LES DÉRIVATEURS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Chapitre XVII

Catégories à fibrations et à cofibrations (Modèles (3))

Ce texte a été déchiffré et transcrit en $\LaTeX\,2_\varepsilon$ par M. Künzer. Il a été édité par M. Künzer, J. Malgoire, et G. Maltsiniotis. La transcription est aussi fidèle que possible au manuscrit. Seules quelques corrections mineures évidentes ont été effectuées. Pour les rares ajouts ou commentaires des éditeurs, ainsi que pour la numérotation originale des pages du manuscrit, les caractères de machine à écrire `[typewriter]` entre crochets sont utilisés.

Cette édition est provisoire. Les remarques, commentaires et corrections sont bienvenus. Envoyer un message à :

georges.maltsiniotis@imj-prg.fr

G. Maltsiniotis

[page 1]

1 Préliminaires [1]

Proposition 1. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie stable par $\varinjlim$ quelconques, $C \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ contenant les isomorphismes, stable par cochangement de base et par composition* transfinie. *Soit, pour tout petit ensemble ordonné I, $C_I \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I^\circ))$ l'ensemble des flèches $u_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ telles que $\forall\, i_0 \in I$, dans le diagramme*

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X'_{i_0} = \varinjlim\limits_{i<i_0} X_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i_0} = \varinjlim\limits_{i<i_0} u_i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_{i_0} \arrow[d, "\beta_{i_0}"'] \arrow[dd, bend left, dotted, "u_{i_0}"] \\ Y'_{i_0} = \varinjlim\limits_{i<i_0} Y_i \arrow[r] & \tilde{Y}_{i_0} \arrow[d, "\tilde{u}_{i_0}"'] \\ & Y_{i_0} \end{tikzcd} \quad \text{(défini comme somme amalgamée)}$$

la flèche $\tilde{u}_{i_0}$ soit dans C [2]*. Je dis que si I est* bien ordonné, *alors $u_\bullet \in C_I$ implique*

a) *que $\varinjlim u_i : \varinjlim X_i \longrightarrow \varinjlim Y_i$ est dans C, et*

b) *$\forall\, i \in I$, $(u_i : X_i \longrightarrow Y_i) \in C$* [3].

.

Corollaire. *Soit $W \subset \mathcal{M}$ localiseur modérément saturé, tel que $TC \overset{\text{déf}}{=} C \cap W$ soit stable par cochangement de base, et par composition* transfinie. *Soit $u_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ dans C_I. Alors $u_\bullet \in W_{I^\circ}$ (i.e. $\forall\, i \in I$, on a $u_i \in W$) si et seulement si $u_\bullet \in (TC)_I$, i.e. si et seulement si pour tout $i \in I$, la flèche $\tilde{u}_i$ dans $(*)$ est dans TC, ou ce qui*

[page 2 n'existe pas]

[1] **N.B.** Ces préliminaires seront complètement repris et dépassés dans le paragraphe 2. À ne pas lire !

[2] Condition stable par passage de I à un sous-ensemble ordonné *ouvert* I' de I.

[3] Dire aussi que l'on a

b′) *Si $i' \leq i$, alors dans le diagramme similaire à $(*)$,*

$$\begin{tikzcd} X'_{i'} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X'_i \arrow[d] \\ Y'_{i'} \arrow[r] & \tilde{Y}'_i \arrow[d, "u_{i',i}"] \\ & Y'_i \end{tikzcd} ,$$

on a $u_{i',i} \in C$ (on retrouve $(*)$ en faisant $i' = i_0$, $i = i_0 + 1$). Le cas b) s'obtient en faisant $i' = 0$, i quelconque, d'où $(X'_i \longrightarrow Y'_i) \in C$. L'appliquant à $i+1$ au lieu de i, on trouve $(u_i : X_i \longrightarrow Y_i) \in C$.

`[page 3]`

revient au même, dans W *(puisque par hypothèse elle est déjà dans* C*). Si cette condition est satisfaite, alors* $\varinjlim u_i : \varinjlim X_i \longrightarrow \varinjlim Y_i$ *est dans* W*.*

Démonstration du corollaire. Supposons $u_\bullet \in (TC)_I$, alors par la proposition, $\varinjlim_{i\in I} u_i$ est dans TC, ou ce qui revient au même, dans W. D'autre part, appliquant ce même résultat aux systèmes inductifs induits sur $I_{<i_0}$, on trouve que dans $(*)$, la flèche α_{i_0} est dans TC, donc aussi β_{i_0} par cochangement de base, donc aussi $u_{i_0} = \tilde{u}_{i_0}\beta_{i_0}$. Donc il reste à prouver qu'inversement, si on suppose les $u_{i_0} \in W$, alors les $\tilde{u}_{i_0}$ sont eux aussi dans W (i.e. dans $TC = C \cap W$), ou ce qui revient au même, que les β_{i_0} sont dans W, ou encore dans TC. Mais comme TC est stable par cochangement de base, il suffit pour cela de prouver que $\alpha_{i_0} \in TC$, ou encore $\alpha_{i_0} \in C$. Donc on est ramené à prouver que

c) $u \in W_{I^\circ} \cap C_I \Longrightarrow (\varinjlim_{i<i_0} u_i) \in W$ pour tout $i_0 \in I$,

donc, changeant de notation, à prouver `[phrase incomplète]`. Nous prouverons ensemble a) b) c) par induction transfinie sur le nombre ordinal α tel que $I \simeq I_\alpha = \{\text{ensemble des ordinaux } i < \alpha\}$.

