Introduction à la théorie des dérivateurs

et

Structure triangulée sur les catégories de coefficients de dérivateurs triangulés

Georges MALTSINIOTIS

Exposés au Groupe de travail "Algèbre et topologie homotopiques" (2001)

(Notes prises par **D.-C. Cisinski**)

Introduction à la théorie des dérivateurs (d'après Grothendieck) (7-2-01)

1. Historique
2. Problématique
3. Prédérivateurs
4. Dérivateurs

1. Historique.

A. Grothendieck	"Poursuite des champs" (1983) et "Dérivateurs" (1990)
A. Heller	"Homotopy theories" (1988)
B. Keller	"Tour de catégories triangulées" (publ. 1991)
J. Franke	"Système de catégories triangulées de diagrammes" 1996.

2. Problématique.

On cherche un "bon" cadre pour l'algèbre homotopique et homologique.

Verdier : les catégories triangulées :

a) Un diagramme dans une catégorie triangulée ne détermine pas sa colimite homotopique à isomorphisme canonique près. Par exemple, le cône d'un morphisme n'est connu qu'à isomorphisme non-canonique près.

b) La catégorie dérivée d'une catégorie abélienne vue comme une catégorie triangulée ne satisfait pas à une propriété universelle.

Soit A une catégorie de Grothendieck, i.e. A est une catégorie abélienne admettant des petites limites inductives, un petit système de générateurs, et des limites inductives filtrantes exactes. On note $K(A)$ la catégorie des complexes de A.

Si I est une petite catégorie, on note $\mathbb{D}(I)$ la catégorie dérivée de $\underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ, A)$.

Si e est la catégorie ponctuelle, $\mathbb{D}(e)$ est la catégorie dérivée de $\mathcal{A}$, i.e $\mathbb{D}(e) = K(A)\,[W_{qis}^{-1}] =: \mathrm{Der}\, A$.

En général $\mathbb{D}(I) = K(\underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ, A))\,[W_I^{-1}]$ où W_I est la classe des quasi-isomorphismes de $K\,\underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ, A)$.

Comme $K\,\underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ, A) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ, KA)$, W_I s'identifie aux morphismes de préfaisceaux qui sont des quasi-isomorphisme

Soit $I \xrightarrow{p} e$. On obtient un foncteur $K(A) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(e, K(A)) \to \underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ, K(A))$ d'où $\mathbb{D}(e) \xrightarrow{p^*} \mathbb{D}(I)$. Ce dernier admet un adjoint à gauche noté $p_!$ et un adjoint à droite p_*.

$$p_!, p_* : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}(e)$$

$p_!$ associe à un objet de $\mathbb{D}(I)$ sa colimite homotopique.
p_* ———————————————— limite homotopique.

Plus généralement, si $I \xrightarrow{u} J$ est un foncteur entre petites catégories, on obtient un foncteur $\mathbb{D}(J) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(I)$ admettant des adjoints à gauche et à droite généralisant les notions de limites et de colimites homotopiques.

Si on a $\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & J \end{tikzcd}$ on obtient $v^* \xrightarrow{\alpha^*} u^*$.

Donc $I \mapsto \mathbb{D}(I)$, $u \mapsto u^*$, $\alpha \mapsto \alpha^*$ définit un 2-foncteur de la catégorie des petites catégories dans la catégorie des catégories.

3. Prédérivateurs.

On note Cat la 2-catégorie des petites catégories.
On fixe Dia une sous-2-catégorie de Cat satisfaisant toutes les conditions de stabilité dont on aura besoin.

Exemples:

- Dia = Cat
- Dia = la sous-catégorie pleine formée des catégories finies
- Dia = ________________ correspondant à des ensembles ordonnés finis.

Un prédérivateur de domaine Dia est un 2-foncteur

$$Dia^{o} \xrightarrow{\mathbb{D}} CAT$$

(où CAT est la 2-catégorie des catégories), ce qui est une façon concise pour dire la chose suivante:

a) à tout objet I de Dia, on associe une catégorie $\mathbb{D}(I)$.

b) à tout morphisme $I \xrightarrow{u} J$ dans Dia, on associe un foncteur $\mathbb{D}(J) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(I)$

c) à tout morphisme de foncteurs $\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & J \end{tikzcd}$ on associe $v^* \xrightarrow{\alpha^*} u^*$

les conditions suivantes sont vérifiées:

1) $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} K$ dans Dia $\Rightarrow (vu)^* = u^* v^*$
et $(1_I)^* = 1_{\mathbb{D}(I)}$

2) $\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & J \end{tikzcd} \Rightarrow (\beta\alpha)^* = \alpha^*\beta^*$ et $(1_u)^* = 1_{u^*}$

3) $\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & J \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\beta\Downarrow"] & K \end{tikzcd} \Rightarrow (\beta * \alpha)^* = \alpha^* * \beta^*.$

Rem: (3) $\Leftrightarrow$ $\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] & J \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & K \end{tikzcd} \Rightarrow (\alpha * u)^* = u^* * \alpha^*$

$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\beta\Downarrow"] & J \arrow[r, "v"] & K \end{tikzcd} \Rightarrow (v * \beta)^* = \beta^* * v^*.$

Terminologie : les catégories appartenant à $\mathcal{D}ia$ s'appellent les catégories d'indice pour $\mathbb{D}$. Les catégories $\mathbb{D}(I)$ sont les catégories de coefficients pour $\mathbb{D}$. Les objets de $\mathbb{D}(I)$ sont les coefficients de type $\mathbb{D}$ sur I.

Si $I \xrightarrow{u} J$ est une flèche de $\mathcal{D}ia$, $\mathbb{D}(J) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(I)$ est le foncteur image inverse de u.

e est la catégorie ponctuelle.

$\mathbb{D}(e)$ est la catégorie fondamentale de $\mathbb{D}$.

Les objets de $\mathbb{D}(e)$ sont les coefficients absolus de type $\mathbb{D}$.

Notations :

Pour I dans $\mathcal{D}ia$, on note $I \xrightarrow{p_I} e$.

Un coefficient F de type $\mathbb{D}$ sur I est constant s'il existe un coefficient absolu M tel que $F \simeq p_I^* M$ dans $\mathbb{D}(I)$.

Exemple :

Un couple $(\mathcal{M}, W)$ est un localisateur si $\mathcal{M}$ est une catégorie et si $W \subset Fl(\mathcal{M})$.

Notation :

$$\mathcal{M}(I) = \underline{\mathrm{Hom}}(I^o, \mathcal{M})$$

$$W_I = \{\varphi \in Fl\, \mathcal{M}(I) : \forall i \in \mathrm{Ob}\, I,\ \varphi_i \in W\}.$$

A tout localisateur $(\mathcal{M}, W)$ on peut (modulo des difficultés ensemblistes) associer un prédérivateur $\mathbb{D} := \mathbb{D}_{(\mathcal{M}, W)}$ comme suit :

$$\mathbb{D}(I) = \mathcal{M}(I)[W_I^{-1}].$$

$I \xrightarrow{u} J$ donne $\mathcal{M}(J) \xrightarrow{\mathcal{M}(u)} \mathcal{M}(I)$ compatible avec W

i.e $\mathcal{M}(u) W_J \subset W_I$, ce qui induit $\mathbb{D}(J) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(I)$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & J \end{tikzcd}$$

induit

$$\begin{tikzcd} M(I) \arrow[r, phantom, "\Uparrow"] & M(J) \arrow[l, bend right, "M(u)"'] \arrow[l, bend left, "M(v)"] \end{tikzcd}$$

défini par $Fv(i) \to Fu(i)$.

Le cas le plus fréquent, est : M est une catégorie de modèles fermée et W est la classe des équivalences faibles (les problèmes ensemblistes disparaissent). Le cas qu'on a vu dans l'introduction en est un cas particulier (car si A est une catégorie de Grothendieck, KA admet une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes).

(M, W) est un localisateur de Quillen s'il existe une structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les éléments de W.

Autre cas particulier : **HOT** est le prédérivateur associé au localisateur de Quillen (Top, W_{Top}).
On fixe un prédérivateur $\mathbb{D}$ de domaine Dia.
Proposition 1 :
Si (u, v) est un couple de foncteurs adjoints si $uv \xrightarrow{\varepsilon} 1$, $1 \xrightarrow{\eta} vu$ sont les morphismes d'adjonction (dans Dia), alors (u^*, v^*) est un couple de foncteurs adjoints et $u^*v^* \xrightarrow{\eta^*} 1$, $1 \xrightarrow{\varepsilon^*} v^*u^*$ sont les morphismes d'adjonction.

Corollaire :

Si (u,v) est un couple de foncteurs adjoints dans Dia, et si u (resp. v) est pleinement fidèle, alors v^* (resp. u^*) est pleinement fidèle.

Définition :

$I \xrightarrow{u} J$ une flèche de Dia.

u est une $\mathbb{D}$-équivalence si $\mathbb{D}(J) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(I)$ induit un foncteur pleinement fidèle sur la sous-catégorie pleine de $\mathbb{D}(J)$ formée des coefficients constants, i.e $\forall M, N \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{D}(e)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(J)}(p_J^* M, p_J^* N) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(I)}(p_I^* M, p_I^* N)$$

est une bijection.

Notation : $W_{\mathbb{D}}$ est la classe des flèches de Dia qui sont des $\mathbb{D}$-équivalences.

Un objet I de Dia est $\mathbb{D}$-asphérique si $I \xrightarrow{p_I} e \in W_{\mathbb{D}}$.

Exemple :

Si $\mathbb{D} = \mathrm{HOT}$ sur Cat, $W_{\mathbb{D}}$ est la classe des équivalences faibles ordinaires.

Proposition 2 :

Le localisateur (Dia, $W_{\mathbb{D}}$) est fortement saturé.

On rappelle que $(\mathcal{M}, W)$ est fortement saturé si en notant

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{M}[W^{-1}]$$

le foncteur de localisation, et si $u \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}$, $u \in W$ si et seulement si $\gamma(u)$ est un isomorphisme.

Démonstration:

$I_0 \xrightarrow{u_0} J_0$ dans Dia tel que $\gamma_{\mathbb{D}}(u_0)$ est un isomorphisme où $\mathrm{Dia} \xrightarrow{\gamma_{\mathbb{D}}} \mathrm{Dia}[W_{\mathbb{D}}^{-1}]$ est le foncteur de localisation.

Pour $M, N \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(e)$, on note

$$\begin{aligned} \phi_{M,N} : \mathrm{Dia} &\longrightarrow \mathcal{E}ns^{\circ} \\ I &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(I)}(p_I^{*}M, p_I^{*}N) \end{aligned}$$

$\phi_{M,N}$ transforme les $\mathbb{D}$-équivalences en bijection et donc on a:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Dia} \arrow[rd, "\phi_{M,N}"] \arrow[d, "\gamma_{\mathbb{D}}"'] & \\ \mathrm{Dia}[W_{\mathbb{D}}^{-1}] \arrow[r, dashed, "\overline{\phi}_{M,N}"'] & \mathcal{E}ns^{\circ} \end{tikzcd}$$

On a $\phi_{M,N}(u_0) = \overline{\phi}_{M,N}\,\gamma_{\mathbb{D}}(u_0)$ et donc $\phi_{M,N}(u_0)$ est une bijection $\forall M, N \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(e)$, i.e $u_0 \in W_{\mathbb{D}}$.

Corollaire:

Le localisateur $(\mathrm{Dia}, W_{\mathbb{D}})$ est faiblement saturé.

On rappelle qu'un localisateur $(\mathcal{M}, W)$ est faiblement saturé si

a) W contient les identités

b) W satisfait l'axiome du 2 sur 3

c) $X' \underset{i}{\overset{r}{\leftrightarrows}} X$ dans $\mathcal{M}$ avec $ri = 1_{X'}$, $ir \in W \Rightarrow r \in W$ (et donc $i \in W$).

Remarque: I dans Dia est $\mathbb{D}$-asphérique si et seulement si $\mathbb{D}(e) \xrightarrow{p_I^*} \mathbb{D}(I)$ est pleinement fidèle.

Proposition 3:
Si I dans Dia a un objet final (ou initial), alors I est $\mathbb{D}$-asphérique.

Démonstration:
Soit e_I un objet final de I. On a $I \xrightarrow{p_I} e$ et on définit $e \xrightarrow{s} I$, $* \mapsto e_I$. Alors (s, p_I) est un couple de foncteurs adjoints et s est pleinement fidèle. Le corollaire de la proposition 1 montre que p_I^* est pleinement fidèle.

Remarque:
Si I admet un objet final ou initial, $\forall J$ dans Dia, la projection $I \times J \xrightarrow{p} J$ induit un foncteur pleinement fidèle $\mathbb{D}(J) \xrightarrow{p^*} \mathbb{D}(I \times J)$. En particulier, $p \in W_{\mathbb{D}}$.

Rappel:
$A \underset{u_1}{\overset{u_0}{\rightrightarrows}} B$ dans Cat, u_0 et u_1 sont homotopes s'ils sont dans la même composante connexe de $\underline{Hom}(A, B)$.
Cette relation est la relation d'équivalence engendrée par la relation: " $\exists\ \Delta_1 \times A \xrightarrow{h} B$ où $\Delta_1 = \{0 \to 1\}$ tel que $u_\varepsilon = h i_\varepsilon$ pour $\varepsilon = 0, 1$ où $A \xrightarrow{i_\varepsilon} \Delta_1 \times A$.
$a \mapsto (\varepsilon, a)$

$A \xrightarrow{f} B$ est un homotopisme si $\exists\ B \xrightarrow{g} A$ tel que fg est homotope à 1_B et gf est homotope à 1_A.

A est contractile si $A \to e$ est un homotopisme.

Lemme d'homotopie :
Soient $A \overset{u_0}{\underset{u_1}{\rightrightarrows}} B$ des foncteurs homotopes dans Dia.
Alors $u_0 \in W_{\mathbb{D}} \iff u_1 \in W_{\mathbb{D}}$.

Démonstration:
On peut supposer que $\exists\ \Delta_1 \times A \xrightarrow{h} B$ tq que $h i_\varepsilon = u_\varepsilon$.
On a $\Delta_1 \times A \xrightarrow{p} A \in W_{\mathbb{D}}$. Donc $p i_\varepsilon = 1 \Rightarrow i_\varepsilon \in W_{\mathbb{D}}$.
Alors $u_\varepsilon \in W_{\mathbb{D}} \iff h \in W_{\mathbb{D}} \Rightarrow$ le lemme.

Proposition 4:
Un objet contractile de Dia est $\mathbb{D}$-asphérique.

Démonstration:
A dans Dia contractile.
Donc $\exists\ e \xrightarrow{s} A$ tel que $s p_A$ soit homotope à 1_A.
On a ainsi $s p_A \in W_{\mathbb{D}}$ et comme $p_A s = 1_e$ on a $p_A \in W_{\mathbb{D}}$ (saturation faible).

4. Dérivateurs.

On dit qu'un prédérivateur $\mathbb{D}$ de domaine Dia est un dérivateur faible à gauche s'il satisfait aux quatre axiomes suivants:

Der 1) a) $\forall\ I, J$ dans Dia, en notant $I \xrightarrow{\alpha} I \amalg J \xleftarrow{\beta} J$ les morphismes canoniques, $\mathbb{D}(I \amalg J) \xrightarrow{(\alpha^*, \beta^*)} \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J)$ est une équivalence de catégories.
b) $\mathbb{D}(\varnothing)$ est la catégorie ponctuelle.

Der 2) $\forall A$ dans Dia, la famille de foncteurs

$$\left(\mathbb{D}(A) \xrightarrow{i_{A,a}^*} \mathbb{D}(e) \right)_{a \in \mathrm{ob} A}$$

induite par les $e \xrightarrow{i_{A,a}} A$, $* \mapsto a$

est conservative.

Terminologie : si F est un objet de $\mathbb{D}(A)$, on note $F_a = i_{A,a}^* F$.
On dit que F_a est la fibre de F en a.
Si $F \xrightarrow{\varphi} F'$ est une flèche de $\mathbb{D}(A)$, on note $\varphi_a = i_{A,a}^* \varphi$, et $F_a \xrightarrow{\varphi_a} F'_a$ est appelé le morphisme induit dans les fibres en a.

Der 2 se traduit alors comme suit : tout morphisme de $\mathbb{D}(A)$ induisant un isomorphisme dans les fibres en a, $\forall a \in \mathrm{ob} A$, est un isomorphisme.

Der 3 g) $\forall A \xrightarrow{u} B$ dans Dia, le foncteur $\mathbb{D}(B) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint à droite $\mathbb{D}(A) \xrightarrow{u_*} \mathbb{D}(B)$.

On dit que u_* est le foncteur image directe cohomologique.
Si F est un coefficient de type $\mathbb{D}$ sur A, on dit que $u_* F$ est la cohomologie relative de A sur B (par u) à coefficients dans F.

Notation :
Pour $F \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(A)$, $H^*_{\mathbb{D}}(A, F) := p_{A*}(F) =: \underleftarrow{\mathrm{holim}}_A F$.
Si $M \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(A)$, on note $H^*_{\mathbb{D}}(A, M) = p_{A*} p_A^* M$

On considère un 2-diagramme dans $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} X' & X \arrow[l, "g"'] \\ Y' \arrow[u, "f'"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\theta}{\nearrow}"] & Y \arrow[l, "h"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \qquad f'h \xrightarrow{\theta} gf$$

r adjoint à droite de f $\qquad fr \xrightarrow{\varepsilon} 1 \qquad 1 \xrightarrow{\eta} rf$

r' ——— f' $\qquad f'r' \xrightarrow{\varepsilon'} 1 \qquad 1 \xrightarrow{\eta'} r'f'$

on obtient

$$\begin{tikzcd} X' & X \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "r"] \\ Y' \arrow[u, "r'"] & Y \arrow[l, "h"] \arrow[ul, phantom, "\overset{\tilde{\theta}}{\nwarrow}"] \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{hr \xrightarrow{\eta * hr} r'f'hr \xrightarrow{r' * \theta * r} r'gfr \xrightarrow{r'g * \varepsilon} r'g}_{\tilde{\theta}}$$

Si on a

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\swarrow}"] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{D}ia$

on obtient

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(A') & \mathbb{D}(A) \arrow[l, "v^*"'] \\ \mathbb{D}(B') \arrow[u, "u'^*"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\alpha^*}{\nearrow}"] & \mathbb{D}(B) \arrow[l, "w^*"] \arrow[u, "u^*"'] \end{tikzcd}$$

d'où

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(A') \arrow[d, "u'_*"'] & \mathbb{D}(A) \arrow[l, "v^*"'] \arrow[d, "u_*"] \\ \mathbb{D}(B') & \mathbb{D}(B) \arrow[l, "w^*"] \arrow[ul, phantom, "\overset{\tilde{\alpha}^*}{\nwarrow}"] \end{tikzcd}$$

$w^* u_* \xrightarrow{\tilde{\alpha}^*} u'_* v^*$ est le morphisme de changement de base pour les images directes relatives à $\mathcal{D}$. On note $\tilde{\alpha}^* = c_{\mathcal{D}}$.

On se donne $A \xrightarrow{u} B$ dans Dia et $b \in \mathrm{Ob}\, B$, d'où

$$\begin{tikzcd}
A/b \arrow[r, "j := j_{u,b}"] \arrow[d, "p_{A/b}"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha := \alpha_{u,b} \swArrow"] & A \arrow[d, "u"] \\
e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B
\end{tikzcd} \quad = D_{u,b}$$

α est défini par $uj(a,\beta) = u(a) \xrightarrow{\beta} b$.

Der 4 g) Le morphisme de changement de base

$$i_{B,b}^{*}\, u_{*} \xrightarrow{c_{D_{u,b}}} p_{A/b\,*}\, j_{u,b}^{*}$$ est un isomorphisme.

Autrement-dit pour $F \in \mathrm{Ob}\, \mathbb{D}(A)$, $b \in \mathrm{Ob}\, B$, on a

$$(u_* F)_b \xrightarrow{\sim} H^{*}_{\mathbb{D}}(A/b, j_{u,b}^{*} F)$$

Dia sous-2-catégorie de Cat satisfaisant à toutes les conditions de stabilité pertinentes.
Un prédérivateur est un 2-foncteur $Dia^{\circ} \xrightarrow{\mathbb{D}} CAT$.
$\mathbb{D}$ est un dérivateur faible à gauche si

Der 1 a) $\mathbb{D}(I \amalg J) \longrightarrow \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J)$ est une équivalence de catégories
b) $\mathbb{D}(\emptyset) = e$

Der2 A dans Dia $\varphi \in Fl\, \mathbb{D}(A)$, $\forall a \in ob A$ φ_a iso $\Leftrightarrow \varphi$ iso
où $\varphi_a = i_{A,a}^{*} \varphi$ avec $e \xrightarrow{i_{A,a}} A$, $* \mapsto a$.

