \overline{TF})$ et $(TC', F') = (\widetilde{TC}, \bar{F})$, et les conditions équivalentes de la proposition* 4.3 *sont encore satisfaites pour ces couples, sous les formes fortes*

$$\begin{cases} C' \cap W \;=\; TC' & (= \widetilde{TC'}\,) \\ F' \cap W \;=\; TF' & (= \overline{TF'}\,) \\ \quad W \;=\; TF' \circ TC'\ . \end{cases} \tag{4.3.6}$$

[page 36]

Le triple (W, C', F') est un triple de Quillen clos (correspondant à une "closed model category" de Quillen, du moins si on suppose $\mathcal{M}$ stable par $\varinjlim$ finies et $\varprojlim$ finies, et que W est modérément saturé). [13]

Démonstration. Les relations (4.3.1) impliquent

$$\widetilde{TC} \subset \widetilde{C} \qquad \text{et} \qquad \overline{TF} \subset \bar{F}\ ,$$

[12] En fait, il suffit de supposer que l'on a $W \supset \widetilde{TC}$, $\overline{TF}$, *i.e.* que tout facteur direct d'un élément de W qui est soit dans C, soit dans F, est encore dans W. Alors $(\widetilde{C}, \widetilde{TC}, \bar{F}, \overline{TF})$ définissent une structure de Quillen close, et on sait que cela implique qu'en fait, W lui aussi est stable par facteurs directs.

[13] Il en résulte le

Corollaire 4. *Soient W un localiseur modérément saturé, et (C, TF), (TC, F) deux précouples de Quillen tels que $TC \subset C \cap W$, $TF \subset F \cap W$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) $TC = C \cap W$.

b) $TF = F \cap W$.

c) $W = TF \circ TC$.

d) (W, C, F) *est un triple de Quillen clos.*

i.e.
$$TC' \subset C' , \qquad TF' \subset F' ,$$
i.e. (4.3.1) pour les nouveaux couples de Quillen. La relation 4.3.2, $W \supset TC, TF$, implique
$$W \supset \widetilde{TC} , \overline{\overline{TF}} , \qquad \textit{i.e.} \qquad W \supset TC' , TF' ,$$
en vertu du corollaire 2 à la proposition 4.2 et du fait que W est stable par facteurs directs ; donc on a (4.3.2) pour les nouveaux couples. Comme par hypothèse on a
$$W = \overline{\overline{TF}} \circ \widetilde{TC} ,$$
ceci s'écrit
$$W = TF' \circ TC' ,$$
donc les nouveaux couples satisfont aux mêmes conditions, qui cette fois, les couples étant clos, prennent la forme forte (4.3.6).

Prouvons que le triple (W, C', F') satisfait aux axiomes de Quillen d'un triple de Quillen clos. On a bien, par (4.3.6),
$$\begin{cases} C' = (TF')^* = (F' \cap W)^* , \qquad F' = (TC')_* = (C' \cap W)_* , \\ W = TF' \circ TC' = C'_* \circ F'^* , \end{cases}$$
qui correspond à la définition des catégories de modèles de Quillen *clos* : les axiomes M 1, M 2, M 3, M 4 de Quillen sont réalisés de façon triviale (M 3 et M 4 parce que

`[page 37]`

C et F, TC et TF sont clos à gauche resp. à droite). L'axiome M 5 est la saturation modérée de W.

4.4. Voici l'idée pour construire plus ou moins "toutes" les structures de Quillen closes (C, TC, F, TF) associées à un localiseur donné $W \subset \mathcal{M}$. On suppose que $\mathcal{M}$ satisfait aux conditions du paragraphe précédent, concernant l'existence de $\varinjlim$ filtrantes, d'une filtration cardinale, l'accessibilité dans $\mathcal{M}$ (celle des éléments de Filt^{π_0}). On part d'une partie petite
$$C_0 \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$$
telle que

(4.4.1) $$C_{0*} \subset W ,$$

et on pose

(4.4.2) $$\begin{cases} C = \widetilde{C_0} , \qquad TC = C \cap W , \\ TF = C_* = C_{0*} , \qquad F = (TC)_* . \end{cases}$$

Il y a un problème seulement, vu que l'on sait déjà que (C, TF) est un couple de Quillen par le théorème de factorisation dans §1 (p. 10) : il faut la factorisation pour le couple $(TC, F = (TC)_*)$. À ce moment là, les conditions préliminaires (4.3.1), (4.3.2) de la proposition 4.3 sont satisfaites :
$$TC \subset C , \qquad TF \subset F , \qquad W \supset TC , TF ,$$
ainsi que la condition (a), $C \cap W \subset \widetilde{TC}$, puisque $C \cap W = TC$. Donc on trouve, par l'équivalence des conditions (a), (a'), (c), et vu que TC et TF sont clos,
$$TF = F \cap W , \qquad W = TF \circ TC ,$$

[page 38]

d'autre part l'hypothèse sur W implique que W est stable par facteurs directs, C l'est aussi, étant close à gauche, donc $TC = C \cap W$ aussi, donc par proposition 4.1, corollaire 2, on a $TC = \widetilde{TC}$, TC est close à gauche. On gagne donc, par la dernière assertion du corollaire 3, proposition 4.3 (p. 35).

En fait, indépendamment des conditions particulières sur $\mathcal{M}$, W, on vient de prouver ceci :

Lemme 4.4.1 (corollaire de la proposition 4.3.). *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie, W un localiseur dans $\mathcal{M}$ modérément saturé et stable par facteurs directs. Alors les structures de Quillen closes (C, F) associées à W s'obtiennent ainsi : on prend une partie C_0 de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *telle que*

$$TF \overset{\text{déf}}{=} C_{0*} \subset W ,$$

on pose

$$C = \widetilde{C_0} = TF^* , \qquad TC = C \cap W , \qquad F = (TC)_* ,$$

et on doit se débrouiller pour que (C, TF) et (TC, F) satisfassent à la condition de factorisation de Quillen, i.e. *soient des précouples de Quillen.* (En fait, C, TF et F étant clos par construction, et $TC = C \cap W$ étant stable par facteurs directs (C et W l'étant), ce seront même des *couples* de Quillen.)

[page 39]

Les hypothèses supplémentaires faites tantôt sur $\mathcal{M}$ servaient à assurer que si je prends C_0 petite, alors la factorisation marche pour (C, TF) automatiquement. Il reste le problème pour TC, F.

Notons que si elle marche, alors $TC = \widetilde{TC} = F^*$, donc TC est clos à gauche, et *a fortiori* satisfait les conditions de stabilité correspondantes :

(4.4.3)
- *a*) Stable par cochangement de base, par composition, par facteurs directs (ces deux dernières sont assurées automatiquement, car C, W sont stables).
- *b*) Stable par $\varinjlim$ ordinales strictes.

L'hypothèse de stabilité sur W sert (entre autres) à garantir la stabilité (*b*) pour TC (en fait, il suffirait pour cela seulement que W soit stable par $\varinjlim$ ordinales strictes). Il reste la stabilité de $TC = C \cap W$ par cochangement de base, qui est problématique car W n'est en général *pas* stable par cochangement de base. C'est pour assurer cette stabilité que je me vois pratiquement contraint ici à imposer

$$C_0 \subset \mathrm{Cof}_W , \tag{4.4.4}$$

je dis qu'avec l'hypothèse de stabilité faite sur W, cela implique

$$C \overset{\text{déf}}{=} \widetilde{C_0} \subset \mathrm{Cof}_W . \tag{4.4.5}$$

[page 40]

En effet, on a :

Proposition 4.4.2. *Soit $\mathcal{M}$ stable par petites $\varinjlim$ inductives filtrantes, et $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ un localiseur* (*modérément saturé*) stable par lesdites limites. *Alors* Cof_W *satisfait les conditions de stabilité* (4.4.3) (*"stabilité de Quillen gauche"*), *et est stable aussi par $\varinjlim$ filtrantes quelconques.*

En effet, la condition (a) est satisfaite sans condition supplémentaire sur W. D'autre part, il est immédiat que cette condition par rapport aux $\varinjlim$ filtrantes implique que Cof_W *est stable par limites inductives filtrantes* dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$.

Corollaire 4.4.3. *Sous les conditions de la proposition* 4.4.2, $\mathrm{Cof}_W \cap W = W^{\mathrm{univ}}$ (*ensemble des W-équivalences co-universelles dans $\mathcal{M}$*) *est stable par limites inductives filtrantes, et donc "stable à gauche" en sens de* (4.4.3).

Corollaire 4.4.4. *Sous les conditions de la proposition* 4.4.2, *supposons de plus que les sommes amalgamées simples existent dans $\mathcal{M}$, et soit C_0 une petite partie de* Cof_W *dont les éléments soient accessibles, et considérons*

$$C = \widetilde{C_0}\,, \qquad TC \overset{\text{déf}}{=} C \cap W\,.$$

Alors on a

$$C = \mathrm{Cof}_W\,, \qquad TC = C \cap W^{\mathrm{univ}} \subset W^{\mathrm{univ}}\,,$$

[page 41]

et C et TC sont Q-stables à gauche.

En effet, par le théorème 1 du paragraphe 1 (p. 10) et son corollaire, $\widetilde{C_0}$ est la plus petite partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ contenant C_0 et Q-stable à gauche. Comme Cof_W est Q-stable à gauche et contient C_0, on a donc $C = \widetilde{C_0} \subset \mathrm{Cof}_W$. Donc $TC \overset{\text{déf}}{=} C \cap W \subset \mathrm{Cof}_W \cap W \overset{\text{déf}}{=} W^{\mathrm{univ}}$, donc $TC = C \cap W^{\mathrm{univ}}$. Comme W^{univ} est lui aussi Q-stable à gauche (corollaire précédent), il en est de même de $C \cap W$, *q.e.d.*

Corollaire 4.4.5. *Supposons que tout objet de $\mathcal{M}$ soit accessible. Sous les conditions du corollaire précédent, posant*

$$TF = C_{0*} = C_*\,, \qquad F = (TC)_*\,,$$

le couple (C, TF) est un couple de Quillen. Pour qu'il en soit de même du couple (TC, F), il suffit qu'il existe une petite *partie TC_0 de $C \cap W$, telle que $\widetilde{TC_0} = TC$ ($\overset{\text{déf}}{=} C \cap W$).*

La première assertion est, on l'a vu tantôt, le théorème 1 du paragraphe 1. La deuxième résulte de ce même théorème. On peut préciser dans ce sens :

Proposition 4.4.6. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, par sommes amalgamées, et dont tous les objets sont accessibles, W un localiseur*

[page 42]

modérément saturé dans $\mathcal{M}$, stable par $\varinjlim$ filtrantes, C_0 une petite *partie de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, *telle que*

$$C_0 \subset \mathrm{Cof}_W\,, \qquad \underbrace{C_{0*}}_{(=TF)} \subset W\,,$$

posons

$$C \ = \ \widetilde{C_0} \qquad TC \ = \ C \cap W \ , \qquad TF \ = \ C_* \ , \qquad F \ = \ (TC)_* \ ,$$

et soit TC_0 *une petite partie de* $TC = C \cap W$. *On a alors*

$$\text{(4.4.6)} \qquad \begin{cases} C \ \subset \ \mathrm{Cof}_W \ , & TC \ = \ C \cap W^{\mathrm{univ}} \quad (\textit{pour mémoire}) \\ \widetilde{TC_0} \ \subset \ TC \ , & F_0 \supset F \quad (\textit{ce dernier trivial}) \ , \end{cases}$$

et les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\widetilde{TC_0} = TC$ (*on a* $\subset$) ;

a′) $F_0 = F$ (*on a* $\supset$) ;

b) $TF = F_0 \cap W$ (*on a* $\subset$) [14] ;

c) $W = TF \circ \widetilde{TC_0}$ (*on a* $\supset$) [15] ;

et impliquent que (W, C, F) *est un triple de Quillen clos.*

Démonstration. L'inclusion $\widetilde{TC_0} \subset TC$ résulte de la Q-stabilité à gauche de TC (cor. 4.4.4) et du fait que $TC_0 \subset TC$ est petite (on applique alors le théorème 1 tout comme pour $C \subset \mathrm{Cof}_W \ldots$). L'équivalence de (a), (b), (c) n'est autre que la proposition 4.3 appliquée à W et aux deux couples de Quillen (C, TF), $(\widetilde{TC_0}, F_0)$ (compte tenu du théorème 1 du paragraphe 1). Qu'on a alors un triple de Quillen clos a été vu dans le corollaire 3 de la proposition 4.3 (p. 35). Il reste à prouver l'équivalence de (a) et de (a'). On a $(a) \Longrightarrow (a')$, puisque $(TC_0)_* = (\widetilde{TC_0})_* = F_0$. Inversement, (a') implique $\widetilde{TC_0} = \widetilde{TC}$, donc le théorème de factorisation pour (TC, F) en vertu du théorème de factorisation, corollaire 1 (p. 11) appliqué à $TC_0 \subset TC \subset \widetilde{TC_0}$ et à $F_0 = F = (TC_0)_*$.

`[page 43]`

Ainsi, le seul problème, une fois trouvé C_0 (petite) satisfaisant $C_0 \subset \mathrm{Cof}_W$, $C_{0*} \subset W$, c'est de trouver une *petite* partie $TC_0 \subset TC$ qui "engendre $TC = C \cap W$ ", *i.e.* qui satisfasse aux conditions équivalentes (a), (a'), (b), (c) de la proposition précédente. J'ai passé des jours à essayer de prouver l'existence de TC_0, en supposant $\mathcal{M}$ munie d'une filtration cardinale, et W une partie accessible de $\mathcal{M}$, sans y être arrivé. Bien sûr, tout ce qui nous importe vraiment, c'est que (TC, F) satisfasse à la condition de factorisation. Mais je ne vois aucun moyen de le prouver, si ce n'est en "engendrant" à gauche TC par un *petit* sous-ensemble TC_0.

5 Résultats techniques préliminaires sur les parties accessibles de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, stables par limites inductives filtrantes

Je crois pourtant que je peux arriver à quelque chose d'utilisable, en travaillant systématiquement avec des C ($\subset \mathrm{Cof}_W$, Q-closes à gauche, Q-engendrées à gauche par une *petite* partie C_0 de C) qui sont stables par toutes limites inductives filtrantes.

[14] **N.B.** On voit facilement que $\boxed{TF = F \cap W,}$ mais ça ne suffit pas pour avoir $TF = F_0 \cap W$ pour TC_0 convenable.

[15] **N.B.** On sait que $\boxed{W = TF \circ TC,}$ ce qui n'est nullement suffisant pour impliquer (c) !

Je suppose à nouveau sur $\mathcal{M}$ les conditions suivantes :

`[page 44]`

a) $\mathcal{M}$ stable par petites limites inductives (et pas seulement filtrantes).

b) $\mathcal{M}$ muni d'une filtration cardinale $(\mathrm{Filt}^{\pi})_{\pi \geq \pi_0}$.

c) Les objets de $\mathcal{M}$ sont accessibles (**N.B.** Il suffit de le supposer pour les objets de Filt^{π_0}).

La condition (*b*) implique que $\mathcal{M}$ contient une petite famille génératrice par épimorphismes stricts (p. ex. une sous-catégorie $\mathcal{C}$ petite de $\underline{\mathrm{Filt}}^{\pi_0} = \mathcal{M}^{\pi_0}$ telle que l'inclusion $\mathcal{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Filt}}^{\pi_0}$ soit une équivalence de catégories). Par SGA 4 I 8.12.7, il en résulte que $\mathcal{M}$ est stable par petites limites projectives. Il s'ensuit le

Lemme 5.1 (sous les conditions (*a*), (*b*)). *Pour tout objet X de $\mathcal{M}$, l'ensemble* $\mathrm{Ss}(X)$ *des sous-objets de X, muni de la relation d'ordre naturelle "d'inclusion", admet des* inf *et des* sup *quelconques.*

Des inf, car ceux-ci s'expriment comme des limites projectives dans $\mathcal{M}$. Or l'existence des inf implique celle des sup, puisque $\sup_J = \inf_{J'}$, où J' est l'ensemble des majorants de J dans $\mathrm{Ss}(X)$.

Corollaire 5.2. *Pour toute flèche $f : Z \longrightarrow X$ dans $\mathcal{M}$, il existe, parmi les sous-objets X' de X par lesquelles f se factorise, un plus petit*

`[page 45]`

(*qu'on notera* $\mathrm{Im}\, f$). *Le morphisme $Z \longrightarrow \mathrm{Im}\, f$ est un épimorphisme.*

Cette dernière assertion provient de celle-ci :

Lemme 5.3. *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie où les noyaux des doubles flèches existent. Soit $f : Z \longrightarrow Y$ une flèche de $\mathcal{M}$. Alors g est un épimorphisme si et seulement si g ne se factorise pas par un sous-objet* strict Y_0 *de Y différent de Y.*

On va faire une hypothèse supplémentaire (pratiquement anodine) sur les Filt^{π} :

d) Filt^{π} est stable par limites inductives indexées par des catégories d'indices I telles que $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(I) \leq \pi$ [16]. (Il suffit de supposer la stabilité par objet initial, sommes amalgamées simples, et $\varinjlim$ filtrantes indexées par un ensemble ordonné I de cardinal $\leq \pi$.) De plus, si $f : Z \longrightarrow X$ est une flèche de $\mathcal{M}$ telle que Z ou X est dans Filt^{π}, alors $\mathrm{Im}\, f \in \mathrm{Filt}^{\pi}$.

Cette dernière condition sur $\mathrm{Im}\, f$ se décompose en deux :

`[page 46]`

d_1) Tout sous-objet d'un objet de Filt^{π} est dans Filt^{π}.

d_2) Si Z est dans Filt^{π}, alors tout quotient Z' de Z tel que $\mathrm{Im}\, p = Z'$ (où $p : Z \longrightarrow Z'$ est le morphisme canonique) est dans Filt^{π}. [17]

---

[16] Cette condition sera nommée (d_0) par la suite.

[17] Il semblerait qu'on n'aura pas besoin de (d_1), seulement de (d_2). Mais en fait, (d_1) doit être conséquence de (d_2), et (d_2) est conséquence de la première partie de (d) (stabilité par $\varinjlim$ finies) si tout épimorphisme dans $\mathcal{M}$ est strict, donc effectif (si les Filt^{π} sont stables par $\varprojlim$ finies aussi ...).

Bien sûr, pratiquement il sera toujours vrai que Filt^π est stable par passage aux sous-objets et aux quotients d'un objet (pas seulement les quotients particuliers dont il est question dans (d_2). D'ailleurs, lorsque tout bimorphisme (*i.e.* monomorphisme *et* épimorphisme) de $\mathcal{M}$ est un isomorphisme, alors (d_2) équivaut bien à la stabilité de Filt^π par quotients d'objets.

Proposition 5.3. `[Deux fois 5.3.]` *Supposons les conditions* (a), (b), (d) *vérifiées pour* $\mathcal{M}$. *Soient* π *un cardinal* $\geq \pi_0$, *et* X *un objet de* $\mathcal{M}$. *Soit* $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ *l'ensemble des sous-objets de* X *qui sont dans* Filt^π. *Cet ensemble, ordonné par la relation d'ordre induite par* $\mathrm{Ss}(X)$, *est grand devant* π (*et en particulier filtrant*). *Si de plus, les limites inductives filtrantes de monomorphismes dans* $\mathcal{M}$ *sont des monomorphismes* [18] (*p. ex. si les limites inductives filtrantes sont exactes à gauche*), *ou si les objets de* Filt^π *sont* π*-accessibles, on a* $\varinjlim_{\alpha\in\mathrm{Ss}_\pi(X)} Z_\alpha \xrightarrow{\sim} X$ [19].

`[page 47]`

DÉMONSTRATION. Soit $(Z_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de sous-objets de X tels que $Z_\alpha \in \mathrm{Filt}^\pi$, et $\mathrm{card}\, A \leq \pi$. Soit $Z = \coprod_{\alpha\in A} Z_\alpha$, on a $Z \in \mathrm{Filt}^\pi$ par (c). Le plus petit sous-objet de X majorant les Z_α n'est autre que $\mathrm{Im}\,(Z \longrightarrow X)$, qui est dans Filt^π par (d_1). Prouvons que $\varinjlim_{\alpha\in\mathrm{Ss}_\pi(X)} Z_\alpha \xrightarrow{\sim} X$ est un isomorphisme, quand on sait que c'est un monomorphisme. Or

$$X \;=\; \varinjlim_I X_i\ ,$$

où $(X_i)_{i\in I}$ est un système inductif filtrant, I ensemble ordonné grand devant π, les X_i dans Filt^π. Soit, pour tout $i \in I$, X'_i l'image de X_i dans X. On a donc $X'_i \in \mathrm{Filt}^\pi$ par (d_2). Utilisant le fait que les $X_i \longrightarrow X'_i$ sont des épimorphismes, on voit de suite que $X = \varinjlim_I X'_i$. Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathrm{Ss}_\pi(X) \\ i & \longmapsto & X'_i\ . \end{array}$$

C'est une application croissante, soit J son image, partie filtrante grande devant π de $\mathrm{Ss}_\pi(X)$, telle que

$$\varinjlim_{\alpha\in J} Z_\alpha \xrightarrow{\ \sim\ } X\ .$$

`[page 48]`

On a donc

$$\underbrace{\varinjlim_{\alpha\in J} Z_\alpha}_{\simeq X} \longrightarrow \varinjlim_{\alpha\in\mathrm{Ss}_\pi X} Z_\alpha \xrightarrow{\ \varphi\ } X\ ,$$

le composé étant l'identité. Si on sait que φ est un monomorphisme, il en résulte que c'est un isomorphisme (monomorphisme ayant une section). Or φ sera un monomorphisme si toute $\varinjlim$ filtrante de monomorphismes est un monomorphisme, et alors on gagne.