`[page 4]`

1°) Cas $\alpha = 0$, i.e. $I = \emptyset$: il est trivial.

2°) Si c'est ok pour I_α, aussi pour $I_{\alpha+1} = \{\beta \mid \beta \leq \alpha\}$. Ici, $I_{\alpha+1}$ ayant un plus grand élément α, a) est contenu dans b) (pour $i = \alpha$, plus grand élément de $I_{\alpha+1}$.) Pour prouver b), il reste à prouver que $u_\alpha \in C$. On regarde le diagramme $(*)$ pour $i_0 = \alpha$. Par l'hypothèse de récurrence (forme a), appliquée à I_α, on a $\alpha_{i_0} \in C$, donc par cochangement de base $\beta_{i_0} \in C$, donc par composition $u_{i_0} = \tilde{u}_{i_0}\beta_{i_0} \in C$. Pour prouver c), il reste à prouver que $\varinjlim_{i<\alpha} u_i \in W$. Mais par l'hypothèse de récurrence appliquée à $I_\alpha = \{i \mid i < \alpha\}$, on sait déjà que $(u_i)_{i<\alpha} \in (TC)_{I_\alpha}$, donc par la partie prouvée du corollaire ou de la proposition, $\varinjlim_{i<\alpha} u_i \in TC$.

3°) Si α est un ordinal limite, et si a) b) c) sont vrais pour I_β avec $\beta < \alpha$, ils le sont aussi pour I_α. Cette fois, b) est contenu dans l'hypothèse de

`[page 5]`

récurrence, il faut prouver a), i.e. que

$$u_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i<\alpha} u_i \ : \ \underbrace{X_\alpha}_{\overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i<\alpha} X_i} \longrightarrow \underbrace{Y_\alpha}_{\overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i<\alpha} Y_i}$$

est dans C. Quant à c), il est déjà contenu dans la hypothèse de récurrence. Donc il reste finalement à prouver

$$u_\alpha \in C$$

quand on suppose que la proposition est prouvée pour les ordinaux $\beta < \alpha$.

On va construire un troisième système ordinal sur I_α, en introduisant pour tout $0 \leq i < \alpha$, i.e. $i \in I_\alpha$, Z_i par le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_\alpha \arrow[d] \\ Y_i \arrow[r] & Z_i \ . \end{tikzcd}$$

Les flèches de transition entre les Z_i sont évidentes, et on aura $\varinjlim_i Z_i \xrightarrow{\sim} Y_\alpha$. Ainsi, $u_\alpha : X_\alpha (= Z_{-1}) \longrightarrow Y_\alpha$ est décomposé en composé transfini de morphismes

[page 6]

(∗) $$Z_i \xrightarrow{v_{i+1}} Z_{i+1} \qquad (-1 \leq i < \alpha)$$

et

(∗∗) $$\varinjlim_{i<i_0} Z_i \xrightarrow{v_{i_0}} Z_{i_0} \qquad i_0 \text{ ordinal limite } < \alpha.$$

(**N.B.** Le cas où i_0 n'est *pas* ordinal limite n'est autre que (∗) pour $i = \beta_0 - 1$.) Tout revient à prouver que ces flèches sont dans C (donc leur composé transfini aussi).

Cas (∗).

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r] \arrow[d, "u_i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{i+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_\alpha \arrow[d] \\ Y_i \arrow[r] & \tilde{Y}_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{u}_{i+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & Z_i \arrow[d, "v_{i+1}"] \\ & Y_{i+1} \arrow[r] & Z_{i+1} \ . \end{tikzcd} \qquad (4)$$

Comme $\tilde{u}_{i+1} \in C$, $v_{i+1} \in C$ par cochangement de base, OK. Il faut cependant traiter à part le cas $i = 0$, i.e. la flèche $X_\alpha \longrightarrow Z_0$, qui est incluse dans

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d, "u_0"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_\alpha = Z_{-1} \arrow[d, "v_0"] \\ Y_0 \arrow[r] & Z_0 \ , \end{tikzcd}$$

où $u_0 \in C$, donc $v_0 \in C$, OK.