Der3g $\forall A \xrightarrow{u} B \in Dia$ $\mathbb{D}(B) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint à droite noté $\mathbb{D}(A) \xrightarrow{u_*} \mathbb{D}(B)$

Der4g $A \xrightarrow{u} B$ dans Dia, $b \in ob B$

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r, "j_{u,b}"] \arrow[d, "p_{A/b}"'] & A \arrow[d, "u"] \arrow[dl, phantom, "\kappa \Swarrow"] \\ e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B \end{tikzcd}$$

induit un isomorphisme $c_{u,b} : i_{B,b}^{*} u_{*} \xrightarrow{\sim} p_{A/b\,*} j_{u,b}^{*}$.

i.e $(u_* F)_b \Rightarrow H^*(A/b, j_{u,b}^{*} F) = H^*(A/b, F|A/b)$.
$= \underleftarrow{holim}_{A/b^{\circ}} F|A/b$.

Exemple :
Soit M une catégorie admettant des petites limites projectives.
On pose $\mathbb{D}(I) = \underline{Hom}(I^{\circ}, M)$.
Pour $I \xrightarrow{u} J$ $u^* = \underline{Hom}(u^{\circ}, M) : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$.
Pour $\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & J \end{tikzcd}$ on a $\begin{tikzcd} \mathbb{D}(J) \arrow[r, bend left, "u^*"] \arrow[r, bend right, "v^*"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha^*"] & \mathbb{D}(I) \end{tikzcd}$

où pour $J^{\circ} \xrightarrow{F} M$, $i \in ob I$ $\alpha^*(F)(i) = F(\alpha_i)$

On a $\mathbb{D}(e) = M$.

Der 1 et Der 2 sont immédiats si $M \neq \emptyset$.

Der 3g : cas particulier : $A \xrightarrow{p_A} e$ induit $M \xrightarrow{p_A^*} \underline{\mathrm{Hom}}(A^\circ, M) = \mathbb{D}(A)$

On pose $p_{A*} = \varprojlim_{A^\circ}$.

Soit $A \xrightarrow{u} B$ un morphisme de Cat. On a

$$\mathbb{D}(B) = \underline{\mathrm{Hom}}(B^\circ, M) \xrightarrow{u^*} \underline{\mathrm{Hom}}(A^\circ, M) = \mathbb{D}(A).$$

u^* admet un adjoint à droite $\mathbb{D}(A) \xrightarrow{u_*} \mathbb{D}(B)$ défini par

$$(u_* F)_b = \varprojlim_{A/b^\circ} F|_{A/b} \quad \text{pour } F \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(A) \text{ et } b \in \mathrm{ob}\,B.$$

On a aussi Der 4g.

On peut définir la notion duale de dérivateur faible à droite avec la terminologie

gauche		droite
cohomologie	$\leftrightarrow$	homologie
H^*	$\leftrightarrow$	H_*
$\underleftarrow{\mathrm{holim}}$	$\leftrightarrow$	$\underrightarrow{\mathrm{holim}}$
u_*	$\leftrightarrow$	$u_!$

Un dérivateur est un prédérivateur $\mathbb{D}$ qui est un dérivateur faible à gauche et à droite.

On fixe un prédérivateur $\mathbb{D}$ de domaine Dia.

Proposition 1

a) Si $\mathbb{D}$ satisfait Der 1 a) et Der 3g alors les catégories $\mathbb{D}(A)$ admettent des produits binaires

b) Si $\mathbb{D}$ satisfait Der 1 b) et Der 3g alors les $\mathbb{D}(A)$ admettent des objets finaux

Démonstration :

a) Il faut montrer que la diagonale $\mathbb{D}(A) \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{D}(A)}} \mathbb{D}(A) \times \mathbb{D}(A)$ admet un à droite. Or on a une codiagonale $A \amalg A \xrightarrow{\nabla_A} A$ $\quad \nabla_A = (1_A, 1_A)$

d'où

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(A) \arrow[r, "\nabla_A^*"] \arrow[rr, bend right, "\Delta_{\mathbb{D}(A)}"'] & \mathbb{D}(A \amalg A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, phantom, "\sigma"] & \mathbb{D}(A) \times \mathbb{D}(A) \\
& {} &
\end{tikzcd}.$$

b) $\mathbb{D}(A) \to e$ admet un adjoint à droite car c'est α^* où $\emptyset \xrightarrow{\alpha} A$.

On définit un foncteur $\mathbb{D}(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A^\circ, \mathbb{D}(e))$:

On a $A \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(e, A)$ d'où

$$A^\circ \longrightarrow (\underline{\mathrm{Hom}}(e, A))^\circ \xrightarrow{\mathbb{D}} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}(A), \mathbb{D}(e))$$

$$A^\circ \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}(A), \mathbb{D}(e)) \iff A^\circ \times \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(e)$$

$$\iff \mathbb{D}(A) \xrightarrow{dia} \underline{\mathrm{Hom}}(A^\circ, \mathbb{D}(e))$$

Si on a $A \xrightarrow{u} B$ dans Dia, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(B) \arrow[r, "dia_B"] \arrow[d, "u^*"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(B^\circ, \mathbb{D}(e)) \arrow[d, "\underline{\mathrm{Hom}}(u^\circ, 1_{\mathbb{D}(e)})"] \\
\mathbb{D}(A) \arrow[r, "dia_A"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(A^\circ, \mathbb{D}(e)).
\end{tikzcd}$$

En particulier pour $e \xrightarrow{i_{A,a}} A$ $(a \in \mathrm{ob} A)$ on obtient

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(A) \arrow[r, "dia_A"] \arrow[d, "i_{A,a}^*"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(A^\circ, \mathbb{D}(e)) \arrow[d, "\underline{\mathrm{Hom}}(i_{A,a}^\circ, 1_{\mathbb{D}(e)})"] \\
\mathbb{D}(e) \arrow[r, "\sim", "iso"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(e, \mathbb{D}(e))
\end{tikzcd}$$

Donc pour $F \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(A)$, $dia_A(F)(a) = F_a$.

Si $a \xrightarrow{x} a' \in \mathrm{Fl} A \rightsquigarrow i_{A,a} \xrightarrow{u} i_{A,a'} \rightsquigarrow F_{a'} \xrightarrow{x^*} F_a$.

Proposition 2 :

L'axiome Der 2 équivaut à demander que pour tout A dans Dia les foncteurs dia_A sont conservatifs.

Soit $\mathbb{D}$ un prédérivateur satisfaisant Der 3g.

On se donne $A \xrightarrow{u} B$ dans Dia et $F \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{D}(B)$.

On veut définir

$$\begin{array}{ccc} H^*(B, F) & \longrightarrow & H^*(A, u^*F) \\ \| & & \| \\ p_{B_*} F & & p_{A_*} u^* F \end{array}$$

Comme $p_B u = p_A$ on a $p_{A_*} = p_{B_*} u_*$ et $F \to u_* u^* F$ induit le morphisme.

Si $M \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{D}(e)$ on obtient

$$\begin{tikzcd} & H^*(B,M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^*(A,M) \arrow[d, equal] & \\ p_{B_*} p_B^* M & H^*(B, p_B^* M) \arrow[dr] & H^*(A, p_A^* M) = p_{A_*} p_A^* M \arrow[d, equal] & \\ & & H^*(A, u^* p_B^* M) & \end{tikzcd}$$

Proposition 3 :

On suppose que $\mathbb{D}$ satisfait Der 3g. Les assertions suivantes sont équivalentes pour $A \xrightarrow{u} B$ dans Dia :

(a) u est une $\mathbb{D}$-équivalence

(b) $p_{B_*} p_B^* \longrightarrow p_{A_*} p_A^*$ est un iso

(c) pour tout coefficient constant F sur B, $H^*(B,F) \to H^*(A, u^*F)$ est un isomorphisme.

(d) $\forall M \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{D}(e)$ $H^*(B,M) \to H^*(A,M)$ est un iso.

Démonstration :

(b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) est tautologique.

u est une $\mathbb{D}$-équivalence si et seulement si $\forall\, M, N \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{D}(e)$

$$\mathrm{Hom}(p_B^* M, p_B^* N) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}(p_A^* M, p_A^* N) \text{ est une bijection}$$

Or $\mathrm{Hom}(p_B^* M, p_B^* N) = \mathrm{Hom}(M, p_{B_*} p_B^* N)$

et $\mathrm{Hom}(p_A^* M, p_A^* N) = \mathrm{Hom}(M, p_{A_*} p_A^* N)$

d'où (a) $\Leftrightarrow$ (b).

Lemme

On suppose Der 3g

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u''"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha'"] & A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha"] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w'"'] & B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}'$ $\quad$ $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v''=vv'"] \arrow[d, "u''"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha''"] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w''=ww'"'] & B \end{tikzcd} \quad \mathcal{D}\circ\mathcal{D}'$$

où $\alpha''=(w*\alpha')(\alpha*v')$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (ww')^* u_* \arrow[rr, "c_{\mathcal{D}\circ\mathcal{D}'}"] \arrow[d, equal] & & u'_*(vv')^* \arrow[d, equal] \\ w'^* w^* u_* \arrow[dr, "w'*c_{\mathcal{D}}"'] & & u'_* v'^* v^* \\ & w'^* u'_* v^* \arrow[ur, "c_{\mathcal{D}'}*v^*"'] & \end{tikzcd}$$

i.e $\quad c_{\mathcal{D}\circ\mathcal{D}'} = \left(c_{\mathcal{D}'}*v^*\right)\left(w'*c_{\mathcal{D}}\right)$.

On dit que $\mathcal{D}$ satisfait au théorème de changement de base (cohomologique) si $c_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme.

Lemme (sur Der 3g avec les notations ci-dessus).
Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ satisfont le théorème de changement de base, il en est de même de $\mathcal{D}\circ\mathcal{D}'$.

Lemme (sur Der 3g)
$A \xrightarrow{u} B$ dans Dia. On suppose que B admet un objet final b.

$$\begin{tikzcd} A = A/b \arrow[r, "j_{u,b}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha_{u,b}"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B \end{tikzcd} \quad \mathcal{D}_{u,b}$$

Alors $\mathcal{D}_{u,b}$ satisfait au théorème de changement de base.

Proposition 4 (sous Der 2 et Der 3 g).

Les assertions suivantes sont équivalentes:

a) $\mathbb{D}$ satisfait à Der 4 g (i.e $\forall A \xrightarrow{u} B$, $\forall b \in \mathrm{ob} B$, $\mathcal{D}_{u,b}$ satisfait au théorème de changement de base)

b) $\forall A \xrightarrow{u} B$ dans Dia $\forall b \in \mathrm{ob} B$

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & A \arrow[d, "u"] \\ B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd} = \mathcal{D}^{c}_{u,b}$$

$\mathcal{D}^{c}_{u,b}$ satisfait au théorème de changement de base.

Démonstration:

$A \xrightarrow{u} B$ dans Dia $b \in \mathrm{ob} B$ $(b', b' \xrightarrow{y} b) \in \mathrm{ob}\, B/b$

$$\begin{tikzcd} A/b' = (A/b)/(b',y) \arrow[r, "j_{u/b,(b',y)}"] \arrow[d, "p_{A/b'}"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha = \alpha_{u/b,(b',y)}"] & A/b \arrow[r, "j_{u,b}"] \arrow[d, "u/b"] \arrow[dr, phantom, "2"] & A \arrow[d, "b"] \\ e \arrow[r, "i_{B/b,(b',y)}"'] & B/b \arrow[r, "j_{1_B,b}"'] & B \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{D}_{u/b,(b',y)} \qquad \mathcal{D}^{c}_{u,b}$$

on a $\mathcal{D}^{c}_{u,b} \circ \mathcal{D}_{u/b,(b',y)} = \mathcal{D}_{u,b'}$

b) $\Rightarrow$ a) on prend $b' = b$, $y = 1_b$ et le lemme précédent car B/b a pour objet final $(b, 1_b)$.

a) $\Rightarrow$ b) on a $c_{u,b'} = \left(c_{u/b,(b',y)} * j^{*}_{u,b}\right)\left(i^{*}_{B/b,(b',y)} * c_{\mathcal{D}^{c}_{u,b}}\right)$

isos

$\Rightarrow i^{*}_{B/b,(b',y)} * c_{\mathcal{D}^{c}_{u,b}}$ iso et ce $\forall (b',y) \in \mathrm{ob}\, B/b$.

der 2 $\Rightarrow$ $c_{\mathcal{D}^{c}_{u,b}}$ iso

$W \subset Fl\, \mathcal{D}ia$

Définition:

$A \xrightarrow{u} B$ dans $\mathcal{D}ia$ est W-asphérique si $\forall b \in \mathrm{Ob}\, B$ $A/b \xrightarrow{u/b} B/b \in W$.

On dit que u est W-coasphérique si u° est W-asphérique i.e si $\forall b \in \mathrm{Ob}\, B$ $b\backslash A \xrightarrow{b\backslash u} b\backslash B \in W$.

$W_{\mathbb{D}}$ = $\mathbb{D}$-équivalences.

$A \xrightarrow{u} B$ est $\mathbb{D}$-asphérique (resp. $\mathbb{D}$-coasphérique) s'il est $W_{\mathbb{D}}$-asphérique (resp. $W_{\mathbb{D}}$-coasphérique).

Dans la suite, on suppose que $\mathbb{D}$ satisfait Der2, Der3g et Der4g

Proposition 5:

$A \xrightarrow{u} B$ dans $\mathcal{D}ia$. Les conditions suivantes sont équivalentes

a) u est $\mathbb{D}$-asphérique

b) $\forall b \in \mathrm{Ob}\, B$ A/b est $\mathbb{D}$-asphérique

c) $p_B^* \longrightarrow u_* p_A^*$ est un isomorphisme.

Démonstration:

(a) $\Leftrightarrow$ (b) clair.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Der2 donne (c) $\Leftrightarrow$ $\forall b \in \mathrm{Ob}\, B$

$$\begin{tikzcd}
i_{B,b}^* \, p_B^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & i_{B,b}^* \, u_* \, p_A^* \arrow[d, "\wr", "\mathrm{Der3g}"'] \\
1_{\mathbb{D}(e)} \arrow[dr] & p_{A/b\,*} \, j_{u,b}^* \, p_A^* \arrow[d, equal] \\
 & p_{A/b\,*} \, p_{A/b}^*
\end{tikzcd}$$

$\Leftrightarrow$ $\forall b \in \mathrm{Ob}\, B$ $p_{A/b}^*$ pleinement fidèle

$\Leftrightarrow$ (b).

Proposition

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "2"] & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

deux Dia - Équivalences:

a) $\forall c \in \mathrm{Ob}\, C \quad A/c \xrightarrow{u/c} B/c$ $\mathbb{D}$- équivalence

b) $W_* p_B^* \longrightarrow v_* p_A^*$ est un isomorphisme

Corollaire:

Si Dia = Cat alors $W_{\mathbb{D}}$ est un localisateur fondamental fort.

Définition:

~~$W \subset Fl\, Cat$ est un~~

Un localisateur fondamental fort est un localisateur (Cat, W) tel que

a) (Cat, W) est faiblement saturé

b) $\forall A \in \mathrm{Ob}\, Cat$ avec objet final $A \to e \in W$

c) $$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "2"] & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$ dans Cat $\quad \forall c \in \mathrm{Ob}\, C \quad u/c \in W$

$\Rightarrow u \in W$

Démonstration:

Il reste à voir c) ce qui résulte de la proposition et du fait que $(uv)_* = u_* v_*$.

Foncteurs propres ou lisses (Georges Maltsiniotis)

- Propriétés élémentaires des morphismes propres ou lisses
- Morphismes propres et dérivateurs

$W \subset Fl\, Cat$ localisateur fondamental

Proposition 1 :

$X \xrightarrow{f} Y \in Fl(Cat)$. Conditions équivalentes

a) $\forall y \in ob Y \quad X_y \to X/y \; , \; x \mapsto (x, f(x) \xrightarrow{1_y} y)$
est coasphérique

b) $\forall x \in ob X \quad x\backslash X \to y\backslash X \; , \; y = f(x)$
est à fibres asphériques

c) $\forall u_0 : y_0 \to y_1 \in Fl(Y)$, $\forall x_0 \in ob(X_{y_0})$, si $X(x_0, u_0)$ désigne la catégorie dont les objets sont les couples $(x, u : x_0 \to x)$ tels que $f(u) = u_0$ ($\Leftarrow f(x) = y_0$) et dont les flèches $(x,u) \xrightarrow{v} (x', u')$ sont les $v : x \to x'$ tels que $f(v) = 1_{y_0}$ et $vu = u'$, $X(x_0, u_0)$ est asphérique.

d) $\forall \Delta_1 \to X$ (où $\Delta_1 = \{0 \to 1\}$

$$\begin{tikzcd} X' = \Delta_1 \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \Delta_1 \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$X'_1 \hookrightarrow X$ est coasphérique.

Démonstration :

(a) $\Leftrightarrow$ (c) si $(x, f(x) \xrightarrow{u} y) \in \mathrm{ob}(X/y)$ on a

$(x,u)\backslash X_y \simeq X(x,u)$.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) si $(y', y \xrightarrow{u} y') \in \mathrm{Ob}(y\backslash Y)$, $x \in \mathrm{ob} X_y$

$(x\backslash X)_{(y';u)} \simeq X(x,u)$

(d) $\Leftrightarrow$ (c) $X'_1 \xrightarrow{i} X'$ coasphérique $\Leftrightarrow \forall x' \in \mathrm{ob} X'$ $x'\backslash X'_1$ asphérique mais si $x' \in \mathrm{ob}\, X'_1$, $x'\backslash X'_1$ admet un objet initial et donc est asphérique. Donc $X'_1 \xrightarrow{i} X'$ est coasphérique si et seulement si $\forall x' \in \mathrm{ob}\, X'_0$, $x'\backslash X_1$ est asphérique.

Or la donnée $u_0 : y_0 \to y_1 \in \mathrm{Fl}\, Y$ équivaut à la donnée de $\Delta_1 \to Y$ et $X'_0 = X_{y_0}$. Pour $x \in \mathrm{ob} X_{y_0}$

$x\backslash X'_1 = X(x, u_0)$.

Définition :

On dit qu'une flèche $X \xrightarrow{f} Y$ de Cat est propre si elle satisfait aux conditions de la proposition 1.

On dit que f est lisse si $X^\circ \xrightarrow{f^\circ} Y^\circ$ est propre

Remarque :

Comme $W = W^\circ$ les résultats sur les propres induisent des résultats sur les lisses.

Exemple : toute précofibration est un foncteur propre

En particulier, toute immersion fermée est propre.

Remarque : l'image d'un foncteur propre est fermée (i.e un cocrible) lorsque W est non-trivial i.e $\neq \mathrm{Fl}(\mathrm{Cat})$.

Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un foncteur propre, $x \in Ob X$ et $f(x) \xrightarrow{u} y \in Fl Y$.
$X(x,u)$ asphérique $\Rightarrow X(x,u) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ x \xrightarrow{v} x' \in Fl$
t.q $f(v) = u$.

Proposition 2

Les morphismes propres sont stables par image inverse, i.e pour tout carré cartésien dans Cat

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

f propre $\Rightarrow f'$ propre

Démonstration: la condition (d) de la prop. 1 est stable par image inverse.

Proposition 3:

Un foncteur propre à fibres asphériques est universellement dans W.

Démonstration: les morphismes propres sont stables par images inverses, et la notion de fibres asphériques l'est aussi. Il suffit de montrer que tout morphisme propre à fibres asphériques est asphérique ce qui résulte de la prop 1.(a).

Lemme

Si $X \xrightarrow{f} Y$ est propre, alors $\forall x \in \mathrm{ob}X$, $x\backslash X \longrightarrow y\backslash X$ (où $y = f(x)$) est un foncteur propre à fibres asphériques.
En particulier, il est universellement dans W.

Démonstration:

Par la prop 1 (b) il est à fibres asphériques.
Soit $(x', x \xrightarrow{u} x')$ un objet de $x\backslash X$. Son image dans $y\backslash X$ est $\left(y' = f(x'),\ y \xrightarrow{v = f(u)} y'\right)$. Il faut montrer que

$$\begin{array}{ccc} (x', u)\backslash(x\backslash X) & \longrightarrow & (y', v)\backslash(y\backslash Y) \\ \wr & & \wr \\ x'\backslash X & \longrightarrow & y'\backslash Y \end{array}$$

est à fibres asphériques.

Or $x'\backslash X \to y'\backslash Y$ est à fibres asphériques par la prop. 1 (b) car f est propre.