[18] C'est une *condition d'exactitude* de $\mathcal{M}$, que je vais noter comme :

e Les monomorphismes dans $\mathcal{M}$ sont stables par $\varinjlim$ filtrantes dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$.

[19] Dire aussi que $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ est π-adapté, et le système inductif $(Z_\alpha)_\alpha$ aussi.

Si on suppose que les éléments de Filt^{π} sont π-accessibles, on gagne aussi, car on trouve :

Corollaire 5.4. *Si les objets de* Filt^{π} *sont π-accessibles* (*p. ex. si* $\pi \geq \pi_1$ *et* $\pi = \pi^{\pi_0}$, *p. ex.* $\pi \geq \pi_1$ *et* $\pi = 2^c$, *avec* $c \geq \pi_0$, cf. (3.2) *p.* 16), *alors pour toute partie filtrante* J *de* $\mathrm{Ss}(X)$ *grande devant* π, *telle que* $\varinjlim_{\alpha\in J} Z_\alpha \xrightarrow{\sim} X$, J *est cofinale dans* $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ (*donc* $\varinjlim_{\alpha\in J} Z_\alpha \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\alpha\in \mathrm{Ss}(X)} Z_\alpha$).

C'est immédiat.

[page 49]

Scholie 5.5. Quand on fait sur $\mathcal{M}$ l'hypothèse d'exactitude assez anodine que les $\varinjlim$ filtrantes de monomorphismes sont des monomorphismes, *ou* qu'on se borne aux cardinaux π tels que les objets de Filt^{π} soient π-accessibles, on peut *canoniser* la représentation d'un objet X comme $\varinjlim_{i\in I} X_i$, avec $X_i \in \mathrm{Filt}^{\pi}$ et I grand devant π, en prenant $I = \mathrm{Ss}_\pi(X)$, et le système inductif correspondant. On a de plus l'agréable propriété supplémentaire que voici : toute partie filtrante J de I, de cardinal $\leq \pi$, admet une borne supérieure i_J, et (si on suppose que $\mathcal{M}$ satisfait la condition (e), page 46, note 18), on aura

$$X_{i_J} \;=\; \varinjlim_{i\in J} X_i \;;$$

en d'autres termes, on a une représentation de X par un système inductif (parfaitement) π-*adapté* (*cf.* XIII, p. 85, 86).

[page 50]

Soit maintenant

$$M \;\subset\; \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$$

une partie de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, stable par la relation d'isomorphie. Si M est π-accessible (suivant la condition b_π de XIII, p. 88), alors en posant

$$M^{\pi} \;=\; M \cap \mathrm{Filt}^{\pi}\;,$$

M^{π} détermine M par la condition suivante sur $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$.

(5.1) $\quad X \in M \iff$ le sous-ensemble $\mathrm{Ss}_\pi^M(X)$ de $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ formé des $X_\alpha \in \mathrm{Ss}_\pi(X)$ tels que $X_\alpha \in M$ ($\iff X_\alpha \in M^{\pi}$) est cofinal dans $\mathrm{Ss}_\pi(X)$.

Notons que lorsque $X \in \mathrm{Filt}^{\pi}$, ce critère est trivialement valable, puisque alors $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ admet X comme plus grand élément, et les sous-ensembles cofinaux sont ceux qui contiennent cet objet final. Donc (5.1) est intéressant seulement pour les $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}\backslash\mathrm{Filt}^{\pi}$. Notons que pour *toute* partie M^{π} de Filt^{π}, on peut définir une partie M de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ par la condition (5.1), et on aura trivialement

$$M^{\pi} \;=\; M \cap \mathrm{Filt}^{\pi}\;. \tag{5.2}$$

Mais sans doute, bien que M satisfasse (5.1), il n'est pas pour autant nécessairement π-accessible. En effet, pour qu'il le soit, il faut qu'il soit stable par $\varinjlim$

[page 51]

grandes devant π d'éléments de M^π, ce qui implique que tout facteur direct d'un élément de M^π est dans M, donc aussi dans M^π, d'après la condition de stabilité (d) sur Filt^π. C'est là une condition particulière sur la partie M^π de Filt^π. Aussi, on devra avoir une condition sur $\mathcal{M}$ plus forte que la validité de (5.1), savoir :

(5.3)

Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ et pour toute partie J de $\mathrm{Ss}_\pi(X)$, telle que

a) J est cofinale dans $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ et

b) Si $J' \subset J$ est une partie filtrante de J, de cardinal $\leq \pi$, alors sa borne supérieure $\alpha_{J'}$ dans $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ appartient à J,

on a $X \in M$ si et seulement si $J^M \overset{\text{déf}}{=} J \cap \mathrm{Ss}_\pi^M(X)$ est cofinal dans J (ou ce qui revient au même, dans $\mathrm{Ss}_\pi(X)$) [20].

Si on admet déjà le "il suffit" de (5.1), alors il suffit dans (5.3) de supposer $X \in M$ et exiger qu'alors J^M soit cofinal dans J.

Mais notons la

[page 52]

Proposition 5.6. [21] *Supposons π choisi de telle façon que les objets de* Filt^π *soient π-accessibles* (*p. ex.* $\pi = 2^c$, *avec* $c \geq \pi_1$, cf. (3.2), *p.* 16). *Alors, pour une partie M de* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$*, M est π-accessible si et seulement si elle satisfait au critère* (5.3).

On a vu que c'est nécessaire (tautologiquement, compte tenu de la proposition 5.3 et du scholie 5.5, bas de la page 49). Prouvons que c'est suffisant, en établissant d'abord le

Lemme 5.7. *Sous les conditions de* 5.6 *sur π, et la condition* (e) *sur $\mathcal{M}$* (p. 46), *pour toute représentation π-adaptée $X = \varinjlim_{i\in I} X_i$ d'un objet X de $\mathcal{M}$, le sous-ensemble I' des $i \in I$ tels que $X_i \longrightarrow X$ soit un monomorphisme, est cofinal dans I. De plus, I' est stable par bornes supérieures dans I de parties filtrantes J de I' de cardinal $\leq \pi$.*

Montrons comment ce lemme 5.7 implique le "il suffit" de la proposition 5.6. Soit donc $X = \varinjlim_{i\in I} X_i$ une représentation π-adaptée de X ($X_i \in \mathrm{Filt}^\pi$, I grand devant π, *etc.*). Il faut prouver que, si 5.3 est valable, alors $X \in M$ si et seulement si l'ensemble I_M est cofinal dans I.

[page 53]

Supposons $X \in M$. Considérons le sous-ensemble $I' \subset I$ décrit dans le lemme. On a une application $I' \longrightarrow \mathrm{Ss}_\pi(X)$, soit $i \longmapsto X_i' = \mathrm{Im}\,(X_i \hookrightarrow X)$, et on a

$$X \simeq \varinjlim_{i\in I} X_i \;\simeq\; \varinjlim_{i\in I'} X_i \;\simeq\; \varinjlim_{i\in I'} X_i' \;\simeq\; \varinjlim_{\alpha\in J} Z_\alpha\ ,$$

où J est l'image de I' dans $\mathrm{Ss}_\pi(X)$. Comme les objets de Filt^π sont π-accessibles, on en conclut que J est cofinal dans $\mathrm{Ss}_\pi(X)$. Par 5.3, il s'ensuit que l'ensemble J_M des $\alpha \in J$

[20] Au lieu de J cofinale dans $\mathrm{Ss}_\pi(X)$, il suffit même que l'on ait $\varinjlim_{\alpha\in J} X_\alpha \xrightarrow{\sim} X$ – la condition correspondante sur M devient donc plus exigeante. Mais si les objets de Filt^π sont π-accessibles, cette condition est en fait équivalente à la condition plus faible.

[21] Faux tel quel, vrai si on suppose que M^π est stable par $\varinjlim$ filtrantes.

tels que $Z_\alpha \in M$ est cofinal dans J, donc $\neq \emptyset$. Donc I'_M, qui est l'image inverse de J_M dans I', est en tous cas non vide. Appliquant le même résultat en remplaçant I' par le sous-ensemble $I'_{\geq i'_0}$, on voit que I'_M est cofinal dans I', donc aussi dans I, puisque I' est cofinal dans I ; donc $I_M \supset I'_M$ est cofinal dans I, *q.e.d.*

Inversement, supposons que I_M soit cofinal dans I, et prouvons $X \in M$. La difficulté ici provient du fait que la représentation $X = \varinjlim_{i \in I_M} X_i$ n'est plus adaptée à π – I_M n'est pas nécessairement stable dans I par bornes supérieures (dans I) de parties filtrantes dans I_M, I' de cardinal $\leq \pi$. En somme, il faut

[page 54]

prouver que M est stable par $\varinjlim$ grandes devant π sans plus, et je doute maintenant que ça résulte des seules hypothèses faites ici, qui ne concernent que les systèmes inductifs où les morphismes de transition sont des monomorphismes.

Voici, je crois, un contre-exemple. Prenons

(5.4) M = ensemble des objets de $\mathcal{M}$ isomorphes à un objet fixe $X_0 \in \mathrm{Filt}^\pi$, tel que X_0 n'ait pas d'endomorphisme qui soit un monomorphisme autre que l'identité.

Alors la condition 5.3 est satisfaite. Car :

a) Si $X \in M$, *i.e.* $X \simeq X_0$, alors $X \in \mathrm{Filt}^\pi$, donc $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ admet X comme objet final, et J, étant cofinal, contient cet élément, donc J_M (qui le contient aussi) est cofinal.

Et :

b) Si J_M est cofinal, l'hypothèse (5.4) implique que l'ensemble des morphismes de transition entre les Z_α ($\alpha \in J_M$) est formé d'isomorphismes, donc la limite inductive X des Z_α en question est isomorphe à chacun d'eux, donc $X \simeq X_0$, *i.e.* $X \in M$.

Pourtant, M n'est π-accessible que s'il est stable par $\varinjlim$ grandes devant π, ce qui implique qu'il est stable par *facteurs directs.* Mais l'hypothèse

[page 55]

(5.4) n'exclut nullement que X_0 admette un projecteur p ($p^2 = p$) non trivial. Celui-ci aura une image X' dans $\mathcal{M}$, qui sera facteur direct de X_0 non isomorphe à X_0, *i.e.* non dans M.

Ces difficultés disparaissent si on suppose que M^π est stable par $\varinjlim$ filtrantes indexées par des ensembles ordonnés I de cardinal $\leq \pi$. En effet, dans ce cas, dans la démonstration précédente, le sous-ensemble I_M est stable par bornes supérieures (dans I) de parties J de I_M filtrantes et de cardinal $\leq \pi$. Donc le système inductif $(X_i)_{i \in I_M}$ est encore π-adapté, et on peut lui appliquer le lemme 5.7, pour trouver un sous-ensemble cofinal $I'_M \subset I_M$, tel que les $X_i \longrightarrow X$ pour $i \in I'_M$ soient des monomorphismes. L'image J de I'_M dans $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ est alors une partie de $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ telle que $\varinjlim_{\alpha \in J} Z_\alpha = X$, donc (par l'hypothèse faite sur π) cofinale dans $\mathrm{Ss}_\pi(X)$ (5.4), avec $Z_\alpha \in M^\pi$ pour tout $\alpha \in J$. Donc par 5.3 on a $X \in M$, *q.e.d.*

[page 56]

Il reste à prouver le lemme 5.7. Avec les hypothèses et notations du lemme, soit donc $i_0 \in I$, il faut trouver $i' \in I'$ tel que $i' \geq i_0$. Considérons l'image X'_i de X_i dans X, et l'inclusion

$$\underbrace{X'_{i_0}}_{\in \mathrm{Filt}^\pi} \longrightarrow X \simeq \varinjlim X_i .$$

Comme $X'_{i_0} \in \mathrm{Filt}^\pi$, donc est π-accessible, il existe un $i_1 > i_0$ tel que $X'_{i_0} \longrightarrow X$ se factorise par

$$X'_{i_0} \longrightarrow X_{i_1} .$$

Appliquant ce même résultat à X_{i_1}, X'_{i_1} *etc.*, on trouve une suite infinie de morphismes

$$\begin{tikzcd}
X_{i_0} \arrow[dr] & & X_{i_1} \arrow[dr] & & X_{i_2} \arrow[dr] & \\
& X'_{i_0} \arrow[ur] & & X'_{i_1} \arrow[ur] & & X'_{i_2} \quad \cdots
\end{tikzcd}$$

telle que les morphismes composés de deux en deux soient, sur la ligne supérieure, les transitions

$$X_{i_m} \longrightarrow X_{i_n} \qquad (i_m < i_n) ,$$

et sur la ligne inférieure, les inclusions

$$X'_{i_m} \hookrightarrow X'_{i_n} \qquad (\hookrightarrow X) .$$

Soit $i_\omega = \sup_n i_n$ dans I, donc

$$X_{i_\omega} = \varinjlim_n X_{i_n} \simeq \varinjlim_n X'_{i_n} \simeq X'_{i_\omega} ,$$

donc $X_{i_\omega} \longrightarrow X$ est un monomorphisme.

`[page 57]`

La dernière assertion de 5.7 résulte aussitôt du fait qu'une limite inductive filtrante de monomorphismes dans $\mathcal{M}$ est un monomorphisme (condition (e), p. 46).

On peut préciser la proposition 5.6 obtenue ainsi :

Proposition 5.7. `[Deux fois 5.7.]` *Soient* $\mathcal{M}$ *une catégorie satisfaisant les conditions* (a), (b), (c), (d) (p. 44, 45) et (e) (p. 46). *Soit* $\mathcal{M}$ *une partie de* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$*, stable par isomorphie,* π *un cardinal tel que les objets de* Filt^π *soient* π*-accessibles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *M est π-accessible, et stable par* $\varinjlim$ *filtrantes.*

b) *M est π-accessible, et $M \cap \mathrm{Filt}^\pi$ est stable par* $\varinjlim$ *filtrante de cardinal $\leq \pi$.*

c) *Il existe une partie M^π de Filt^π, stable par* $\varinjlim$ *filtrantes de cardinal $\leq \pi$ et telle que pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, on ait $X \in M$ si et seulement si l'ensemble J_M des $Z_\alpha \in J$ tels que $Z_\alpha \in M^\pi$ est cofinal dans J.*

(*De plus, sous la condition* (c), *on a*

[page 58]

$M^\pi = M \cap \mathrm{Filt}^\pi$.)

c′) *Il existe une partie* M_0 *de* Filt^π *telle que* M *soit la plus petite partie de* $\mathcal{M}$ *stable par limites inductives filtrantes.* (*De plus, on peut alors prendre* M_0 petite.) [22].

Corollaire 5.8. *Les applications*

$$M \longmapsto M^\pi = M \cap \mathrm{Filt}^\pi \,,$$

$$M^\pi \quad \longmapsto \quad \begin{array}{l} \textit{l'ensemble des } X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M} \textit{ tels que l'ensemble} \\ \mathrm{Ss}_\pi^{M^\pi}(X) \textit{ des } Z_\alpha \in \mathrm{Ss}_\pi(X) \textit{ qui sont dans } M^\pi \\ \textit{soit cofinal } (= \textit{plus petit sous-ensemble de} \\ \mathrm{Ob}\,\mathcal{M} \textit{ stable par } \varinjlim \textit{ filtrantes}) \end{array}$$

établissent des bijections, inverses l'une de l'autre, entre l'ensemble des $M \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ *satisfaisant les conditions équivalentes de la proposition* 5.7, *et l'ensemble des parties* M^π *de* Filt^π *stables par* $\varinjlim$ *filtrantes de cardinal* $\leq \pi$.

Démonstration de 5.7. L'implication $(b) \Longrightarrow (c)$ est tautologique, compte tenu de la définition de la π-accessibilité de M, et de la proposition 5.3. Et $(a) \Longrightarrow (b)$ provient de la stabilité de Filt^π par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leq \pi$ (condition (d)).

Il reste donc à prouver $(c) \Longrightarrow (a)$. (C'est ici qu'on doit utiliser l'hypothèse particulière sur π.) Une fois ceci vu, on saura l'équivalence de (a), (b), (c), et d'autre part, il est immédiat que $(a) \Longrightarrow (c')$, en

[page 59]

prenant $M_0 = M \cap \mathrm{Filt}^\pi$. D'autre part, $(c') \Longrightarrow (c)$ (sans hypothèses sur π ?), car on peut supposer que la partie M_0 de Filt^π est stable par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leq \pi$. Mais alors, connaissant l'équivalence de (a), (b) (c), d'où aussitôt le corollaire, il s'ensuit que l'enveloppe stable par $\varinjlim$ filtrantes de M_0 dans $\mathcal{M}$ n'est autre que la partie accessible déduite de M_0 dont il est question dans (c), et on gagne.

Donc tout revient à prouver que, si tous les objets de Filt^π sont accessibles, alors (c) implique (a). Montrons d'abord que (c) implique le critère d'appartenance (5.3) (p. 51), donc par la proposition 5.6 "revue et corrigée" dans la note 21, il s'ensuit déjà que $(c) \Longrightarrow (b)$, et il restera à établir $(b) \Longrightarrow (a)$, *i.e.* que (b) implique la stabilité de M par $\varinjlim$ filtrantes quelconques (pas seulement grandes devant π).

Que (c) implique (5.3) va résulter du lemme suivant, appliqué à $I = \mathrm{Ss}_\pi(X)$:

Lemme 5.8. [Deux fois 5.8.] *Soit* I *un ensemble ordonné* π-adapté, i.e. *filtrant et tel que toute partie filtrante* K *de* I, *de cardinal* $\leq \pi$, *ait une borne supérieure* i_K *dans* I. *Je dis qu'une partie* J *de* I *est* π-cofinale, *si elle est cofinale, et si pour toute partie filtrante* K *de* J *de cardinal* $\leq \pi$, *sa borne supérieure* i_K *dans* I *est*

---

[22] **N.B.** On a

$$\begin{tikzcd} (a) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (b) \arrow[d, Rightarrow] \\ (c') \arrow[r, Rightarrow, "?"] & (c) \end{tikzcd} \quad ,$$

sans conditions sur π (sauf $\pi \geq \pi_0$).

[page 60]

dans J. (Il s'ensuit donc que J est lui aussi π-adapté, pour la structure d'ordre induite.) Ceci dit, l'intersection de deux parties π-cofinales de I est encore π-cofinale.

Il suffit de voir qu'elle est cofinale, car sa stabilité par bornes supérieures dans I de parties filtrantes de cardinal $\leq \pi$ est tautologique (si elle est vraie pour des J_α, elle est vraie pour $\bigcap_\alpha J_\alpha$). Soit $i_0 \in I$, et construisons un élément de $J \cap J'$ qui majore i_0. On construit de proche en proche une double suite

$$\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[dr] & & i_2 \arrow[dr] & & \cdots \\
& i'_1 \arrow[ur] & & i'_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

avec les i_α dans J, les i'_α dans J', et $i_1 \geq i_0$. On a donc

$$\sup i_\alpha \ = \ \sup i'_\alpha \ ,$$

et si i est la valeur commune des deux membres, on a $i \in J \cap J'$.

Ceci vu, pour prouver la validité de (5.3), on note que la partie $J' = \mathrm{Ss}_\pi^{(M^\pi)}(X)$ de $I = \mathrm{Ss}_\pi(X)$, formée des $Z_\alpha \subset X$ tels que $Z_\alpha \in M^\pi$, est stable par bornes supérieures de parties filtrantes de cardinal $\leq \pi$, vu que M^π est stable

[page 61]

par $\varinjlim$ de cardinal $\leq \pi$. Donc si J est une partie π-cofinale de $\mathrm{Ss}_\pi(X)$, $J \cap J'$ est cofinale dans J, *i.e.* dans I, si et seulement si J' est cofinale dans I (*i.e.* si et seulement si $X \in M$, par la condition (c)). Car $J \cap J'$ cofinale $\Longrightarrow$ J' cofinale tautologiquement, et J' cofinale implique J' π-cofinale, donc $J \cap J'$ π-cofinale par le lemme 5.8, donc cofinale.

Reste à prouver seulement que (b) $\Longrightarrow$ (a), *i.e.* la stabilité de M par limites inductives filtrantes quelconques, moyennant (b). Ici à nouveau, cela ne doit pas utiliser l'hypothèse particulière sur π, ni même l'hypothèse d'exactitude (e) sur $\mathcal{M}$, mais être une histoire générale d'accessibilité :

Proposition 5.9. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie satisfaisant* (a), (b), (c), (d$_0$) (pages 44, 45), *$\pi \geq \pi_0$ un cardinal, M une partie π-accessible de* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, i.e. *satisfaisant la condition b_π de* XIII, p. 88. *Alors M est stable par $\varinjlim$ filtrantes si et seulement si $M^\pi \overset{\text{déf}}{=} M \cap \mathrm{Filt}^\pi$ est stable par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leq \pi$.*

Je n'ai pas envie d'expliciter ici la démonstration, ayant l'impression pénible de refaire à perpette la même démonstration (ici et dans XIII). Je devrai revenir là-dessus dans une situation plus décantée.

[page 62]

Je vais quand même esquisser la démonstration. Soit $X = \varinjlim_I X_i$, I filtrant, les X_i dans M, il faut prouver que $X \in M$ (moyennant l'hypothèse de stabilité sur $M^\pi = M \cap \mathrm{Filt}^\pi$).