Cas (∗∗). Si $i_0 < \alpha$ est ordinal limite, inspectons (∗∗). On a par passage à la limite

$$Z'_{i_0} \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i<i_0} Z_i \ \simeq \ Y'_{i_0} \amalg_{X'_{i_0}} X_\alpha$$

(cf. diagramme (∗) pour la définition de X'_{i_0}, Y'_{i_0}), s'insérant dans le diagramme suivant greffé sur (∗)

[4] Pour se donner confiance – on pourrait traiter toute de suite le cas général.

[page 7]

$$\begin{tikzcd}
X'_{i_0} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i_0}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_{i_0} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{i_0}"] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_\alpha \arrow[d] \\
Y'_{i_0} \arrow[r] & \tilde{Y}_{i_0} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{u}_{i_0}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & Z'_{i_0} \arrow[d, "v_{i_0}"] \\
& Y_{i_0} \arrow[r] & Z_{i_0} .
\end{tikzcd}$$

On a $\tilde{u}_{i_0} \in C$ par hypothèse, donc $v_{i_0} \in C$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 2. *$(\mathcal{M}, C)$ et le cas échéant W, comme dans proposition 1 et son corollaire, I ensemble ordonné localement fini, i.e. tel que $\forall\ i_0 \in I$, I/i_0 soit fini. Soit*

$$u_\bullet\ : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$$

une flèche dans [5] *$\mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}}$ = sous-catégorie pleine de systèmes inductifs sur I, à valeurs dans $\mathcal{M}$, tels que $\underbrace{\emptyset_{\mathcal{M}(I^\circ)}}_{\substack{\text{objet}\\ \text{initial}\\ \text{de } \mathcal{M}(I^\circ)}} \longrightarrow Z_\bullet$ soit dans C_I (définie dans prop. 1), i.e. tel que $\forall\ i_0 \in I$,*

la flèche

$$Z'_{i_0} \;=\; \varinjlim_{i<i_0} Z_i \longrightarrow Z_{i_0}$$

soit dans C, et supposons $u_\bullet \in C_I$. Alors

a) $\varinjlim_{i\in I} u_\bullet : X_I \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i\in I} X_i \longrightarrow Y_I \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i\in I} Y_i$ *est dans C,*

[page 8]

et

b) *$\forall\ i_0 \in I$, on a $\alpha_{i_0}, \beta_{i_0} \in C$ dans le diagramme $(*)$ p. 1.*

Corollaire. *De plus (supposant donné W comme dans prop. 1, cor. 1), les conditions suivantes sur une $u_\bullet$ entre $X_\bullet$, $Y_\bullet$ C-cofibrants sont équivalentes.*

1°) *$u_\bullet \in (TC)_I$, i.e. les $\tilde{u}_{i_0} \in TC$ ($\forall\ i_0 \in I$).*

2°) *$u_\bullet \in T_I \cap W_{I^\circ}$, i.e. $\forall\ i_0 \in I$, $\tilde{u}_{i_0} \in C$, $u_{i_0} \in W$.*

3°) *Pour tout $i_0 \in I$, on a*

$$\alpha_{i_0},\ \beta_{i_0},\ \tilde{u}_{i_0},\ u_{i_0}\ \in\ TC$$

(i.e. $\alpha_{i_0}, \tilde{u}_{i_0} \in TC$, ce qui implique $\beta_{i_0} \in TC$, puis $u_{i_0} \in TC$ par cochangement de base et par composition).

Et ces conditions impliquent

4°) *que $u_I : X_I \longrightarrow Y_I$ est dans TC.*

Voyons comment ou dans quelle mesure le corollaire se déduit de la proposition. On a bien sur

[5] en fait, l'hypothèse que $X_\bullet$, $Y_\bullet$ dans $\mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}}$ est inutile, tant dans la proposition 2 que dans ses deux corollaires.

$$\begin{tikzcd} & 3^\circ \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ 1^\circ & & 2^\circ \end{tikzcd}$$

tautologiquement. D'ailleurs, la proposition appliquée à TC au lieu de X montre qu'on a $1^\circ \Longrightarrow 3^\circ$ & 4°, car en l'appliquant aux ensembles $I_{<i_0}$ on trouve que $\alpha_{i_0} \in TC\ \forall\ i_0 \in I$. Donc la proposition 2 implique

$$(1^\circ \Longleftrightarrow 3^\circ) \Longrightarrow 2^\circ\ (\&\ 4^\circ).$$

`[page 9]`

Donc pour prouver $2^\circ \Longrightarrow 3^\circ$, il resterait à prouver que 2° suffit à impliquer 4° (et ceci quel que soit I ensemble ordonné localement fini) – car en appliquant ceci aux $I_{<i_0}$, on trouve que 2° implique $\alpha_{i_0} \in TC = C \cap W$ (non seulement $\alpha_{i_0} \in C$, selon la proposition 2), donc $\beta_{i_0} \in TC \subset W$, donc $\tilde{u}_{i_0} \in W$ par saturation, donc $\tilde{u}_{i_0} \in TC$, d'où 3°.