Proposition 4:

Le composé de deux morphisme propre est propre

Démonstration:

Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux morphismes propres.
Soit $x \in \mathrm{ob}X$. On pose $y = f(x)$ et $z = g(y)$. On obtient

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cart}"] & x\backslash X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & y\backslash Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\
e \arrow[r] & z\backslash Z \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

$\forall e \to z\backslash Z$. g propre $\Rightarrow$ Y' asphérique et f propre $\Rightarrow$ $x\backslash X \to y\backslash Y$ est universellement dans W (lemme et prop. 3) $\Rightarrow X' \to Y' \in W$.

donc X est asphérique. Par la proposition 1(b), gf est propre.

Observation:
Si on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

et si $x \in \mathrm{Ob} X$, $y = f(x)$, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} x\backslash X' \arrow[r] \arrow[d] & x\backslash X \arrow[d] \\ y\backslash Y' \arrow[r] & y\backslash Y \end{tikzcd}.$$

Proposition 5
L'image réciproque d'un foncteur coasphérique par un morphisme propre est coasphérique.

Démonstration:
Soit
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$
un carré cartésien

avec f propre et h coasphérique. Soit $x \in \mathrm{Ob} X$ et $y = f(x)$.
On a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
x\backslash X' \arrow[r, "x\backslash g"] \arrow[d] & x\backslash X \arrow[d] \\
y\backslash Y' \arrow[r, "y\backslash h"'] & y\backslash Y
\end{tikzcd}$$

On a $y\backslash h \in W$ et les deux flèches verticales sont dans W et donc $x\backslash g \in W$.

Théorème 1:

Soit $X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{Fl}\,\mathrm{Cat}$. On a l'équivalence

(a) f est propre

(b) pour tout diagramme de Cat formé de deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
Y'' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f''"'] & X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y'' \arrow[r, "h'"'] & Y' \arrow[r, "h"'] & Y
\end{tikzcd}$$

h' coasphérique $\Rightarrow$ g' coasphérique.

Démonstration:

(a) $\Rightarrow$ (b) f propre $\Rightarrow$ f' propre. On conclut par la proposition 5.

(b) $\Rightarrow$ (a). Soit $y \in \mathrm{ob}\, Y$. On a deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
X_y \arrow[r] \arrow[d] & X/y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
e \arrow[r, "(y,1_y)"'] & Y/y \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

et $(y, 1_y)$ est coasphérique.

Proposition 6

Si W est un localisateur fondamental fort, pour tout triangle commutatif dans $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

si p et q sont propres et si f induit une équivalence faible dans les fibres, alors f est une équivalence faible.

2. Morphismes propres et dérivateurs

On se fixe un dérivateur $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{C}at$.

On note $W = W_{\mathbb{D}}$ l'ensemble des $\mathbb{D}$-équivalence. W est un localisateur fondamental fort.

Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, u est asphérique (resp. coasphérique) au-dessus de C si $\forall c \in \mathrm{Ob}\, C$, $A/_c \xrightarrow{u/_c} B/_c$ (resp. $c\backslash A \xrightarrow{c\backslash u} c\backslash B$) est une $\mathbb{D}$-équivalence.

On a montré que u est asphérique au-dessus de C si et seulement si $w_* p_B^* \longrightarrow v_* p_A^*$ est un isomorphisme.

Cela équivaut à dire que $p_{A!}v^* \longrightarrow p_{B!}w^*$ est un isomorphisme.

Dualement (en passant à Δ°) on voit que u est coasphérique si et seulement si $p_{B_*}w^* \longrightarrow p_{A_*}v^*$ est un isomorphisme

En particulier $A \xrightarrow{u} B$ est coasphérique si et seulement si $p_{B_*} \longrightarrow p_{A_*}u^*$ est un isomorphisme.

Lemme

Soit

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\swarrow}"] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

un 2-carré ($\alpha : uv \longrightarrow wu'$).

Alors $\mathcal{D}$ satisfait à la propriété de changement de base cohomologique (i.e $w^*u_* \longrightarrow u'_*v^*$ est un isomorphisme) si et seulement si pour tout objet b' de B' si on pose $b = w(b')$

$$\begin{tikzcd} A'/b' \arrow[rr] \arrow[dr, "v\, j_{u',b'}"'] & & A/b \arrow[dl, "j_{u,b}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$A'/b' \longrightarrow A/b$ est coasphérique au-dessus de A.

Démonstration : on a

$$\begin{tikzcd} A'/b' \arrow[r, "j_{u',b'}"] \arrow[d, "p_{A'/b'}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & A' \arrow[d, "u'"] \\ e \arrow[r, "i_{B',b'}"'] & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A/b \arrow[r, "j_{u,b}"] \arrow[d, "p_{A/b}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B \end{tikzcd}$$

$w^* u_* \xrightarrow{\sim} u'_* v^*$ est un isomorphisme si et seulement si $\forall b' \in \mathrm{Ob}\, B'$

$$i_{B',b'}^{*} w^* u_* \xrightarrow{\sim} i_{B',b'}^{*} u'_* v^* .$$

or $i_{B',b'}^{*} w^* u_* = i_{B,b}^{*} u_* \xrightarrow{\sim} p_{A/b\,*} j_{u,b}^{*}$

et $i_{B',b'}^{*} u'_* v^* \xrightarrow{\sim} p_{A'/b'\,*} j_{u',b'}^{*} v^* = p_{A'/b'\,*} (v j_{u',b'})^*$

or $p_{A/b\,*} j_{u,b}^{*} \xrightarrow{\sim} p_{A'/b'\,*} (v j_{u,b})^*$ si et seulement si $A'/b' \to A/b$ est coasphérique.

Proposition 7

Si

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien de Cat et si u est propre, ~~il suffit~~ $\mathcal{D}$ satisfait la propriété de changement de base cohomologique

Démonstration :

En vertu du lemme, il suffit de montrer que $\forall b' \in Ob\, B'$ $b = w(b')$ $A'/b' \to A/b$ est coasphérique. Or on a

$$\begin{tikzcd} A'_{b'} \arrow[r, "\text{iso}"] \arrow[d, "\text{coasphérique}"'] & A_b \arrow[d, "\text{coasphérique}"] \\ A'/b' \arrow[r] & A/b \end{tikzcd}$$

Théorème 2

Soit $A \xrightarrow{u} B \in Fl(Cat)$. On a l'équivalence :

(a) u est propre

(b) pour tout diagramme formé de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u''"'] \arrow[dr, phantom, "D"] & A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w'"'] & B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

D satisfait à la propriété de changement de base cohomologique i.e

$$w'^{*} u'_{*} \to u''_{*} v'^{*}$$

est un isomorphisme.

Démonstration :

Prop 7 $\Rightarrow$ ((a) $\Rightarrow$ (b)).

(b) $\Rightarrow$ (a).

En vertu du théorème 1, il suffit de montrer que w' coasphérique $\Rightarrow$ v' coasphérique.

Or w' coasphérique $\Rightarrow$ $P_{B'*} \xrightarrow{\sim} P_{B''*} w'^*$

on a

$$\begin{tikzcd}
P_{A'*} \arrow[rr] \arrow[d, "\wr"'] & & P_{A''*} v'^* \arrow[d, "\wr"] \\
P_{B'*} u'_* \arrow[r, "\sim"] & P_{B''*} w'^* u'_* \arrow[r, "\sim"] & P_{B''*} u''_* v'^*
\end{tikzcd}$$

Homotopie "dans" un dérivateurs G. Maltsiniotis, 9/05/01

Dérivateur (faible) à droite $\Rightarrow$ groupoïde fondamental

$$\left.\begin{array}{c} * \longrightarrow X \\ \mathbb{D}(\Delta_1) \end{array}\right\} \text{ groupe } \pi_1$$

Dérivateur pointé <u>Der5</u>, <u>Der6</u>

$\rightsquigarrow$ structures triangulées non-additive (à la Quillen)

Dérivateur <u>Der1</u> – <u>Der7</u> $\Rightarrow$ $\forall I$ $\mathbb{D}(I)$ est muni d'une structure de catégorie triangulée canonique.

A petite catégorie.

NA ensemble simplicial $\Delta_n \longmapsto \mathrm{Hom}_{Cat}(\Delta_n, A)$

$N : Cat \hookrightarrow \widehat{\Delta}$ est pleinement fidèle.

L'image essentielle de N est décrite par une propriété d'exactitude à gauche:

Soit X un ensemble simplicial

$m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd} \Delta_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & \Delta_m \arrow[d] \\ \Delta_n \arrow[r] & \Delta_{m+n} \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \ \ (\text{haut}),\ 0 \mapsto n \ \ (\text{gauche}) \\ k \mapsto k \ \ (\text{bas}),\ k \mapsto m+k \ \ (\text{droite}) \end{array}$$

est cocartésien.

X est le nerf d'une catégorie si et seulement si les carrés

$$\begin{tikzcd} X_{m+n} \arrow[r] \arrow[d] & X_m \arrow[d] \\ X_n \arrow[r] & X_0 \end{tikzcd}$$

sont cartésiens.

On pourrait donc définir une catégorie comme étant un ensemble simplicial satisfaisant cette propriété.

On définit $\tilde{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles

$$\tilde{\Delta}_n = \{0, \dots, n\} \ , \ n \geq 0 \ ,$$

sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}ns$.

On a une inclusion $\Delta \hookrightarrow \tilde{\Delta}$.

Proposition:

Soit A une petite catégorie. Alors A est un groupoïde si et seulement si $NA : \Delta^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns$ se prolonge en un foncteur $\tilde{\Delta}^\circ \longrightarrow \mathcal{E}ns$.

Si M est une catégorie admettant des produits fibrés, on peut définir une notion d'objet catégorie de M, ou encore, ce qui revient au-même, considérer les objets simpliciaux de M satisfaisant les conditions d'exactitude ci-dessus.

De même, on peut ainsi définir la notion d'objet groupoïde dans M, i.e les foncteurs $\tilde{\Delta}^\circ \longrightarrow M$ vérifiant la même condition d'exactitude.

Si $\mathbb{D}$ est un dérivateur, une catégorie de $\mathbb{D}(e)$ (resp. un groupoïde dans $\mathbb{D}(e)$) sera un objet de $\mathbb{D}(\Delta)$ (resp. de $\mathbb{D}(\tilde{\Delta})$) satisfaisant les propriétés d'exactitude comme ci-dessus mais en terme de carrés homotopiquement cartésiens.

G. Maltsiniotis

16 Mai 2001

I - groupoïdes ordinaires

II - groupoïdes dans une catégorie

III - carrés homotopiquement cartésien

IV - Groupoïdes homotopiques

Δ catégorie des simplexes

objets $\Delta_m = \{0, \dots, m\}$, ordonnés par l'ordre naturel, $m \geq 0$

Flèches applications croissantes

$\delta_m^i : \Delta_{m-1} \to \Delta_m \quad 0 \leq i \leq m$ est l'unique injection croissante dont l'image ne contient pas i.

$\sigma_m^i : \Delta_{m+1} \to \Delta_m \quad 0 \leq i \leq m$ est l'unique surjection croissante qui prend deux fois la valeur i

$\widehat{\Delta} = \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^\circ, \mathcal{E}ns)$

A petite catégorie $\quad NA : \Delta_m \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(\Delta_m, A)$

$N : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$

N est pleinement fidèle et son image essentielle est formée des $X \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\Delta}$ tels que :

$m, n \geq 1$

$$\begin{tikzcd} \Delta_m \arrow[dr, "i"] & & \Delta_n \arrow[dl, "j"'] \\ & \Delta_{m+n} & \end{tikzcd} \qquad k \mapsto k, \quad k \mapsto m+k$$

$$\begin{tikzcd} & \Delta_0 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ \Delta_m & & \Delta_n \end{tikzcd} \qquad 0 \mapsto m, \quad 0 \mapsto 0$$

$$\begin{tikzcd}
\Delta_0 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & \Delta_n \arrow[d, "j"] \\
\Delta_m \arrow[r, "i"'] & \Delta_{m+n}
\end{tikzcd}$$

est cocartésien de Δ, i.e un carré cartésien de Δ°

$\forall\, m, n \geq 1$

$$\begin{tikzcd}
X_{m+n} \arrow[r, "X(i)"] \arrow[d, "X(j)"'] & X_n \arrow[d, "X(a)"] \\
X_m \arrow[r, "X(b)"'] & X_0
\end{tikzcd}$$

est un carré cartésien.

Cette condition est équivalente à demander que pour $m \in \mathbb{N}$

$$\alpha_i : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_m \qquad 1 \leq i \leq m$$
$$0 \longmapsto i-1$$
$$1 \longmapsto 1$$

$\forall\, m \geq 2$, l'application

$$X_m \xrightarrow{(\alpha_m^*, \ldots, \alpha_1^*)} \underbrace{X_1 \underset{X_0}{\times} X_1 \underset{X_0}{\times} \cdots \underset{X_0}{\times} X_1}_{m \text{ fois}}$$

est une bijection.

(où $X_1 \underset{X_0}{\times} X_1$ est le produit fibré de

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, "X(\delta_1^0)"'] & & X_1 \arrow[dl, "X(s_1^1)"] \\
& X_0 &
\end{tikzcd}$$

)

En particulier, $X_2 \xrightarrow[\sim]{(X(\delta_2^0),\,X(\delta_2^2))} X_1 \underset{X_0}{\times} X_1$ i.e.

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "X(\delta_2^2)"] \arrow[d, "X(\delta_2^0)"'] & X_1 \arrow[d, "X(\delta_1^0)"] \\
X_1 \arrow[r, "X(\delta_1^1)"'] & X_0
\end{tikzcd}$$
est cartésien.

Si $X \in \mathrm{Ob}\,\hat{\Delta}$ satisfait ces conditions d'exactitude, on définit une catégorie A par :

$\mathrm{Ob}\,A = X_0$

$\mathrm{Fl}\,A = X_1$

$$X_1 \underset{t = X(\delta_1^0)}{\overset{s = (X(\delta_1^1))}{\rightrightarrows}} X_0$$ source / but

$$X_0 \xrightarrow{X(\sigma_0^0)} X_1$$ identité

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, shift left, "\sim"] \arrow[d] & X_1 \underset{X_0}{\times} X_1 \arrow[l, bend left] \arrow[dl] \\
X_1 &
\end{tikzcd}$$
composition.

On note $\tilde{\Delta}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}ns$ dont les objets sont les ensembles $\tilde{\Delta}_m = \{0, \dots, m\}$, $m \geq 0$.
On a une inclusion évidente $\Delta \hookrightarrow \tilde{\Delta}$.
On définit un plongement

$$\begin{aligned} \mathcal{E}ns &\hookrightarrow \mathcal{C}at \\ E &\longmapsto \text{le groupoïde simplement connexe d'ensemble} \\ &\qquad \text{d'objets } E \text{ (abusivement noté encore } E) \end{aligned}$$

i.e $\mathrm{Hom}_E(x,y) = \{*\}$ $\forall x, y \in E$.

Alors $\tilde{\Delta}_m = \Delta_m[\mathrm{Fl}(\Delta_m)^{-1}] = \pi_1 \Delta_m$.

<u>Proposition:</u>

Une petite catégorie A est un groupoïde si et seulement si le foncteur $NA : \Delta^\circ \to \mathcal{E}ns$ se prolonge en un foncteur $\tilde{\Delta}^\circ \to \mathcal{E}ns$, et alors ce prolongement est unique.

<u>Dém</u>: Supposons que A soit un groupoïde, alors

$$\forall n \geq 0 \qquad NA_n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(\Delta_n, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}at}(\tilde{\Delta}_n, A).$$

Réciproquement, supposons que NA se prolonge à $\tilde{\Delta}$, et choisissons un tel prolongement, de sorte que pour toute application $\tilde{\Delta}_m \xrightarrow{\varphi} \tilde{\Delta}_n$ on ait une application $NA_n \xrightarrow{\varphi_*} NA_m$, et ceci fonctoriellement.
On note τ la transposition $(0,1)$ de $\{0,1\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on note τ_i la transposition $(i-1, i)$ dans $\{0, \dots, n\}$, $1 \leq i \leq n$.

$$\alpha_i : \{0,1\} \longrightarrow \{0,\dots,n\} \qquad 1 \leq i \leq n$$
$$0 \longmapsto i-1$$
$$1 \longmapsto i$$

$$\beta_i : \{0,1\} \longrightarrow \{0,\dots,n\} \qquad 1 < i \leq n$$
$$0 \longmapsto i-2$$
$$1 \longmapsto i$$

Soit $a_0 \xrightarrow{g_1} a_1 \xrightarrow{g_2} a_2 \longrightarrow \dots \xrightarrow{g_n} a_n$ un n-simplexe de NA, noté $(g_n,\dots,g_1) \in NA_n$

On a alors
$$\alpha_i^*(g_n,\dots,g_1) = g_i$$
$$\beta_i^*(g_n,\dots,g_1) = g_i\, g_{i-1}$$

On a les relations
$$\tau_i \alpha_j = \alpha_j \text{ si } |j-i| \geq 2, \quad 1 \leq i,j \leq n$$
$$\tau_i \alpha_{i-1} = \beta_i, \quad 1 < i \leq n$$
$$\tau_i \alpha_i = \alpha_i \tau, \quad 1 \leq i \leq n$$
$$\tau_i \alpha_{i+1} = \beta_{i+1}, \quad 1 \leq i < n$$

On en déduit que
$$\tau_1^*(g_n,\dots,g_1) = (g_n,\dots,g_3,\ g_2 g_1,\ \tau^* g_1)$$
$$\tau_i^*(g_n,\dots,g_1) = (g_n,\dots,g_{i+2},\ g_{i+1} g_i,\ \tau^* g_i,\ g_i g_{i-1},\ g_{i-2},\dots,g$$
$$\tau_n^*(g_n,\dots,g_1) = (\tau^*(g_n),\ g_n g_{n-1},\ g_{n-2},\dots,g_1)$$

Pour montrer l'unicité, il suffit de montrer l'unicité de τ^*.

Pour $n=2$, on a $\tau_1^*(g_2 \cdot g_1) = (g_2 g_1 \cdot \tau^* g_1)$

$$\tau_2^*(g_2 \cdot g_1) = (\tau^* g_2 \cdot g_2 g_1)$$

et $\tau_1 \beta_1 = \alpha_2$, $\tau_2 \beta_2 = \alpha_1$

Cela implique que $g_2 g_1 \tau^*(g_1) = g_2$ (1)

et $\tau^*(g_2) g_2 g_1 = g_1$ (2).

Pour $g_2 = 1_{a_1}$, l'égalité (1) donne $g_1 \tau^*(g_1) = 1_{a_1}$ et (2) donne $\tau^*(g_2) g_2 = 1_{a_1}$ (où $g_1 = 1_{a_1}$).

Cela prouve à la fois l'unicité de τ^* et le fait que A est un groupoïde.

Pseudo-catégories.

Une pseudo-catégorie est la même chose qu'une catégorie, à ceci près qu'on ne demande pas l'existence d'identités. La notion de morphismes. On note ps-Cat la catégorie des petites pseudo-catégories. On a une inclusion fidèle (mais pas pleine)

$$Cat \hookrightarrow ps\text{-}Cat$$

Exemple: Soit E un ensemble muni d'une relation transitive R. On définit une pseudo-catégorie par $Ob = E$ et $Hom(x,y) = \begin{cases} * & \text{si } xRy \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$.

Exemple : On note $\Delta'_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ l'ensemble à $n+1$ éléments muni de la "relation d'ordre" strict $<$.
On note Δ' la sous-catégorie pleine de ps-Cat formée des objets Δ'_n, $n \geq 0$. Les morphismes de Δ' sont les applications strictement croissantes. On a un foncteur nerf

$$N' : \text{ps-Cat} \longrightarrow \widehat{\Delta'}$$

défini par $N'A_n = \mathrm{Hom}_{\text{ps-Cat}}(\Delta'_n, A)$.
On vérifie que N' est pleinement fidèle et que son image essentielle est caractérisée par les mêmes conditions d'exactitudes que dans le cas des catégories.
On a une inclusion $\Delta' \hookrightarrow \Delta$.

<u>Proposition</u>

Une petite pseudo-catégorie A est une catégorie si et seulement si $N'A : \Delta'^{\circ} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ se prolonge en un foncteur de Δ° vers $\mathcal{E}ns$, et alors ce prolongement est unique (Exercice).