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "\exists"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & I \arrow[d, "\varphi"] \\ \underline{M}^\pi & \underline{M}^\pi/\underline{M} \arrow[l, dotted, "\text{“source”}"] \arrow[r, "\text{“but”}"'] & \underline{M} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ est une catégorie cofibrée sur I, dont les fibres sont

$$\mathcal{C}_i \;\simeq M^\pi/X_i \;,$$

or comme $X_i \in M$, on voit, à cause de la condition de π-accessibilité, que M^π/X_i est *filtrante.* On va le dégager en

Lemme 5.10. *Soit M une partie π-accessible de $\mathcal{M}$. Alors pour tout $Y \in M$, M^π/Y est une catégorie* filtrante, *et* $\mathrm{Ss}_\pi(Y)$ *y est cofinale.*

[page 63]

Considérons le foncteur canonique

$$I \;=\; \mathrm{Ss}_\pi(Y) \xrightarrow{\;\varphi\;} \underline{M}^\pi/Y \;=\; I' \;,$$

où la catégorie source I est filtrante. Par SGA 4 I 8.1.3, ce foncteur est cofinal si et seulement s'il satisfait deux conditions F 1, F 2, et alors I' est également filtrante. La condition F 1 est la condition habituelle que tout $i' \in \mathrm{Ob}\, I'$ est “majoré” par un $\varphi(i)$, *i.e.* tout $Z \longrightarrow Y$, avec $Z \in M^\pi$, est “majoré” par un *monomorphisme* $Z_\alpha \hookrightarrow Y$, avec $Z_\alpha \in M^\pi$, ce qui résulte du fait que c'est majoré par $Z_\alpha \hookrightarrow Y$ avec $Z_\alpha \in \mathrm{Filt}^\pi$, *i.e.* $Z_\alpha \in \mathrm{Ss}_\pi(Y)$, et que parmi ces Z_α ceux qui sont dans M^π sont cofinaux (vu que $Y \in M$). L'autre condition [23] est qu'une double flèche $i' \overset{f'}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} \varphi(i)$ peut

[page 64]

s'égaliser par une flèche $\varphi(h)$, avec $h : i \longrightarrow j$. Mais en fait, pour un $i' \in \mathrm{Ob}\, I'$, *i.e.* un $Z \longrightarrow Y$ donné ($Z \in M^\pi$), et un $i \in \mathrm{Ob}\, I$, *i.e.* un $Z_\alpha \hookrightarrow Y$ donné ($Z_\alpha \in M^\pi$), il existe au plus *une* flèche dans $I' = \underline{M}^\pi/Y$ de $Z \longrightarrow Y$ dans $Z_\alpha \hookrightarrow Y$. Donc la condition F 2 est trivialement satisfaite (on prend $h = \mathrm{id}_i$).

Corollaire 5.11. *Si $(X_i)_{i\in I}$ est un système inductif filtrant, avec les X_i dans M^π, alors la catégorie $\mathcal{C} = \underline{M}^\pi/\underline{M} \times_{\underline{M}} (I, \varphi)$, construite page* 62, *est filtrante, et le foncteur canonique (fibrant) $\mathcal{C} \longrightarrow I$ est cofinal.*

Que $\mathcal{C}$ soit filtrante et $\mathcal{C} \longrightarrow I$ cofinal résulte formellement du fait que I l'est, que les fibres de $\mathcal{C}$ le sont, et que $\mathcal{C}$ est cofibrée sur I. (Mérite un lemme, à toutes fins utiles.)

N.B. On peut remplacer $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}_0$ dont les fibres sont les

$$\mathrm{Ss}_\pi^{M^\pi}(X_i) \;\subset\; \underline{M}^\pi \;; \qquad \text{cofinale dans } \mathcal{C}_i = \underline{M}^\pi/X_i \;,$$

[page 65]

on trouve une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ cofinale dans $\mathcal{C}$, et qui est cette fois ordonnée tout comme I.

[23] Comme I est filtrante.

On a

$$X_i \;=\; \varinjlim_{Z_\alpha \in \mathcal{C}_i} Z_\alpha \;,$$

donc

$$X \;=\; \varinjlim_{\alpha \in \mathcal{C}} Z_\alpha \;,$$

au total on est arrivé à représenter X comme $\varinjlim$ filtrante d'éléments Z_α qui sont (non seulement dans M, mais même) dans M^π.

Changeons la notation, en prenant

$$X \;=\; \varinjlim_{i \in I} X_i \;, \qquad I \text{ ensemble ordonné filtrant, } X_i \in M^\pi \;\; \forall\, i \in I \;,$$

soit I' l'ensemble des parties *filtrantes* $J \subset I$ telles que $\operatorname{card} J \leq \pi$, I' ordonné par inclusion. Alors I' est grand devant π, et on a un système inductif

$$(X_J)_{J \in I'} \;, \qquad X_J \;=\; \varinjlim_{i \in J} X_i \;.$$

Par l'hypothèse de stabilité de M^π (qui n'a pas encore servi), les X_J sont dans M^π. On a donc

$$X \;=\; \varinjlim_{J \in I'} X_J \;, \qquad \text{les } X_J \text{ dans } M^\pi,\; I' \text{ grande devant } \pi \;,$$

donc $X \in M$ puisque M est π-admissible, *q.e.d.*

`[page 66]`

Définition 5.12.

1) Soit $\mathcal{M}$ une catégorie satisfaisant les conditions (a), (b), (c), (d) (p. 44-46). Soit $\pi \geq \pi_0$ un cardinal. Une partie M de $\operatorname{Ob}\mathcal{M}$ est dite *L-π-accessible,* si elle est π-accessible et stable par petites $\varinjlim$ filtrantes [24], ou ce qui revient au même (5.9), si elle est π-accessible et si $M^\pi = M \cap \operatorname{Filt}^\pi$ est stable par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leq \pi$. (**N.B.** Si les objets de Filt^π sont π-accessibles, 5.8 nous dit que cela signifie aussi qu'il suffit pour cela qu'il existe une partie M_0 de Filt^π telle que M soit la L-enveloppe (enveloppe stable par $\varinjlim$ filtrantes) de M_0 – condition qui est de toutes façons toujours nécessaire, en prenant $M_0 = M^\pi$.)
2) Soit M une partie de $\operatorname{Ob}\mathcal{M}$. On dit qu'elle est *L-accessible,* si elle satisfait à l'une des quatre conditions équivalentes suivantes :
   - *a*) Il existe un cardinal π tel que M soit L-π-accessible.
   - *a′*) M est accessible et L-stable.
   - *b*) Il existe une petite partie M_0 de $\operatorname{Ob}\mathcal{M}$, telle que M soit la L-enveloppe de M_0 [25].
   - *b′*) Il existe une partie M_0 de $\mathcal{M}$ contenue dans une partie Filt^π (ou ce qui revient au même, telle que la sous-catégorie pleine $\underline{M}_0$ de $\mathcal{M}$ soit essentiellement petite, *i.e.* équivalente à une petite catégorie, telle que M soit la *L*-enveloppe de M_0).

[24] On dit alors que M est *L-stable.*

[25] Cette condition ne dépend pas de la filtration cardinale choisie de $\mathcal{M}$.

`[page 67]`

L'équivalence de (a) et (a'), ou de (b) et (b') est plus ou moins tautologique. L'équivalence de (a) et (b) résulte aussitôt du N.B. inclus dans 1°, compte tenu que les cardinaux π tels que les objets de Filt^π soient π-accessibles sont cofinaux dans l'ensemble des cardinaux dans $\mathfrak{U}$. (*Cf.* 3.2, page 16).

Proposition 5.13. *Toute réunion finie de parties L-π-accessibles de* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ *est L-π-accessible. L'intersection d'une famille $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ de parties L-π-accessibles, avec* $\mathrm{card}\,A \leq \pi$, *est L-$\pi$-accessible.*

Démonstration. La première assertion provient du fait qu'une réunion *finie* de parties L-stables de M est L-stable, et qu'on a itou pour la notion de π-accessibilité. Les deux choses se prouvent d'ailleurs pratiquement de la même façon, en utilisant le

Lemme 5.14. *Soit I un ensemble ordonné filtrant, $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille* finie *non vide de parties de I, telle que $\bigcup I_\alpha = I$. Alors il existe $\alpha \in A$ tel que I_α soit cofinal.*

`[page 68]`

Démonstration par l'absurde. Si pour aucun α, I_α n'était cofinal, on en conclurait que pour tout α il existe un i_α tel que $I/i_\alpha \cap I_\alpha = \emptyset$. Soit i majorant les i_α, on aura donc $I/i \cap I_\alpha = \emptyset \ \ \forall\, \alpha \in A$, contrairement à l'hypothèse que $\bigcup I_\alpha = I$.

Le cas d'une *intersection* de parties L-π-accessibles : elle est bien sûr L-stable, donc il reste à prouver qu'elle est π-accessible, *i.e.* satisfait la condition b_π de *loc. cit.*

`[page 69]`

Soit donc

$$X \;=\; \varinjlim_{i\in I} X_i\ , \qquad X_i \in \mathrm{Filt}^\pi\ ,$$

une représentation π-adaptée de X, avec I un ensemble ordonné π-adapté. Donc on a

$$(*)\qquad X \in M_\alpha \iff \begin{array}{l}\text{l'ensemble } I_{M_\alpha} \text{ des } i \in I \text{ tels que } X_i \in M_\alpha\\ \text{est cofinal dans } I.\end{array}$$

D'ailleurs, comme $M_\alpha^\pi = M_\alpha \cap \mathrm{Filt}^\pi$ est stable par $\varinjlim$ filtrante de cardinal $\leq \pi$, on voit tout de suite que la partie I_{M_α} de I est stable par bornes supérieures dans I de parties J de I_{M_α} filtrantes et de cardinal $\leq \pi$. Donc I_{M_α} cofinal équivaut à I_{M_α} *π-cofinal* (*cf.* 5.8, page 59). Soit $M = \bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha$, je veux prouver que

$$(**)\qquad X \in M \iff \text{l'ensemble } I_M \ (= \textstyle\bigcap I_{M_\alpha}) \text{ est cofinal dans } I.$$

Or $(*)$ implique que $X \in M$ $(= \bigcap M_\alpha)$ équivaut à I_{M_α} π-cofinal pour tout α. Donc au total on veut prouver

$$(***)\qquad I_{M_\alpha} \text{ cofinal dans } I \text{ pour tout } \alpha \iff \textstyle\bigcap I_{M_\alpha} \text{ est cofinal dans } I.$$

`[page 70]`

On a bien sûr $\Longleftarrow$, donc il reste à prouver $\Longrightarrow$. Si l'ensemble d'indices A est fini, cela résulte du lemme 5.8, compte tenu que la cofinalité des I_{M_α} implique leur π-cofinalité. On doit donc simplement améliorer 5.8, par le

Lemme 5.15. *Soient π un cardinal, I un ensemble ordonné filtrant π-adapté, et soit $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de parties I_α π-cofinales* (cf. 5.8), *telle que* $\operatorname{card} A \leq \pi$. *Alors* $\bigcap I_\alpha$ *est π-cofinale.*

Il suffit de prouver qu'elle est cofinale, car la propriété de stabilité par bornes supérieures de parties filtrantes de cardinal $\leq \pi$ est évidente. Quitte à remplacer I par I/i_0, et les I_α par leurs traces sur I/i_0, la question est simplement de prouver que $\bigcap_\alpha I_\alpha \neq \emptyset$. On va construire un élément s de $\bigcap I_\alpha$ par induction transfinie. Prenons un bon ordre sur A, et prouvons par récurrence transfinie

`[page 71]`

que pour tout $\alpha \in A$, l'ensemble

$$J_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta$$

est cofinal. Si on sait que J_α est cofinal, il en est de même de $J_{\alpha+1} = J_\alpha \cap I_\alpha$, par 5.8. Donc on est ramené à prouver que J_α est cofinal si α est un ordinal limite, donc à prouver le lemme 5.15 pour une suite transfinie *décroissante* de parties π-cofinales J_β ($\beta < \alpha$) quand $\operatorname{card}\alpha \leq \pi$, telle que $J_\beta = \bigcap_{\beta'<\beta} J_{\beta'}$ quand β est limite. À prouver que l'intersection est π-cofinale – et on est réduit à prouver qu'elle est non vide. On va construire par récurrence transfinie une suite *croissante* d'éléments

$$i_\beta \in J_\beta \qquad (\beta \leq \alpha).$$

Si i_β est construit, comme $J_{\beta+1}$ est cofinal, il existe $i_{\beta+1} \geq i_\beta$ dans $J_{\beta+1}$, O.K. Si β est un ordinal limite, on prend

$$i_\beta = \sup_{\beta'<\beta} i_{\beta'} ,$$

i_β est dans chaque I_{β_0} pour $\beta_0 < \beta$,

`[page 72]`

puisque les $i_{\beta'}$ pour $\beta_0 \leq \beta' < \beta$ sont tous dans $J_{\beta_0} \supset J_{\beta'}$, donc aussi leur limite, donc

$$i_\beta \in \bigcap_{\beta_0<\beta} J_{\beta_0} = J_\beta .$$

Donc la récurrence transfinie marche, et nous donne donc un élément s_α de J_α !

Je vais prouver aussi en forme l'assertion pour $\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha$, quand A est fini. Posant cette fois $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$, il faut prouver, moyennant les relations $(*)$ (p. 68), qu'on a

$$(**) \qquad \begin{array}{c} X \in M \\ (i.e.\ \exists\, \alpha \text{ avec } X \in M_\alpha) \end{array} \iff \begin{array}{l} \text{l'ensemble } I_M \ (= \bigcup_\alpha I_{M_\alpha}) \\ \text{est cofinal dans } I \ , \end{array}$$

et moyennant $(*)$ le premier terme de cette équivalence à établir signifie qu'il existe α avec I_{M_α} cofinal dans I. Bien sûr, si un des I_{M_α} est cofinal dans I, a fortiori leur réunion. Mais inversement, si la réunion est cofinale, elle est filtrante et réunion des parties (filtrantes) I_{M_α}, dont l'une doit donc être cofinale dans elle par le lemme 5.14, donc aussi dans I, *q.e.d.*

`[page 73]`

Corollaire 5.16 (de la proposition 5.13). *Toute réunion finie de parties L-accessibles de $\mathcal{M}$ est L-accessible. Toute intersection $\bigcap M_\alpha$ d'une famille petite de parties L-accessibles de $\mathcal{M}$, est L-accessible.*

6 Essai avorté pour un critère d'engendrement des parties L-accessibles de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$.

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie munie d'une filtration cardinale $(\mathrm{Filt}^\pi)_{\pi\geq\pi_0}$, et soit S un objet de Cat, considérons

$$\mathcal{M}(S) \;=\; \underline{\mathrm{Hom}}(S,\mathcal{M}) \;,$$

et munissons $\mathcal{M}(S)$ de la filtration par les

$$\mathcal{M}^\pi(S) \;=\; \underline{\mathrm{Hom}}(S,\mathcal{M}^\pi = \underline{\mathrm{Filt}}^\pi(\mathcal{M})) \;.$$

Je dis que c'est là une filtration cardinale de $\mathcal{M}(S)$. Il faut vérifier les conditions (a), (b), (c) de SGA 4 I 9.12. Les conditions (a) (Filt^π essentiellement petite) et (b) (condition L_{π_0}, et stabilité de Filt^π par $\varinjlim_I$, I filtrante grande devant π_0 et de cardinal $\leq \pi$) passent aussitôt de $\mathcal{M}$ à $\mathcal{M}(S)$. La condition (c) est plus délicate (représentation

[page 74]

d'un objet comme $\varinjlim$ filtrante grande devant π d'objets de Filt^π). Je ne vais pas refaire le travail, fait dans un cas beaucoup plus général et plus délicat dans SGA 4 I §9, savoir dans le corollaire 9.24 du théorème 9.22 (p. 177). La seule restriction, c'est qu'on y suppose les objets de $\mathcal{M}$ accessibles, et désignant par π_1 le plus petit cardinal tel que $\pi_1 \geq \pi_0$ et que les objets de Filt^{π_0} soient π_1-accessibles, on se borne pour la filtration cardinale de $\underline{\mathrm{Hom}}(S,\mathcal{M})$ aux cardinaux $\boxed{\pi \geq c = 2^{c_0},}$ où

$$c_0 \;=\; \sup(\pi_1, \operatorname{card}\mathrm{Fl}(S)) \;.$$

C'est une restriction raisonnable et anodine.

Pour l'instant, je suis intéressé surtout au cas où $S = \mathbf{\Delta}_1$, donc à

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}_1,\mathcal{M}) \;=\; \underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}) \;,$$

auquel cas on a $c_0 = \pi_1$, donc il suffit de se borner aux cardinaux $\pi \geq 2^{\pi_1}$ pour avoir une bonne filtration cardinale sur $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$.

C'est donc l'ensemble des deux conditions (b), (c) sur $\mathcal{M}$ (p. 44) qui est stable par passage aux $\underline{\mathrm{Hom}}(S,\mathcal{M}) = \mathcal{M}(S)$. Il en est de même de la condition (a) (stabilité par petites limites inductives), et aussi de la condi-

[page 75]

tion (d) (p. 45). De même la condition d'exactitude (e) (p. 46) sur les $\varinjlim$ filtrantes (elles doivent transformer les monomorphismes en monomorphismes).

Pour être tranquille, je vais faire sur $\mathcal{M}$ les hypothèses (a) à (e) inclus (bien que (e) me semble un peu artificielle, on devrait pouvoir l'éliminer, dans un second souffle !). Ces conditions ont donc la propriété de stabilité souhaitable par passage aux $\mathcal{M}(S)$, et en particulier par passage à $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$. Quitte à augmenter π_0, on peut donc supposer que les $\mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{\Delta}_1,\mathcal{M}^\pi)$ $(\pi \geq \pi_0)$ forment aussi une filtration cardinale de $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$.

On dispose donc des notions de parties π-accessibles, accessibles, L-π-accessibles, L-accessibles de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$. Ces notions sont stables par réunions et intersections finies, et les notions absolues (sans π) stables par intersections "quelconques" (*i.e.* pour des *petites* familles de parties). Ce sera là une chose parti-

[page 76]

culièrement cruciale, le cas d'une intersection $C \cap W$!

Le résultat principal, pour lequel j'ai fait les gammes du paragraphe précédent, est le suivant :

Théorème 6.1 [26]. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie satisfaisant les conditions dites :*

a) *Stabilité par petites* $\varinjlim$ *(pas nécessairement filtrantes).*

b) *$\mathcal{M}$ munie d'une filtration cardinale* $(\mathrm{Filt}^\pi)_{\pi \geq \pi_0}$.

c) *Les objets de $\mathcal{M}$ sont accessibles.*

d) *Les* Filt^π *sont stables par* $\varinjlim$ *indexées par des catégories I telles que* $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(I) \leq \pi$, *et si $Z \in \mathrm{Filt}^\pi$, tout quotient Z' de Z (tel que $Z \longrightarrow Z'$ ne se factorise pas par un sous-objet Z'_0 de Z', différent de Z') est dans* Filt^π.

e) *Les limites inductives filtrantes dans $\mathcal{M}$ transforment les monomorphismes en monomorphismes.*

Soit C une partie L-accessible de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M}) = \mathrm{Ob}\,\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$, i.e. (5.12) *une partie stable par* $\varinjlim$ *filtrantes, et accessible. Supposons de plus C formée de monomorphismes* [27], *et que C contient les* isomorphismes. *Alors il existe une partie petite $C_0 \subset C$, telle que $C \subset \widetilde{C_0}$. Plus précisément, si π est un cardinal tel que C soit π-accessible, et si on pose $C^\pi = C \cap \mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M})$, alors on a*

[page 77]

$$C \subset \widetilde{C^\pi} = \widetilde{C_0}\,, \tag{6.1.1}$$

où C_0 est n'importe quelle petite partie de C^π telle que tout objet de C^π soit isomorphe à un objet de C_0.

Corollaire 6.2. *On a $C_* = C_{0*}$, $\widetilde{C} = \widetilde{C_0}$.*

Corollaire 6.3. *Conditions équivalentes sur la partie L-accessible C de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})_{\mathrm{mono}}$, *contenant les isomorphismes :*

a) *$C = \widetilde{C}$.*

b) *C est stable par cochangement de base et par composition.*

b′) *C est stable par cochangement de base, et par sommes amalgamées simples,* i.e. *si $A \longrightarrow B_1$, $A \longrightarrow B_2$ sont dans C, alors $A \longrightarrow B_1 \amalg_A B_2$ aussi.*

c) *C^π est stable dans* $\mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M}) = \mathrm{Fl}(\mathcal{M}^\pi)$ *par cochangement de base et par composition.*

c′) *C^π est stable dans* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M}^\pi)$ *par cochangement de base et par sommes amalgamées* (cf. b′).

Quand ces conditions sont satisfaites, alors (C, C_*) est un couple de Quillen, justiciable du théorème 1 *du paragraphe* 1 (p. 10).

La dernière assertion résulte du théorème 6.1 et du corollaire au théorème 1 du paragraphe 1. On a

[26] Démonstration canulée, énoncé peut-être *faux* !!

[27] Finalement, on se débarrasse de cette hypothèse.

[page 78]

d'autre part tautologiquement

$$\begin{tikzcd}
(a) \arrow[r, Rightarrow] & (b) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (b') \arrow[d, Rightarrow] \\
& (c) \arrow[r, Rightarrow] & (c') ,
\end{tikzcd}$$

et il reste à prouver $(c') \Longrightarrow (a)$, ce qu'on fera plus bas.