Notons d'autre part que le b) dans la proposition 2 est conséquence de a), appliqué à la restriction de $u_\bullet$ à $I_{<i_0}$. Au total, il y a donc à prouver seulement les deux choses

$$(*)\qquad \begin{cases} \text{a)} & u_\bullet \in C_I \implies u_I \in C \\ \text{b)} & u_\bullet \in C_I \cap W \implies u_I \in C \cap W\ \ (\overset{\text{déf}}{=} TC) \\ & \qquad\qquad\qquad\quad (\text{et } u_\bullet \in (TC)_I) \end{cases}$$

Nous le prouverons par réduction au cas particulier de la proposition 1, déjà prouvée.

J'ai d'ailleurs aussi envie de prouver le

Corollaire 2. *$\mathcal{M}$, C (et éventuellement W). Les hypothèses sur $X_\bullet, Y_\bullet \in \mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}}$ et sur $u_\bullet \in C_I$, enfin sur I localement fini, sont celles de la proposition 2. Pour toute partie J de I, soit*

$$u_J \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i \in J} u_i\ :\ X_J \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i \in J} X_i \longrightarrow Y_J \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i \in J} Y_i\,.$$

Soient $I' \subset I''$ deux parties ouvertes *de I, et considérons le diagramme*

`[page 10]`

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} X_{I'} \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "\alpha = u_{I'}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_{I''} \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dd, bend left, "u_{I''}"] \\ Y_{I'} \arrow[r, "\tilde{\tau}_Y"] \arrow[dr, dotted, "\tau_Y"'] & \tilde{Y}_{I''} \arrow[d, "\tilde{u}"] \\ & Y_{I''}\,. \end{tikzcd} \quad \text{(défini comme somme amalgamée)}$$

Alors on a

$$\left\{\begin{array}{l} u_{I'}, u_{I''} \in C \text{ (donc aussi } \beta \in C\text{) (i.e. pour tout } J \text{ ouvert dans } I\text{,} \\ u_J : X_J \longrightarrow Y_J \text{ est dans } C\text{)}^{(6)}\text{, et } \tau_X, \tau_Y \in C \text{ (donc aussi } \tilde{\tau}_Y \in C\text{)} \\ \text{(i.e. pour } I' \subset I'' \text{ inclusion d'ouverts, et } X_\bullet \ C\text{-cofibrant dans } \mathcal{M}(I^\circ)\text{,} \\ \text{on a } X_{I'} \longrightarrow X_{I''} \text{ dans } C\text{)}^{(7)}\text{, et enfin, même} \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{\tilde{u} \in C.} \end{array}\right.$$

N.B. Le cas de la proposition 2 sous la forme (∗) a), page 9, (i.e. aussi le fait que les $u_{I'}$, $u_{I''}$, … sont dans C) est obtenu en prenant $I'' = I$, $I' = \emptyset$, le diagramme devient

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_I \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \emptyset \arrow[r] & X_I \arrow[d, "\tilde{u} = u_I"] \\ & Y_I \ , \end{tikzcd}$$

et la conclusion est donc $u_I \in C$ [8]. La *définition* de C_I, i.e. la condition $u \in C_I$, se retrouve en exigeant $\tilde{u} \in C$ dans (∗) ci-dessus, dans le cas $I'' = I/i_0$, $I' = I_{<i_0}$. Il est remarquable

`[page 11]`

que cette définition de C_I donne une conclusion aussi forte que $\tilde{u} \in C$ pour *tout* couple $I' \subset I''$ de sous-ensembles ouverts de I.

C'est finalement sous cette forme qu'on va prouver la proposition 2 – c'est *ça* à présent qui me semble *le* bon énoncé dans cette direction. Avec le complément, bien sûr, que si de plus $u_\bullet \in W_{I^\circ}$, i.e. les u_i sont dans W, alors $u_\bullet$ est même dans $(TC)_I$, ou encore

[6] C'est bien sûr contenu dans prop. 2, appliquée à $u_\bullet|_J$.

[7] C'est pour cette assertion $\tau_X \in C$ (d'où $\tilde{\tau}_Y, \tau_Y \in C$, moyennant $\tilde{u} \in C$) qu'on a besoin de l'hypothèse $X_\bullet \in \mathcal{M}(I^\circ)_c$, $\tilde{u} \in C$ vrai sans cette hypothèse.

[8] Le cas $(Y_{I'} \xrightarrow{\tau_Y} Y_{I''}) \in C$ est obtenu en prenant $X_\bullet = \emptyset_\bullet$, on aura

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, "\tau_X", "\sim"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & \emptyset \arrow[d] \\ Y_{I'} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\tau_Y"'] & \tilde{Y}_{I''} = Y_{I'} \arrow[d, "\tilde{u} = \tau_Y"] \\ & Y_{I''} \ . \end{tikzcd}$$

simplement que les $u_{I'}$ *sont dans* TC (d'où il résultera donc que $\tilde{u}$ dans $(*)$, p. 10, est aussi dans TC).