II. Catégories et groupoïdes dans une catégorie.

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie admettant des produits fibrés.
Un objet catégorie X de $\mathcal{M}$ (on dira aussi une $\mathcal{M}$-catégorie) est la donnée de deux objets X_0 et X_1 de $\mathcal{M}$, et de deux flèches

$$X_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} X_0$$

et $X_0 \xrightarrow{\eta} X_1$, ainsi que $(X_1)_s \underset{X_0}{\times} {}_t(X_1) \xrightarrow{\mu} X_1$
de telle manière que pour tout objet T de $\mathcal{M}$,
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T, X_0)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T, X_1)$, etc... soit une catégorie, notée $X(T)$

Par le lemme de Yoneda, cela équivaut aux formules suivantes:

$$s\eta = 1_{X_0} = t\eta$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "t"'] & X_1 \underset{X_0}{\times} X_1 \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "\mu"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_1 \arrow[d, "s"] \\
X_0 & X_1 \arrow[l, "t"] \arrow[r, "s"'] & X_0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \underset{X_0}{\times} X_1 \underset{X_0}{\times} X_1 \arrow[r, "1_{X_0} \times_{X_0} \mu"] \arrow[d, "\mu \times_{X_0} 1_{X_0}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_1 \underset{X_0}{\times} X_1 \arrow[d, "\mu"] \\
X_1 \underset{X_0}{\times} X_1 \arrow[r, "\mu"'] & X_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_0 \underset{X_0}{\times} X_1 \arrow[r, "\eta \times_{X_0} 1_{X_1}"] \arrow[dr, "\sim"'] & X_1 \underset{X_0}{\times} X_1 \arrow[d, "\mu"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_1 \underset{X_0}{\times} X_0 \arrow[l, "1_{X_1} \times_{X_0} \eta"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
& X_1 &
\end{tikzcd}$$

On définit un foncteur nerf

$$N : M\text{-}Cat \longrightarrow \underline{Hom}(\Delta^\circ, M)$$

défini par $NX_n = \underbrace{X_1 \underset{X_0}{\times} X_1 \underset{X_0}{\times} \cdots \underset{X_0}{\times} X_1}_{n\text{-fois}}$

Si X est une M-catégorie, et si $T \in \mathrm{Ob}\, M$, on vérifie que $NX(T) = (NX)(T)$.

On en déduit par le yoga de Yoneda que le foncteur

$$N : M\text{-}Cat \longrightarrow \underline{Hom}(\Delta^\circ, M)$$

est pleinement fidèle, et que son image est caractérisée par les propriétés d'exactitude habituelles.

On dit qu'une M-catégorie X est un M-groupoïde si pour tout objet T de M, $X(T)$ est un groupoïde. Par le lemme de Yoneda, cela équivaut encore à demander qu'il existe un morphisme $S : X_1 \longrightarrow X_1$ tel que $sS = t$ et $tS = s$

$$\begin{tikzcd}
(X_1)_s \underset{X_0}{\times}{}^s (X_1) \arrow[rr, "1_{X_1} \times_{X_0} S"] & & (X_1)_s \underset{X_0}{\times}{}^t (X_1) \arrow[d, "\mu"] \\
X_1 \arrow[u, "\Delta_s"] \arrow[r, "t"'] & X_0 \arrow[r, "\eta"'] & X_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "\Delta_t"'] \arrow[r, "s"] & X_0 \arrow[r, "\eta"] & X_1 \\
(X_1)_t \underset{X_0}{\times}{}^t (X_1) \arrow[rr, "S \times_{X_0} 1_{X_1}"'] & & (X_1)_s \underset{X_0}{\times}{}^t (X_1) \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

La proposition caractérisant les groupoïdes en fonction de leurs nerfs se généralise au cas des M-groupoïdes.

III-VI. On se fixe un prédérivateur $\mathbb{D}$ de domaine $\mathcal{D}ia$

$$\mathbb{D} : \mathcal{D}ia^{o} \longrightarrow CAT$$

satisfaisant à Der 2, Der 3g, Der 4g

<u>Der 2</u> Pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, $a \in \mathrm{ob}A$, $i_{A,a} : e \longrightarrow A$, $* \longmapsto a$

La famille de foncteurs $i_{A,a}^{*} : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(e)$, $a \in \mathrm{ob}A$ est conservative.

Variante : Pour toute famille de flèches de $\mathcal{D}ia$

$$u_k : A_k \longrightarrow A$$

surjective sur les objets de A, la famille de foncteurs $u_k^{*} : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(A_k)$ est conservative.

<u>Der 3g</u> Pour toute flèche $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$, le foncteur $\mathbb{D}(B) \xrightarrow{u^{*}} \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint à droite $\mathbb{D}(A) \xrightarrow{u_{*}} \mathbb{D}(B)$.

<u>Der 4g</u> pour toute flèche $u : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$, $\forall b \in \mathrm{ob}B$

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r, "j = j_{A,b}"] \arrow[d, "p = p_{A/b}"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B \end{tikzcd} \qquad i_{B,b}^{*} u_{*} \xrightarrow{\sim} p_{*} j^{*}.$$

On note $\square = \Delta_1^\circ \times \Delta_1^\circ$

$\lrcorner$ la sous-catégorie pleine de $\square$ dont les objets sont $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

$i_\lrcorner : \lrcorner \longrightarrow \square$ l'inclusion.

On dit qu'un objet X de $\mathbb{D}(\square)$ est homotopiquement cartésien si le morphisme d'adjonction $X \longrightarrow i_{\lrcorner *}\, i_\lrcorner^{*} X$ est un isomorphisme.

Soit $A = \mathbb{\Delta}', \mathbb{\Delta}, \tilde{\mathbb{\Delta}}$, et $A_n = \Delta'_n, \Delta_n, \tilde{\Delta}_n$.

Pour $p, q \geq 1$, on note $i_{p,q} : \square \longrightarrow A$ le foncteur défini par

$$
\begin{tikzcd}
(0,0) & (0,1) \arrow[l] \\
(1,0) \arrow[u] & (1,1) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
\quad \longmapsto \quad
\begin{tikzcd}
 & k+p & & k \arrow[ll, mapsto] & \\
k & A_{p+q} & & A_q \arrow[ll] & 0 \\
k \arrow[u, mapsto] & A_p \arrow[u] & & A_0 \arrow[ll] \arrow[u] & 0 \arrow[u, mapsto] \\
 & p & & 0 \arrow[ll, mapsto] &
\end{tikzcd}
$$

Définition :

Une $\mathbb{D}$-pseudo-catégorie (resp. une $\mathbb{D}$-catégorie, resp. un $\mathbb{D}$-groupoïde) est un objet X de $\mathbb{D}(\mathbb{\Delta}')$ (resp. de $\mathbb{D}(\mathbb{\Delta})$, resp. de $\mathbb{D}(\tilde{\mathbb{\Delta}})$) tel que $\forall\, p, q \geq 1$, $i_{p,q}^{*} X$ soit un carré homotopiquement cartésien.

Proposition 1:

Soit $u : A \longrightarrow B$ une flèche de Dia admettant un adjoint à gauche. Alors le morphisme canonique

$$p_{B_*} \longrightarrow p_{A_*} u^* = p_{B_*} u_* u^*$$

est un isomorphisme.

En particulier, si C est un objet de Dia admettant un objet final, alors $i_{C,c}^* \simeq p_{C_*}$.

Démonstration:

Soit $v : B \longrightarrow A$ un adjoint à gauche de u. Alors v^* est un adjoint à gauche de u^*, i.e $v^* \simeq u_!$ et $u^* = v_*$.

On obtient ainsi $p_{A_*} u^* \simeq p_{A_*} v_* \simeq (p_A v)_* = p_{B_*}$.

Lemme

Soit $A \xrightarrow{u} B$ une flèche de Dia, pleinement fidèle.

Alors $\forall a \in \mathrm{ob} A$, $b = u(a)$, le morphisme canonique

$$i_{B,b}^* u_* \longrightarrow i_{A,a}^*, \text{ induit par } u^* u_* \longrightarrow 1_{\mathcal{D}(A)},$$

est un isomorphisme.

Démonstration:

Cela résulte de Der4g et du fait que $\forall a \in \mathrm{ob} A$, $b = u(a)$ $A/a \longrightarrow A/b$ est un isomorphisme, et $(a, 1_b)$ est un objet final de A/b.

Proposition 2

Si $A \xrightarrow{u} B$ est un foncteur pleinement fidèle dans Dia, alors le foncteur $\mathbb{D}(A) \xrightarrow{u_*} \mathbb{D}(B)$ est pleinement fidèle.

Démonstration:

Il suffit de montrer que $u^* u_* \longrightarrow 1_{\mathbb{D}(A)}$ est un isomorphisme. Le lemme ci-dessus et l'axiome Der 2 permettent de conclure.

G. Maltsiniotis 23 mai 2001

$\mathbb{D} : \mathcal{D}ia^{\circ} \longrightarrow CAT$ prédérivateur satisfaisant Der 2, Der 3g, Der 4g

$$\square = \Delta_1^{\circ} \times \Delta_1^{\circ} = \begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r] & (0,1) \\ (1,0) \arrow[u] \arrow[r] & (1,1) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\lrcorner$ = sous-catégorie pleine de $\square$ ayant pour objets $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$

$\lrcorner \xrightarrow{i_{\lrcorner}} \square$ est l'inclusion

$X \in \mathrm{Ob}\, \mathbb{D}(\square)$ est homotopiquement cartésien (h-cart) si $X \longrightarrow i_{\lrcorner *} i_{\lrcorner}^{*} X$ est une bijection.

<u>Proposition 1</u>

Si $X \xrightarrow{f} Y$ est un morphisme de $\mathbb{D}(\square)$ entre objets h-cart alors f est un isomorphisme ssi $i_{\lrcorner}^{*} f$ est un isomorphisme

<u>Dém</u> : $i_{\lrcorner *}$ est pleinement fidèle et donc conservatif.

<u>Proposition 2</u>

Si X est un objet de $\mathbb{D}(\lrcorner)$ alors $i_{\lrcorner *} X$ est un objet h-cart de $\mathbb{D}(\square)$.

<u>Dém</u> : Cela résulte de la pleine fidélité de $i_{\lrcorner *}$.

<u>Proposition 3</u>

Soit X un objet de $\mathbb{D}(\square)$.

Alors X est homotopiquement cartésien si et seulement si

$$i_{\square,(0,0)}^{*} X \longrightarrow p_{\lrcorner *}\, i_{\lrcorner}^{*} X \text{ est un isomorphisme.}$$

Dém: Par Der2, X est h-cart ssi

$$i_{\lrcorner}^{*} X \to i_{\lrcorner}^{*} i_{\lrcorner *} i_{\lrcorner}^{*} X \quad \text{et} \quad i_{\square,(0,0)}^{*} X \to i_{\square,(0,0)}^{*} i_{\lrcorner *} i_{\lrcorner}^{*} X$$

sont des isomorphisme.

Or $i_{\lrcorner}^{*} X \to i_{\lrcorner}^{*} i_{\lrcorner *} i_{\lrcorner}^{*} X$ est toujours un isomorphisme.

Comme $(0,0)$ est un objet final de $\square$, on a $i_{\square,(0,0)}^{*} = p_{\square *}$

et $p_{\square *} i_{\lrcorner *} = p_{\lrcorner *}$.

Lemme:

Soient $A \xrightarrow{k} B \xrightarrow{\ell} C$ dans Dia tels que

$\forall a \in \mathrm{ob} A \quad \forall b \in \mathrm{ob} B$

$$\mathrm{Hom}_B(k(a), b) \to \mathrm{Hom}_C(\ell k(a), \ell(b))$$

soit une bijection.

Alors $\ell^{*} \ell_{*} k_{*} \to k_{*}$ est un isomorphisme.

Dém: C'est un iso. ssi $\forall b \in \mathrm{ob} B$

$$\underbrace{i_{B,b}^{*} \ell^{*}}_{\|} \ell_{*} k_{*} \to i_{B,b}^{*} k_{*} \quad \text{est un iso.}$$

$$i_{C,\ell(b)}^{*} \ell_{*} k_{*} \simeq i_{C,\ell(b)}^{*} (\ell k)_{*}$$

$$\begin{tikzcd} A/\ell(b) \arrow[r, "j_{\ell k,\ell(b)}"] \arrow[d, "p_{A/\ell(b)}"'] & A \arrow[d, "\ell k"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] \\ e \arrow[r, "i_{C,\ell(b)}"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A/b \arrow[r, "j_{k,b}"] \arrow[d, "p_{A/b}"'] & A \arrow[d, "k"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] \\ e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B \end{tikzcd}$$

Donc $i_{C,\ell(b)}^{*} (\ell k)_{*} \simeq p_{A/\ell(b) *} j_{\ell k, \ell(b)}^{*}$ et $i_{B,b}^{*} k_{*} \simeq p_{A/b *} j_{k,b}^{*}$

Lemme

Soient $A \xrightarrow{u} B$ et $\square \xrightarrow{v} B$ dans Dia tels que $b = v(0,0)$ ne soit pas dans l'image de u, ni dans celle de $v i_\lrcorner$.

On suppose qu'il existe une sous-catégorie B' (non nécessairement pleine) de B satisfaisant les conditions suivantes:

a) u et v se factorisent par B'

b) Le foncteur $\tilde{v} : \lrcorner \longrightarrow B' - \{b\}/b$ induit par v admet un adjoint à gauche.

c) Si on note
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & B \\ & B' - \{b\} \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$
la factorisation induite

$\forall a \in \mathrm{ob} A$, $\forall b' \in \mathrm{ob}\, B - \{b\}$

$\mathrm{Hom}_{B'-\{b\}}(u'(a), b') \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(u(a), k(b'))$

est bijective.

Alors pour tout objet X de $\mathbb{D}(A)$, $v^* u_* X$ est homotopiquement cartésien.

Dém: En vertu du lemme précédent et du point (c), on a
$$k^* k_* u'_* \simeq u'_* .$$

$$\lrcorner \xrightarrow{\tilde{v}} B' - \{b\}/b \xrightarrow{j = \text{oubli}} B' - \{b\} \xrightarrow{k} B$$

$k j \tilde{v} = v i_\lrcorner$. On a (b) $\Rightarrow (p_{B'-\{b\}/b})_* \xrightarrow{\sim} p_{\lrcorner *} \tilde{v}^*$.

$u_* X \simeq k_* u'_* X \simeq k_* k^* k_* u'_* \simeq k_* k^* u_* X$.

$$i^*_{\square,(0,0)} v^* u_* X \simeq i^*_{B,b} k_* k^* u_* X \simeq (p_{B'-\{b\}/b})_* j^* k^* u_* X$$
$$\overset{(b)}{\simeq} p_{\lrcorner *} \tilde{v}^* j^* k^* u_* X$$
$$\simeq p_{\lrcorner *} i_\lrcorner^* v^* u_* X .$$

<u>Lemme</u>: Soit $v : I \longrightarrow J$ une application croissante entre ensembles ordonnés.

Alors v admet un adjoint à gauche u si et seulement si $\forall j \in J$ l'ensemble $I_j = \{ i \in I \mid j \leq v(i) \}$ admet un minimum. Le cas échéant, $u(j) = \min I_j$.

Machine à fabriquer des carrés homotopiquement cartésiens.

<u>Lemme</u>: Soit $v : \square \longrightarrow B$ un foncteur tel que $b = v(0,0)$ ne soit pas dans l'image de $vi_{\lrcorner}$, et tel que toute flèche de B de but b et de source $b' \neq b$ soit un monomorphisme.

Alors le foncteur $\tilde{v} : \lrcorner \longrightarrow B - \{b\}/b$ admet un adjoint à gauche si et seulement si

a) toute flèche $b' \longrightarrow b$, vérifiant $b' \neq b$, se factorise par f_1 ou par f_2

b) toute flèche $b' \longrightarrow b$, vérifiant $b' \neq b$, se factorisant par f_1 et par f_2, se factorise aussi par f_0

où on a le diagramme (dans B):

$$\begin{tikzcd}
b & v(0,1) \arrow[l, "f_2"'] \\
v(1,0) \arrow[u, "f_1"] & v(1,1) \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ul, "f_0"']
\end{tikzcd}$$

Retour aux $\mathbb{D}$-groupoïdes.

$p, q \geq 1$ On a $i_{p,q} : \square \hookrightarrow \tilde{\Delta}$ défini par le diagramme

$$\begin{tikzcd} \tilde{\Delta}_{p+q} & \tilde{\Delta}_q \arrow[l] \\ \tilde{\Delta}_p \arrow[u] & \tilde{\Delta}_0 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Rappel : un $\mathbb{D}$-groupoïde est un objet X de $\mathbb{D}(\tilde{\Delta})$ tel que $\forall p, q \geq 1$ $i_{p,q}^{*} X$ soit h-cart.

Soit X un objet de $\mathbb{D}(e)$.

On a $i_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}_0} : e \longrightarrow \tilde{\Delta}$.
$\qquad * \longmapsto \tilde{\Delta}_0$

<u>Proposition</u> $i_{\tilde{\Delta}, \Delta_0 \, *} X$ est un $\mathbb{D}$-groupoïde qu'on notera $\pi_1 X$.
On l'appelera le groupoïde fondamental de X.

<u>Dém</u> : Soit $\mathcal{B}_{p,q}$ la sous-catégorie de $\tilde{\Delta}$ dont les objets sont $\tilde{\Delta}_0$, $\tilde{\Delta}_p$, $\tilde{\Delta}_q$ et dont les flèches sont toutes les flèches dans $\tilde{\Delta}$ de Δ_0 vers un objet de $\mathcal{B}_{p,q}$, les flèches de $(*)$.
La machine à fabriquer des carrés h-cart appliquée à $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_{p,q}$ montre que $\forall p, q \geq 1$ $i_{p,q}^{*} i_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}_0 \, *} X$ est h-cart.

Lemme : Soit C la sous-catégorie pleine de $\Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ$ dont les objets sont $(2,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$ et soit

$$\delta_\varepsilon = \delta_2^\varepsilon \times 1_{\Delta_1^\circ} : \square \longrightarrow \Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ \qquad \varepsilon = 0,1,2.$$

Si $C \overset{u}{\hookrightarrow} \Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ$ désigne l'inclusion, pour tout objet X de $\mathbb{D}(C)$ et pour tout $\varepsilon = 0,1,2$, $\delta_\varepsilon^* u_* X$ est homotopiquement cartésien.

Dém : pour $\varepsilon = 0,2$ on applique la machine pour $B' = \Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ$.
Pour $\varepsilon = 1$ on a

$$\begin{tikzcd}
 & (0,1) \\
 & (1,1) \arrow[u] \\
(2,0) & (2,1) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(0,0) & (0,1) \arrow[l] \\
 & (1,1) \arrow[u] \\
(2,0) \arrow[uu] & (2,1) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(0,0) & (0,1) \arrow[l] \\
(1,0) \arrow[u] & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] \\
(2,0) \arrow[u] & (2,1) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

C $\qquad\qquad$ B' $\qquad\qquad$ $\Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ$

i.e on considère la sous-catégorie pleine B' de $\Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ$ formée des objets $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ et $(2,1)$, puis on applique la machine.

Proposition : En gardant les notations du lemme, soit $X \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(\Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ)$ tel que $\delta_0^* X$ soit h-cart. Alors $\delta_1^* X$ est h-cart. si et seulement si $\delta_2^* X$ l'est.

Dém :

On note D la sous-catégorie de $\Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ$

$$\begin{tikzcd} & (0,1) \\ (1,0) & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] \\ (2,0) \arrow[u] & (2,1) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

On note $C \overset{k}{\hookrightarrow} D \overset{\ell}{\hookrightarrow} \Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ$ les inclusions. On a $u = \ell k$.

Par le lemme, pour $\varepsilon = 0, 1, 2$, $\delta_\varepsilon^* u_* u^* X$ est h-cart.
Il suffit donc de montrer que $X \longrightarrow u_* u^* X$ est un isomorphisme si $\delta_1^* X$ ou $\delta_2^* X$ est h-cart.
Or $\delta_0^* X$ h-cart $\Rightarrow$ $\ell^* X \xrightarrow{\sim} \ell^* u_* u^* X$, i.e de manière équivalente (grâce à Der 2)

$$k^* \ell^* X \xrightarrow{\sim} k^* \ell^* u_* u^* X$$

$$\text{et } \delta_0'^* \ell^* X \xrightarrow{\sim} \delta_0'^* \ell^* u_* u^* X$$

où
$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[dr, "\delta_0'"'] & \Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ \\ & D \arrow[u, "\ell"'] \end{tikzcd}.$$

Or $k^* \ell^* = u^*$ et $u^* X \xrightarrow{\sim} u^* u_* u^* X$ car u_* est pleinement fidèle. Or $\delta_0'^* \ell^* = \delta_0^*$ et $\delta_0^* \ell^* X$ et $\delta_0^* u_* u^* X$ sont h-cart. Par la prop. 1 il suffit de montrer que

$$i_\lrcorner^* \delta_0^* X \xrightarrow{\sim} i_\lrcorner^* \delta_0^* u_* u^* X.$$

ce qui se calcule directement.