Prouvons donc 6.1. Dans (6.1.1) l'égalité $\widetilde{C_0} = \widetilde{C^\pi}$ est tautologique. Donc tout revient à prouver

$$C \subset \widetilde{C^\pi} .$$

Une difficulté ici, c'est qu'on ne sait *pas* que $\widetilde{C^\pi}$ soit stable par $\varinjlim$ filtrantes – on le sait seulement pour C. Soit donc

$$A \hookrightarrow B$$

une flèche dans C, prouvons qu'elle est dans $\widetilde{C^\pi}$. Pour ceci, on va construire, par induction transfinie, une suite transfinie *strictement* croissante de sous-objets A_α de B contenant $A = A_0$,

$$\underbrace{A}_{=A_0} \overset{i_\alpha}{\hookrightarrow} A_\alpha \overset{i_{\beta,\alpha}}{\hookrightarrow} A_\beta \xrightarrow{j_\beta} B ,$$

telle que l'on ait

$$i_\alpha \in \widetilde{C^\pi} , \qquad \text{plus généralement les } i_{\beta,\alpha} \in \widetilde{C^\pi} , \qquad j_\alpha \in C ,$$

et que l'on ait

$$A_\alpha = \varinjlim_{\beta<\alpha} A_\beta \qquad \text{si } \alpha \text{ ordinal limite} .$$

[page 79]

Cela précise déjà la définition récurrente pour $\alpha = \alpha_0$ ordinal limite. Notons que le A_{α_0} construit en termes des A_β $(\beta < \alpha_0)$ satisfait bien aux conditions que

a) les $i_{\alpha_0,\beta} : A_\beta \longrightarrow A_{\alpha_0}$ sont dans $\widetilde{C^\pi}$, car $\widetilde{C^\pi}$ est stable par "limites inductives ordinales strictes" (*cf.* 1.19, p. 8),

b) $j_{\alpha_0} : A_{\alpha_0} \longrightarrow B$ est dans C, car c'est la limite inductive filtrante du système des $A_\beta \longrightarrow B$ $(\beta < \alpha_0)$ qui sont dans C, et C est stable par ces limites.

Il reste donc à préciser comment on passe de A_α à $A_{\alpha+1}$. Cela revient à prouver le

Lemme 6.4. *Soit $f : A \hookrightarrow B$ dans C, telle que f ne soit pas un isomorphisme. Alors il existe un sous-objet A_1 de B,* distinct de A, *tel que $A \longrightarrow A_1$ soit dans $\widetilde{C^\pi}$, et $A_1 \longrightarrow B$ dans C.*

Si ce lemme est admis, cela signifie que la construction transfinie se continue aussi longtemps que l'on trouve des A_α tels que $A_\alpha \neq B$, *i.e.* $A_\alpha \hookrightarrow B$ ne soit pas un isomorphisme. Mais comme les A_α sont tous différents, si π est l'ensemble des sous-objets de B (on sait que c'est un

[page 80]

ensemble petit, à cause des hypothèses faites sur $\mathcal{M}$), les ordinaux α pour lesquels A_α existe satisfont $\operatorname{card} A_\alpha \leq \pi$. Donc il doit exister un α tel que $A_\alpha = B$. Mais alors $i_\alpha : A \longrightarrow A_\alpha$ est égal à f, donc $f \in \widetilde{C^\pi}$, *q.e.d.*

Il reste donc à prouver 6.4. Pour ceci, soit I l'ensemble des sous-objets de B qui sont dans Filt^π, ordonné par inclusion. (Si B est dans Filt^π, A aussi, donc f est déjà dans $C^\pi \subset \widetilde{C^\pi}$, et il n'y a rien à prouver.) C'est un ensemble filtrant grand devant π (et même π-*adapté*), dont la $\varinjlim$ est B (5.3, p. 46). Considérons les

$$A_i = B_i \cap A ,$$

ils sont dans Filt^π, comme sous-objets d'objets de Filt^π (condition (d) sur la filtration cardinale). Ainsi, la flèche f apparaît comme limite inductive filtrante des flèches

$$f_i : A_i \longrightarrow B_i .$$

Il est trivial que le système des A_i est cofinal dans $\mathrm{Ss}_\pi(A)$, donc $A = \varinjlim A_i$, d'où $f = \varinjlim f_i$.

[page 81]

D'autre part, je dis que le système inductif des f_i dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$ est *bien adapté à* π. On sait déjà que I est bien adapté à π, le sup dans I d'une partie filtrante J de cardinal $\leq \pi$ étant le sup dans l'ensemble ordonné $\mathrm{Ss}(B)$ (lequel sup se trouve dans $\mathrm{Ss}_\pi(B)$). Il est essentiel, pour notre argument, de savoir que si $i_J = \sup J$, alors non seulement $B_{i_J} = \varinjlim_{i\in J} B_i$, mais aussi $A_{i_J} = \varinjlim_{i\in J} A_i$, de sorte que le système inductif des f_i est π-adapté dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$. Il semble qu'il faille donc une condition d'exactitude sur $\mathcal{M}$ voisine de (e), savoir :

(e′) Les foncteurs $\varinjlim$ filtrantes commutent au changement de base.

(Il le suffit ici dans le cas très particulier d'un changement de base par un monomorphisme $A \longrightarrow B$, et d'une limite inductive filtrante de sous-objets de B pour des morphismes d'inclusion comme transitions.) Notons que (e), (e′) se trouvent généralement comme conséquence de la condition

(e_0) Les $\varinjlim$ filtrantes dans I sont exactes à gauche.

[page 82]

Ceci posé, on voit donc, C étant π-accessible et I grand devant π, que l'ensemble I_C des $i \in I$ tels que $f_i \in C$ est *cofinal* dans I. Mais comme $f_i \in \mathrm{Filt}^\pi$, $f_i \in C$ équivaut à $f_i \in C^\pi$. Comme $A \longrightarrow B$ n'est pas un isomorphisme, il existe un i_0 tel que $B_{i_0} \not\subset A$, puis un $i \geq i_0$ tel que $f_i \in C^\pi$, et aussi $B_i \not\subset A$ (puisque $B_i \supset B_{i_0}$). Ainsi on a prouvé ceci :

(∗) Sous les hypothèses de (6.4) et moyennant l'hypothèse (e′) sur $\mathcal{M}$, il existe un sous-objet B' de B satisfaisant les conditions suivantes.

a) $B' \in \mathrm{Filt}^\pi$.

b) $B' \not\subset A$.

c) Posant $A' = B' \cap A$, l'inclusion

$$i' : A' \longrightarrow B'$$

est dans C^π.

De plus, l'ensemble des $J \subset \mathrm{Ss}_\pi(B)$ formé des B' en question est cofinal dans $\mathrm{Ss}_\pi(B)$, et même π-cofinal.

Il faut prouver encore ce dernier point – que J (dont on sait qu'il est cofinal) est même π-cofinal, *i.e.* stable par sup (dans $\mathrm{Ss}_\pi(B)$) des parties filtrantes $J' \subset J$ telles que $\operatorname{card} J' \leq \pi$. Mais cela résulte aussitôt du fait que C étant stable par

[page 83]

limites inductives filtrantes, $C^\pi = C \cap \mathrm{Filt}^\pi$ est stable par $\varinjlim$ filtrantes de cardinal $\leq \pi$, en vertu de la condition (d) sur Filt^π. Considérons maintenant le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d, hook] & B' \arrow[d] & \\ A \arrow[r, "i"] & C' = A \amalg_{A'} B' \arrow[r, "j"] & B . \end{tikzcd}$$

Comme $i' \in C^\pi$, on a $i \in \widetilde{C^\pi}$ (car $\widetilde{C^\pi}$ stable par cochangement de base). D'autre part, j'ai besoin du fait que j soit dans C, et je ne sais pas même qu'il est un monomorphisme ! Aussi il faut repasser aux notations indicielles

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, hook, "\alpha_i"] \arrow[d, hook] & B_i \arrow[d] & \\ A \arrow[r, hook, "\beta_i"] & C_i \arrow[r, "\gamma_i"] & B . \end{tikzcd}$$

Comme la formation des sommes amalgamées commute aux limites inductives filtrantes, on voit que $\varinjlim C_i \simeq A \amalg_{\varinjlim A_i} \varinjlim B_i = A \amalg_A B = B$, donc la limite inductive des γ_i est un isomorphisme (essentiellement id_B). D'autre part, le même argument montre que le système inductif des C_i $(i \in J)$ dans $\mathcal{M}$ est π-adapté, donc aussi celui des γ_i [28]

[page 84]

dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$. Comme $\varinjlim \gamma_i$ est un isomorphisme, il est dans C. Comme C est π-accessible, il s'ensuit que l'ensemble J' formé des $i \in J$ tels que $\gamma_i \in C$ est lui aussi cofinal [29]. Donc on trouve i avec $\alpha_i \in C^\pi$, $\gamma_i \in C$, ce qui établit le lemme 6.4, et achève la démonstration du théorème 6.1.

7 Construction de triples de Quillen clos avec $C = \mathbf{Mon} \subset \mathbf{Cof}_W$

Finalement, tous les beaux développements des paragraphes 5, 6 ne me donnent pas le "sweeping result" souhaité. Peut-être est-il faux – peut-être la propriété d'engendrement

[28] *Sauf* qu'on ne sait pas que les C_i soient dans Filt^π – en fait, ils ne seront pas en général, puisqu'on ne suppose pas que $A, B \in \mathrm{Filt}^\pi$.

[29] *Canulé, cf.* annotation précédente.

“$\sim$” par une petite partie (pour les ensembles accessibles, ou L-accessibles) est-elle beaucoup plus rarement satisfaite, que je ne l'aurais imaginé. Pour bien faire, il faudrait que je traite jusqu'au

`[page 85]`

bout quelques exemples, p. ex. celui de Cof_W, et de W^{univ} dans Cat, pour un localiseur fondamental plus ou moins général, et surtout dans le cas $W = \mathbf{W}_\infty$. Sûrement Cof_W et W^{univ} sont accessibles (il faudrait que je le vérifie pourtant), et si le “théorème” hypothétique du paragraphe 6 est faux pour eux, du moins en aurai-je le cœur net. Mais il reste pourtant la question : si $C = \widetilde{C}$ est stable par $\varinjlim$ filtrantes, et de la forme $\widetilde{C_0}$, C_0 petit, et si W est L-accessible également, alors $C \cap W$ est-il aussi de la forme $\widetilde{TC_0}$, avec TC_0 petit ? Je viens encore d'essayer de le prouver, en supposant de plus $C \subset$ mono, et ne vois aucun moyen d'y parvenir. Il faudrait donc un contre-exemple pour dissiper ces perplexités ! Et le mieux serait dans Cat, tant qu'à faire.

Il surnage pourtant un résultat tangible positif, que je vais maintenant essayer de bien cerner et prouver :

`[page 86]`

Théorème 7.1. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie stable par petites $\varinjlim$ filtrantes, $M_0 \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ générateur par monomorphismes stricts, plus précisément on suppose ceci :*

> *Pour tout monomorphisme $i : A \hookrightarrow B$ dans $\mathcal{M}$ qui n'est pas un isomorphisme, il existe un monomorphisme $B' \overset{j}{\hookrightarrow} B$ ayant les propriétés suivantes :*
>
> a) *$B' \in M_0$.*
>
> b) *j ne se factorise pas par i.*
>
> c) *$A' = A \times_B B'$ existe dans $\mathcal{M}$, ainsi que $C = A \amalg_{A'} B'$, A' est dans M_0, et dans le diagramme canonique*

(7.1.1)
$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d, hook] & B' \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook, dotted, "j"] & \\
A \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[rr, hook, dotted, bend right, "i"'] & C \arrow[r, "\beta"] & B
\end{tikzcd}$$

> *la flèche β est un monomorphisme.*

(**N.B.** Ces conditions sont satisfaites si on suppose, en plus de la condition que M_0 soit générateur pour les monomorphismes, que M_0 contient, avec tout objet B', et pour tout objet A' qui est soit un quotient, soit un sous-objet de B', un objet A'_0 isomorphe à A' ; et si de plus $\mathcal{M}$ satisfait aux conditions d'exactitude suivantes :

1°) Toute flèche f de $\mathcal{M}$ se factorise en ip, avec i monomorphisme, p épimorphisme, et :

2°) Si A_1, A_2 sont deux sous-objets d'un objet B de $\mathcal{M}$, alors l'intersection $A_0 = A_1 \times_B A_2$ existe, ainsi que la

[page 87]

somme amalgamée $C = A_1 \amalg_{A_0} A_2$, et le morphisme canonique $C \longrightarrow B$ est un monomorphisme.)

Supposons de plus que $\mathcal{M}$ satisfait la condition e, p. 76, i.e. *que toute* $\varinjlim$ *filtrante de monomorphismes est un monomorphisme.*

1°) *Soit* Mon $\subset$ Fl($\mathcal{M}$) *l'ensemble des monomorphismes, et* Mon_0 *le sous-ensemble de* Mon *formé des* $i \in$ Mon *tels que source et but appartiennent à* M_0. *On a alors*

$$\text{(7.1.2)} \qquad \mathrm{Mon} \subset \widetilde{\mathrm{Mon}_0} \quad , \qquad \textit{d'où} \quad \begin{cases} \widetilde{\mathrm{Mon}} = \widetilde{\mathrm{Mon}_0} \\ (\mathrm{Mon})_* = (\mathrm{Mon}_0)_* \, . \end{cases}$$ [30]

2°) *Si* M_0 *est* petit *et si les objets de* M_0 *sont accessibles* (p. ex. $\mathcal{M}$ satisfait c, p. 76), *et si* Mon *est stable par cochangement de base, alors il existe une factorisation fonctorielle de toute flèche* f *de* $\mathcal{M}$ *en*

$$f = p\, i\ ,$$

avec $i \in$ Mon, $p \in (\mathrm{Mon})_*$. (**N.B.** Une flèche $p : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{M}$ est dans $(\mathrm{Mon})_*$ si et seulement si elle fait de X un objet *injectif* de $\mathcal{M}/Y$ – donc l'assertion de factorisation assure que dans les catégories induites $\mathcal{M}/Y$ "il y a assez d'injectifs".) *De plus, on a*

$$\text{(7.1.3)} \qquad \mathrm{Mon} = \widetilde{\mathrm{Mon}_0} \quad .$$

3°) *Soit* W *une partie de* Fl($\mathcal{M}$) *qui est* L-accessible (i.e. *accessible, et stable par limites inductives filtrantes*). (*On suppose à présent que* $\mathcal{M}$ *satisfait les conditions* (a), (b), (c), (d), (e) *de la page* 76, *d'où une bonne théorie des parties L-accessibles de* Ob ($\mathcal{M}$) *ou de* Fl($\mathcal{M}$).) *On suppose, plus précisément, que* W *satisfait les conditions :*

[page 88]

(7.1.4)

a) *W est L-accessible* (*i.e.* stable par $\varinjlim$ filtrantes, et accessible).

b) *Soient α, β composables, avec $\beta\alpha$ et α dans W, alors $\beta \in W$.* (**N.B.** Cette condition sera satisfaite si W est un localiseur modérément saturé, et c'est à cette situation que nous allons appliquer notre énoncé.)

c) Mon $\cap\, W$ *est stable par cochangement de base.*

et que $\mathcal{M}$ *satisfait les conditions supplémentaires*

(7.1.5)

e′) *Les* $\varinjlim$ *filtrantes commutent au changement de base.*

f) *La condition d'exactitude* (7.2.1) *ci-dessous.*

Soit π *un cardinal tel que* W *soit* π*-accessible, et* $M_0 \subset \mathrm{Filt}^\pi$ (*donc* M_0 *essentiellement petite*). *Alors on a*

$$\text{(7.1.6)} \qquad W \cap \mathrm{Mon} \subset \widetilde{(W \cap \mathrm{Mon})^\pi}$$

[30] **N.B.** On a là un critère d'injectivité d'objets dans les catégories $\mathcal{M}/Y$ – il suffit de tester la condition d'injectivité par des monomorphismes i qui sont dans Mon_0.

(*où pour toute partie* C *de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$*, on pose* $C^\pi = C \cap \mathrm{Fl}^\pi(\mathcal{M})$), *donc*

$$\widetilde{W \cap \mathrm{Mon}} \;=\; (\widetilde{W \cap \mathrm{Mon}})^\pi \,, \tag{7.1.7}$$

donc $\widetilde{W \cap \mathrm{Mon}}$ *est Q-engendré par une* petite *partie de* $W \cap \mathrm{Mon}$.

Corollaire 7.2. *Soit* $\mathcal{M}$ *satisfaisant* (a), (b), (c), (d), (e) *et aux conditions supplémentaires :*

(7.2.1)
- e′) *Les* $\varinjlim$ *filtrantes commutent au changement de base.*
- f) *Si* A_1, A_2 *sont deux sous-objets d'un objet* B *de* $\mathcal{M}$*, et* $A_0 = A_1 \cap A_2$*, alors* $A_1 \amalg_{A_0} A_2 \hookrightarrow B$ *est un monomorphisme* [31].

Soit W *une partie de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *satisfaisant les conditions suivantes.*

(7.2.3)
- a) W *est un localiseur modérément saturé.*
- b) W *est L-accessible,* i.e. *il est stable par* $\varinjlim$ *filtrantes, et est accessible.*
- c) $\mathrm{Mon} \cap W$ *est stable par cochangement de base,* i.e. *si on a un diagramme* cocartésien

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \end{tikzcd}$$

avec i *monomorphisme appartenant à* W*, alors* i' *est un monomorphisme appartenant à* W*.* [32]

[page 89]

Sous ces conditions, on a

$$\underbrace{\mathrm{Mon}}_{C} \cap W \;=\; \widetilde{W \cap \mathrm{Mon}} \;, \qquad \text{i.e. } \mathrm{Mon} \cap W \text{ \textit{est Q-clos à gauche}}\,, \tag{7.2.4}$$

[31] Une autre façon de le dire : si $C = \sup_{\mathrm{Ss}(B)}(A_1, A_2)$, le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[d] \\ A_2 \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

est aussi cocartésien.

[32] *Cf.* plus bas pour une quatrième condition (d) sur W, qui assure que W s'insère dans un triple de Quillen.

et

(7.2.5) *il existe une petite partie* $TC_0 \subset \mathrm{Mon}$, *telle que* $\mathrm{Mon} \cap W = \widetilde{TC_0}$.

(*De façon plus précise, si* $\pi \geq \pi_0$ *est un cardinal tel que* W *soit* π*-accessible, on peut prendre* $TC_0 = (\mathrm{Mon} \cap W)^\pi$ (*ou une partie* petite *de* $(\mathrm{Mon} \cap W)^\pi$ *ayant les mêmes classes d'isomorphie*).) *Donc* (th. 1 de §1) *le couple* $(TC = \mathrm{Mon} \cap W,\ F = (TC)_*)$ *est un couple de Quillen clos, et il y a même une factorisation* fonctorielle *de toute flèche* f *en*

(7.2.4) $$f \;=\; p\,i\,; \qquad i \,\in\, TC\,, \qquad p \,\in\, F\,.$$

Si on pose

(7.2.5) $$C \;=\; \mathrm{Mon}\,, \qquad TC \;=\; \mathrm{Mon} \cap W\,, \qquad F \;=\; (TC)_*\,, \qquad TF \;=\; C_*\,,$$

le triple (W, C, F) *est un triple de Quillen clos, si et seulement si on a les conditions supplémentaires suivantes.*

(7.2.6) g (*sur* $\mathcal{M}$ *seulement*) Mon *stable par cochangement de base.*

(7.2.7) $\underbrace{TF}_{\stackrel{\text{déf}}{=} (\mathrm{Mon})_*} \subset W$ i.e. *si* d) *toute* $f : X \longrightarrow Y$ *qui fait de* X *un objet injectif de* $\mathcal{M}/Y$, *est dans* W (*donc aussi dans* W_{univ}).

[page 90]

Démonstration de 7.1. On peut donner un énoncé un peu plus délicat, en supposant d'emblée donnée, non une partie M_0 de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, mais une partie

(7.1) $$\mathrm{Mon}_0 \;\subset\; \mathrm{Mon}\,,$$

satisfaisant la condition suivante

Pour tout monomorphisme $i : A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{M}$, il existe $i' \in \mathrm{Mon}_0$, $i' : A' \longrightarrow B'$, et une flèche $i' \longrightarrow i$ dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$,

(7.2)
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r, "i"] & B\,, \end{tikzcd}$$

telle que la flèche correspondante

$$C \;=\; A \amalg_{A'} B' \;\longrightarrow\; B$$

soit un monomorphisme, et que $B' \longrightarrow B$ ne se factorise pas par A.

C'est cela qui était visé par la condition (7.1.1) sur M_0, qui implique (7.2) sur Mon_0 défini en termes de M_0 comme dit dans 1°.

Dans ce qui suit, on suppose donnée une partie $\mathrm{Mon}_0 \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ satisfaisant (7.2). En pratique, elle sera souvent déduite d'une partie M_0 de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, génératrice pour les monomorphismes, comme explicité dans 1°, mais on n'a pas besoin du fait que $i' \longrightarrow i$ soit un monomorphisme (*i.e.* (7.1.1) est plus forte que ce qu'il nous faut). P. ex. si $B' \in M_0$ et $B' \longrightarrow B$ est donné, ne se factorisant pas par A, on pourra prendre $A' = B' \times_B A$ et $i' : A' \longrightarrow B'$ (pour assurer $i' \in \mathrm{Mon}_0$, il faudra donc supposer M_0 stable par passage aux sous-objets), et il y a des chances

[page 91]

que $C \longrightarrow B$ sera alors bel et bien un monomorphisme ...