On va procéder par construction transfinie. On peut supposer bien sûr que $I'' = I$. On va quand même d'abord prouver le cas particulier où $I' = \emptyset$, i.e. prouver au moins que $u_I \in C$. On construit par récurrence transfinie une suite strictement croissante d'ouverts

$$I_\alpha \subset I,$$

aboutissant à

$$I_{\alpha_0} = I,$$

en posant

$$\begin{cases} I_0 = \emptyset\,, \\ I_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta \qquad \text{si } \alpha \text{ ordinal limite}\,, \\ I_{\alpha+1} = I_\alpha \cup (I/s_\alpha) \quad \text{si } I_\alpha \neq I, \text{ et en choisissant } s_\alpha \in I \backslash I_\alpha\,. \end{cases}$$

[page 12]

(On finit par avoir $I_{\alpha_0} = I$, bien sûr.) On pose

$$\begin{aligned} X_\alpha &= X_{I_\alpha} = \varinjlim_{i \in I_\alpha} X_i \\ Y_\alpha &= Y_{I_\alpha} = \varinjlim_{i \in I_\alpha} Y_i \\ u_\alpha &= u_{I_\alpha} : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha\,, \end{aligned}$$

homomorphisme de systèmes inductifs transfinis. On aura

$$X_{\alpha_0} = X_I, \qquad Y_{\alpha_0} = Y_I, \qquad u_{\alpha_0} = u_I,$$

et on doit donc prouver que $u_{\alpha_0} \in C$. Pour ceci, on applique la proposition 1, il suffit donc de prouver que $(u_\alpha) \in C_{I_{\alpha_0+1}}$ (où $I_{\alpha_0+1} = \{\text{ordinaux } i \mid i < \alpha_0 + 1, \text{ i.e. } i \leq \alpha_0\}$). Donc il faut prouver que les flèches $\tilde{u}_{i_0}$ dans $(*)$ p. 1 (où cette fois les i, i_0 sont des ordinaux, $i_0 \leq \alpha_0$) sont dans C. Je vais distinguer les deux cas où $\alpha = i_0$ est ordinal limite, qui est trivial car alors $X_{i_0} \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i<i_0} X_i$, $Y_{i_0} \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{i<i_0} Y_i$, et $\tilde{u}_{i_0} = \mathrm{id}$, et le cas α non limite, i.e.

$$\begin{tikzcd} X_{I_{\alpha-1}} \arrow[r] \arrow[d, "u_{\alpha-1}"'] & X_{I_\alpha} \arrow[d, "\beta_\alpha"] \arrow[dd, bend left, "u_\alpha"] \\ Y_{I_{\alpha-1}} \arrow[r] & \tilde{Y}_{I_\alpha} \arrow[d, "\tilde{u}_\alpha"] \\ & Y_{I_\alpha}\,, \end{tikzcd}$$

[page 13]

à prouver que $\tilde{u}_\alpha \in C$. Lorsqu'on suppose de plus $u_0 \in W_{I_0}$, i.e. les $u_i \in W$, il faut de plus prouver que $\tilde{u}_\alpha \in TC = C \cap W$. La proposition 2 et son corollaire 1 résulteront de là. Pour prouver $\tilde{u}_\alpha \in C$ resp. $\tilde{u}_\alpha \in TC$, on peut supposer $I_\alpha = I$ (quitte à changer de notation). On pose donc

$$\begin{aligned} I_\alpha &= I, & I_{\alpha-1} &= I' \\ I/s_{\alpha-1} &= I_0, & I_0 \cap I' &= I'_0 \,, \end{aligned}$$

de sorte qu'on a un diagramme commutatif d'inclusions ouvertes

$$\begin{tikzcd}
I_0 \cap I' = I'_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & I_0 \arrow[d, hook] \\
I' \arrow[r, hook] & I = I_0 \cup I'.
\end{tikzcd}$$

On utilisera seulement le fait que I_0, donc I'_0, est fini, i.e. que dans le couple $(I' \subset I)$, I peut s'écrire sous la forme $I = I' \cup I_0$, avec I_0 un ouvert *fini,* pour en conclure que dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X_{I'} \arrow[r, "\tau^X_{I',I}"] \arrow[d, "u_{I'}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_I \arrow[d, "v_{I',I}"] \arrow[dd, bend left, "u_I"] \\
Y_{I'} \arrow[r] \arrow[dr, "\tau^Y_{I',I}"'] & \tilde{Y}_I \arrow[d, "\tilde{u} = u_{I',I}"'] \\
 & Y_I
\end{tikzcd}$$

on a $\tilde{u} \in C$ resp. $\tilde{u} \in TC = C \cap W$.