Soit $\varepsilon = 0,1$, et supposons que $\delta_\varepsilon^* X$ soit h-cart. En vertu de Lem 2, pour montrer que $X \xrightarrow{\sim} u_* u^* X$, il suffit de montrer que $l^* X \xrightarrow{\sim} l^* u_* u^* X$ et que

$$\delta_\varepsilon^* X \xrightarrow{\sim} \delta_\varepsilon^* u_* u^* X .$$

Or on sait que $l^* X \xrightarrow{\sim} l^* u_* u^* X$. On a

$$\begin{tikzcd}
\lrcorner \arrow[rr, "\delta_\varepsilon i_\lrcorner"] \arrow[dr, "\delta'_\varepsilon"'] & & \Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ \\
& \mathbf{D} \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

Il suffit de montrer que $i_\lrcorner^* \delta_\varepsilon^* X \xrightarrow{\sim} i_\lrcorner^* \delta_\varepsilon^* u_* u^* X$ (prop. 1), i.e que

$$\delta_\varepsilon'^* l^* X \xrightarrow{\sim} \delta_\varepsilon'^* l^* u_* u^* X .$$

ce qui a été montré ci-dessus.

G. Maltsiniotis 30 Mai 2001

Remarques : $X \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(e)$

$e \xrightarrow{i_{\tilde\Delta,\tilde\Delta_0}} \tilde\Delta$ est l'adjoint à droite de $\tilde\Delta \xrightarrow{p_{\tilde\Delta}} e$.

On définit $\pi X := i_{\tilde\Delta,\tilde\Delta_0\,!} X = p_{\tilde\Delta}^* X$.

On remarque que πX est un groupoïde. En effet $i_{p,q}^* \, p_{\tilde\Delta}^* X$ est h-cart, car on a un isomorphisme

$$X = i^*_{\square,(0,0)}\, p_\square^* X \xrightarrow{\sim} p_{\lrcorner\,*}\, i_\lrcorner^*\, p_\square^* X \simeq p_{\lrcorner\,*}\, p_\lrcorner^* X$$

dû au fait que $\lrcorner$ est $\mathbb{D}$-asphérique.

πX sera le groupoïde fondamental de X.

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie admettant des produits finis.
Une catégorie enrichie par $\mathcal{M}$ est une donnée

$$A = (\mathrm{ob}\, A, \underline{\mathrm{Hom}}, \eta, \mu)$$

où $\mathrm{ob}\, A$ est un ensemble et $\underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_2) \in \mathrm{ob}\, \mathcal{M}$ pour $a_1, a_2 \in \mathrm{ob}\, A$, ~~$\eta_a : \underline{\mathrm{Hom}}(a,a) \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}$~~

$* \xrightarrow{\eta_a} \underline{\mathrm{Hom}}(a,a) \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}$ (où $*$ est l'objet final de $\mathcal{M}$)

$\mu_{a_3 a_2 a_1} : \underline{\mathrm{Hom}}(a_2, a_3) \times \underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_2) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_3) \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}$

telle que $\forall\, T \in \mathrm{ob}\,\mathcal{M}$ il existe une catégorie $A(T)$ définie par $\mathrm{ob}\, A(T) = \mathrm{ob}\, A$, $\mathrm{Hom}_{A(T)}(a_1, a_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(T, \underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_2))$
les identités étant déterminées par η et la composition par μ.

On dit que A est un groupoïde enrichi par $\mathcal{M}$ si pour tout $T \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, $A(T)$ est un groupoïde.

Cela équivaut à l'existence d'une famille (alors unique) de flèches $I_{a_2,a_1} : \underline{\mathrm{Hom}}(a_1,a_2) \to \underline{\mathrm{Hom}}(a_2,a_1) \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}$ $a_1, a_2 \in \mathrm{Ob}\,A$ telles que $\forall T \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ $I_{a_2,a_1}(T)$ corresponde à l'application $f \mapsto f^{-1}$.

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie admettant des produits fibrés ~~et un objet final~~ et un objet final (pour définir $X_0 \times X_0 \dots$)

Une $\mathcal{M}$-catégorie (resp. $\mathcal{M}$-groupoïde)

$$X_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} X_0 \qquad X_0 \xrightarrow{\eta} X_1 \qquad (X_1)_s \underset{X_0}{\times}{}_t (X_1) \xrightarrow{\mu} X_1$$

S objet de $\mathcal{M}$, $E \subset \mathrm{Hom}(S, X_0) \mapsto$ catégorie (resp. groupoïde) A, enrichi(e) par $\mathcal{M}/S$ ($\mathcal{M}/S$ admet des produits finis).

$A = (\mathrm{Ob}\,A, \underline{\mathrm{Hom}}, \eta, \mu)$

$\mathrm{Ob}\,A = E$ $\quad \underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_2)$ $a_1, a_2 \in E$ est défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(a_1,a_2) \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d, "(t,s)"] \\
S \arrow[r, "(a_2,a_1)"'] & X_0 \times X_0
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[dr, dashed, "\eta_a"] \arrow[drr, bend left, "\eta_a"] \arrow[ddr, bend right, "1_S"'] & & \\
& \underline{\mathrm{Hom}}(a,a) \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d, "{(t,s)}"] \\
& S \arrow[r, "{(a,a)}"'] & X_0 \times X_0
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(a_2,a_3) \times_S \underline{\mathrm{Hom}}(a_1,a_2) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mu_{a_3a_2a_1}"] \arrow[dr, bend left] \arrow[dd, bend right] & X_1 \times X_1 \arrow[d, "\mu"] \\
\underline{\mathrm{Hom}}(a_1,a_3) \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d, "{(t,s)}"] \\
S \arrow[r, "{(a_3,a_1)}"'] & X_0 \times X_0
\end{tikzcd}
$$

Cas particulier important.

$S = *$ un objet final de $\mathcal{M}$.

$E \subset \underline{\mathrm{Hom}}(*, X_0) =$ "ensemble de points de X_0"

$\mathcal{M}/_S \simeq \mathcal{M}$.

Alors A est une catégorie (resp. un groupoïde) enrichi(e) par $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{M}$ admettant des produits finis.

$A = (\mathrm{Ob}\,A, \underline{\mathrm{Hom}}(\cdot,\cdot), \eta, \mu)$

$\mathrm{Ob}\,A$ ensemble

$\underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_2) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$

$* \xrightarrow{\eta_a} \underline{\mathrm{Hom}}(a, a) \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{M}$

$\underline{\mathrm{Hom}}(a_2, a_3) \times \underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_2) \xrightarrow{\mu_{a_3 a_2 a_1}} \underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_3)$

$\mathcal{M} \hookrightarrow \hat{\mathcal{M}}$ plongement de Yoneda.

$X_0 = \coprod_{\mathrm{Ob}\,A} *$ dans $\hat{\mathcal{M}}$. On a $* \xrightarrow{\varepsilon_a} X_0$ pour $a \in \mathrm{Ob}\,A$

$X_1 = \coprod_{a_1, a_2 \in \mathrm{Ob}\,A} \underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_2)$ dans $\hat{\mathcal{M}}$

$$\begin{array}{c} X_1 \\ \uparrow \varepsilon_{a_2, a_1} \\ \underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_2) \xrightarrow[p_{a_2, a_1}]{} * \end{array}$$

$X_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} X_0 \qquad s\,\varepsilon_{a_2, a_1} = \varepsilon_{a_1}\, p_{a_2 a_1}$

$t\,\varepsilon_{a_2 a_1} = \varepsilon_{a_2}\, p_{a_2 a_1}$

$X_0 \xrightarrow{\eta} X_1 \qquad \eta\,\varepsilon_a = \eta_a\, \varepsilon_{a,a}$

$(X_1)_s \underset{X_0}{\times}{}_t(X_1) \xrightarrow{\mu} X_1$

$\mu\, \varepsilon_{a_3 a_2 a_1} = \varepsilon_{a_3 a_1}\, \mu_{a_3 a_2 a_1}$

où $\underline{\mathrm{Hom}}(a_2, a_3) \times \underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_2) \xrightarrow{\varepsilon_{a_3 a_2 a_1}} (X_1)_s \underset{X_0}{\times}{}_t(X_1)$

<u>Lemme</u>: $(\mathrm{Ob}\,A, \underline{\mathrm{Hom}}, \eta, \mu)$ est une catégorie (resp. un groupoïde) enrichi(e) par $\mathcal{M}$ $\Longleftrightarrow$ $(X_0, X_1, s, t, \eta, \mu)$ est une $\hat{\mathcal{M}}$-catégorie

Finalement:

si $X_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} X_0 \qquad X_0 \xrightarrow{\eta} X_1 \qquad X_1 \underset{X_0}{\times} X_1 \longrightarrow X_1$

est une $\hat{\mathcal{M}}$-catégorie telle que

a) X_0 soit une somme de copies de $*$

(i.e $X_0 = \coprod_{\mathrm{Hom}(*, X_0)} *$)

b)
$$\begin{tikzcd} X_{a_2 a_1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{Cart.}"] & X_1 \arrow[d, "{(t,s)}"] \\ * \arrow[r, "{(a_2, a_1)}"'] & X_0 \times X_0 \end{tikzcd} \qquad \forall\, a_2, a_1 : * \to X_0$$

$X_{a_2 a_1}$ soit représentable.

La construction ci-dessus fournit une catégorie (resp. un groupoïde) enrichi(e) par $\hat{\mathcal{M}}$ (mais en fait par $\mathcal{M}$)

<u>Conclusion</u>:

Se donner une catégorie (resp. un groupoïde) enrichi(e) par $\mathcal{M}$ revient à se donner une $\hat{\mathcal{M}}$-catégorie (resp. un $\hat{\mathcal{M}}$-groupoïde) satisfaisant aux conditions a) et b).

. Une méthode "compliquée" pour construire une catégorie (resp. un groupoïde) enrichi(e) par $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ étant une catégorie admettant des produits finis)

Données :

. Un ensemble E

. $\varphi : \{0,1,\dots,n\} \longrightarrow E$ application

X_φ objet de $\mathcal{M}$

. $\psi : \{0,1,\dots,n\} \longrightarrow \{0,1,\dots,m\}$ croissante

$X_\varphi \xrightarrow{\psi^*} X_{\varphi\psi}$ morphisme de $\mathcal{M}$.

. fonctorialité :

$\psi' : \{0,\dots,n'\} \longrightarrow \{0,\dots,n\}$ croissante

$\psi'^* \psi^* = (\psi\psi')^*$

$1^*_{\{0,\dots,n\}} = 1_{X_\varphi}$

Cela revient à se donner un foncteur

$$(\Delta/E)^\circ \xrightarrow{X} \mathcal{M}$$

(E étant vu comme le groupoïde simplement connexe associé).

On demande en outre que

a) $\varphi : \{0\} \to E \Rightarrow X_\varphi = *$

b) $\forall p, q \geq 1 \quad \forall \varphi : \{0, \dots, p+q\}$

$$\begin{array}{ccccc} k & \{0,\dots,p\} & & \{0,\dots,q\} & k \\ \downarrow & \searrow i & & \swarrow j & \swarrow \\ k & & \{0,\dots,p+q\} & & p+k \end{array}$$

$$X_\varphi \xrightarrow{(j^*, i^*)} X_{\varphi j} \times X_{\varphi i}$$

soit un isomorphisme.

<u>Théorème</u>:

Il existe une catégorie enrichie par $\mathcal{M}$, A, unique telle que

a) $\mathrm{Ob}\, A = E$

b) $a_0, a_1 \in E \quad \underline{\mathrm{Hom}}(a_0, a_1) = X_{\underline{a}} \qquad \underline{a} : \{0,1\} \to E$, $0 \mapsto a_0$, $1 \mapsto a_1$

c) $a \in E \quad \eta_a = (\sigma_0^0)^* \qquad \{0,1\} \xrightarrow{\sigma_0^0} \{0\} \xrightarrow{a} E$, $0 \mapsto a$

$$= \left(* \longrightarrow \cancel{}\, X_{\underline{a}\sigma_0^0} = \underline{\mathrm{Hom}}(a,a) \right)$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}(a_1, a_2) \times \underline{\mathrm{Hom}}(a_0, a_1) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}(a_0, a_2) \\ \| & & \| \\ X_{\underline{a}\delta_2^0} \times X_{\underline{a}\delta_2^2} \xleftarrow[((\delta_2^0)^*, (\delta_2^2)^*)]{\sim} X_{\underline{a}} & \xrightarrow[(\delta_2^1)^*]{} & X_{\underline{a}\delta_2^1} \end{array}$$

où $\underline{a} : \{0,1,2\} \to X \quad i \mapsto a_i$

De plus A est un groupoïde enrichi par $\mathcal{M}$ si et seulement si l'action $\varphi \mapsto \varphi^*$ s'étend aux applications arbitraires, i.e si $(\Delta/E)^\circ \longrightarrow \mathcal{M}$ s'étend en un foncteur

$$(\tilde{\Delta}/E)^\circ \longrightarrow \mathcal{M}.$$

Esquisse de dém :

On a $\Delta/E \xrightarrow{u} \Delta$ le foncteur d'oubli.

Les conditions a) et b) impliquent que $u_! X$ est le nerf d'une catégorie (dans $\hat{\mathcal{U}}$) où $\widehat{\mathcal{M}\times\Delta/E} \xrightarrow{u_!} \widehat{\mathcal{M}\times\Delta}$ est l'adjoint à gauche de $\widehat{\mathcal{M}\times\Delta} \xrightarrow{u^*} \widehat{\mathcal{M}\times\Delta/E}$.

On se fixe à présent un dérivateur faible à gauche

$$\mathcal{D}ia^\circ \xrightarrow{\mathbb{D}} CAT.$$

On sait que pour tout A objet de $\mathcal{D}ia$, $\mathbb{D}(A)$ admet des produits finis, et en particulier un objet final.

- $\varnothing \xrightarrow{p_\varnothing} e$ induit $e = \mathbb{D}(\varnothing) \xrightarrow{p_{\varnothing *}} \mathbb{D}(e)$ qui est l'objet final en question, noté $*$.

- $$\begin{tikzcd} e \arrow[dr, "i_1"] & & \\ & e \amalg e \arrow[r, "p_{e\amalg e}"] & e \\ e \arrow[ur, "i_2"'] & & \end{tikzcd}$$

Pour $X \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(e \amalg e)$ $\quad p_{e\amalg e\,*} X \simeq i_1^* X \times i_2^* X.$

Lemme 1:

$$k : e \amalg e \longrightarrow \lrcorner \qquad \left(k i_1 = i_{\lrcorner,(1,0)} \,,\ k i_2 = i_{\lrcorner,(0,1)}\right)$$

$X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(\lrcorner)$.

$X \longrightarrow k_* k^* X$ est un isomorphisme si et seulement si $i_{\lrcorner,(1,1)}^{\,*} X = X_{1,1}$ est un objet final de $\mathbb{D}(e)$.

Dém: k est pleinement fidèle. Donc $X \xrightarrow{\sim} k_* k^* X$ si et seulement si $X_{1,1} \xrightarrow{\sim} (k_* k^* X)_{1,1}$.

Or $(k_* k^* X)_{1,1} \simeq *$, ce qu'on voit via le 2-diagramme

$$\begin{tikzcd}
\emptyset = e \amalg e /(1,1) \arrow[r] \arrow[d] & e \amalg e \arrow[d, "k"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow"] \\
e \arrow[r, "i_{\lrcorner,(1,1)}"'] & \lrcorner
\end{tikzcd}$$

en utilisant Der 4g.

Lemme 2:

Soit X un objet de $\mathbb{D}(\lrcorner)$, et soit $\operatorname{dia} X =$

$$\begin{tikzcd}
 & X_{01} \arrow[d] \\
X_{10} \arrow[r] & X_{11}
\end{tikzcd}$$

Si $X_{11} = *$, alors $p_{\lrcorner *} X \simeq X_{10} \times X_{01}$.

Proposition:

Soit $X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(\square)$.

$$\mathrm{dia}\,X = \begin{tikzcd} X_{00} \arrow[r] \arrow[d] & X_{01} \arrow[d] \\ X_{10} \arrow[r] & X_{11} \end{tikzcd}$$

On suppose que $X_{11} \simeq *$.

Alors X est h-cart. $\Longleftrightarrow$ $X_{00} \longrightarrow X_{10} \times X_{01}$ iso.

Dém: cela résulte du lemme 2 car X est h-cart. ssi $X_{00} \xrightarrow{\sim} p_{\lrcorner *}\, i_{\lrcorner}^{*} X$.

$X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(e)$.

Il s'agit d'introduire une notion d'ensemble de points base, et d'associer un groupoïde enrichi par $\mathbb{D}(e)$ à cette situation.

Il n'est pas raisonnable de dire qu'un ensemble de points base est un ensemble de flèches de la forme $* \longrightarrow X$, ni même un ensemble d'objets Y de $\mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$ tels que $\mathrm{dia}\,Y = * \longrightarrow X$. En effet, on peut montrer que si $Z \in \mathbb{D}(\lrcorner)$ vérifie

$$\mathrm{dia}\,Z = \begin{tikzcd} & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

il peut y avoir des automorphismes non-triviaux de Z induisant l'identité dans $\mathbb{D}(\Delta_1^\circ) \times_{\mathbb{D}(e)} \mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$.

Soit E un ensemble. On note $C(E)$ la catégorie obtenue comme une catégorie discrète en adjoignant un objet final noté ω, i.e. $C(E) = \int (\operatorname{dis} E \longrightarrow e)$. On obtient ainsi un foncteur $\mathcal{E}ns \xrightarrow{C} \mathcal{C}at$.

On note $C_n = C(\{0, \dots, n\})$, et $C^\circ(E) = (C(E))^\circ$.

Définition :

Soient E un ensemble, et X un objet de $\mathbb{D}(e)$.
Une ~~ensemble~~ famille de points base de X indexée par E est un objet $\tilde{X}$ de $\mathbb{D}(C^\circ(E))$ tel que

a) $\forall x \in E \quad \tilde{X}_x := i^*_{C^\circ(E),x} \tilde{X} \simeq *$

b) $\tilde{X}_\omega = i^*_{C^\circ(E),\omega} \tilde{X} \simeq X$ (via un isomorphisme donné).

i.e $\operatorname{dia} \tilde{X} =$

$$\begin{tikzcd} * \arrow[dr] & * \arrow[d] & \cdots & * \arrow[dll] \\ & X & & \end{tikzcd}$$

On va définir un groupoïde V enrichi par $\mathbb{D}(e)$ en utilisant la définition compliquée et une famille de points base E de X.

$$\{0,\dots,m\} \xrightarrow{\varphi} E \rightsquigarrow C_m \xrightarrow{C(\varphi)} C(E)$$

$$X_\varphi = P_{C^\circ_m\,*}\, C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}$$

$\{0,\dots,n\} \xrightarrow{\psi} \{0,\dots,m\}$ application

$$\begin{tikzcd}
X_\varphi = P_{C^\circ_m\,*}\, C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} \arrow[r] \arrow[ddr, "\psi^*"'] & P_{C^\circ_n\,*}\, C^\circ(\psi)_*\, C^\circ(\psi)^* C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} \arrow[d, equal] \\
 & P_{C^\circ_n\,*}\, C^\circ(\varphi\psi)^* \tilde{X} \arrow[d, equal] \\
 & X_{\varphi\psi}
\end{tikzcd}$$

La fonctorialité est évidente.

a) $\{0\} \xrightarrow{\varphi} E \qquad C^\circ = \begin{smallmatrix} 0 \\ \uparrow \\ \omega \end{smallmatrix}$ et

$$X_\varphi = P_{C^\circ_0\,*}\, C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} = \tilde{X}_{\varphi(0)}$$

d'où $X_\varphi \simeq *$.

b) On définit $u : C^\circ_{p+q} \longrightarrow \perp$

$k \longmapsto (0,1)$ si $0 \le k < p$

$k \longmapsto (1,0)$ si $p < k \le p+q$

$k \longmapsto u(\omega) = u(p) = (1,1)$

On fixe $\{0,\dots,p+q\} \xrightarrow{\varphi} E$

$$X_\varphi = P_{C^\circ_{p+q}\,*}\, C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} = P_{\perp\,*}\, u_*\, C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}.$$

$$\begin{tikzcd}
C^\circ_{p+q}/(\alpha,\beta) \arrow[r, "j_{u,(\alpha,\beta)}"] \arrow[d, "P_{C^\circ_{p+q}/(\alpha,\beta)}"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow"] & C^\circ_{p+q} \arrow[d, "u"] \\
e \arrow[r, "i_{\lrcorner,(\alpha,\beta)}"'] & \lrcorner
\end{tikzcd}$$

$$\left(u_* C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}\right)_{(\alpha,\beta)} \simeq \left(P_{C^\circ_{p+q}/(\alpha,\beta)}\right)_* j_{u,(\alpha,\beta)}^{\;*} C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}$$

$(\alpha,\beta) = (0,1) \Rightarrow C^\circ_{p+q}/(\alpha,\beta) = C^\circ_p$ et $j_{u,(0,1)}$ s'identifie à $C(\tilde{\Delta}_p) \xrightarrow{C^\circ(i)} C(\tilde{\Delta}_{p+q})$, $k \mapsto k$.