1°) Il faut prouver

$$\mathrm{Mon} \subset \widetilde{\mathrm{Mon}_0}$$

moyennant (7.2) (et la stabilité de $\mathcal{M}$ par $\varinjlim$ filtrantes). Cela va résulter directement du

Lemme 7.3. *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie stable par limites inductives filtrantes, et C_0, C des parties de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$. *On supposera*

- (a) *C formée de monomorphismes, et*
- (b) *que la condition suivante (généralisant* (7.2) *ci-dessus) soit vérifiée.*

> *Pour toute flèche $i : A \hookrightarrow B$ dans C telle que i ne soit pas un isomorphisme, il existe $i' : A' \longrightarrow B'$ dans $\widetilde{C_0}$, et une flèche $i' \longrightarrow i$ dans $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$, telle que dans le diagramme*

(7.3.1)
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, hook] & B' \arrow[d] \arrow[rrr, dotted] & & & B \\ A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rrrr, dotted, bend right, "i"'] & D \arrow[r, phantom, "="] & A \amalg_{A'} B' \arrow[rr, "\beta"] & & B \end{tikzcd}$$

> *la flèche β soit dans C, et que $B' \longrightarrow B$ ne se factorise pas par A (ou, ce qui revient au même, que le sous-objet de B défini par D et β ne soit pas égal à celui défini par A et i).*

On suppose de plus

- (c) *C stable par $\varinjlim$ filtrantes, et*
- (d) *que pour tout $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, l'ensemble des sous-objets de B est petit.* (Condition des plus anodines ! C'est une condition *sur* $\mathcal{M}$, n'impliquant pas C).

Alors on a

(7.3.2)
$$C \subset \widetilde{C_0}\,, \qquad \textit{donc } \widetilde{C} \subset \widetilde{C_0}\,,$$

donc, si $C_0 \subset C$, on conclut

[page 92]

(7.3.3)
$$\widetilde{C} = \widetilde{C_0}\,.$$

(Ce lemme implique aussitôt la première assertion de 7.1, 1°.) Prouvons ce lemme, *i.e.* que toute $i \in C$ est dans $\widetilde{C_0}$, en construisant par récurrence transfinie une suite strictement croissante de sous-objets de B,

$$A_\alpha \xhookrightarrow{j_\alpha} B\ , \qquad \text{avec les } j_\alpha \in C\ ,$$

et avec :

1° $A_0 = A$. On prouvera que $A \xrightarrow{i_\alpha = i_{\alpha,0}} A_\alpha$ dans $\widetilde{C_0}$, et il y aura un ordinal final α tel que $A_\alpha = B$; on en conclura donc que $i = i_\alpha$ est dans $\widetilde{C_0}$.

Si i est un isomorphisme, on sait que $i \in \widetilde{C_0}$, il n'y a rien à prouver (la construction transfinie s'arrête au cran 0). Les deux pas de la construction, après le pas initial 1°, sont :

2° Soit A_α construit. Si $A_\alpha = B$, la construction est arrêtée. Si $A_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} B$ n'est pas un isomorphisme, on applique (7.3.1) à $j_\alpha \in C$, pour trouver un $D \xhookrightarrow{j} B$, donc $j \in C$ et $D \supsetneq A_\alpha$. De plus,

$$i_{\alpha+1,\alpha}\ :\ A_\alpha \longrightarrow A_{\alpha+1} \overset{\text{déf}}{=} D \qquad \text{est dans } \widetilde{C_0}\ , \tag{7.3.4}$$

car déduit de $i' \in \widetilde{C_0}$ par cochangement de base.

3° Si α est ordinal limite, on pose

$$A_\alpha \ =\ \varinjlim_{\beta<\alpha} A_\beta\ , \tag{7.3.5}$$

[page 93]

et la flèche canonique

$$A_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} B$$

est dans C, car les j_β le sont et C est stable par limites inductives filtrantes.

On a ainsi achevé la description des systèmes transfinis. Pour tout α, on a

$$\operatorname{card}\alpha \ \le\ \operatorname{card}\operatorname{Ss}(B)\ ,$$

puisque l'application $\beta \longmapsto A_\beta$ de l'ensemble $I_\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$ dans $\operatorname{Ss}(B)$ est *strictement* croissante. Donc il existe un cardinal α tel que $\operatorname{card}\alpha \le \operatorname{card}\operatorname{Ss}(B)$, tel que $A_\alpha = B$. Mais alors $i \in \widetilde{C_0}$, comme limite inductive (ou composé) transfinie de flèches appartenant à $\widetilde{C_0}$. (Il suffit de la condition $\forall\ \beta$, $i_{\beta+1,\beta} \in \widetilde{C_0}$ pour impliquer que tous les morphismes de transition $i_{\beta',\beta}$ sont dans $\widetilde{C_0}$.)

Revenons à 7.1, 2°. Il reste à prouver que si Mon est stable par cochangement de base, alors on a

$$\mathrm{Mon} \ =\ \widetilde{\mathrm{Mon}_0}\ .$$

Mais comme Mon est déjà stable par composition, et par limites inductives filtrantes quelconques (donc aussi par facteurs directs), il s'ensuit par le corollaire 2 du théorème 1, §1 (p. 11), que $\mathrm{Mon} = \widetilde{\mathrm{Mon}_0}$. L'énoncé de factorisation est le théorème 1 du §1.

`[page 94]`

Prouvons 7.1, 3°, *i.e.* la formule (7.1.6),

$$W \cap \mathrm{Mon} \ \subset \ \widetilde{(W \cap \mathrm{Mon})^{\pi}} \ .$$

Pour ceci, on applique encore le lemme 7.3 à

$$C_0 \ = \ (W \cap \mathrm{Mon})^{\pi} \ , \qquad C \ = \ W \cap \mathrm{Mon} \ .$$

Les conditions (a), (b), (c), (d) du lemme sont vérifiées. C'est clair pour toutes, sauf pour (b), qui demande une vérification non tautologique. Soit donc

$$f \ : \ A \hookrightarrow B \ , \qquad f \in \mathrm{Mon} \cap W, \ f \text{ non isomorphisme} \ .$$

On considère B comme limite inductive [33]

$$B \ = \ \varinjlim_{I} B_i \ , \qquad I \ = \ \mathrm{Ss}_{\pi}(B) \ .$$

Pour tout i, on pose

$$A_i \ = \ A \cap B_i \ = \ A \times_B B_i \ ,$$

et

$$f_i \ : \ A_i \ \hookrightarrow \ B_i \ ,$$

donc

$$f \ = \ \varinjlim_{i \in I} f_i \ .$$

On a besoin de savoir que le système inductif des flèches f_i est π-adapté, ce qui nous amène à postuler la condition d'exactitude supplémentaire suivante sur $\mathcal{M}$:

`[page 95]`

(7.4) $\quad e'$) les $\varinjlim$ filtrantes dans $\mathcal{M}$ commutent au changement de base ,

il suffit même de le supposer dans le cas très particulier qu'on a envisagé ici.

Comme W est π-accessible, et $(f_i)_{i \in I}$ est π-adapté, comme $\varinjlim f_i \in W$, il s'ensuit que l'ensemble I_W des $i \in I$ tels que $f_i \in W$ est cofinal. Comme $A \xhookrightarrow{f} B$ n'est pas un isomorphisme, il existe donc un $i \in I_W$ tel que $B_i \hookrightarrow B$ ne se factorise pas par A. On a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, hook, "f_i"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & B_i \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook, dotted, "\text{incl.}"] & \\
A \arrow[r, hook, "\alpha_i"] \arrow[rr, hook, dotted, bend right, "f"'] & C_i \arrow[r, "\beta_i"] & B
\end{tikzcd} ,$$

---

[33] *D'un système inductif π-adapté.*

avec $f_i \in (C \cap W)^\pi = C_0$, donc $\alpha_i \in \widetilde{C_0}$. On a besoin de savoir que $\alpha_i \in W$, donc une condition supplémentaire sur W :

Si on a un carré cocartésien

(7.5)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \end{tikzcd} ,$$

avec $i \in \mathrm{Mon} \cap W$, alors $i' \in W$ [34].

(j'ai renforcé (7.1.4) en conséquence).

[page 96]

Comme par hypothèse $f = \beta_i \alpha_i$ est dans W, et $\alpha_i \in W$, il s'ensuit par (7.1.4), (a) que $\beta_i \in W$. Il faudra que nous sachions de plus que β_i est un monomorphisme, donc $\beta_i \in \mathrm{Mon} \cap W = C$, ce qui achèvera d'établir la condition manquante (b) de 7.3. C'est la condition d'exactitude (7.2.1), qu'il me faut visiblement rajouter aux hypothèses dans 7.1, 3°. Ayant fait cela, le lemme 7.3 s'applique et établit 7.1, 3°.

Démonstration de 7.2. Posons

$$C = \mathrm{Mon}\,, \qquad TC = C \cap W\,, \qquad TC_0 = TC^\pi\,,$$

donc par 7.1, 3°, on a

$$\underbrace{TC_0}_{\substack{\text{essentiellement}\\ \text{petite}}} \subset TC \subset \widetilde{TC_0} = \widetilde{TC}\,,$$

et par le théorème 1, §1 (p. 10-12), cor. 2, pour vérifier que $TC = \widetilde{TC_0}$ (*i.e.* TC est Q-clos à gauche), il revient au même de voir qu'il est Q-stable à gauche, *i.e.* stable par composition, par cochangement de base, par $\varinjlim$ ordinales strictes, par facteurs directs. Or les deux derniers sont impliqués par le fait que $TC = C \cap W$ est stable par $\varinjlim$ filtrantes, vu que W l'est, et C aussi par la condition e (p. 76) sur $\mathcal{M}$. D'autre part, $C = \mathrm{Mon}$ et W étant stables par composition, itou pour $C \cap W$. Donc il reste le cochangement de

[page 97]

base, et c'est assuré par 7.2.3, (c) (dont on avait déjà besoin dans 7.1, 3°, pour établir $C \cap W \subset \widetilde{TC_0}$). (**N.B.** les hypothèses de 7.2 sont pratiquement celles de 7.1, 3°, sauf qu'on suppose que W est un localiseur (sous-entendu : modérément saturé), de façon précise on n'a utilisé, jusqu'à présent, comme hypothèse supplémentaire, que la stabilité de W par composition.)

Il reste à établir que $(W, C = \mathrm{Mon}, F = (TC)_*)$ est un triple de Quillen clos, si et seulement si les conditions (7.2.6) et (7.2.7), *i.e.*

$$\begin{cases} C = \mathrm{Mon} \;\text{ stable par cochangement de base,} \\ TF = C_* = (\mathrm{Mon})_* \subset W, \end{cases}$$

[34] **N.B.** Cette condition est vérifiée.

sont satisfaites. La nécessité est évidente, par définition des triples de Quillen clos, et pour la suffisance, on note qu'il résulte du théorème 7.1, 2°, et de la partie déjà prouvée de 7.2, que (C, TF), (TC, F) sont des couples de Quillen clos, et on a de plus

$$TC \;=\; C \cap W \;, \qquad TF \;\subset\; F \cap W$$

(puisque $TF \subset W$ par (7.2.7), et $TF \subset F$ puisque $TC \subset C$). On sait

[page 98]

(paragraphe 4.3, corollaire 4, page 36) qu'il en résulte que (W, C, F) est un triple de Quillen clos. Cela achève la démonstration de 7.1 et 7.2.

Résumons l'essentiel :

Corollaire 7.4. [35] *Soit* $\mathcal{M}$ *une catégorie satisfaisant les conditions* (a), (b), (c), (d), (e) (p. 76) *et* (e′), (f) ((7.2.1), p. 88), *enfin* (g) (7.2.6), i.e. *stabilité de l'ensemble* Mon *des monomorphismes de* $\mathcal{M}$ *par cochangement de base. Soit* $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ *un localiseur dans* $\mathcal{M}$*, qui est* stable par $\varinjlim$ filtrantes *et de plus* (*condition plus subtile, mais pratiquement anodine*) accessible. *On pose*

$$C \;=\; \mathrm{Mon}\;, \qquad TC \;=\; C \cap W\;, \qquad TF \;=\; C_*\;, \qquad F \;=\; (TC)_*\;.$$

Alors :

1°) (C, TF) *est un couple de Quillen* (*énoncé indépendant de la donnée de* W), *et même un couple de Quillen à factorisation fonctorielle.*

2°) *Pour que* (TC, F) *soit un couple de Quillen, il faut et il suffit que* TC *soit stable par cochangement de base.* (*Et alors il y a factorisation fonctorielle.*) [36].

3°) *Pour que* (W, C, F) *soit un triple de Quillen clos, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites.*

$$(7.4.1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{a)} & TC \overset{\text{déf}}{=} W \cap \mathrm{Mon} \textit{ stable par cochangement de base.} \\ \text{b)} & TF \overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Mon})_* = \textit{applications de type injectif} \subset W. \end{array} \right.$$

[page 99]

4°) *Pour que* (W, C, F) *soit un triple de Quillen clos et propre à gauche* (i.e. $C \subset \mathrm{Cof}_W$), *il faut et il suffit qu'on ait la condition* (7.4.1), (b) (i.e. W *contient les morphismes de type injectif*), *et de plus*

$C \subset \mathrm{Cof}_W$*, ou encore : pour tout carré cocartésien*

$$(7.4.2) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \end{tikzcd} ,$$

avec i *un monomorphisme, alors* $\alpha \in W \Longrightarrow \beta \in W$.

[35] **N.B.** C'est finalement ce corollaire qui est le résultat principal de la présente section.

[36] **N.B.** Dans les cas 1° et 2°, C, $TC = C \cap W$ sont Q-engendrés à gauche par des *petites* parties.

5°) *Pour que* (W, C, F) *soit un triple de Quillen clos et* propre, *il faut et il suffit que les deux conditions de* 4° *soient satisfaites, ainsi que l'on ait :*

$F \subset \mathrm{Fib}_W$, *ou encore : pour tout carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "p"'] & Y' \end{tikzcd} , \tag{7.4.3}$$

si $f \in F$ (i.e. $f \in (C \cap W)_*$) *et* $p \in W$, *on a* $q \in W$.

Démonstration de 7.4. Les parties 1°, 2°, 3° ne sont qu'un résumé de ce qui a été établi. Pour 4°, il faut voir que les conditions dites impliquent (7.4.1), (a), or on a $C \subset \mathrm{Cof}_W$, donc $C \cap W \subset \mathrm{Cof}_W \cap W = W^{\mathrm{univ}}$

`[page 100]`

donc $C \cap W = C \cap W^{\mathrm{univ}}$, qui est stable par cochangement de base, puisque C et W^{univ} le sont. Quant à 5°, c'est une tautologie, compte tenu de 4°.

8 Application aux catégories de modèles $(A^\wedge, W_A)$

Soit A dans Cat, et considérons dans $A^\wedge$ le localiseur W_A, image inverse par

$$\begin{cases} i_A : A^\wedge \longrightarrow \mathrm{Cat} \\ \quad F \longmapsto A/F \end{cases} \tag{8.1}$$

d'un localiseur fondamental donné W, satisfaisant les conditions

$$\mathrm{W}\,(\underbrace{1}_{\text{sat.}}, \underbrace{2}_{\text{loc.}}, \underbrace{3}_{\text{objet fin.}}, \underbrace{5}_{\text{conn. }\pi_0}, \underbrace{6}_{\varinjlim}, \underbrace{7\text{ bis}}_{\substack{\text{carrés coc.}\\ \text{ou “M.V.”}}}, \underbrace{8}_{\text{acc.}}), \tag{8.2}$$

où W (8) est l'accessibilité de W (donc W est L-accessible s'il satisfait aussi W (6)).

Pour pouvoir cependant appliquer les développements sur les parties accessibles d'une grosse catégorie du §5, il faut vérifier les conditions (a), (b), (c), (d), (e) du §5, tant dans Cat, que (surtout) dans $A^\wedge$.

a) Stabilité par petites $\varinjlim$ filtrantes, O.K.

b) Filtration cardinale. Bien connu pour $A^\wedge = \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathrm{Ens})$, à partir de celle de Ens par les cardinaux (*cf.* SGA 4 I, 9.24, p. 177). Pour Cat, on définit une filtration cardinale

$$(\mathrm{Cat}^\pi)_{\pi \geq \pi_0}\ , \qquad \text{où } \pi_0 = \text{cardinal des ensembles dénombrables}\ , \tag{8.3}$$

[page 101]

par la condition, pour A dans Cat,

$$A \in \mathrm{Filt}^{\pi}(\mathrm{Cat}) \ = \ \mathrm{Cat}^{\pi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(A) \ \leq \ \pi \ . \tag{8.4}$$

Il faut vérifier les conditions (a), (b), (c) de *loc. cit.* 9.12. La condition (a) est évidente, (b) est contenue dans la condition plus forte de stabilité de Cat^{π} par $\varinjlim_{I}$, pour I une catégorie telle que $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(I) \leq \pi$ (c'est la condition (d_0) de ces notes, p. 45-46). Notons que Cat^{π} est également stable par $\varprojlim$ finies (et si π est de la forme 2^c, il est stable même par limites projectives $\varprojlim_{I}$, avec $\mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(I) \leq c \ldots$). La condition (c) se vérifie aisément par la méthode du §5, en notant que pour X dans Cat, l'ensemble

$$\mathrm{Ss}_{\pi}(X)$$

des sous-catégories de X qui sont dans Cat^{π} est filtrant croissant et grand devant π, et que X en est la limite inductive. D'autre part, il est clair aussi que si $X \in \mathrm{Cat}^{\pi'}$ avec $\pi' > \pi$, alors

$$\mathrm{card}\,\mathrm{Ss}_{\pi}(X) \ \leq \ \pi'^{\pi} \ ,$$

ce qui achève d'établir la condition (c).

De plus, la condition (d) de p. 45 se vérifie immédiatement pour les Cat^{π}, et aussi pour les $A^{\wedge\pi}$ (pour $\pi \geq \mathrm{card}\,\mathrm{Fl}(A)$).

Aussi que les monomorphismes sont stables par $\varinjlim$ filtrantes (condition (e), page 46).

[page 102]

Passons aux conditions supplémentaires (e'), (f), (g) exigées dans le corollaire 7.4. La condition (e') (commutativité des $\varinjlim$ filtrantes au changement de base) est satisfaite dans $A^{\wedge}$ et dans Cat. La condition (f) dit que pour deux sous-objets A_1, A_2 d'un objet B, si $A_0 = A_1 \cap A_2$, alors

$$A_1 \amalg_{A_0} A_2 \longrightarrow B$$

est un monomorphisme. Je doute que c'est vrai dans Cat, et ce n'est pas grave, car c'est à $A^{\wedge}$, non à Cat, qu'on voudra appliquer 7.4 – et c'est évidemment vrai dans $A^{\wedge}$, et dans tout topos, l'étant dans (Ens). Enfin, la stabilité des monomorphismes par cochangement de base est sûrement fausse dans Cat, mais vraie dans $A^{\wedge}$ – donc c'est O.K.

Comme W est stable par $\varinjlim$ filtrantes (W (6)), et que i_A y commute, W_A est également stable. De même, W_A est L-accessible, en vertu du

Lemme 8.1. *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ deux catégories satisfaisant* (a), (b), (c), (d), (e), *et $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ un foncteur commutant aux $\varinjlim$ filtrantes. Alors pour toute partie L-accessible M' de $\mathcal{M}'$, $\varphi^{-1}(M')$ est L-accessible.*

[page 103]

De façon précise, soit π un cardinal tel que M' soit π-accessible et que φ applique $\mathcal{M}^{\pi}$ dans $\mathcal{M}'^{\pi}$ (par exemple, pour cette dernière condition, il suffit $\pi = 2^c$ pour c assez grand, cf. loc. cit. 9.14, p. 153). *Alors $M = \varphi^{-1}(M')$ est π-accessible.*

Vérification immédiate.

On a donc le

Lemme 8.2. *Soit A dans* Cat. *Alors $(A^\wedge, W_A)$ satisfait aux conditions préliminaires du corollaire* 7.4, *ainsi qu'aux conditions suivantes.*

$$\underbrace{\mathrm{Mon}(A^\wedge)}_{\substack{\textit{ensemble des}\\ \textit{monomorphismes}\\ \textit{dans } A^\wedge}} \quad \subset \; \mathrm{Cof}_{W_A} \, , \tag{8.2.1}$$

$$\mathrm{Mon} \cap W_A \qquad \textit{stable par cochangement de base} \, , \tag{8.2.2}$$

en d'autres termes (*compte tenu que* Mon *est stable par cochangement de base*), *pour un carré cocartésien*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & B \arrow[dr, "\beta"] & \\ & A' \arrow[r, hook, "i'"] & B' \end{tikzcd} \; , \tag{8.2.3}$$

avec i un monomorphisme, si $\alpha \in W_A$ (resp. $i \in W_A$), on a $\beta \in W_A$ (resp. $i' \in W_A$). En fait, on a mieux :

$$i \in W_A \iff i' \in W_A \, , \qquad \alpha \in W_A \iff \beta \in W_A \, . \tag{8.2.4}$$

[page 104]

Il reste à vérifier (8.2.4), qui a été vu dans XII ...