[page 14]

Il faut des notations générales, d'une part pour une inclusion $J \subset K$ d'ouverts de I, donnant lieu au diagramme

(1)
$$\begin{tikzcd}
X_J \arrow[r, "\tau^X_{J,K}"] \arrow[d, "u_J"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_K \arrow[d, "\tilde{u}_{J,K}"'] \arrow[dd, dotted, bend left, "u_K"] \\
Y_J \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "\tau^Y_{J,K}"'] & Y_{J,K} \text{ (anciennement } \tilde{Y}_K) \arrow[d, "u_{J,K}"'] \\
 & Y_K \,,
\end{tikzcd}$$

et pour des inclusions de trois ouverts emboîtés $J \subset K \subset L$ de I,

(2)
$$\begin{tikzcd}
X_J \arrow[r] \arrow[d, "u_J"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_K \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{u}_{J,K}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_L \arrow[d, "\tilde{u}_{J,L}"'] \arrow[dd, bend left, "\tilde{u}_{K,L}"] \\
Y_J \arrow[r] & Y_{J,K} \arrow[r] \arrow[d, "u_{J,K}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & Y_{J,L} \arrow[d, "u^L_{J,K}"'] \arrow[dd, bend left, "u_{J,L}"] \\
& Y_K \arrow[r] & Y_{K,L} \arrow[d, "u_{K,L}"'] \\
& & Y_L\ ,
\end{tikzcd}$$

donnant lieu à une nouvelle flèche $u^L_{J,K}$, déduite de $u_{J,K}$ par le cochangement de base

`[page 15]`

$Y_{J,K} \longrightarrow Y_{J,L}$. Nous utiliserons ce diagramme dans les deux cas où $(J \subset K \subset L)$ est l'un des deux triplets

$$\begin{cases} I'_0 \hookrightarrow I_0 \hookrightarrow I \\ I'_0 \hookrightarrow I' \hookrightarrow I, \end{cases}$$

issus du carré cocartésien (dans Cat) (carré MV)

(3)
$$\begin{tikzcd}
I'_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & I_0 \arrow[d, hook] \\
I' \arrow[r, hook] & I\ .
\end{tikzcd}$$

Il faut insérer les deux diagrammes correspondants du type $(*)$ `[de la page 10]` dans un même diagramme. On notera à ce propos que les carrés dans $\mathcal{M}$ déduits de (3) en lui appliquant $J \longmapsto X_J$ et $J \longmapsto Y_J$

(4_X)

(4_Y)

$$\left.\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
X_{I'_0} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, dotted, "u_{I'_0}"] & & X_{I_0} \arrow[dr] \arrow[dd, dotted, "u_{I_0}" near end] & \\
& X_{I'} \arrow[rr, crossing over] & & X_I \arrow[dd, dotted, "u_I"'] \\
Y_{I'_0} \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y_{I_0} \arrow[dr] & \\
& Y_{I'} \arrow[rr] \arrow[from=uu, dotted, crossing over, "u_{I'}" near start] & & Y_I
\end{tikzcd}\right\} (4)$$

sont cocartésien dans $\mathcal{M}$. (Transitivité des $\varinjlim$ ...).

`[page 16]`

On a un homomorphisme $(u_{I'_0}, u_{I_0}, u_{I'}, u_I)$ déduit de u du carré (4_X) dans les carré (4_Y), et cet homomorphisme lui aussi s'insère dans un diagramme, incluant les deux avatars déjà signalé de (2). Voici le diagramme pertinent :

(5 [9])

$$\begin{tikzcd}
 & X_{I_0} \arrow[rrr] \arrow[dd] & & & X_I \arrow[dd] \\
X_{I'_0} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{I'} \arrow[urr] \arrow[dd] & & \\
 & Y_{I'_0,I_0} \arrow[rrr] \arrow[dd, "u_{I'_0,I_0}"] & & & Y_{I'_0,I} \arrow[dd, "u^I_{I'_0,I_0}"] \arrow[dddl] \\
Y_{I'_0} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr, dotted] \arrow[dddrr, dotted] & & Y_{I'_0,I'} \arrow[urr] \arrow[ddd] & & \\
 & Y_{I_0} \arrow[rrr] \arrow[dddrrr, dotted] & & & Y_{I_0,I} \arrow[ddd, "u_{I_0,I}"] \\
 & & & Y_{I',I} \arrow[ddr, "u_{I',I}"] & \\
 & & Y_{I'} \arrow[ur] \arrow[drr, dotted] & & \\
 & & & & Y_I \, .
\end{tikzcd}$$