Donc $\left(u_* C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}\right)_{(0,1)} \simeq \left(P_{C^\circ_p}\right)_* C^\circ(\varphi i)^* \tilde{X}$

$$\simeq X_{\varphi i}$$

De même si $\tilde{\Delta}_q \xrightarrow{j} \tilde{\Delta}_{p+q}$ $k \mapsto k+p$

$$\left(u_* C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}\right)_{(1,0)} \simeq X_{\varphi j}$$

et $\left(u_* C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}\right)_{(1,1)} \simeq *$.

Le lemme 2 implique que $X_\varphi \simeq X_{\varphi j} \times X_{\varphi i}$.

Exemple : $\mathbb{D} = \mathrm{HoT}$.

X esp. top. (ou ens. simp., ou catégorie).

E ensemble de points de X (resp. $E \subset X_0$, ou $E \subset \mathrm{Ob}\, X$).

$\rightsquigarrow$ $\mathring{C}(E) \xrightarrow{\tilde{X}} \mathrm{Top}$ (resp...)

et donc $\tilde{X} \in \mathrm{HoT}(\mathring{C}(E))$.

le groupoïde associé est défini par

$$\underline{\mathrm{Hom}}(x_0, x_1) = p_{C_1^\circ \, *}\, C(\varphi)^* \tilde{X} = p_{\lrcorner\, *}\left(\begin{tikzcd} & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & X \end{tikzcd}\right)$$

$\underline{\mathrm{Hom}}(x_0, x_1)$ a le type d'homotopie de l'espace des chemins de x_0 vers x_1, i.e si x_0 et x_1 ne sont pas dans la même composante connexe, $\underline{\mathrm{Hom}}(x_0, x_1) = \emptyset$

et $\underline{\mathrm{Hom}}(x_0, x_1) \simeq \Omega(X, x_0) \simeq \Omega(X, x_1)$ dans HoT sinon.

On a donc $\pi_0 \tilde{X}$ (où $\pi_0 : \mathrm{HoT} \to \mathrm{Ens}$ commute aux produits) i.e $\pi_0 \tilde{X}$ (qui est un groupoïde enrichi par Ens i.e un groupoïde) est le groupoïde fondamental $\pi_1 X$ de X ....

G. Maltsiniotis 6 Juin 2001.

On se fixe $\mathbb{D} : \mathcal{D}ia^{\circ} \longrightarrow CAT$ dérivateur à gauche faible

Der 1 Der 2 Der 3g Der 4g

Ensemble E $C(E)$ catégorie obtenue en adjoignant un objet final ω à E vu comme une catégorie discrète

$E \xrightarrow{\varphi} E'$ $C(\varphi) : C(E) \longrightarrow C(E')$

$x \longmapsto \varphi(x)$ $x \in E$

$\omega \longmapsto \omega$

$C_n = C(\{0, \ldots, n\})$

X objet de $\mathbb{D}(e)$

Une famille de points base de X indexée par E

$\tilde{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{D}(C^{\circ}(E))$

a) $\forall x \in E$ $\tilde{X}_x = i^{*}_{C^{\circ}(E),\, x} \tilde{X} \simeq *$ objet final de $\mathbb{D}(e)$

b) $\tilde{X}_{\omega} \simeq X$ par un iso donné

$\pi(X ; \tilde{X})$ groupoïde enrichi par $\mathbb{D}(e)$ dont l'ensemble de points est E

$x_0, x_1 \in E$ $x : \{0,1\} \longrightarrow E$ $i \mapsto x_i$

$\underline{\mathrm{Hom}}(x_0, x_1) = (p_{C_1^{\circ}})_{*}\, C^{\circ}(\varphi)^{*} \tilde{X}$ $(\varphi = x \ldots)$

Plus généralement, $\varphi : \{0, \dots, m\} \to E$

$$\Omega_\varphi := \Omega_\varphi(X, \tilde{X}) = (p_{C^\circ_m})_* \, C^\circ(\varphi)^* \tilde{X}$$

a) $\varphi : \{0\} \to E \Rightarrow \Omega_\varphi \simeq *$

b) $\forall \, p, q \geq 1$

$$\begin{tikzcd}
\{0, \dots, p\} \arrow[dr, "i"] & & \{0, \dots, q\} \arrow[dl, "j"'] \\
& \{0, \dots, p+q\} &
\end{tikzcd}$$

$$k \mapsto k \qquad\qquad k \mapsto p+k$$

$$\Omega_\varphi \xrightarrow{(j^*, i^*)} \Omega_{\varphi j} \times \Omega_{\varphi i} \quad \text{iso}$$

Rappels : $\psi : \{0, \dots, n\} \to \{0, \dots, m\}$

$$\begin{tikzcd}
\Omega_\varphi = (p_{C^\circ_m})_* \, C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} \arrow[r] \arrow[ddr, "\psi^*"'] & (p_{C^\circ_m})_* \, C^\circ(\psi)_* \, C^\circ(\psi)^* \, C^\circ(\varphi)^* \tilde{X} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
& (p_{C^\circ_n})_* \, C^\circ(\varphi\psi)^* \tilde{X} \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
& \Omega_{\varphi\psi}
\end{tikzcd}$$

a) unité. $x \in E$ $\quad x : \{0\} \to E$, $0 \mapsto x$ $\qquad \{0,1\} \xrightarrow{\sigma_0^0} \{0\}$

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \underline{\mathrm{Hom}}(x,x) \arrow[d, equal] \\
\Omega_x \arrow[r, "(\sigma_0^0)^*"'] & \Omega_{\varphi\sigma_0^0}
\end{tikzcd}$$

b) composition : $x_0, x_1, x_2 \in E$

$x : \{0,1,2\} \to E$, $i \mapsto x_i$

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(x_1,x_2) \times \underline{\mathrm{Hom}}(x_0,x_1) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & \underline{\mathrm{Hom}}(x_0,x_2) \arrow[d, equal] \\
\Omega_{x\delta_2^0} \times \Omega_{x\delta_2^2} & \Omega_x \arrow[l, "\sim"', "((\delta_2^0)^*,(\delta_2^2)^*)"] \arrow[r, "(\delta_2^1)^*"'] & \Omega_{\varphi\delta_2^1}
\end{tikzcd}$$

c) inverse $x_0, x_1 \in E$ $\quad x : \{0,1\} \to E$ $\quad i \mapsto x_i$

τ transp. $(0\ 1)$ dans $\{0,1\}$.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(x_0,x_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \underline{\mathrm{Hom}}(x_1,x_0) \arrow[d, equal] \\
\Omega_x \arrow[r, "\tau^*"'] & \Omega_{x\tau}
\end{tikzcd}$$

On obtient un groupoïde $\pi(X, \tilde{X})$.

$\mathbb{D}$-groupoïde

$\tilde{\Delta}$ sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}ns$ dont les objets sont les $\tilde{\Delta}_m = \{0, \dots, m\}$, $m \geq 0$.

objet X de $\mathbb{D}(\tilde{\Delta})$ t.q. $\forall p, q \geq 1$

$i_{p,q}^{*} X$ soit un objet cartésien de $\mathbb{D}(\square)$

où $i_{p,q} : \square \longrightarrow \tilde{\Delta}$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Delta}_{p+q} & \tilde{\Delta}_p \arrow[l, "k \mapsto k"'] \\
\tilde{\Delta}_q \arrow[u, "k \mapsto p+k"] & \tilde{\Delta}_0 \arrow[l, "0 \mapsto q"] \arrow[u, "0 \mapsto p"']
\end{tikzcd}$$

Si $X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(e)$ on note $\pi X = p_{\tilde{\Delta}}^{*} X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(\tilde{\Delta})$.
C'est un $\mathbb{D}$-groupoïde appelé le groupoïde fondamental.

X $\mathbb{D}$-groupoïde

E un ensemble

"Famille de points base de X indexés par E"

$\tilde{\Delta}_E$ sous-catégorie pleine de $C^\circ(E) \times \tilde{\Delta}$ telle que

$\mathrm{ob}\, \tilde{\Delta}_E = \mathrm{ob}\, C^\circ(E) \times \tilde{\Delta}_0 \cup \{\omega\} \times \mathrm{ob}\, \tilde{\Delta}$

un objet $\tilde{X}$ de $\mathbb{D}(\tilde{\Delta}_E)$ t.q.

$$\begin{array}{ccc} C^\circ(E) & \xhookrightarrow{\;i\;} & \tilde{\Delta}_E \\ x & \longmapsto & (x, \tilde{\Delta}_0) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{\Delta} & \xhookrightarrow{\;j\;} & \tilde{\Delta}_E \\ \tilde{\Delta}_m & \longmapsto & (\omega, \tilde{\Delta}_m) \end{array}$$

a) $j^* \tilde{X} \simeq X$ par un iso donné

b) $i^* X$ est une "famille de points base" de l'objet

$$X_0 = i^*_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}_0} X \simeq i^*_{\tilde{\Delta}_E, (\omega, \tilde{\Delta}_0)} \tilde{X}$$

autrement-dit $\forall x \in E$ $\tilde{X}_{(x, \tilde{\Delta}_0)} \simeq *$ objet final de $\mathbb{D}(e)$.

$$\text{On a } \mathrm{dia}\, X = \begin{array}{c} X_2 \\ \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \\ X_1 \\ \downarrow\uparrow\downarrow \\ X_0 \end{array} \quad \text{et } \mathrm{dia}\, \tilde{X} = \begin{array}{cc} & X_2 \\ & \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \\ & X_1 \\ & \downarrow\uparrow\downarrow \\ E: \begin{array}{c} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{array} & \rightrightarrows X_0 \end{array}$$

$$
D_m = \begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[d] & (0,1) \arrow[d] & \cdots\cdots & (0,m) \arrow[d] \\
(1,0) & (1,1) & \cdots\cdots & (1,m) \\
 & (m) \arrow[ul, "d_0"] \arrow[u, "d_1"'] \arrow[urr, "d_m"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$\varphi : \{0, \dots, m\} \longrightarrow E .$$

$$j_\varphi : D_m^\circ \longrightarrow \tilde{\Delta}_E$$

$$(0,k) \longmapsto (\varphi(k), \tilde{\Delta}_0)$$

$$(1,k) \longmapsto (\omega , \tilde{\Delta}_0)$$

$$(m) \longmapsto (\omega, \tilde{\Delta}_m)$$

$$j_\varphi \, d_k : (\omega, \tilde{\Delta}_0) \longrightarrow (\omega, \tilde{\Delta}_m)$$

induite par $\tilde{\Delta}_0 \longrightarrow \tilde{\Delta}_m$.
$\quad 0 \mapsto k$

$$X_\varphi := (p_{D_m^\circ})_* \, j_\varphi^* \, \tilde{X} .$$

Si on a $\psi : \{0, \dots, n\} \longrightarrow \{0, \dots, m\}$, on définit $D_\psi : D_n \to D_m$ $(\varepsilon, k) \mapsto (\varepsilon, \psi(k))$ où $\varepsilon = 0,1$, $0 \leq k \leq n$. On a $j_\varphi D_\psi^\circ = j_{\varphi\psi}$

$$
\begin{tikzcd}
X_\varphi = (p_{D_m^\circ})_* \, j_\varphi^* \, \tilde{X} \arrow[r] \arrow[ddr, "\psi^*"'] & (p_{D_m^\circ})_* (D_\psi^\circ)_* (D_\psi^\circ)^* \, j_\varphi^* \, \tilde{X} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
 & (p_{D_n^\circ})_* \, j_{\varphi\psi}^* \, \tilde{X} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
 & X_{\varphi\psi}
\end{tikzcd}
$$

Cela définit un groupoïde enrichi "de la manière compliquée", i.e.

a) $\varphi : \{0\} \longrightarrow E \qquad X_\varphi \simeq *$ objet final de $\mathbb{D}(e)$

b) $\forall p, q \geq 1$

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[d, mapsto] & \{0,\dots,p\} \arrow[dr, "i"] & & \{0,\dots,q\} \arrow[dl, "j"'] & k \arrow[d, mapsto] \\
k & & \{0,\dots,p+q\} & & k+p
\end{tikzcd}$$

$$X_\varphi \xrightarrow{(j^*, i^*)} X_{\varphi j} \times X_{\varphi i} \quad \text{iso.}$$

On appelle ce groupoïde enrichi par $\mathbb{D}(e)$ le groupoïde enrichi par le $\mathbb{D}$-groupoïde X et la famille de points base $\tilde{X}$.

Soit X un objet de $\mathbb{D}(e)$, E un ensemble, $\tilde{X}$ une famille de points base de l'objet X ($\tilde{X} \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(C^\circ(E))$).

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Delta}_E \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "q"'] & & C^\circ(E) \times \tilde{\Delta} \arrow[dl, "pr_1"] \\
& C^\circ(E) &
\end{tikzcd}$$

On vérifie que $q^* \tilde{X}$ est une famille de points base du $\mathbb{D}$-groupoïde fondamental $\pi X = p_{\tilde{\Delta}}^* X$.

Le groupoïde enrichi $\pi(X, \tilde{X})$ de X rel. à $\tilde{X}$ est le groupoïde enrichi défini par le $\mathbb{D}$-groupoïde fondamental $\pi X = p_{\tilde{\Delta}}^{*} X$ et la famille de points base $q^{*}\tilde{X}$.

Structure prétriangulée.

- $\mathbb{D}$ dérivateur faible à gauche de domaine $\mathcal{D}ia$.

  Axiomes : Der 1, Der 2, Der 3g, Der 4g.

  <u>Rappel</u> : Si $u : A \to B$ dans $\mathcal{D}ia$ est pleinement fidèle alors $u_* : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(B)$ est pleinement fidèle et $\forall a \in \mathrm{ob}A$, pour $X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(A)$, $b = u(a)$

$$(u_* X)_b = i_{B,b}^* u_* X \xrightarrow{\sim} i_{A,a}^* X = X_a .$$

<u>Proposition 1</u> :

Si $u : A \to B$ est une immersion fermée dans $\mathcal{D}ia$ (i.e. un cocrible) alors l'image essentielle du foncteur pleinement fidèle u_* est formée des $Y \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(B)$ tels que $\forall b \in \mathrm{ob}B - \mathrm{ob}A$ $\;Y_b \simeq *$ objet final de $\mathbb{D}(e)$.

Démonstration :

Soit $X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(A)$, $(u_* X)_b = i_{B,b}^* u_* X$.

$$\begin{tikzcd} A/b \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\swarrow"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B \end{tikzcd}$$

Or $b \notin \mathrm{ob}A \Leftrightarrow A/b = \emptyset$. Donc si $b \notin \mathrm{ob}A$ on a $(u_* X)_b = p_{\emptyset *}(\text{qqch}) \simeq$ objet final.

Réciproquement, soit $Y \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(B)$ tel que $\forall b \in \mathrm{ob}B - \mathrm{ob}A$ $Y_b \simeq$ objet final. Il suffit de montrer que

$$Y \longrightarrow u_* u^* Y$$

est un isomorphisme. Par Der 2 il suffit de voir que $\forall b \in \mathrm{ob}B - \mathrm{ob}A$ $Y_b \xrightarrow{\sim} (u_* u^* Y)_b$ et que $u^* Y \xrightarrow{\sim} u^* u_* u^* Y$. La première assertion résulte de ce qui précède, et la seconde de la pleine fidélité.

<u>Proposition 2</u>:

Soit
$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{k} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[\ell]{} & B \end{array}$$
un carré cartésien dans Dia tel que ℓ soit une immersion ouverte (i.e. un crible).

Alors le morphisme de changement de base

$$\ell^* u_* \longrightarrow u'_* k^*$$

est un isomorphisme.

Démonstration:

Par Der 2, il suffit de le tester dans les fibres. Soit $b' \in \mathrm{ob}B'$ et $b = \ell(b')$. Comme ℓ est un crible, $B'/b' \simeq B/b$. On a deux carrés cartésiens,

$$\begin{array}{ccccc} A'/b' & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{k} & A \\ \downarrow & & \downarrow u' & & \downarrow u \\ B'/b' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow[l]{} & B . \end{array}$$

On en déduit un isomorphisme canonique $A'/b' \simeq A/b$.
On obtient:

$$\begin{array}{ccc} i^*_{B',b'}\, l^*\, u_* & \longrightarrow & i^*_{B',b'}\, u'_*\, k^* \\ \| & & \wr\| \\ i^*_{B,b}\, u_* & & (p_{A'/b'})_*\, j^*_{u',b'}\, k^* \\ \| & & \| \\ (p_{A/b})_*\, j^*_{u,b} & \simeq & (p_{A'/b'})_*\, (k\, j_{u',b'})^* . \end{array}$$

Désormais on supposera que $\mathbb{D}$ satisfait aussi à l'axiome

Der 6g (a) Si $u : A \to B$ est une immersion ouverte dans Dia, alors le foncteur $\mathbb{D}(B) \xrightarrow{u^*} \mathbb{D}(A)$ admet un adjoint à gauche noté $u_!$.

Proposition 2'

Soit
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "k"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "\ell"'] & B \end{tikzcd}$$
un carré cartésien dans Dia tel que ℓ soit une immersion ouverte.

Alors le morphisme de changement de base
$$k_! u'^* \longrightarrow u^* \ell_!$$
est un isomorphisme.

Démonstration:
Cela résulte de la proposition 2 par transposition.

Proposition 3

Soit $u : A \to B$ une immersion ouverte. Alors le foncteur $u_! : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(B)$ est pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des $Y \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(B)$ tels que $\forall b \in \mathrm{ob}\,B - \mathrm{ob}\,A$ Y_b soit un objet initial de $\mathbb{D}(e)$.

Remarque: Der 6 g a) implique que pour tout objet I de Dia, $\mathbb{D}(I)$ admet un objet initial, à savoir $f_!(*)$ où $\emptyset \xrightarrow{f} I$ est l'inclusion canonique, et $*$ l'unique objet de $\mathbb{D}(\emptyset) = e$ (f étant une immersion ouverte).

Démonstration de la prop. 3. Soit $X \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(A)$.

Pour $b \in \mathrm{ob} B$ on a :

$$\begin{tikzcd} A_b \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p_{A_b}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cart.}"] & A \arrow[d, "u"] \\ e \arrow[r, "i_{B,b}"'] & B \end{tikzcd}$$

Comme u est une immersion ouverte, en vertu de la prop. 2' on a $p_{A_b\,!}\, k^* \xrightarrow{\sim} i_{B,b}^*\, u_!$.

Si $b \notin \mathrm{ob} A$, alors $A_b = \emptyset$ et donc $(u_! X)_b = p_{\emptyset\,!}(*)$ est un objet initial de $\mathbb{D}(e)$, et si $b = u(a)$, $a \in \mathrm{ob} A$, alors $A_b = e$ et $p_{A_b} = 1_e$, d'où $(u_! X)_b \simeq i_{A,a}^* X = X_a$. Cela permet de montrer la proposition.

Désormais, on suppose aussi que l'axiome suivant est vérifié :

Der 6 g (b) Si $u : A \longrightarrow B$ est une immersion fermée, le foncteur $u_* : \mathbb{D}(A) \longrightarrow \mathbb{D}(B)$ admet un adjoint à droite $u^! : \mathbb{D}(B) \longrightarrow \mathbb{D}(A)$.

<u>Remarque</u>: Cela implique que les catégories $\mathbb{D}(I)$ admettent un objet nul (à la fois final et initial)

- Soit X un objet de $\mathbb{D}(e)$, et soit E un ensemble. Alors il existe une unique (à isomorphisme unique près) famille de points base de X indexée par E.

Soit $\tilde{X}$ une telle famille $(\tilde{X} \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(C^\circ(E)))$

$$i = i_{C^\circ(E),\omega}$$

$$e \xrightarrow{\ C^\circ(E),\omega\ } C^\circ(E)\ , \ * \mapsto \omega$$

est une immersion ouverte.

Alors $i_! i^* X \to X$ est un isomorphisme.

Pour $m \geq 0$, on pose $\Omega_m = (p_{C^\circ_m})_* (i_{C^\circ_m,\omega})_!$

Pour $\psi : \{0,\dots,n\} \to \{0,\dots,m\}$ on obtient

$$\begin{tikzcd}
\Omega_m = p_{C^\circ_m *}\, i_{C^\circ_m,\omega\,!} \arrow[r] \arrow[ddr, bend right, "\psi^*"'] & p_{C^\circ_m *}\, C^\circ(\psi)_*\, C^\circ(\psi)^*\, i^*_{C^\circ_m,\omega} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
 & p_{C^\circ_m *}\, i^*_{C^\circ_n,\omega} \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
 & \Omega_n
\end{tikzcd}$$

On a

a) $\Omega_0 \simeq *$ objet nul.

b) $\forall p, q \geq 1 \quad \Omega_{p+q} \xrightarrow{(j^*, i^*)} \Omega_q \times \Omega_p$

On pose $\Omega = \Omega_1$.

Pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, ΩX est est un objet groupe.

a) unité :

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \Omega X \arrow[d, equal] \\ \Omega_0 X \arrow[r, "(\sigma_0^0)^*"'] & \Omega_1 X \end{tikzcd}$$

(on n'a pas le choix...)

b) multiplication

$$\begin{tikzcd} \Omega X \times \Omega X \arrow[rr, "\mu_X"] \arrow[d, "\wr"] & & \Omega X \arrow[d, equal] \\ \Omega_1 X \times \Omega_1 X & \Omega_2 X \arrow[l, "\sim", "((\delta_2^0)^*, (\delta_2^2)^*)"'] \arrow[r, "(\delta_2^1)^*"'] & \Omega_1 X \end{tikzcd}$$

c) inverse :

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega X \arrow[d, equal] \\ \Omega_1 X \arrow[r, "\tau^*"'] & \Omega_1 X \end{tikzcd}$$

où τ est la transposition $(0,1)$.

Action de Ω(base) sur la fibre homotopique.

Soit $X \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$ $\qquad \Delta_1^\circ = C_0^\circ$

$$\mathrm{dia}\, X = \quad X_0 \xrightarrow{f_X} X_1$$

$$\begin{array}{l} \{0\} \xrightarrow{i_m} \{0,\dots,m\} \\ 0 \longmapsto 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad C_0 \xrightarrow{C(i_m)} C_m \quad (\text{imm. fermée}).$$

On obtient une immersion inverse qui est ouverte

$$C_0^\circ \xrightarrow{C(i_m)^\circ} C_m^\circ$$

On pose $\quad \Phi_m(X) = (p_{C_m^\circ})_* \; C^\circ(i_m)_! \; X.$

$$\mathrm{dia}\; C^\circ(i_m)_! X = \quad \begin{tikzcd} \underbrace{* \; \cdots\cdots \; *}_{m \text{ fois}} \arrow[dr] & & X_0 \arrow[dl, "f_X"] \\ & X_1 & \end{tikzcd}$$

où $*$ est l'objet nul de $\mathbb{D}(e)$.

a) $\Phi_0(X) = X_0$

$\Phi(X) := \Phi_1(X)$ est la fibre homotopique de X.

b) $\Phi_{p+q}(X) \underset{(j^*,i^*)}{\xrightarrow{\simeq}} \Omega_q(X_1) \times \Omega_p(X)$

On définit un morphisme a_X comme suit:

$$\begin{tikzcd} \Omega(X_1) \times \Phi(X) \arrow[r, "a_X"] \arrow[d, equal] & \Phi(X) \arrow[dr, equal] & \\ \Omega_1(X_1) \times \Phi_1(X) & \Phi_2(X) \arrow[l, "\simeq"', "((\delta_2^0)^*, (\delta_2^2)^*)"] \arrow[r, "(\delta_2^1)^*"'] & \Phi_1(X) \end{tikzcd}$$

Cela définit une action du groupe $\Omega(X_1)$ sur $\Phi(X)$.

i.e :

$$\begin{tikzcd}
\Omega(X_1)\times\Omega(X_1)\times\Phi(X) \arrow[r, "1_{\Omega(X_1)}\times a_X"] \arrow[d, "\mu_{X_1}\times 1_{\Phi(X)}"'] \arrow[dr, phantom, "\wr"] & \Omega(X_1)\times\Phi(X) \arrow[d, "a_X"] \\
\Omega(X_1)\times\Phi(X) \arrow[r, "a_X"'] & \Phi(X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
*\times\Phi(X) \arrow[rr, "\eta_{X_1}\times 1_{\Phi(X)}"] \arrow[dr, "\wr"'] & \arrow[d, phantom, "\wr"] & \Omega(X_1)\times\Phi(X) \arrow[dl, "a_X"] \\
& \Phi(X) &
\end{tikzcd}$$

Remarque : Ω définit un foncteur de $\mathbb{D}(e)$ vers la catégorie des objets groupes de $\mathbb{D}(e)$.

13 Juin 2001

Une Ω-catégorie est un couple $(\mathcal{C}, \Omega)$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie admettant des produits finis et Ω est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des objets groupes de $\mathcal{C}$ qui commute aux produits finis. La donnée de Ω équivaut à la donnée d'un foncteur $\Omega : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ commutant aux produits finis et muni d'une structure de groupe comme objet de $\underline{End}(\mathcal{C})$. On a alors deux morphismes de foncteurs

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{\mu} \Omega$$

$$1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\eta} \Omega$$

faisant de Ω un groupe.

Exercice:
Montrer que $\forall X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$, $\Omega^2 X$ est un objet groupe commutatif de $\mathcal{C}$.

Un triangle dans une Ω-catégorie est un diagramme

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \qquad \Omega Z \times X \xrightarrow{a} X$$

où a est une action de ΩZ sur X.

Si on a deux triangles

$$X \to Y \to Z \qquad \Omega Z \times X \to X$$

$$X' \to Y' \to Z' \qquad \Omega Z' \times X' \to X'$$

Un morphisme du premier vers le second est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "h"] & \Omega Z \times X \arrow[r] \arrow[d, "\Omega h \times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' & \Omega Z' \times X' \arrow[r] & X'
\end{tikzcd}$$

On obtient ainsi la catégorie des triangles de $(\mathcal{C}, \Omega)$.

Une catégorie prétriangulée est une Ω-catégorie admettant un objet nul et munie d'une classe de triangles appelés triangles distingués, satisfaisant aux axiomes suivants:

TR1 (a) tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué

(b) pour toute flèche $Y \to Z$ il existe un triangle distingué de la forme

$$X \to Y \to Z \qquad \Omega Z \times X \to X$$

(c) le triangle

$$X \xrightarrow{1_X} X \to \underset{\text{objet nul}}{\overset{}{*}} \qquad \Omega(*) \times X \simeq X \xrightarrow{1_X} X$$

est distingué

Si $\tau = X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{w} Z$ $\quad \Omega Z \times X \xrightarrow{a} X$ est un triangle

On en obtient un second

$$\mathcal{R}(\tau) = \Omega Z \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} Y \cancel{} \Omega Y \times \Omega Z \xrightarrow{b} \Omega Z$$

où on définit u par

$$\begin{tikzcd}
\Omega Z \arrow[r, "(1_{\Omega Z}, 0)"] \arrow[dr, "u"'] & \Omega Z \times X \arrow[d, "a"] \\
 & X
\end{tikzcd}
\quad \text{où} \quad
\begin{tikzcd}
\Omega Z \arrow[rr, "0"] \arrow[dr] & & X \\
 & * \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

et b est définit par

$$\begin{tikzcd}
\Omega Y \times \Omega Z \arrow[r, "\Omega w \times 1_{\Omega Z}"] \arrow[drr, "b"'] & \Omega Z \times \Omega Z \arrow[r, "\tau"] & \Omega Z \times \Omega Z \arrow[d, "1_{\Omega Z} \times I_Z"] \\
 & & \Omega Z \times \Omega Z \arrow[d, "\mu_Z"] \\
 & & \Omega Z
\end{tikzcd}$$

τ est la volte échangeant l'ordre des termes

I_Z est le morphisme correspondant à l'inverse

μ_Z est la multiplication.

TR 2 $\quad$ Si τ est un triangle distingué, alors $\mathcal{R}(\tau)$ en est un aussi.

TR 3 Si on a un diagramme commutatif dont les lignes horizontales sont des triangles distingués

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[d, "h"] & \Omega Z \times X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\Omega h \times f"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' & \Omega Z' \times X' \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

il existe f tel que (f, g, h) soit un morphisme de triangles

TR4 Si on a un triangle commutatif de $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "w_0"] & \\ X_0 \arrow[ur, "w_2"] \arrow[rr, "w_1"'] & & X_2 \end{tikzcd}$$

et des triangles distingués

$$Z_2 \xrightarrow{v_2} X_0 \xrightarrow{w_2} X_1 \qquad \Omega X_1 \times Z_2 \xrightarrow{a_2} Z_2$$

$$Z_1 \xrightarrow{v_1} X_0 \xrightarrow{w_1} X_2 \qquad \Omega X_2 \times Z_1 \xrightarrow{a_1} Z_1$$

$$Z_0 \xrightarrow{v_2} X_1 \xrightarrow{w_0} X_2 \qquad \Omega X_2 \times Z_0 \xrightarrow{a_0} Z_0$$

Alors il existe un triangle distingué

$$Z_2 \xrightarrow{u_0} Z_1 \xrightarrow{u_2} Z_0 \qquad \Omega Z_0 \times Z_2 \xrightarrow{b} Z_2$$

t.q. que $(1_{Z_2}, v_1, v_0)$, $(u_0, 1_{X_0}, w_0)$ et $(u_2, w_2, 1_{X_2})$ soient des morphismes de triangle.

$$\begin{tikzcd}
Z_2 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "1_{Z_2}"'] & Z_1 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "v_1"] & Z_0 \arrow[d, "v_0"] \\
Z_2 \arrow[r, "v_2"'] \arrow[d, "u_0"'] & X_0 \arrow[r, "w_2"'] \arrow[d, "1_{X_0}"] & X_1 \arrow[d, "w_0"] \\
Z_1 \arrow[r, "v_1"'] \arrow[d, "u_1"'] & X_0 \arrow[r, "w_1"'] \arrow[d, "w_2"] & X_2 \arrow[d, "1_{X_2}"] \\
Z_0 \arrow[r, "v_0"'] & X_1 \arrow[r, "w_0"'] & X_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega Z_0 \times Z_2 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\Omega v_0 \times 1_{Z_2}"'] & Z_2 \arrow[d, "1_{Z_2}"] \\
\Omega X_1 \times Z_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "\Omega w_0 \times u_0"'] & Z_2 \arrow[d, "u_0"] \\
\Omega X_2 \times Z_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "\Omega 1_{X_2} \times u_1"'] & Z_1 \arrow[d, "u_1"] \\
\Omega X_2 \times Z_0 \arrow[r, "a_0"'] & Z_0
\end{tikzcd}$$

Dans la suite, on se fixe un dérivateur faible à gauche de domaine Dia $\mathbb{D}$.

On suppose que $\mathbb{D}$ satisfait Der 6_g (a) et (b).

Conséquences:

Pour tout objet A de Dia, $\mathbb{D}(A)$ admet un objet nul.

Si $u : A \to B$ est une immersion ouverte (resp. fermée) $u_!$ (resp. u_*) est pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des $Y \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(B)$ tels que $\forall b \in \mathrm{ob} B \setminus \mathrm{ob} A$ $Y_b \simeq * =$ objet nul.

Si on se donne un carré cartésien dans Dia

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "k"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "\ell"'] & B \end{tikzcd}$$

tel que u soit une immersion ouverte, alors le morphisme de changement de base

$$u'_! k^* \longrightarrow \ell^* u_!$$

est un isomorphisme.

On rappelle que C_m° est la catégorie
$$\begin{tikzcd} m & \cdots & 1 & 0 \\ & & \omega \arrow[ull] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Si $\{0,\dots,n\} \xrightarrow{\varphi} \{0,\dots,m\}$ est une application, on obtient un foncteur $C^\circ(\varphi) : C_n^\circ \longrightarrow C_m^\circ$.

$$\ell \longmapsto \varphi(\ell) \quad \text{si } \ell \neq \omega$$
$$\omega \longmapsto \omega$$

On a $C_0^\circ = \begin{matrix} 0 \\ \uparrow \\ \omega \end{matrix} \simeq \Delta_1^\circ$

$$C_\circ^1 = \begin{tikzcd}[sep=small] 1 & 0 \\ \omega \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd}[sep=small] (1,0) & & (0,1) \\ & (1,1) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} = \lrcorner$$

On définit $\Omega := (p_{C_1^\circ})_*(i_{C_1^\circ,\omega})_!$, $\cancel{\simeq (p_\lrcorner)_*(i_{\lrcorner,1})_!}$

($i_{C_1^\circ,\omega}$ est une immersion ouverte) $\quad \cancel{\simeq i^*_{\square,(0,0)}\, i_{\lrcorner *}(i_{\Delta,1})_!}$

On obtient
$$\Omega \simeq p_{\lrcorner *}\, i_{\lrcorner,(1,1)!}$$
$$\simeq i^*_{\square,(0,0)}\, i_{\lrcorner *}\, i_{\lrcorner,(1,1)!}$$

On définit $\tilde{\Omega} = i_{\lrcorner *}\, i_{\lrcorner,(1,1)!}$

Si $X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(e)$ $\tilde{\Omega}X$ est homotopiquement cartésien et on a

$$\mathrm{dia}(\tilde{\Omega}X) = \begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

On a aussi défini $\Omega_m := (p_{C_m^\circ})_*(i_{C_m^\circ,\omega})_!$

Si $\{0,\dots,n\} \xrightarrow{\varphi} \{0,\dots,m\}$ est une application, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_{C_n^\circ,\omega}"'] & e \arrow[d, "i_{C_m^\circ,\omega}"] \\ C_n^\circ \arrow[r, "C^\circ(\varphi)"'] & C_m^\circ \end{tikzcd}$$

On a donc un isomorphisme canonique
$$(i_{C_n^\circ,\omega})_! \xrightarrow{\sim} C^\circ(\varphi)^*(i_{C_m^\circ,\omega})_!$$

On obtient un morphisme

$$\begin{tikzcd}
\Omega_m = p_{C^\circ_m *}(i_{C^\circ_m,\omega})_! \arrow[r] \arrow[ddr, "\varphi^*"'] & p_{C^\circ_m *}\, C^\circ(\varphi)_*\, C^\circ(\varphi)^*(i_{C^\circ_m,\omega})_! \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
& p_{C^\circ_n *}(i_{C^\circ_n,\omega})_! \arrow[d, phantom, "\|"] \\
& \Omega_n .
\end{tikzcd}$$

Pour $p, q \geq 1$

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[d, mapsto] & \{0,\dots,p\} \arrow[dr, "i"] & & \{0,\dots,q\} \arrow[dl, "j"'] & k \arrow[d, mapsto] \\
k & & \{0,\dots,p+q\} & & k+p
\end{tikzcd}$$

$\Omega_{p+q} \xrightarrow{(j^*, i^*)} \Omega_q \times \Omega_p$ est un isomorphisme.

On a $\Omega_1 = \Omega$. La multiplication $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\mu} \Omega$ est définie par

$$\begin{tikzcd}
\Omega \times \Omega \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, equal] & & \Omega \arrow[d, equal] \\
\Omega_1 \times \Omega_1 & \Omega_2 \arrow[l, "\sim", "(\delta_2^{0*}, \delta_2^{2*})"'] \arrow[r, "\delta_2^{1*}"'] & \Omega_1
\end{tikzcd}$$

l'inverse $\Omega \xrightarrow{I} \Omega$ est définie par

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "I"] \arrow[d, equal] & \Omega \arrow[d, equal] \\ \Omega_1 \arrow[r, "\tau^*"'] & \Omega_1 \end{tikzcd}$$

où τ est la transposition $(0,1)$ dans $\{0,1\}$.

Proposition:

Le foncteur Ω commute aux produits finis.

Démonstration:

$$\Omega = (p_{C_1^\circ})_* (i_{C_1^\circ, \omega})_!$$

Il suffit de vérifier le

Lemme:

Soit $u : A \to B$ une immersion ouverte dans Δia.

Alors $u_! : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(B)$ commute aux produits finis.

Démonstration:

On a $u_!(*) = *$.

Soient $X, Y \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(A)$. Alors $u_!(X \times Y) \to u_! X \times u_! Y$ est un isomorphisme (on le vérifie fibre à fibre).

Rappel : Pour $X \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$ on a défini

$$\Phi_m X = (p_{C^\circ_m})_* \, C^\circ(i_m)_! \, X$$

où i_m est l'inclusion $\{0\} \hookrightarrow \{0, \ldots, m\}$ (et $C^\circ(i_m)$ est une immersion ouverte $0 \mapsto 0$).

Pour $\{0, \ldots, n\} \xrightarrow{\varphi} \{0, \ldots, m\}$
si $\varphi^{-1} 0 = \{0\}$ (resp. $0 \notin \mathrm{Im}\, \varphi$) alors

$$\begin{tikzcd}
C^\circ_0 \arrow[r, equal] \arrow[d, "C^\circ(i_n)"'] & C^\circ_0 \arrow[d] \\
C^\circ_n \arrow[r, "C^\circ(\varphi)"'] & C^\circ_m
\end{tikzcd}
\quad \left(\text{resp.} \quad
\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "i_{C^\circ_0, \omega}"] \arrow[d, "i_{C^\circ_n, \omega}"'] & C^\circ_0 \arrow[d, "C^\circ(i_m)"] \\
C^\circ_n \arrow[r, "C^\circ(\varphi)"'] & C^\circ_m
\end{tikzcd}\right)$$

est cartésien. On note $\mathrm{dia}\, X = X_0 \xrightarrow{d_X} X_1$.

Par un procédé analogue au cas de Ω_m on obtient

$$\varphi^* : \Phi_m X \longrightarrow \Phi_n X.$$

$$\left(\text{resp. } \varphi^* : \Phi_m X \longrightarrow \Omega(X_1)\right).$$

On a aussi un isomorphisme pour $p, q \geq 1$

$$\Phi_{p+q} X \xrightarrow{(j^*, i^*)} \Omega_q(X_1) \times \Phi_q X.$$

On obtient une action de groupe (où $\Phi = \Phi_1$)

$$\begin{tikzcd}
\Omega X_1 \times \Phi X \arrow[rr, "a_X"] \arrow[d, equal] & & \Phi X \arrow[dr, equal] & \\
\Omega_1 X_1 \times \Phi_1 X & & \Phi_2 X \arrow[ll, "\sim"', "(\delta_2^{0*},\, \delta_2^{2*})"] \arrow[r, "\delta_2^{1*}"'] & \Phi_1 X
\end{tikzcd}$$

On a $\Phi X = \left(p_{C_1^0}\right)_* C^0(i_1)_!$

$$\simeq (p_\lrcorner)_* k_!$$

où on a

$$\begin{tikzcd}
\Delta_1^0 \arrow[rr, "i_{\Delta_1^0,1} \times 1_{\Delta_1^0}"] \arrow[dr, "k"'] & \arrow[d, phantom, "a"] & \square \\
& \lrcorner \arrow[ur, "i_\lrcorner"'] &
\end{tikzcd}$$

On obtient $\Phi X \simeq i^*_{\square,(0,0)} (i_\lrcorner)_* k_! X$.

On pose $\tilde{\Phi} X = i_{\lrcorner *} k_! X$. On a

$$\operatorname{dia} \tilde{\Phi} X = \begin{tikzcd}
\Phi X \arrow[r, "g_X"] \arrow[d] & X_0 \arrow[d, "f_* = f_X"] \\
* \arrow[r] & X_1
\end{tikzcd}$$

Définition:

Un triangle standard est un triangle de la forme

$$\tau_X = \Phi X \xrightarrow{g_X} X_0 \xrightarrow{f_X} X_1 \quad \Omega X_1 \times \Phi X \xrightarrow{a_X} \Phi X$$

pour un $X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$.

Un triangle distingué de $\mathbb{D}(e)$ est un triangle isomorphe à un triangle standard.

On suppose désormais que $\mathbb{D}$ satisfait en outre l'axiome

Der 5 pour tout objet A de Dia, le foncteur

$$\mathbb{D}(\Delta_1^\circ \times A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta_1, \mathbb{D}(A)) = \underline{\mathrm{Fl}}\,\mathbb{D}(A)$$

est plein et essentiellement surjectif.

Théorème:

La catégorie $\mathbb{D}(e)$ munie de Ω et des triangles distingués est une catégorie prétriangulée.

Démonstration:

TR1 (a) évident.

TR1 (b) Soit $T_0 \xrightarrow{f} T_1$ une flèche de $\mathbb{D}(e)$.

Par Der 5, $\mathbb{D}(\Delta_1^\circ) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}\,\mathbb{D}(e)$ est essentiellement surjectif et donc il existe $X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$ tel que $\mathrm{dia}\,X \simeq \left(T_0 \to T_1\right)$ i.e on a un carré

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[d, "f_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T_0 \arrow[l, "h_0"', "\sim"] \arrow[d, "f"] \\ X_1 & T_1 \arrow[l, "\sim", "h_1"'] \end{tikzcd}.$$

On a

$$\begin{tikzcd} \tau_X = \Phi X \arrow[r, "g_X"] & X_0 \arrow[r, "f_X"] & X_1 & \Omega X_1 \times \Phi X \arrow[r, "a_X"] & \Phi X \\ \Phi X \arrow[u, "1_{\Phi X}", "\wr"'] \arrow[r, "h_0^{-1} g_X"'] & T_0 \arrow[u, "h_0"', "\wr"] \arrow[r, "f"'] & T_1 \arrow[u, "h_1"', "\wr"] & \Omega T_1 \times \Phi X \arrow[u, "\Omega h_1 \times 1_{\Phi X}", "\wr"'] \arrow[r, "a_X(\Omega h_1 \times 1_{\Phi X})"'] & \Phi X \arrow[u, "1_{\Phi X}"', "\wr"] \end{tikzcd}.$$

TR1 (c) Soit $X \in \mathrm{ob}\,\mathbb{D}(e)$. On considère $(i_{\Delta_1^\circ,0})_* X$.