On conclut donc de 7.4 1°, 2°, 3° :

Corollaire 8.3. *Posons*

$$\begin{cases} C = \mathrm{Mon}(A^\wedge) \, , & TC = C \cap W \, , \\ F = (TC)_* \, , & TF = C_* \, . \end{cases} \tag{8.3.1}$$

Alors (C, TF) et (TC, F) sont des couples de Quillen à factorisation fonctorielle. (**N.B.** *C et TC étant de plus Q-engendrés à gauche par des petites parties de* $\mathrm{Fl}(A^\wedge)$.) *Pour que (W_A, C, F) soit un triple de Quillen clos, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\underbrace{TF}_{\overset{\text{déf}}{=} (\mathrm{Mon})_*} \; \subset \; W_A \, , \tag{8.3.2}$$

i.e. *que toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de type injectif dans $A^\wedge$* (i.e. *qui fait de X un objet injectif de $A^\wedge/Y$) soit dans W_A.*

Quand cette condition est satisfaite, le triple de Quillen (W_A, C, F) est propre à gauche, par 8.2.1.

Il n'est pas clair qu'il soit forcément propre-tout-court, *i.e.* qu'on ait

$$F \subset \mathrm{Fib}_W \qquad (?) \, . \tag{8.3.3}$$

Nous y reviendrons par la suite. Pour l'instant, la chose essentielle, c'est d'examiner la condition (8.3.2) sur A.

`[page 105]`

Théorème 8.4. *Soit W un localiseur fondamental dans* Cat *satisfaisant* W (1, 2, 3, 6, 7, 8), *notations de* XII, (i.e. *tous les axiomes envisagés jusqu'à présent, sauf peut-être celui* W (4) *des fibrations* `[et celui W (5) de connexité]`), *supposons de plus W stable par facteurs directs* (*renforcement* W (1 bis) *de l'axiome de saturation modérée* W (1)). [37] *Soit A un objet de* Cat, *et $W_A = i_A^{-1}(W)$ le localiseur de $A^\wedge$ déduit de W. Avec les notations de* 8.3 :

1°) *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) *On a* (8.3.2),

$$TF \subset W_A ,$$

i.e. *toute flèche de type injectif dans $A^\wedge$ est dans W_A.*

b) *Soit*

$$L = L_A \tag{8.4.1}$$

l'élément de Lawvere dans $A^\wedge$, donc le préfaisceau

$$a \longmapsto \begin{array}{l} \textit{ensemble des sous-préfaisceaux de } a \\ (\text{i.e. } \textit{ensemble des ouverts de } A/a, \\ \text{i.e. } \textit{des cribles de } A/a) , \end{array}$$

et considérons la flèche $L \longrightarrow e_A$ (objet final de $A^\wedge$). On veut que cette flèche soit W_A-asphérique, i.e. *soit universellement dans W_A – ou ce qui revient au même, que pour tout $a \in A$, $L_A \times a$ $(= L_{A/a})$ soit un objet W_A-asphérique*

`[page 106]`

de $A^\wedge$ (ou, ce qui revient au même, de $(A/a)^\wedge$).

c) *Il existe un objet I de $A^\wedge$ tel que $I \longrightarrow e_A$ soit W_A-asphérique, avec deux sections δ_0, δ_1 de I sur e_A, avec* $\operatorname{Ker}(\delta_0, \delta_1) = \emptyset_A$ *(préfaisceau vide).*

d) *Les catégories localisées $A/a = B$ sont des* catégories-test *pour W* (cf. *Pursuing Stacks,* §65, *notamment pages* 172-173), *ce qui revient à dire que l'on a ceci, pour chacune des catégories $B = A/a$:*

Les foncteurs

$$\begin{cases} i_B : \ B^\wedge \longrightarrow \mathrm{Cat} \quad (F \longmapsto B/F) \\ j_B : \ \mathrm{Cat} \longrightarrow B^\wedge \quad (C \longmapsto (b \longmapsto \operatorname{Hom}(B/b, C))) \end{cases} \tag{8.4.2}$$

(*où j_B est l'adjoint à droite de i_B*) *sont tous les deux "model preserving",* i.e.

$$\begin{cases} W_B = i_B^{-1}(W) \qquad (\textit{par définition de } W_B, \textit{ en fait}) \\ W = j_B^{-1}(W_B) , \end{cases} \tag{8.4.3}$$

[37] **N.B.** Pour la validité de 1°, 3° on n'a pas besoin de W (6) ($\varinjlim$) ni de W (8) (accessibilité), ni même de W (7) (axiome du carré cocartésien). Ce dernier est nécessaire déjà pour assurer la partie (a) du corollaire 8.5. Mais pour la partie 2° du théorème 8.4, on a besoin de *tous* les axiomes du localiseur fondamental W, sauf seulement W (4) `[et W (5)]`.

et les foncteurs localisés

$$\mathrm{Hot}_{B,W} \underset{\overline{j_B}}{\overset{\overline{i_B}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hot}_W$$

sont des équivalences de catégories. De plus, ces équivalences de catégories sont quasi-inverses l'une de l'autre, les morphismes d'adjonction étant déduits des morphismes d'adjonction pour le couple de foncteurs adjoints (i_B, j_B)*, ces morphismes d'adjonction étant de plus dans* W *resp. dans* W_B*.* [38]

`[page 107]`

2°) *Si les conditions équivalentes de* 1° *sont satisfaites, alors le triple*

$$(W_A\,,\ C = \mathrm{Mon}_{A^\wedge}\,,\ F = (C \cap W_A)_*)$$

est un triple de Quillen (*clos*) *propre à gauche.*

3°) *Si les conditions équivalentes de* 1° *sont satisfaites, et si de plus* A *est* W*-asphérique, alors* (*et alors seulement*) A *elle-même est une* catégorie-test pour W, *ce qui revient à dire que les conditions sur la catégorie* B *dans* (d) *sont satisfaites quand* B *est* soit A, *soit une catégorie localisée* A/a.

Corollaire 8.5. *Les conditions équivalentes de* 1° *et de* 3° *sont satisfaites dans chacun des cas suivants* (*et ceci quel que soit* W*, satisfaisant aux hypothèses dites*).

a) $A = \mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Delta}^{\sim}$, $\square$, $\square^{\sim}$ (*catégories des simplexes combinatoires standard, ordonnés ou non, et des cubes combinatoires standard, ordonnés ou non ...*) [39].

b) A *est stable par produits finis* [40]*, et contient un objet* I *tel que* I *ait deux sections* δ_0, δ_1 *sur l'objet final, avec* δ_0, δ_1 *disjointes,* i.e. $\mathrm{Ker}(\delta_0, \delta_1) = \emptyset_{A^\wedge}$ (*sous-préfaisceau vide du préfaisceau final*).

`[page 108]`

Le cas (b) du corollaire est justiciable de la condition (c) dans 1°. (De plus, A ayant un objet final, est W-asphérique, donc on est dans les conditions de 3°.) Les cas $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Delta}^{\sim}$, $\square$ (et $\square^{\sim}$, qui tombe en fait dans le cas (b)) sont traités dans Pursuing Stacks §34 (p. 47-50) `[voir aussi §36]`.

Démonstration du théorème 8.4. La partie essentielle, techniquement, est bien sûr 1° [41]. On a les implications ± tautologiques

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)\ ,$$

où $(a) \Longrightarrow (b)$ provient du fait que L est évidemment un objet injectif de $A^\wedge$. (L'objet de Lawvere d'un topos quelconque est un objet injectif.) Il reste à établir

$$(c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a)\ .$$

38 **N.B.** La condition (d), d'apparence très forte, est équivalente à la condition d'apparence plus anodine :

d') le foncteur $j_A : \mathrm{Cat} \longrightarrow A^\wedge$ transforme éléments de W en flèches W_A-asphériques ;

et il suffit même de l'exiger pour $C \longrightarrow e$ dans Cat, où C est un objet de Cat ayant objet final. `[La condition (d') ci-dessus est trop forte et n'est pas équivalente à la condition (d) ; en revanche la condition plus faible envisagée ensuite est bien équivalente à (d)].`

39 $\square^{\sim}$ est essentiellement la catégorie A "universelle", stable par produits finis, et contenant un "intervalle séparant" (I, δ_0, δ_1) comme dans (b).

40 En fait, il suffit que $I \longrightarrow e$ soit quarrable, *i.e.* que A ait un objet final, et que les produits $I \times a$ $(a \in \mathrm{Ob}\, A)$ existent dans A.

41 La partie 2° en résulte, grâce au corollaire 8.3.

Que l'on ait $(c) \Longrightarrow (d)$ (et $(c) \Longrightarrow (b)$) est établi dans Pursuing Stacks, voir le résumé des notions W-test dans Pursuing Stacks, §65, p. 168-179 ; l'énoncé pertinent ici est la proposition 3, page 173.

Il reste à établir $(d) \Longrightarrow (a)$ – mais à présent on joue sur du velours ! Je note ici le lemme suivant, dont la place serait plutôt à la fin du §4 des généralités sur les triples de Quillen :

`[page 109]`

Lemme 8.6. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie, (C, TF) un précouple de Quillen dans $\mathcal{M}$, et $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ une partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ stable par facteurs directs. Conditions équivalentes :*

a) *$TF \subset W$.*

b) *Toute flèche f dans $\mathcal{M}$ se factorise en $f = pi$, avec $i \in C$, $p \in W$.*

b′) *Comme* (b), *avec f dans TF.*

Démonstration. Les implications $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (b')$ sont tautologiques et ne font pas appel à l'hypothèse de stabilité sur W. Mais pour un $f \in TF$ donné, pour voir qu'il est dans W, si W est stable par facteurs directs, il suffit que cet-f-là se factorise en pi, avec $i \in C$, $p \in W$. En effet, on voit aussitôt qu'alors f est facteur direct de p (car $i \in C$), et comme $p \in W$, on a $i \in W$, *q.e.d.*

Revenons à 8.4, démonstration de $(d) \Longrightarrow (a)$.

`[Suit un passage rayé, en bas de la page 109 et en haut de la page 110.]`

`[page 110]`

Finalement, mon projet de démonstration se modifie, car bien que (d) ait l'air très, très fort comme condition, telle quelle je ne vois pas, finalement, comment en déduire (a). Mais en fait on peut considérer que l'équivalence de (b), (c), (d) est mise ici pour mémoire, elle est établie dans *loc. cit.*, donc je n'ai à me préoccuper que de l'implication $(c) \Longrightarrow (a)$, qui va résulter

`[page 111]`

du lemme 8.6, qui nous ramène à prouver que toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ dans $A^\wedge$ se factorise en pi, avec i monomorphisme et $p \in W_A$. On fait l'argument du mapping-cone `[plutôt mapping-cylinder]`, en partant de

$$\begin{tikzcd} e_A \amalg e_A \arrow[rr, hook, "(\delta_0,\delta_1)", "\text{mono}"'] \arrow[dr] & & I \arrow[dl, "(W_A)_{\text{univ}}"] \\ & e_A\ , & \end{tikzcd}$$

d'où pour tout X dans $A^\wedge$, en prenant le produit par X,

$$\begin{tikzcd} X \amalg X \arrow[rr, hook, "(\delta_0^X,\delta_1^X)", "\text{mono}"'] \arrow[dr, "(\mathrm{id},\mathrm{id})"] & & X \times I \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1^X \in W_A"] \\ & X\ , & \end{tikzcd}$$

et on construit le mapping-cone `[plutôt mapping-cylinder]` de f par le diagramme cocartésien

(8.6.1)
$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, shift right, "\delta_0^X"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & Y \arrow[d, hook, shift right, "\beta"'] \\
X \arrow[r, dotted, "\delta_1^X"] \arrow[rr, dotted, bend right, "i_f"'] & X \times I \arrow[r, "f'"] \arrow[u, dotted, shift right, "\mathrm{pr}_1^X"'] & Z(f) \arrow[u, dotted, shift right, "p_f"']
\end{tikzcd} ,
$$

p_f déduit de
$\mathrm{pr}_1^X : X \times I \to X$

la factorisation cherchée de f est

$$f \;=\; p_f \, i_f \;, \qquad \text{où} \quad i_f = f'\delta_1^X \;.$$

Ici, comme $\mathrm{pr}_1^X \in W_A$, on en conclut que

`[page 112]`

δ_0^X, δ_1^X (qui en sont des sections) sont dans W_A, comme δ_0^X est un monomorphisme, on a donc $\delta_0^X \in TC$, donc (TC étant stable par cochangement de base) $\beta \in W_A$, donc enfin p_f (qui est une rétraction de $Z(f)$ sur Y) est aussi dans W_A. Il reste à voir que i_f est un monomorphisme, ce qui se voit sur le diagramme plus complet (*cf.* XII, p. 230) que j'ai sous les yeux : i_f apparaît comme composé de deux monomorphismes $X \longrightarrow Y \amalg X$ et $Y \amalg X \longrightarrow Z(f)$ … Le théorème 8.4 est démontré.

Je vais quand même isoler l'argument formel sempiternel (que j'ai utilisé surtout sous forme duale) dans un

Lemme 8.7. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie, W un localiseur modérément saturé dans $\mathcal{M}$, C une partie stable par composition et par cochangement de base. On se propose, pour X fixé dans $\mathcal{M}$, de trouver une factorisation fonctorielle de toute flèche $f : X \longrightarrow Y$* (i.e. *du morphisme costructural d'un Y dans $X\backslash\mathcal{M}$) en $p_f i_f$, avec $i_f \in C$, $p_f \in W$. On suppose pour ceci qu'on a*

`[page 113]`

une factorisation de ce type pour $X \amalg X \xrightarrow{(\mathrm{id}\,,\mathrm{id})} X$, i.e. *un objet I_X et une factorisation*

$$
\begin{tikzcd}
X \amalg X \arrow[r, hook, "i_X = (\delta_0^X, \delta_1^X)"] \arrow[rr, dotted, bend right, "(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)"'] & I_X \arrow[r, "p_X"] & X
\end{tikzcd} ,
$$

avec $i_X \in C$, $p_X \in W$. On associe alors à toute f le mapping cone `[plutôt cylinder]` *$Z(f)$ comme dans le diagramme* (8.6.1) *(où il faut lire I_X au lieu de $X \times I$), et on a alors $p_f \in W$, $i_f \in C$ comme voulu. Mais il faut supposer, pour savoir que $i_f \in C$, que $X \in \mathcal{M}_C$ (objets C-cofibrants),* i.e. *que pour tout Y, $X \longrightarrow Y \amalg X$ est dans C.* (*De plus, on a supposé tacitement $\mathcal{M}$ stable par $\varinjlim$ finies.*)

Le diagramme complet est

(8.7.1)
$$\left\{\begin{array}{c}
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}_0^X"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\mathrm{inj}_1^X"] \arrow[dr, dotted, "\delta_1^X"'] & X \amalg X \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "i_X"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & Y \amalg X \arrow[d, "j"] \\
 & I_X \arrow[r, "f'"'] \arrow[uu, dotted, bend right, "p_X"'] & Z(f) \arrow[uu, dotted, bend right, "p_f"']
\end{tikzcd} \\
f = p_f i_f, \quad \text{où} \quad i_f = f' \circ \delta_1^X = j \circ (\underbrace{f'' \circ \mathrm{inj}_1^X}_{\lambda}) \ .
\end{array}\right.$$

[page 114]

On a $i_X \in C$ par hypothèse, donc $j \in C$ (stabilité de C par cochangement de base), on a $\lambda : X \longrightarrow Y \amalg X$ dans C car X dans $\mathcal{M}_C$, donc le composé $i_f = j \circ \lambda$ est dans C (stabilité de C par composition) – on gagne !

Commentaires. Pour l'équivalence de (a), (b), (c) dans le théorème 8.4, 1°, on n'a donc pas eu à faire appel aux développements de Pursuing Stacks, qui servent seulement à établir l'équivalence des trois conditions en question avec la condition “modélisante” (d). Pour résumer :

1°) Les implications
$$(a) \Longrightarrow (\ (b) \Longleftrightarrow (c) \Longleftrightarrow (d)\ )$$
sont valables sous les seules conditions
$$\mathrm{W}\,(1,\ 2\,\mathrm{bis},\ 3)\ ,$$
et pour l'équivalence de (a) aux autres conditions, il suffit de
$$\mathrm{W}\,(1\,\mathrm{bis},\ 2\,\mathrm{bis},\ 3)$$
(où W (1 bis) renforce W (1) par la condition des facteurs directs, tandis que W (2 bis) affaiblit W (2), en exigeant seulement que les morphismes W-asphériques soient dans W). Les conclusions de 8.4, 3°, relatives au cas où A est W-asphérique, sont valables également sous les conditions W (1, 2 bis, 3) sans plus.

[page 115]

2°) Le corollaire 8.5, se référant aux conditions (b), (c), (d) de 1° (à l'exclusion de (a), qui suppose W stable par facteurs directs), est valable pour un W satisfaisant
$$\mathrm{W}\,(1,\ 2\,\mathrm{bis},\ 3,\ \underbrace{7\,\mathrm{bis}}_{\substack{\text{carré}\\ \text{cocartésien}}})\ .$$

3°) Pour la validité de 8.4, 2°, *i.e.* pour avoir un triple de Quillen (W_A, C, F), il nous faut (presque) tout l'éventail des conditions sur W,

$$\mathrm{W}\,(1\,\mathrm{bis},\ 2\,\mathrm{bis},\ 3,\ \underbrace{6}_{\text{limites}},\ \underbrace{7\,\mathrm{bis}}_{\substack{\text{carré}\\ \text{cocartésien}}},\ \underbrace{8}_{\text{accessibilité}})\ ^{(42)}\,,$$

à l'exclusion de W (4), et en se contentant pour W (2) de la forme affaiblie W (2 bis) sans plus. (Même l'axiome de connexité W (5) n'a pas servi, mais je l'avais d'abord inclus, car il y a peu de chances qu'on aura jamais à travailler avec des W qui n'y satisfont pas ! Il se pourrait d'ailleurs, en présence des autres axiomes, ou seulement de W (1 bis, 2 bis, 3, 7 bis), que si W (5) n'est *pas* satisfait, on ait $W = \mathrm{Fl}\,\mathrm{Cat}$ tout entier, donc $W_A = \mathrm{Fl}\,A^\wedge$!)

`[page 116]`

9 Révision des notations, pour les axiomes d'un localiseur fondamental [43]

Loc (1) (Saturation).

a) Les isomorphismes sont dans W.

b) Si f, g sont composables, et deux parmi f, g, gf sont dans W, le troisième aussi.

c) Si $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$, si gf et fg sont dans W, alors f et g aussi.

Variante renforcée :

Loc (1 bis) Loc (1) plus

d) W est stable par facteurs directs.

Loc (2) (Axiome de l'objet final). Si X dans Cat a un objet final, alors X est W-asphérique, *i.e.* $X \longrightarrow e$ est dans W.

Loc (3) (Axiome de localisation, forme faible). Soit $f : X \longrightarrow Y$ tel que pour tout $y \in Y$, X/y soit W-asphérique (*i.e.* le morphisme $f/y : X/y \longrightarrow Y/y$ déduit de f par changement de base $Y/y \longrightarrow Y$ est dans W). Alors $f \in W$.

Variante renforcée de Loc (3) :

Loc (3 bis) (Axiome de localisation, forme forte). Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans Cat/S, tel que $\forall\ s \in S$, $f/s : X/s \longrightarrow Y/s$ (déduit de f par changement de base $S/s \longrightarrow S$) soit dans W. Alors $f \in W$. (**N.B.** Sauf erreur, il suffit le l'exiger si X, Y sont Cat-fibrés scindés sur S, et f S-cartésien compatible avec le scindage – en supposant Loc (1, 2)).

[42] **N.B.** On devrait renuméroter les axiomes W (...).
[43] *Cf.* XVII `[plutôt XVI]` pour une version définitive (?).

`[page 117]`

Loc (4) (Axiome du carré cocartésien). Soit X dans Cat, X_1, X_2 deux ouverts de réunion X, $X_0 = X_1 \cap X_2$, d'où un diagramme cocartésien dans Cat,

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "j_2"] \\ X_2 \arrow[r, "j_1"] & X \end{tikzcd} .$$

On a alors $i_1 \in W \iff j_1 \in W$ (et symétriquement $i_2 \in W \iff j_2 \in W$).

Loc (6) [44] (Axiome des W-fibrations). Il y a des variantes (a), (a′), (b), (b′), (b″), (c), (c′), *cf.* XII, p. 53-59. La forme la plus forte (a) est celle-ci :

Soit $f : X \longrightarrow Y$ dans Cat une W-fibration au sens ancien, *i.e.* telle que pour toute $Y'' \longrightarrow Y'$ dans Cat/Y, avec Y', Y'' contractiles, la flèche $X'' \longrightarrow X'$ déduite par le changement de base $X \longrightarrow Y$ soit dans W. Alors f est dans Fib_W, *i.e.* le foncteur de changement de base par f, $\mathrm{Cat}/Y \longrightarrow \mathrm{Cat}/X$, transforme flèches dans W en flèches dans W.

Loc (7) (Axiome des limites inductives). W est stable par limites inductives filtrantes.

Forme renforcée de Loc (7) :

Loc (7 bis) (L-accessibilité). W est stable par $\varinjlim$ filtrantes *et* accessible, *i.e.* il existe une petite partie W_π de Fl(Cat), telle que W soit la plus petite partie de Fl(Cat) stable par $\varinjlim$ filtrantes, contenant W_π.

`[page 118]`

Loc (8) [45] (Axiome de connexité). $f \in W \Longrightarrow \pi_0(f)$ bijectif.