Le cube supérieur est le cube dans $\mathcal{M}$ à 6 faces cocartésiens déduit des trois flèches de $X_{I'_0}$ dans X_{I_0}, $X_{I'}$, $Y_{I'_0}$. On aura besoin de savoir que la *base* du cube est un carré cocartésien. La partie antérieure du diagramme est l'avatar de (2) correspondant aux inclusions $I'_0 \subset I' \subset I$, la partie derrière l'avatar pour l'inclusion $I'_0 \subset I_0 \subset I$. Donc les deux autres carrés verticaux, en dessous du cube supérieur, sont également cocartésiens, ainsi que le carré oblique en pointillés, lequel n'est autre que la base (4_Y) du diagramme (4). De ces caractères du diagramme (5) résulte aisément (quoique

`[page 17]`

j'ai mis une bonne journée de gribouillis en bonheur-la-chance, avant de m'en rendre compte enfin ...) que le carré en losange à traits pleins

$$\begin{tikzcd}
 & Y_{I'_0,I} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Y_{I',I} \arrow[dr] & & Y_{I_0,I} \arrow[dl] \\
 & Y_I &
\end{tikzcd}$$

est également cocartésien. On le voit trivialement sur le diagramme déployé

[9] diagramme imbitable, à remplacer par diagramme (6) ci-dessus.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & Y_{I'_0} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
 & & Y_{I'_0,I'} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\text{cocart.}"] & & Y_{I'_0,I_0} \arrow[dl] \arrow[dr, "u_{I'_0,I_0}"] & & \\
 & Y_{I'} \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\text{cocart.}"] & & Y_{I'_0,I} \arrow[dl] \arrow[dr, "u^I_{I'_0,I_0}"] \arrow[rr, phantom, "\text{cocart.}"] & & Y_{I_0} \arrow[dl] & \\
 & & Y_{I',I} \arrow[dr, "u_{I',I}"] \arrow[rr, phantom, "\text{cocart.}"] & & Y_{I_0,I} \arrow[dl] & & \\
 & & & ? \simeq Y_I \simeq Y_{I'} \amalg_{Y_{I'_0}} Y_{I_0} \ , & & &
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

qui est finalement le diagramme pertinent (le diagramme (5) ne servait à rien, c'est un mauvais bout par lequel j'ai pris les choses). On voit sur le diagramme (6) que pour prouver $u_{I',I} \in C$ resp. TC, il

[page 18]

suffit de prouver $u_{I'_0,I_0} \in C$ resp. TC. Mais c'est là une assertion relative à l'inclusion d'ensembles ordonnés $I'_0 \subset I_0$ *finis.* On est donc réduit à prouver le lemme suivant, où I_0 devient I :

Lemme. *Soit I un ensemble ordonné fini, $u_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ une flèche dans $\mathcal{M}(I^\circ)$, où $\mathcal{M}$ est une catégorie munie d'un ensemble $C \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ de flèches tel que C soit stable par cochangement de base et par composition, et contienne les isomorphismes. On suppose $u_\bullet \in C_I$, i.e. que pour tout $i \in I$, la flèche $u_{I_{<i},I/i}$ est dans C. Alors pour toute partie ouverte I' de I, la flèche $u_{I',I}$ est dans C* [(10)].

Corollaire. *Si de plus $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ est un localiseur modérément saturé, tel que $TC \overset{\text{déf}}{=} W \cap C$ soit stable par cochangement de base (et l'est de toutes façons par composition, et contient les isomorphismes), alors on a*

$$C_I \cap W_{I^\circ} \ = \ (TC)_I,$$

donc si $u_\bullet \in C_I$ (cf. ci-dessus) et les $u_i \in W$, alors $u_\bullet \in (TC)_I$, donc en appliquant ce qui est dit pour C à TC, on a $u_{I',I} \in TC$ pour toute

[page 19]

partie ouverte I' de I.

On prouvera en même temps le lemme et son corollaire, en procédant par récurrence sur $\operatorname{card} I = n$. Si $n = 0$, i.e. $I = \emptyset$, les énoncés sont triviaux. Par transitivité, en utilisant les diagrammes du type (2), on est ramené au cas où $I = I' \cup \{i_0\}$, où $i_0 \in I \backslash I'$. On pose encore $I_0 = I/i_0$, $I'_0 = I_0 \cap I'$, et le raisonnement qu'on vient de faire nous montre qu'il suffit de prouver que $u_{I'_0,I_0} \in C$ resp. $\in TC$. Si $I'_0 \neq I$, cela résulte de l'hypothèse de récurrence. Sinon, i_0 est un objet final de I, et $I' = I_{<i_0}$, et alors $u_{I',I} \in C$ est inclus dans la définition de C_I. Reste à prouver alors que $u_{I',I} \in TC$ si les $u_i \in W$. On a le diagramme

[10] **N.B.** Bien sûr, $u_{J,K} \in C$ si $J \subset K$ sont deux ouverts de I, comme on voit en appliquant le lemme à K au lieu de I.

$$\begin{tikzcd} X_{I'} \arrow[r] \arrow[d, "u_{I'}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_I \arrow[d, "\tilde{u}_{I',I}"'] \arrow[dd, bend left, dotted, "u_I"] \\ Y_{I'} \arrow[r] & Y_{I',I} \arrow[d, "u_{I',I}"'] \\ & Y_I \ , \end{tikzcd}$$

[page 20]

et l'hypothèse de récurrence implique $u_{I'} \in TC$, donc $\tilde{u}_{I',I} \in TC$ par cochangement de base. D'autre part, la flèche $u_I : X_I \longrightarrow Y_I$ s'identifie à $X_{i_0} \longrightarrow Y_{i_0}$ (i_0 étant élément final de I), elle est donc dans W. Donc par saturation, $u_{I',I} \in W$, donc $u_{I',I} \in TC$, q.e.d.