On a $\mathrm{dia}\,(i_{\Delta_1^\circ,0})_* X = X \to *$.

Alors le triangle $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow * \quad \Omega(*) \times X \simeq X \xrightarrow{1_X} X$ est isomorphe à $\tau_{(i_{\Delta_1^\circ,0})_* X}$.

TR 2 En vertu de TR 1 (a) il suffit de montrer que si $X \in$ ob $\mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$, $R(\tau_X)$ est un triangle distingué.

On a $\tau_X = \Phi X \xrightarrow{\partial_X} X_0 \xrightarrow{d_X} X_1 \quad \Omega X_1 \times \Phi X \xrightarrow{a_X} \Phi X$

$R(\tau_X) = \quad \Omega X_1 \xrightarrow{h_X} \Phi X \xrightarrow{\partial_X} X_0 \quad \Omega X_0 \times \Omega X_1 \underset{b_X}{\longrightarrow} \Omega X_1$

où $h_X = a_X(1_{\Omega X_1}, 0)$

et $b_X = \mu_{X_1}(1_{\Omega X_1} \times I_{X_1})\, \tau\, (\Omega f_X \times 1_{\Omega X_1})$

On a un objet h-cart. $\tilde{\Phi} X$ de $\mathbb{D}(\square)$ tel que

$$\operatorname{dia} \tilde{\Phi} X = \begin{array}{ccc} \Phi X & \xrightarrow{\partial_X} & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X_1 \end{array}$$

On pose $Y = \left(i_{\Delta_1^\circ, 0} \times 1_{\Delta_1^\circ}\right)^* \tilde{\Phi} X$.

On a donc $\operatorname{dia} Y = \left(\Phi X \xrightarrow{\partial_X} X_0\right)$.

On a un isomorphisme $\tau_Y \simeq R(\tau_X)$.

$$\begin{tikzcd} (1,1) \\ (2,1) \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (0,1) \\ & (1,1) \arrow[u] \\ (2,0) & (2,1) \arrow[u] \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] \\ (2,0) \arrow[u] & (2,1) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\Delta_1^\circ \simeq A \xrightarrow[\text{imm. ouverte}]{u} B \xrightarrow{v} \Delta_2^\circ \times \Delta_1^\circ$$

On a vu que $(\delta_2^\varepsilon \times 1_{\Delta_1^\circ})^* \, v_* u_! X$ est h. cart. pour $\varepsilon = 0, 1, 2$.

On a

$$\operatorname{dia}(v_* u_! X) = \begin{tikzcd} \Phi Y \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dd, bend right=60, "g_Y"'] & \\ \Omega X_1 \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ \Phi X \arrow[r, "f_Y = g_X"] \arrow[d] & X_0 \arrow[d, "f_X"] \\ * \arrow[r] & X_1 \end{tikzcd}$$

On montre que $(\varphi, 1_{\Phi X}, 1_{X_0})$ est un isomorphisme de triangle (où φ est l'isomorphisme canonique $\Phi Y \xrightarrow{\sim} \Omega X_1$).

TR3 Il suffit de le montrer pour des triangles standard.

On se donne $X, Y \in \operatorname{ob} \mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$ et donc τ_X et τ_Y, ainsi que un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_X} & X_1 \\ h_0 \downarrow & & \downarrow h_1 \\ Y_0 & \xrightarrow[f_Y]{} & Y_1 \end{array}.$$

Der 5 implique que $\mathbb{D}(\Delta_1^o) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fl}}\,\mathbb{D}(e)$ est plein.
On peut donc relever (h_0, h_1) en une flèche $X \xrightarrow{h} Y$.
On obtient un morphisme de triangles $\tau_X \xrightarrow{\tau_h} \tau_Y$
par functorialité et $\tau_h = (\Phi h, h_0, h_1)$.

TR4 Soit X un objet de $\mathbb{D}(\Delta_2^o)$.

$$\mathrm{dia}\,X = \begin{array}{ccccc} & & X_1 & & \\ & \overset{f_2}{\nearrow} & & \searrow^{f_0} & \\ X_0 & & \xrightarrow[f_1]{} & & X_2 \end{array}$$

On note $X_{10} = \delta_2^{2\,*} X$

$X_{20} = \delta_2^{1\,*} X$

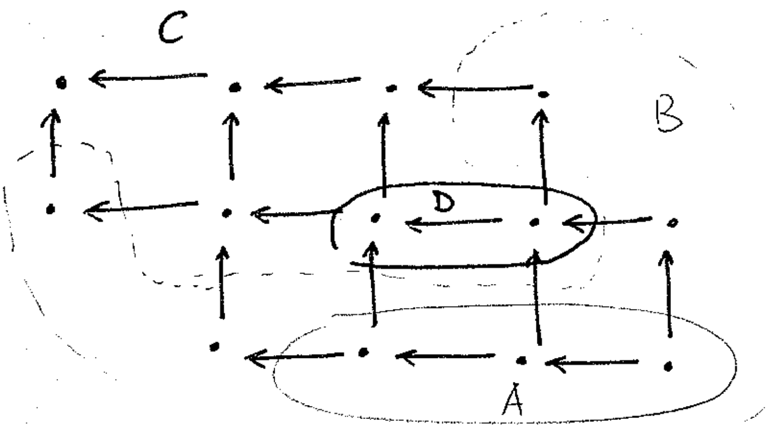
$X_{21} = \delta_2^{0\,*} X$.

On obtient trois triangles:

$\tau_{X_{10}} = \Phi(X_{10}) \xrightarrow{g_2} X_0 \xrightarrow{f_2} X_1 \quad \Omega X_1 \times \Phi(X_{10}) \xrightarrow{g_2} \Phi(X_{1,0})$

$$\tau_{X_{20}} = \Phi(X_{20}) \xrightarrow{g_1} X_0 \xrightarrow{f_1} X_2 \qquad \Omega X_2 \times \Phi(X_{20}) \xrightarrow{a_1} \Phi(X_{20}$$

$$\tau_{X_{21}} = \Phi(X_{21}) \xrightarrow{g_0} X_1 \xrightarrow{f_0} X_2 \qquad \Omega X_2 \times \Phi(X_{21}) \xrightarrow{a_0} \Phi(X_2$$



$$\Delta_2^\circ \simeq A \overset{k}{\underset{\text{imm. ouverte}}{\hookrightarrow}} B \overset{u}{\hookrightarrow} C \qquad D \xrightarrow{i} C$$

On considère:

$u_* k_! X$.

$$\mathrm{dia}\, u_* k_! X = \begin{tikzcd} & Y_{01} \arrow[ddl] \arrow[dr] & & & \\ & & Y_1 \arrow[ddl] \arrow[dd] & & \\ * \arrow[dr] & & & & \\ & Y_2 \arrow[dr] & Z_2 \arrow[d] \arrow[rr] & & * \arrow[d] \\ & & Z_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z_0 \arrow[r] \arrow[dd] & * \arrow[dd] \\ & * \arrow[dr] & & & & \\ & & X_0 \arrow[rr] & & X_1 \arrow[r] & X_2 \end{tikzcd}$$

Grâce à la "machine à fabriquer des carrés h.-cart.", tous les carrés visibles sont h. cart.

On a donc $Z_0 \simeq \Phi(X_{21})$ $\quad Y_2 = \Omega X_2$

$Z_1 = \Phi(X_{20})$ $\quad Y_1 = \Omega X_1$

$Z_2 \simeq \Phi(X_{10})$ $\quad Y_0 = \Omega Z$

On pose $Z_{01} = i^* u_* k_! X$. On a $\operatorname{dia} Z_{01} = Z_1 \to Z_0$

Alors $C_{Z_{01}} = Z_2 \to Z_1 \longrightarrow Z_0 \quad \Omega Z_0 \times Z_2 \longrightarrow Z_2$

<u>21 juin 2001</u>.

Soit
$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "w_0"] & \\ X_0 \arrow[ur, "w_2"] \arrow[rr, "w_1"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\Omega"] & & X_2 \end{tikzcd}$$
dans $\mathbb{D}(e)$.

Alors il existe $X \in \operatorname{ob} \mathbb{D}(\Delta_2^\circ)$ tel que $\operatorname{dia} X$ soit le diagramme ci-dessus.

On a

Der 5. $\forall A$ dans Dia $\quad \mathbb{D}(\Delta_1^\circ \times A) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta_1, \mathbb{D}(A))$
est plein et essentiellement surjectif.

Der 5 $\quad A = e \quad$ ess. surj. $\Rightarrow \exists X_{10} \in \operatorname{ob} \mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$
t.q $\operatorname{dia} X_{10} \simeq X_0 \xrightarrow{w_2} X_1$.

Der 5 $\quad A = e \quad$ plein $\Rightarrow \exists w : X_{10} \to p_{\Delta_1^\circ}^* X_2$
t.q $\operatorname{dia} w = (w_1, w_0)$

Der 5 $A = \Delta_1^\circ$ ess-surj.

$\exists\, Y \in \mathbb{D}(\square) = \mathbb{D}(\Delta_1^\circ \times \Delta_1^\circ)$ t.q $\operatorname{dia} Y = W$.

$$\operatorname{dia} Y \simeq \begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "W_2"] \arrow[d, "W_1"'] & X_1 \arrow[d, "W_0"] \\ X_2 \arrow[r, "1_{X_2}"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \overset{k}{\hookleftarrow} \begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ & (1,1) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$k^* Y = X$ convient.

Rappels: Une catégorie additive est une catégorie admettant des produits finis A telle que $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}\, A$ $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ soit muni d'une structure de groupes additif de sorte que la composition soit additive.

$\Rightarrow$ l'objet final est aussi un objet initial

et $X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y$ est l'élément neutre pour l'addition de $\mathrm{Hom}(X,Y)$.

En outre

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "(1,0)"] & \\ & X\times Y \\ Y \arrow[ur, "(0,1)"'] & \end{tikzcd}$$

fait de $X\times Y$ une somme. On note

$$X \oplus Y = X \times Y \simeq X \amalg Y.$$

Si $f, g \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\binom{1}{1}"] \arrow[rrr, bend right, "f+g"'] & X\oplus X \arrow[r, "f\oplus g"] & Y\oplus Y \arrow[r, "(1,1)"] & Y \end{tikzcd}$$

<u>Lemme</u> (algébrique) Soit M un ensemble muni de deux lois de composition $\ast$ et $\perp$, unifères, et satisfaisant à la règle d'échange (de Godement)

$$(a * b) \perp (c * d) = (a \perp c) * (b \perp d)$$

$$a, b, c, d \in \mathcal{M}$$

Alors les deux lois de composition coïncident et sont associatives et commutatives.

<u>Proposition:</u>

$\mathcal{A}$ catégorie additive. X objet de $\mathcal{A}$.
Toute structure de magma unifère sur X coïncide avec la structure de groupe sur X définie par la codiagonale.

Dém : résulte du lemme de Yoneda et du lemme précédent (la relation d'échange résulte de la biadditivité de la composition dans $\mathcal{A}$).

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux catégories additives, un foncteur additif de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ est un foncteur

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

tel que $\forall\, X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(FX, FY)$ soit un morphisme de groupes.

Un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est additif si et seulement si F commute aux produits binaires (resp. aux sommes binaires).

Rappel : Une Ω-catégorie est un couple $(\mathcal{C}, \Omega)$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie admettant des produits finis, et Ω un endofoncteur commutant aux produits finis, ~~et~~ muni d'un morphisme de foncteurs $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\mu} \Omega$ faisant de Ω un groupe de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C})$.

Exemple :
Si $\mathcal{A}$ est une catégorie additive, se donner une structure de Ω-catégorie sur $\mathcal{A}$ revient à se donner un foncteur additif $\Omega : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Proposition :
Soit $(\mathcal{C}, \Omega)$ une Ω-catégorie, $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\mu} \Omega$ la structure de groupe de Ω. Alors $\mu * \Omega = \Omega * \mu$ définit une structure d'objet groupe commutatif sur Ω^2.

Dém : Résulte du lemme de Yoneda et du lemme algébrique.

Corollaire
Soit $(\mathcal{C}, \Omega)$ une Ω-catégorie.
Si Ω est fidèle ou essentiellement surjectif, alors l'objet groupe Ω est abélien.

Lemme
Soit $(\mathcal{C}, \Omega)$ une Ω-catégorie. Si Ω est fidèle et si $\forall X, Y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega X, \Omega Y)$ est un sous-groupe
alors $\mathcal{C}$ est une catégorie additive.

Remarque: On a vu que si $\mathcal{A}$ est une catégorie additive, $(\mathcal{A}, 1_{\mathcal{A}})$ est canoniquement une Ω-catégorie. Le corollaire précédent implique que si $\mathcal{C}$ est une catégorie telle que $(\mathcal{C}, 1_{\mathcal{C}})$ soit une Ω-catégorie, alors $\mathcal{C}$ est une catégorie additive.

Dém: Par transport de structure, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ admet une structure de groupe fonctorielle en X et Y. On en déduit par le lemme de Yoneda une structure de Ω-catégorie sur $(\mathcal{C}, 1_{\mathcal{C}})$.

<u>Proposition:</u>

Soit $(\mathcal{C}, \Omega)$ une Ω-catégorie. Si Ω est pleinement fidèle ou fidèle et essentiellement surjectif alors $\mathcal{C}$ est une catégorie additive.

Action dans une catégorie additive:

$\mathcal{A}$ catégorie additive.

$X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$

$X \oplus Y \xrightarrow{a} Y$ une action de X sur Y.

$a = (u, u')$. On a

$$\begin{tikzcd} X \oplus Y \arrow[r, "(u,u')"] & Y \\ Y \arrow[u, "(0,1)"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd} \Rightarrow u' = 1_Y$$

$$\begin{tikzcd}
X \oplus X \oplus Y \arrow[r, "1_X \oplus (u, 1_Y)"] \arrow[d, "(1_X, 1_X) \oplus 1_Y"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \oplus Y \arrow[d, "(u, 1_Y)"] \\
X \oplus Y \arrow[r, "(u, 1_Y)"'] & Y
\end{tikzcd} \quad \forall u$$

Donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \{\text{actions de } X \text{ sur } Y\}$
$u \longmapsto (u, 1_Y)$

Triangles:

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additif, et $\mathcal{A} \xrightarrow{\Omega} \mathcal{A}$ un endofoncteur additif.

Un triangle de $(\mathcal{A}, \Omega)$ est une donnée du type

$$\tau : \quad X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{w} Z \qquad \Omega Z \times X \xrightarrow{a = (u, 1_X)} X$$

i.e de manière équivalente, une donnée du type:

$$\Omega Z \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{w} Z .$$

$R(\tau)$ correspond alors à

$$\Omega Y \xrightarrow{-\Omega w} \Omega Z \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} Y .$$

Proposition:

Soit $(\mathcal{C}, \Omega)$ une catégorie prétriangulée telle que Ω soit une équivalence de catégories.

Alors c'est une catégorie triangulée.

$\mathbb{D}$ dérivateur faible à gauche de domaine Dia satisfaisant en outre Der 6_g.

Rappel: on a un foncteur fibre homotopique

$$\Phi : \mathbb{D}(\Delta_1^\circ) \longrightarrow \mathbb{D}(e)$$

$$\begin{tikzcd}
(0,0) & (0,1) \arrow[l] & & (0,1) & \arrow[l, hook'] & 0 \\
(1,0) \arrow[u] & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] & \arrow[l, hook'] & (1,0) & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] & \arrow[l, hook'] & 1 \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\square & \lrcorner \arrow[l, hook', "i_\lrcorner"'] & \Delta_1^\circ \arrow[l, hook', "k"']
\end{tikzcd}$$

$\Phi = (p_\lrcorner)_* k_!$ et $\tilde{\Phi} = i_{\lrcorner *} k_!$, d'où $\Phi = i^*_{\square,(0,0)} \tilde{\Phi}$.

Pour $X \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(\Delta_1^\circ)$ on a

$$\mathrm{dia}\, \tilde{\Phi} X = \begin{tikzcd}
\Phi X \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d] & X_0 \arrow[d, "d_X"] \\
* \arrow[r] & X_1
\end{tikzcd}$$

On note $\Delta_1^\circ \xrightarrow{p} e$ $\quad e \xrightarrow{s} \Delta_1$ $\quad e \xrightarrow{t} \Delta_1$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad * \mapsto 0 \quad\quad * \mapsto 1$

(t, p, s) est un triplet de foncteurs adjoints.

Proposition:

Φ est un adjoint à droite de s_* i.e $\Phi \simeq s^!$

Esquisse de démonstration: on a ~~T~~ dia $s_* T = \begin{pmatrix} T \\ \downarrow \\ * \end{pmatrix}$

$\tilde{\Phi} X$ induit un morphisme

$$s_* \Phi X \xrightarrow{\varepsilon_X} X$$

et $\tilde{\Phi} s_* Y$ induit un isomorphisme

$$s_* \Phi s_* Y \to s_* Y$$

d'où un isomorphisme

$$\Phi s_* Y \xrightarrow{\sim} Y$$

et on prend son inverse $Y \xrightarrow{\eta_Y} \Phi s_* Y$.

On définit
$$\begin{aligned} \Omega &= p_{\lrcorner *}\, i_{\lrcorner, (1,1)!} \\ &\simeq i^*_{\square, (0,0)}\, i_{\lrcorner *}\, i_{\lrcorner, (1,1)!} \\ &\simeq i^*_{\square, (0,0)}\, i_{\lrcorner *}\, k_!\, t_! \\ &= \Phi\, t_! \\ &= s^!\, t_! \end{aligned}$$

~~ID dérivateur faible à gauche~~

ID prédérivateur satisfaisant

Der 1, Der 2 Der 3g Der 4g Der 6g

Der 3d (Der 4d Der 6d)

$$\begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & \end{tikzcd} \xhookrightarrow{\;i_\Gamma\;} \begin{tikzcd} (0,0) & (0,1) \arrow[l] \\ (1,0) \arrow[u] & (1,1) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On dit que X est h-cocartésien ($X \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(\square)$) si ~~[illegible]~~ $i_{\Gamma !} i_\Gamma^* X \longrightarrow X$ est un isomorphisme.

On définit $\tilde{S} = i_{\Gamma !}\, i_{\Gamma,(0,0)*}$ et $S = i^*_{\square,(1,1)} \tilde{S}$

On a $S \simeq p_{\Gamma !}\, i_{\Gamma,(0,0)*}$

Pour $X \in \mathrm{ob}\, \mathbb{D}(e)$ $\tilde{S}X$ est h-cocartésien, et on a

$$\mathrm{dia}\, \tilde{S}X = \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & SX \end{tikzcd}.$$

On a des suites foncteurs adjoints

Si u est dans Dia : $u_!\ u^*\ u_*$

Si k est une immersion fermée dans Dia : $k_!\, k^*\, k_*\, k^!$

Si ℓ " " " ouverte " " : $\ell^?\, \ell_!\, \ell^* \ell_*$.

On démontre alors que $S \overset{?}{=} t^{\cdot} s_*$.

Conséquence:

Proposition:
(S, Ω) est un couple de foncteurs adjoints.

On suppose désormais que $\mathbb{D}$ satisfait l'axiome:

Der 7. Soit X un objet de $\mathbb{D}(\square)$.
Alors X est homotopiquement cartésien si et seulement s'il est homotopiquement cocartésien.

Proposition:
(S, Ω) est un couple d'équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Dém. Soit $X \in \mathrm{Ob}\, \mathbb{D}(e)$.
$\tilde{\Omega} S X$ et $\tilde{S} X$ sont homotopiquement cartésiens.

$$\mathrm{dia}\, \tilde{\Omega} S X = \begin{array}{ccc} \Omega S X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & S X \end{array} \qquad \mathrm{dia}\, \tilde{S} X = \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & S X \end{array}$$

On a $i_\lrcorner^* \tilde{\Omega} S X \simeq i_\lrcorner^* \tilde{S} X$ d'où $\Omega S X \simeq X$.
De même $X \simeq S \Omega X$.

Théorème

Soit $\mathbb{D}$ un dérivateur triangulé (i.e satisfaisant les axiomes Der 1 – … – Der 7).

Alors $\mathbb{D}(e)$ est une catégorie triangulée.

Corollaire:

Pour tout A dans $\mathcal{D}ia$, $\mathbb{D}(A)$ est une catégorie triangulée.

Dém: On applique le théorème au dérivateur triangulé
$$I \mapsto \mathbb{D}(A \times I).$$