N.B. Tous les axiomes, sauf le dernier (et un chouïa de l'avant dernier) sont des axiomes de stabilité – ils disent tous que W est “grand” : il contient certaines flèches, et s'il contient telles flèches, il contient telles autres. Loc (8), et dans une certaine mesure Loc (7 bis), sont des axiomes “limitatifs” sur la taille de W : Loc (7) nous dit que $W \subset \mathbf{W}_0$ (= ensemble des $f \in \mathrm{Fl\,Cat}$ telles que $\pi_0(f)$ soit bijectif), Loc (7 bis) nous dit l'existence d'un cardinal tel que W soit égal à la L-enveloppe de W^π (donc $W \subset$ L-env(W^π)).

J'ai essayé de ranger les axiomes par ordre d'importance pratique. J'ai fini par rajouter l'axiome de connexité à la fin, car dans les développements théorique sur les localiseurs généraux, il n'intervient pratiquement jamais. Mais je rappelle (XII, p. 20, th. 2) que si W satisfait Loc (1, 2, 3, 6), et si Loc (8) n'est *pas* satisfait, alors $W = \mathrm{Fl(Cat)}$; donc en présence de Loc (1, 2, 3, 6), Loc (8) *équivaut* à $W \neq \mathrm{Fl(Cat)}$ tout entier.

`[page 119]`

Les axiomes qui ont servi pour 8.4, 1°, 3° et 8.5, (b) sont

$$\mathrm{Loc}\,(1\,\mathrm{bis},\ 2,\ 3)\ .$$

[44] Il y aura un Loc (5) plus “basique” plus bas.

[45] J'ai changé la numérotation, pour tenir compte d'un Loc (5) plus bas, qui est encore un axiome de stabilité `[initialement les axiomes Loc (6) à Loc (8) étaient notés Loc (5) à Loc (7)]`.

Ceux qui sont nécessaires pour 8.5, (a) sont

$$\mathrm{Loc}\,(1\,\mathrm{bis},\ 2,\ 3,\ 4)\ .$$

Enfin, ceux nécessaires pour 8.4, 2° sont

$$\mathrm{Loc}\,(1\,\mathrm{bis},\ 2,\ 3,\ 4,\ 7\,\mathrm{bis})\ ,$$

et ils impliquent la *saturation forte de* W (*cf.* paragraphe suivant).

Il me faut réparer un oubli, ayant traité un peu par le mépris (!) les questions de composantes connexes, jusqu'à présent.

Proposition 9.1. *Supposons que* W *satisfait* Loc (1, 2, 3, 4) *sans plus. Soit* $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ $(i \in I)$ *une famille* finie *de flèches de* Cat. *Pour que* $f = \coprod f_i : \coprod X_i \longrightarrow \coprod Y_i$ *soit dans* W*, il suffit que* $\forall\ i \in I$*, on ait* $f_i \in W$*. Si* W *satisfait de plus à* Loc (7) (*axiome des limites inductives*)*, alors cette conclusion reste valable sans condition de finitude sur* I*.*

Démonstration. Le cas I fini se traite par récurrence sur $n = \mathrm{card}\, I$, on est ramené aussitôt au cas où $n = 2$ [46]. On voit d'abord le

[page 120]

Corollaire 9.2. *Sous l'hypothèse* Loc (1, 4)*, soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une flèche de* Cat*, et* Z *un objet de* Cat*. Alors* $f \in W$ *si et seulement si* $f \amalg \mathrm{id}_Z : X \amalg Z \longrightarrow Y \amalg Z$ *est dans* W*.*

Immédiat sur le carré cocartésien, où inj_0^X est une immersion ouverte de Dwyer,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}_0^X"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{inj}_0^Y"] \\
X \amalg Z \arrow[r, "f' = f \amalg \mathrm{id}_Z"'] & Y \amalg Z
\end{tikzcd}\ ,$$

qui montre que $f \in W \iff f' \in W$.

En itérant ce résultat, on trouve, si

$$f_1\ :\ X_1 \longrightarrow Y_1\ , \qquad f_2\ :\ X_2 \longrightarrow Y_2$$

sont donnés, que

$$f_1\ \in\ W\ ,\ f_2\ \in\ W \quad \Longrightarrow \quad f_1 \amalg f_2\ \in\ W\ ,$$

en regardant le diagramme de deux carrés cocartésiens :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d] \\
X_1 \amalg X_2 \arrow[r, "f'_1 = f_1 \amalg \mathrm{id}_{X_2}"'] \arrow[d, "f'_2 = \mathrm{id}_{X_1} \amalg f_2"'] & Y_1 \amalg X_2 \arrow[d, "g_2 = \mathrm{id}_{Y_1} \amalg f_2"] \\
X_1 \amalg Y_2 \arrow[r, "g_1 = f_1 \amalg \mathrm{id}_{Y_2}"'] & Y_1 \amalg Y_2
\end{tikzcd}\ .$$

[46] Le cas infini s'y ramène sous l'hypothèse Loc (7), par passage à la limite.

Si f_1 et f_2 sont dans W, il en est de même de f_1', f_2', g_1, g_2, par 9.2, donc aussi de $f_1 \amalg f_2 = g_2 f_1'$.

[page 121]

Mais je ne vois aucun moyen de prouver la réciproque, que $f_1 \amalg f_2 \in W \Longrightarrow f_1, f_2 \in W$. Grâce à ce qui a été prouvé, on est ramené au cas où f_1, f_2 sont des immersions ouvertes de Dwyer, mais il ne semble pas que cela nous avance d'un cheveu ! En somme, il faut savoir que les applications canoniques $Y_i \hookrightarrow \coprod Y_i$ sont dans Fib_W. Comme Y_i est un sommand direct, on est ramené au cas d'une immersion canonique $Y_1 \hookrightarrow Y_1 \amalg Y_2 = Y$: si $f : X \longrightarrow Y$ est dans W, en est-il de même de $X_1 = X \times_Y Y_1 \longrightarrow Y_1$? C'est une propriété qui, bien sûr, serait conséquence de l'ancien W (4 a) (XII, p. 53), ou seulement W (4 a′), donc de l'actuel Loc (6 a′). Il suffit même de la forme W (4 c′) = Loc (6 c′) la plus faible de toutes, comme on voit en décomposant $X_1 \longrightarrow Y$ en $X \xrightarrow{i} X' \xrightarrow{p} Y$, avec $i \in W$ (plus précisément, $i_1 : X_1 \longrightarrow X_1'$ et $i_2 : X_2 \longrightarrow X_2'$ dans W !), et $p \in \mathrm{Parf}_W$. Par Loc (6 c′), $f \in W$, donc $p \in W$ implique que les fibres de p sont W-asphériques, ce qui implique que p est dans W_{univ}, donc $p_1 : X_1' \longrightarrow Y_1$ est dans W.

[page 122]

Donc notons par acquis de conscience :

Corollaire 9.3. *Si W satisfait* Loc (1, 2, 3, 6 c′) (*où* Loc (6 c′) *est la variante la plus faible de toutes de l'axiome des fibrations*), *alors pour toute famille* $(f_i : X_i \longrightarrow Y_i)_{i \in I}$ *de flèches dans* Cat, $f = \coprod f_i \in W \Longrightarrow$ *les f_i sont dans W $\forall\, i \in I$* [47]. *Et si $i : Y_0 \hookrightarrow Y$ est une flèche qui est à la fois immersion ouverte et immersion fermée* (i.e. *un isomorphisme avec un sommand direct de Y*), *alors i est dans* Fib_W, i.e. *si $f : X \longrightarrow X'$ est une flèche dans* Cat/Y, *alors $f \in W$ implique* $(f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0) \in W$, *où $X_0 = X|Y_0$, $X_0' = X'|Y_0$.*

Mais il est assez scandaleux d'avoir à utiliser un axiome aussi fort, pour en conclure un résultat aussi anodin ! Je note ceci :

Proposition 9.4. *Soit $W \subset$* Fl(Cat), *satisfaisant* Loc (1) *sans plus. Les conditions suivantes sont équivalentes* (*et impliquées par* Loc (1, 2, 3, 4, 6 c′)).

a) *Si $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$, $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ sont deux flèches de* Cat, *alors*

$$f_1 \amalg f_2 \in W \iff f_1 \in W,\ f_2 \in W\,.$$

b) *Les deux conditions suivantes sur W sont satisfaites :*

[page 123]

1°) *Si $f : X \longrightarrow Y$ est dans W, alors il l'est coüniversellement sous $\emptyset$,* i.e. *pour tout Z dans* Cat, $f \amalg \mathrm{id}_Z : X \amalg Z \longrightarrow Y \amalg Z$ *est dans W.* (**N.B.** *Ceci équivaut à : toute somme finie de flèches $f_i \in W$ est dans W – et itou même pour sommes infinies, si* Loc (7), *axiome des limites, est satisfait.*)

2°) *Soit $Y_0 \hookrightarrow Y$ une inclusion d'un sommand direct d'un objet de* Cat. *Alors si $X \xrightarrow{f} Y$ est dans W, de même $X_0 = X|Y_0 \longrightarrow Y_0$.* (**N.B.** *Ceci équivaut à la condition que l'inclusion d'un sommand direct est toujours une W-fibration.*)

De plus, si $\pi_0(Y)$ est fini, ou si W satisfait l'axiome des limites Loc (7), *il suffit d'exiger* 2° *pour Y_0 une composante connexe de Y.*

[47] En fait, je ne sais prouver l'implication en sens inverse, moyennant seulement Loc (1, 2, 3, 6 c′).

c) *Pour toute famille* finie $(f_i)_{i\in I}$ *de flèches* $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ *dans* Cat,

$$\coprod f_i \in W \iff f_i \in W \quad \text{pour tout } i \in I.$$

De plus, si W *satisfait* Loc (7), *alors il est inutile dans* (c) *de se borner à* I *fini.* (*Et en tous cas, les conditions équivalentes* (a), (b), (c) *impliquent pour* toute *famille de flèches* $(f_i)_{i\in I}$, $\coprod f_i \in W \implies f_i \in W \ \forall\, i \in I$.)

`[page 124]`

D'après 9.3, ces conditions sont satisfaites moyennant Loc (1, 2, 3, 4, 6 c′), mais Loc (6 c′) est un marteau-pilon pour une mouche ! On aurait envie plutôt d'ajouter un axiome aux axiomes Loc (1) à Loc (4) et Loc (6) à Loc (8), qui avec Loc (8) serait l'axiome le plus anodin de tous.

Loc (5) (Axiome de décomposition, forme faible). Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille finie de flèches de Cat, alors $f = \coprod f_i$ est dans W si et seulement si les f_i le sont. (Ce sont les conditions équivalentes de 9.4.) [48]

Loc (5 bis) (Axiome de décomposition, forme forte). Comme Loc (5), mais sans supposer I finie. [49]

Ainsi, moyennant l'axiome des limites Loc (7), les deux axiomes précédents sont équivalents. De plus, notons ceci :

Corollaire 9.5 (de la proposition 9.4). *L'axiome* Loc (5 bis) *équivaut à chacune des propriétés suivantes :*

(a) *Pour tout* Y *de* Cat, *décomposé en ses composantes connexes* Y_i $(i \in I = \pi_0(Y))$, *et pour toute flèche* $f : X \longrightarrow Y$ *dans* Cat, *on a* $f \in W$ *si et seulement si les* $f_i : X_i = X|Y_i \longrightarrow Y_i$ *sont dans* W.

(b) *Pour* Y, Y_i *comme dans* (a), *pour toute*

`[page 125]`

flèche $f : X \longrightarrow X'$ *dans* Cat$/Y$, *on a* $f \in W$ *si et seulement si* $\forall\ i \in I$, *le morphisme* $f_i : X_i \longrightarrow X'_i$ *au-dessus de* Y_i *est dans* W.

Corollaire 9.6. *Si l'axiome* Loc (5) *est satisfait, alors l'axiome de connexité* Loc (8) *équivaut à ceci : pour toute flèche* $f : X \longrightarrow Y$ *dans* W, *avec* Y 0*-connexe,* X *est* 0*-connexe.*

---

[48] Il peut être commode aussi d'introduire la condition encore plus faible :

Loc (5 a) Si f_1, f_2 sont dans W, alors $f_1 \amalg f_2 \in W$.
C'est aussi la condition (b), 1° de la proposition 9.4.

Loc (5 b) Si $f_1 \amalg f_2$ est dans W, alors f_1 et f_2 aussi.
$\iff$ Si $Y_0 \subset Y$ est un sommand direct, alors $Y_0 \hookrightarrow Y$ est dans Fib_W.

[49] `[Réécrivons :]`

Loc (5) a) Si $f_1, f_2 \in W$, alors $f_1 \amalg f_2 \in W$.
b) Si $f_1 \amalg f_2 \in W$, alors $f_1, f_2 \in W$
($\iff b'$) tout $Y_0 \hookrightarrow Y$ sommand direct est dans Fib_W).

Loc (5 bis) Comme Loc (5), mais (a) remplacé par (a bis) une famille (pas nécessairement finie).

N.B. Les axiomes Loc (8) (connexité) et Loc (5 bis) (de décomposition) ont l'air de nature voisine, étant liés l'un et l'autre à la décomposition des objets de Cat en composantes connexes. (Néanmoins, je pense qu'ils sont indépendants.) Je présume qu'on n'aura jamais à travailler vraiment avec des W qui ne satisfont à ces deux axiomes ! (En plus de Loc (1, 2, 3), qui eux constituent le "minimum vital".) Mais apparemment il n'y en a pas besoin dans les développements théoriques généraux jusqu'ici. (Mais l'axiome de connexité Loc (8) pourrait jouer un rôle, quand on parle de la détermination réciproque des structures de contractibilité, et de W-asphéricité, *cf.* Pursuing Stacks.

`[page 126]`

Notons ceci :

Proposition 9.7. [50] *Supposons que W satisfait* Loc (1, 2, 3, 5), i.e. *c'est un localiseur fondamental satisfaisant la condition de décomposition* (*forme faible*). *Si l'axiome* Loc (8) *de connexité n'est* pas *satisfait, alors la sous-catégorie* Hot^*_W *des* $X \in \mathrm{Cat}$ *non vides est équivalente à la catégorie ponctuelle* (*donc* Hot_W *est équivalente soit à la catégorie ponctuelle, si* $\emptyset \longrightarrow e$ *est un isomorphisme dans* Hot_W*, soit à* $\mathbf{\Delta}_1$ *dans le cas contraire* [51]*.*)

Ceci est une variante du th. 2 de XII (p. 20), où on faisait l'hypothèse Loc (6 c′), plus forte que Loc (5) et même que Loc (5 bis), mais avec la conclusion plus forte que $W = \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat})$.

Démonstration. Soit

$$f \,:\, X \longrightarrow Y \,, \qquad f \in W \,,$$

telle que $\pi_0(f)$ ne soit pas *surjective.* Si Y_0 est une composante connexe qui n'est pas dans $\mathrm{Im}\pi_0(f)$, alors $X_0 = X|Y_0$ est vide, et par Loc (7), $\emptyset \longrightarrow Y_0$ est dans W. Donc $\forall\, Z$ dans Cat, $\underbrace{\emptyset \times Z}_{=\emptyset} \longrightarrow Y_0 \times Z$ est dans W, et pour toute flèche $g : Z \longrightarrow Z'$, $\mathrm{id}_{Y_0} \times g : Y_0 \times Z \longrightarrow Y_0 \times Z'$ est dans W. Prenant g telle que $\pi_0(g)$ ne soit pas injective, p. ex. $e \amalg e \longrightarrow e$, on trouve une flèche $\varphi = \mathrm{id}_{Y_0} \times g$ dans W telle que $\pi_0(\varphi)$ ne soit pas injective.

`[page 127]`

Soit donc $\varphi : I \longrightarrow J$ dans W, avec $\pi_0(\varphi)$ non injective. Procédant comme tantôt en utilisant Loc (5), on est ramené au cas où de plus J est 0-connexe. (**N.B.** Dans les deux cas, on aurait pu aussi invoquer 9.6.) Choisissons deux éléments i_0, i_1 dans I dans deux composantes connexes distinctes, soient j_0, j_1 leurs images dans J. On va traiter (I, i_0, i_1) et (J, j_0, j_1) comme des "intervalles homotopiques". Le fait que i_0, i_1 appartiennent à des composantes distinctes de I implique que deux flèches $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$ sont "homotopes par rapport à (I, i_0, i_1)", *i.e.* il existe $h : X \times I \longrightarrow Y$ dans Cat telle que $f_0 = h\partial_0^X$, $f_1 = h\partial_1^X$, où

$$\partial_0^X \,,\, \partial_1^X \,:\, X \longrightarrow I \times X$$

sont données par $x \longmapsto (i_\alpha, x)$ ($\alpha \in \{0, 1\}$). Pour trouver h, on décompose I en

$$I \;=\; I_0 \amalg I_1 \,, \qquad \text{avec} \quad i_0 \in I_0,\, i_1 \in I_1 \,,$$

d'où $I \times X \simeq (I_0 \times X) \amalg (I_1 \times X)$, et on définit h par ses restrictions h_0, h_1 aux deux morceaux $I_0 \times X$, $I_1 \times X$, savoir

$$h_0 \;=\; f_0 \circ \mathrm{pr}_2^{I_0} \,, \qquad h_1 \;=\; f_1 \circ \mathrm{pr}_2^{I_1} \,,$$

[50] *Cf.* version plus forte dans 9.9 plus bas (débarrassée de l'hypothèse Loc (5).)

[51] Le premier cas est aussi celui où $\exists\, f \in W$ avec $\pi_0(f)$ *non surjectif,* ou encore $\emptyset \longrightarrow X$ dans W, avec X non vide.

où
$$\mathrm{pr}_2^{I_\alpha} \;:\; I_\alpha \times X \longrightarrow X \;.$$

[page 128]

Considérons maintenant le diagramme (traits pleins)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X \amalg X \arrow[dl, "(\partial_0^X,\partial_1^X)"'] \arrow[dr, "(\partial_0'^X,\partial_1'^X)"] & \\
I \times X \arrow[rr, "\varphi\times\mathrm{id}_X = \varphi_X"] \arrow[dr, "h"'] & & J \times X \arrow[dl, dotted, "h'"] \\
 & Y \;, &
\end{tikzcd}$$

où $\partial_0'^X$, $\partial_1'^X$ sont définis comme ∂_0^X, ∂_1^X, mais utilisant $j_0, j_1 \in \mathrm{Ob}\, J$ au lieu de $i_0, i_1 \in \mathrm{Ob}\, I$. S'il existait dans Cat une flèche h' (pointillée) telle que $h' \circ \varphi_X = h$, il s'ensuivrait que h' est une homotopie de f_0 et f_1 suivant (J, j_0, j_1). Comme J est 0-connexe, il s'ensuivrait aussitôt que f_0, f_1 sont homotopes au sens habituel dans Cat, donc que f_0 et f_1 ont même image dans Hot_W. Mais si on ne peut trouver une flèche h' dans Cat, du moins peut-on la trouver dans Hot_W, puisque $\varphi_X \in W$, donc un isomorphisme dans Hot_W (et h' dans $\mathrm{Hom}_W(J \times X, Y)$ sera même uniquement déterminé). Donc dans Hot_W, on a

$$f_0 \;=\; h'\partial_0'^X \;, \qquad f_1 \;=\; h'\partial_1'^X \;.$$

[page 129]

Pour prouver que
$$f_0 \;=\; f_1 \qquad \text{dans} \quad \mathrm{Hom}_W(X,Y) \;,$$
il suffit de voir que
$$\partial_0'^X \;=\; \partial_1'^X \qquad \text{dans} \quad \mathrm{Hom}_W(X, J \times X) \;.$$

Or en fait $\partial_0'^X$ et $\partial_1'^X$ sont homotopes, car $e \overset{j_0}{\underset{j_1}{\rightrightarrows}} J$ sont homotopes (j_0 et j_1 appartenant à la même composante connexe de J), donc aussi leur produit par id_X.

On voit donc que pour deux objets quelconques X, Y de Cat, toutes les flèches de X dans Y sont égales dans Hot. L'argument fait prouve même que toutes les flèches *dans* Hot_W de X dans Y sont égales. Cela signifie que la catégorie Hot_W^* (où pour deux objets quelconques X, Y, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(X,Y)$, et a fortiori $\mathrm{Hom}_W(X,Y)$ est $\neq \emptyset$) est équivalente à la catégorie ponctuelle. Quant à Hot_W elle-même, dont l'ensemble des objets est $\{\emptyset\} \amalg \mathrm{Ob}\,\mathrm{Hot}_W^*$, avec $\emptyset$ objet initial, elle sera donc équivalente à la catégorie ponctuelle, ou bien à $\mathbf{\Delta}_1$, selon que $\emptyset \longrightarrow e$ est un isomorphisme dans Hot_W, ou non.

[page 130]

Commentaire 9.8. Si les axiomes Loc (1, 2, 3, 5) [(52)] sont satisfaits, alors l'axiome de connexité Loc (8) *équivaut* à chacun des suivants :

[52] En fait, ce commentaire vaut même en l'absence de l'hypothèse Loc (5), *cf.* 9.9 ci-dessous.

a) Hot_W n'est équivalente ni à e, ni à $\mathbf{\Delta}_1$.

b) Hot_W a une infinité de classes d'isomorphie.

c) $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ (flèche donnée d'avance dans Cat, telle que $\pi_0(f_0)$ n'est pas un isomorphisme, et $X_0 \neq \emptyset$) n'est *pas* un isomorphisme de Hot_W.

d) X_0 et Y_0 ne sont pas isomorphes dans Hot_W (où X_0, Y_0 sont deux objets donnés d'avance dans Cat, avec X_0, Y_0 non vides et $\operatorname{card}\pi_0(X_0) \neq \operatorname{card}\pi_0(Y_0)$).

On peut donc dire que l'axiome de connexité joue le rôle d'un *axiome de non trivialité* pour la catégorie Hot_W localisée de Cat. Il sera satisfait automatiquement pour tous les localiseurs fondamentaux W qu'on sera amené à construire ou à introduire. Mais on n'aura pratiquement jamais à l'invoquer comme une hypothèse, en vue de certaines conclusions.

Je m'aperçois finalement que dans la proposition 9.7 l'hypothèse Loc (5) est inutile :

Proposition 9.9. [53] *Soit W un localiseur fondamental dans* Cat (i.e. *on a* Loc (1, 2, 3) *sans plus*), *plus la condition que la* somme *de $f_1, f_2 \in W$ est dans W* [54]. *Si l'axiome de connexité n'est pas satisfait, alors* Hot_W *est équivalente à la catégorie ponctuelle* (*si* $\emptyset \longrightarrow e$ *est un isomorphisme dans* Hot_W [55]) *ou à* $\mathbf{\Delta}_1$ (*dans le cas contraire*), *et* Hot_W^* ($\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hot}_W \backslash \{\emptyset\}$) *est équivalente à la catégorie ponctuelle.*

[page 131]

La condition sur les sommes assure que dans Hot_W la somme de deux objets existe, et que $\mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Hot}_W$ commute aux sommes de deux objets. Ceci dit, soit

$$(*) \qquad f : X \longrightarrow Y$$

une flèche telle que $f \in W$, mais $\pi_0(f)$ non surjectif. Supposons d'abord $X \neq \emptyset$ (cas le moins évident). Si Y_0 est un sommand non vide de Y tel que f se factorise par $Y_1 = Y \backslash Y_0$, alors f est somme de

$$f_1 : X = X_1 \longrightarrow Y_1 \qquad \text{et} \qquad f_0 : X_0 = \emptyset \longrightarrow Y_0$$

dans Cat, donc aussi dans Hot_W. Donc on a une somme $f = f_0 \amalg f_1$ dans Hot_W qui est un isomorphisme, donc pour tout Z dans Hot_W,

$$\mathrm{Hom}_W(Y_0, Z) \times \mathrm{Hom}_W(Y_1, Z) \xrightarrow{\sim} \underbrace{\mathrm{Hom}_W(X_0, Z)}_{=e} \times \mathrm{Hom}_W(X_1, Z)$$

(**N.B.** $\emptyset$ est objet initial de Hot_W, l'étant de Cat), *i.e.* le composé

$$Z(Y_0) \times Z(Y_1) \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Z(Y_1) \xrightarrow{Z(f_1)} Z(X_1)$$

est bijectif. Comme $X = X_1 \neq \emptyset$, donc aussi $Y_1 \neq \emptyset$, et $Y_0 \neq \emptyset$, les ensembles $Z(Y_0)$, $Z(Y_1)$, $Z(X_1)$ sont $\neq \emptyset$ si $Z \neq \emptyset_{\mathrm{Cat}}$. Le composé étant bijectif, la première flèche pr_2 est injective, ce qui implique

[53] *Cf.* meilleur énoncé 9.12 (p. 133 bis).

[54] Cette condition Loc (5 a) est vérifiée notamment si W satisfait de plus l'un des deux axiomes Loc (4) (*cf.* 9.1), ou Loc (6 c′) (*cf.* 9.3).

[55] Cela signifie aussi qu'il existe $Z \neq \emptyset$ dans Cat, tel que $\emptyset \longrightarrow Z$ soit un isomorphisme dans Hot_W.

[page 132]

que $Z(Y_0)$ est réduit à un point (les deux facteurs $Z(Y_0)$, $Z(Y_1)$ étant $\neq \emptyset$). Cela signifie que Y_0 est un objet initial dans Hot^*_W. Il s'ensuit notamment que $Y_0 \amalg Y_0$ est aussi un objet initial, et l'application canonique $Y_0 \amalg Y_0 \longrightarrow Y_0$ est donc un isomorphisme dans Hot_W, alors que l'application induite sur les π_0 n'est pas injective. (C'est $\pi_0(Y_0) \amalg \pi_0(Y_0) \longrightarrow \pi_0(Y_0)$, avec $\pi_0(Y_0)$ non vide.) Ce cas va être traité ci-dessous.

Si dans $(*)$ X est vide, Y non vide (puisque $\pi_0(f)$ non surjectif), alors Y est objet initial de Hot_W, et on voit encore que $Y \amalg Y \longrightarrow Y$ est un isomorphisme dans Hot_W, bien que n'induisant pas un isomorphisme des π_0. La proposition 9.9 va donc résulter du

Lemme 9.10. *Soit* W *localiseur fondamental sans plus* (*axiomes* Loc (1, 2, 3)). *Supposons qu'il existe* $f : I \longrightarrow J$ *dans* Cat *tel que* $\mathrm{hot}_W(f)$ *soit un isomorphisme, mais que* $\pi_0(f)$ ne soit pas injectif [56]. *Alors* Hot^*_W *est équivalente à la catégorie ponctuelle* e, *et* Hot_W *est équivalente à* e (*si* $\emptyset \longrightarrow e$ *est un isomorphisme dans* Hot_W) *ou à* $\mathbf{\Delta}_1$ (*dans le cas contraire*).

[page 133]

La démonstration est celle donnée pour 9.7 : on prouve que si X, Y sont deux objets de Cat, *non vides*, alors deux flèches $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$ sont égales dans Hot_W, par un argument d'homotopie, en choisissant deux points i_0, i_1 de I qui sont dans deux composantes connexes distinctes, et tels que leurs images j_0, j_1 dans J soient dans la même composante.

Proposition 9.11. *Soit* W *un localiseur fondamental* (i.e. *on a* Loc (1, 2, 3)). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) *On a* Loc (5 bis) (*axiome de décomposition, forme forte*) *et* Loc (8) (*axiome de connexité*).

b) *On a* Loc (5 bis), *et* Hot_W *n'est pas équivalente à* e *ou à* $\mathbf{\Delta}_1$ (cf. *commentaire* 9.8).

c) *Pour toute* $f : X \longrightarrow Y$, *on a* $f \in W$ *si et seulement si* $\pi_0(f)$ *est un isomorphisme, et pour toute composante connexe* X_i *de* X, *si* Y_i *désigne la composante connexe correspondante de* Y, *la flèche induite* $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ *est dans* W.

La raison pour laquelle je n'isole pas cette propriété en un des axiomes Loc (...), c'est que ce n'est *pas* un axiome de stabilité, mais un axiome de nature mixte.

[page 133 bis]

Proposition 9.12. *Soit* W *un localiseur fondamental* (*sans plus*), i.e. *satisfaisant* Loc (1, 2, 3). *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) *W satisfait l'axiome de connexité* Loc (8), i.e. $f \in W \Longrightarrow \pi_0(f)$ *bijectif.*

b) *Si* $f, g : X \rightrightarrows Y$ *dans* Cat *sont telles que* $\mathrm{hot}_W(f) = \mathrm{hot}_W(g)$, *alors* $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.

c) *Il existe* X, Y *dans* Cat *tel que l'application* $\mathrm{hot}_W^{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_W(X, Y)$ *ne soit pas constante.*

c′) *La sous-catégorie* Hot^*_W de Hot_W, *formée des objets non vides, n'est pas équivalente à la catégorie ponctuelle.*

c″) *La catégorie* Hot_W *n'est pas équivalente à la catégorie* e *ni à la catégorie* $\mathbf{\Delta}_1$.

d) *L'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de* Hot_W *est infini.*

[56] Ou bien tel que I soit 0-connexe, et J non 0-connexe (*i.e.* $\mathrm{card}\, \pi_0(I) = 1$, $\mathrm{card}\, \pi_0(J) \geq 2$). Ce deuxième cas se traite par la même méthode essentiellement.

Démonstration. On a $(a) \implies (b)$, puisque (a) équivaut à dire que le foncteur $\pi_0 : \mathrm{Cat} \to \mathrm{Ens}$ se factorise par Hot_W. D'ailleurs le foncteur correspondant

$$\mathrm{Hot}_W \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

est essentiellement surjectif – il y a un inverse à isomorphisme près, $I \longmapsto \mathrm{hot}_W(I)$. Cela prouve que (a) implique (d), et on a $(d) \implies (c')$, $(d) \implies (c'')$ tautologiquement. Un argument plus ou moins tautologique montre d'ailleurs que si Hot_W^* est équivalente à e, alors Hot_W est équivalente à e ou à $\mathbf{\Delta}_1$ (car $\emptyset$ est objet initial de Hot_W) – donc $(c'') \implies (c')$. Donc on a plus ou moins tautologiquement

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{a}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (\mathrm{d}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathrm{c}'') \arrow[r, Rightarrow] & (\mathrm{c}') \\
(\mathrm{b}) \arrow[rr, Rightarrow] & & (\mathrm{c}) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

où les implications $(b) \implies (c) \implies (c')$ sont elles aussi triviales `[c'est plutôt l'implication (c') ⟹ (c) qui est triviale ; l'implication (c) ⟹ (c') est démontrée après l'énoncé du corollaire 9.13, avant la preuve de ce dernier]`. Donc

`[page 133 ter]`

tout revient à prouver que $(c) \implies (a)$, ou encore :

Corollaire 9.13. *Si l'axiome de connexité n'est pas satisfait, alors si X, Y sont deux objets de* Cat*, toutes les flèches $X \to Y$ dans* Cat *sont égales dans* Hot_W*,* i.e. *l'application* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_W(X,Y)$ *est constante.*

Cela implique donc que tous les objets de Cat^*, *i.e.* tous les objets non vides de Cat, sont isomorphes dans Hot_W, et on trouve un isomorphisme canonique entre elles, avec transitivité. Soit alors $\mathcal{H}$ la catégorie quotient de Cat, ayant mêmes objets que Cat, et ayant exactement une flèche entre deux objets non vides de Cat et exactement une flèche de $\emptyset$ dans tout autre objet de Cat (et pas de flèche d'un objet non vide de Cat dans $\emptyset$). C'est donc une catégorie équivalente à $\mathbf{\Delta}_1$. On a vu que $\mathrm{Cat} \to \mathrm{Hot}_W$ se factorise en

$$\mathrm{Cat} \xrightarrow{\text{can.}} \mathcal{H} \longrightarrow \mathrm{Hot}_W \, .$$

Si $\mathrm{Cat} \to \mathcal{H}$ transforme toute flèche appartenant à W en isomorphisme, alors il est immédiat que $\mathcal{H}$ est solution au problème universel définissant Hot_W, donc que $\mathcal{H} \to \mathrm{Hot}_W$ est un isomorphisme. Cela signifie aussi que W ne contient pas de flèche $\emptyset \to X$ avec X non vide (auquel cas W contient toutes les flèches). Donc dans ce cas $\mathrm{Hot}_W \simeq \mathbf{\Delta}_1$. Dans le cas contraire, soit $\mathcal{H}'$ la catégorie déduite de $\mathcal{H}$ en inversant les flèches $\emptyset \to X$, *i.e.* le groupoïde 1-connexe sur l'ensemble d'objets $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Cat}$. Ce n'est plus une catégorie quotient de Cat, mais on a encore une factorisation

$$\mathrm{Cat} \xrightarrow{\text{épi}} \mathcal{H} \xrightarrow{\text{loc.}} \mathcal{H}' \longrightarrow \mathrm{Hot}_W \, ,$$

`[page 133 quater]`

et cette fois c'est $\mathcal{H}'$ qui est solution du problème universel ($\mathrm{Cat} \longrightarrow \mathcal{H}'$ transformant flèches de W en isomorphismes). Donc dans ce cas, $\mathcal{H}' \longrightarrow \mathrm{Hot}_W$ est un isomorphisme, et Hot_W est équivalente à e. Dans les deux cas, Hot_W^* est équivalente à e.

Donc, la proposition 9.12 résulte du corollaire 9.13, qu'il s'agit à présent de démontrer.

Soit $f : I \longrightarrow J$ dans Cat telle que $\pi_0(f)$ ne soit pas injective. On a vu dans la démonstration de 9.7 comment on en déduit (en choisissant deux éléments i_0, i_1 dans deux composantes connexes distinctes de I, telles que $j_0 = f(i_0)$ et $j_1 = f(i_1)$ soient dans une même composante connexe de J) que pour X, Y dans Cat, deux flèches $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$ sont toujours égales dans Hot_W (*cf.* lemme 9.10).

Soit maintenant

$$f \ : \ I \longrightarrow J$$

dans Cat telle que $\pi_0(f)$ ne soit pas surjective, donc $J = J_0 \amalg J_1$, avec f se factorisant par J_0, et $J_1 \neq \emptyset$. Considérons alors la catégorie discrète à deux objets,

$$\varepsilon \ = \ \{0,1\} \ ,$$

et deux flèches

$$g_0, \ g_1 \ : \ J \rightrightarrows \varepsilon \ ,$$

g_0 étant constante de valeur 0, et g_1 étant égale à 0 sur J_0, à 1 sur J_1. On a

$$g_0 f \ = \ g_1 f \ ,$$

donc, comme $f \in W$,

$$g_0 \ = \ g_1 \qquad \text{dans} \quad \mathrm{Hot}_W \ .$$

On en conclut, en prenant un point j_1 dans J_1, et l'inclusion $\alpha_{j_1} : e \longrightarrow J$ correspondante, que

`[page 133 quinquies]`

$$g_0 \alpha_{j_1} \ = \ g_1 \alpha_{j_1} \ ,$$

i.e. les deux sections de ε sur e sont égales dans Hot_W. Comme le foncteur $\mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Hot}_W$ commute aux produits finis `[cette propriété n'est pas établie sous les seules conditions Loc (1, 2, 3) ; elle est démontrée dans Pursuing Stacks, section 64, en remplaçant Loc (3) par l'axiome plus fort Loc (3 bis)]`, il s'ensuit que pour X dans Cat, les deux flèches

$$X \underset{\partial_1^X}{\overset{\partial_0^X}{\rightrightarrows}} X \times \varepsilon \ = \ X \amalg X$$

sont égales dans Hot_W. Si alors

$$f_0, \ f_1 \ : \ X \rightrightarrows Y$$

sont deux flèches dans Cat, elles sont de la forme

$$f_0 \ = \ h\partial_0^X \ , \qquad f_1 \ = \ h\partial_1^X \ ,$$

avec

$$h \ = \ (f_0, f_1) \ : \ X \amalg X \ \longrightarrow \ X \ ,$$

et comme $\partial_0^X = \partial_1^X$ dans Hot_W, on en conclut $f_0 = f_1$ dans Hot_W, *q.e.d.*

`[page 134]`

10 Application au dérivateur HOT_W

Théorème 10.1. *Soit* W *un localiseur dans* Cat *satisfaisant les conditions* Loc (1, 2, 3, 4, 7 bis) (*axiomes de saturation forme forte* (*facteurs directs*), *de l'objet final, de localisation forme faible, du carré cocartésien, de la L-accessibilité* [57]). *Soit* HOT_W *le prédérivateur sur* (Cat) *associé à* (Cat, W) *de la façon habituelle,*

$$(10.1.1) \qquad I \longmapsto \mathrm{Cat}(I)\, W(I)^{-1} \;=\; \underline{\mathrm{Hom}}(I^{\circ}, \mathrm{Cat})\, W(I)^{-1}\,.$$

On a alors ce qui suit.

1°) *Pour toute flèche* $u : I \longrightarrow J$ *dans* Cat, *le foncteur* $u_!$ (*adjoint à gauche de* u^*) *existe* (**N.B.** On n'a pas besoin pour ceci de Loc (4) ni de Loc (7 bis), il suffit que W soit un localiseur fondamental `[on a néanmoins besoin de l'axiome de localisation forme forte Loc (3 bis)]`), *et il se calcule de la façon standard* (*axiomes* Der 4 bis *et* Der 5 bis). *Le foncteur* u_*, *adjoint à droite de* u^*, *existe* [58] [*si* u *est de la forme* $v \times \mathrm{id}_S$, *où* $v : I_0 \longrightarrow J_0$ *est une flèche entre catégories ordonnées finies, et* S *un objet quelconque de* Cat], *et ce foncteur* u_* *se calcule de façon standard* (*axiomes* Der 4 *et* Der 5). *Donc on a une théorie des carrés* W*-cartésiens et des carrés* W*-cocartésiens dans les catégories* $\mathrm{HOT}_W(S)$, *et des suites*

`[page 135]`

longues de suspension et de cosuspension dans les catégories $\mathrm{HOT}^{\bullet}_W(S)$. (*Plus exactement, ce sont des théories relatives aux dérivateurs induits* $\mathrm{HOT}_{W,S}$, $\mathrm{HOT}^{\bullet}_{W,S}$ *sur* S, $I \longmapsto \mathrm{HOT}_W(S \times I)$ *resp.* $I \longmapsto \mathrm{HOT}^{\bullet}_W(S \times I)$ ...). *De plus, les carrés cocartésiens et les carrés cartésiens relatifs aux dérivateurs induits* $\mathrm{HOT}_{W,S}$ *sont* exacts, i.e. *les suites longues de suspension et de cosuspension sont exactes* (*axiomes d'exactitude à droite et à gauche* Der 6 bis *et* Der 6).

2°) *Le prédérivateur* HOT_W *satisfait aussi l'axiome* Der 1 *de décomposition finie* [59] (*pour* $I = \coprod_\alpha I_\alpha$), *et l'axiome* Der 2 *de localisation. De plus,* W *est fortement saturé,* i.e. $f \in W \iff \mathrm{hot}_W(f)$ *isomorphisme.*

3°) *Concernant l'axiome* Der 3 *et ses variantes* (*cf.* I, pages 111-112, 125), *on a ceci :*

a) [60]. *Soit* $f : S' \longrightarrow S$ *une flèche dans* Cat. *Pour que ce soit une* HOT_W*-équivalence,* i.e. *pour que le foncteur* $f^* : \mathrm{HOT}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}_W(S')$ *induise une* équivalence *entre les sous-catégories pleines formées des objets* constants *sur* S, S', *il faut et il suffit que* f *soit dans* W. *L'énoncé correspondant dans les dérivateurs induits* $\mathrm{HOT}_{W,I}$ *est également valable, pour* $I \neq \emptyset$. *Donc a fortiori,* HOT_W *et* $\mathrm{HOT}_{W,I}$ *satisfont*

`[page 136]`

---

[57] **N.B.** Loc (1 bis), *i.e.* $W = W^{\natural}$, est déjà impliqué par la condition que W soit stable par $\varinjlim$ filtrantes.

[58] *Toujours ! Cf.* XIX, p. 29.

[59] Sans aucun axiome sur W ! `[On a besoin simplement que les identités soient dans` W`.]`

[60] On n'a besoin ici que de Loc (1 ter, 2, 3) (Loc (1 ter) est la saturation forte, *i.e.* $f \in W \iff \mathrm{hot}_W(f)$ isomorphisme).

l'axiome de l'objet final, i.e. *si* S *dans* Cat *a un objet final, alors* $S \longrightarrow e$ *est une* HOT_W*-équivalence, et même une* $\mathrm{HOT}_{W,I}$*-équivalence pour toute* I *dans* Cat.

b) *Supposons que* W *satisfasse* Loc (1 ter, 2, 3, 5 b) (*donc l'axiome* Loc (5 b) *des* W*-fibrations, variante* b). *Alors pour toute* $f : S' \longrightarrow S$ *dans* W, $\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_W(S')$ *est une* équivalence de catégories (*la réciproque étant clair par* (a)). *Itou pour*

$$\mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_{W,I}(S) \longrightarrow \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}}_{W,I}(S') \qquad (\text{i.e. } \textit{pour } \ \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}/I}_W(S \times I) \longrightarrow \mathrm{HOT}^{\mathrm{lc}/I}_W(S' \times I)\ ).$$

En d'autres termes, pour le dérivateur HOT_W *et pour tous les* $\mathrm{HOT}_{W,I}$ ($\mathbf{D}$ *étant un des ces dérivateurs*) [61], *toute* $\mathbf{D}$*-équivalence est une* $\mathbf{D}$*-équivalence* 2*-complète,* i.e. *pour* $f : S' \longrightarrow S$, *pour que* $f^* : \mathbf{D}(S) \longrightarrow \mathbf{D}(S')$ *induise une équivalence entre les sous-catégories* $\mathbf{D}^{\mathrm{lc}}(S) \longrightarrow \mathbf{D}^{\mathrm{lc}}(S')$, *il suffit déjà qu'elle induise un foncteur pleinement fidèle sur les sous-catégories pleines formées des objets constants, et ceci équivaut* (*si* $I \neq \emptyset$) *à la condition que* $f \in W$.

`[page 137]`

Commentaire. Dans cet énoncé récapitulatif de ce que je sais prouver à présent pour HOT_W, j'ai un peu mélangé les provenances diverses – ce qui est mis "pour mémoire" de VI (et qui ne dépend pas de Loc (4, 7 ou 7 bis)), *i.e.* ce qui dépend pour l'essentiel de la construction de $u_!$ donnée dans VI (donc ce qui concerne $u_!$ dans 1°, *moins* l'exactitude à droite, et tout ce qui concerne 3°, (a), (b)).

La démonstration de 10.1 résultera des développements du paragraphe suivant `[qui n'existe pas]`, compte tenu du résultat principal du paragraphe 8 (th. 8.4), et du paragraphe 7 (cor. 7.4), qui sont les ingrédients "durs" du théorème 10.1.

[61] À vérifier avec soin dans le cas $\mathbf{D} = \mathrm{HOT}_{W,I}$.