Ainsi, la proposition 2 est prouvée, ainsi que son corollaire 1 – et on voit que si dans la proposition 2 et son corollaire, on suppose I *fini,* alors il est inutile dans les hypothèses pour C, resp. $TC = C \cap W$, de supposer la stabilité par composition *transfinie,* la composition ordinaire suffit. Mais il reste à prouver le corollaire 2, que je viens de prouver dans le cas I *fini,* sans avoir à faire appel à une hypothèse "transfinie". Il faut maintenant prouver que c'est encore OK dans le cas localement fini, en supposant C stable par composition transfinie. (Il n'y a plus à revenir sur le cas de W, car on sait déjà maintenant que $C_I \cap W_{I^\circ} = (TC)_I$, par le corollaire 1 déjà prouvé.)

[page 21]

La démonstration est essentiellement la même que pour le cas particulier déjà traité $I' = \emptyset$, $I'' = I$, et on aurait pu aussi bien rédiger la démonstration dans ce cadre, à l'aide d'une suite strictement croissante transfinie d'ouverts dans I, I_α, avec $\boxed{I_0 = I',}$ $I_{\alpha_0} = I''$ $(= I)$, et

$$\begin{aligned} I_\alpha &= I_{\alpha-1} \cup I/s_{\alpha-1} && \text{si } \alpha \text{ non limite, } I_{\alpha-1} \neq I, \text{ en choisissant } s_{\alpha-1} \in I \backslash I_{\alpha-1}, \\ I_\alpha &= \textstyle\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta && \text{si } \alpha \text{ limite,} \end{aligned}$$

et en posant encore

$$X_\alpha = X_{I_\alpha}, \qquad Y_\alpha = Y_{I_\alpha}, \qquad u_\alpha = u_{I_\alpha} : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha.$$

Soit α_0 tel que $I_{\alpha_0} = I$ (indice terminal de la suite), il faut prouver que dans

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X_{\alpha_0} \arrow[d] \\ Y_0 \arrow[r] & Y_{0,\alpha_0} \arrow[d, "u_{0,\alpha_0}"] \\ & Y_{\alpha_0} \ , \end{tikzcd}$$

[page 22]

on a

$$u_{0,\alpha_0} \in C.$$

Compte tenu du complément marginal à la proposition 1 (qui se prouve de la même façon ...), on est ramené à prouver que l'homomorphisme des systèmes ordinaux envisagés est dans $C_{I_{\alpha_0+1}}$ (où I_{α_0+1} est l'ensemble des ordinaux $\leq \alpha_0$). Or qu'il en soit ainsi se prouve exactement comme tantôt, à cela près qu'on doit d'abord faire une vérification de $(*)$ p. 1 ($\tilde{u}_\bullet \in C$) pour $i_0 = 0$. Alors le diagramme $(*)$ p. 1 est

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d, "\text{iso}"] & X_0 = X_{I'} \arrow[d, "\text{iso}"', "\text{id}"] \\
\emptyset \arrow[r] & X_0 = X_{I'} \arrow[d, "u_0 = u_{I'}"] \\
& Y_0 = Y_{I'} \ ,
\end{tikzcd}$$

et il faut donc vérifier $u_0 = u_{I'} \in C$. Or ceci est contenu dans la proposition 2 elle-même, déjà prouvé, qu'on doit donc utiliser. Le reste se prouve comme avant. Ainsi, le corollaire 2 de la proposition 2 est également prouvé.

Commentaires : Il y a un malaise, car les proposition 1 et proposition 2 (ainsi que leurs corollaires) ont essentiellement la même conclusion, avec des hypothèses sur I qui sont

[page 23]

différentes : bien ordonné dans un cas, localement fini dans un autre. L'idée naturelle, c'est de donner un énoncé commun, qui coiffe les deux à la fois, avec I artinien, i.e. toute suite décroissante est stationnaire. Ce qu'il faut, c'est une hypothèse sur I d'une part, sur $u_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ dans $\mathcal{M}(I^\circ)$ d'autre part, qui assure ceci :

$(*)$ $\forall\ i_0 \in I$, et toute partie ouverte J' de $J = I/i_0$, la flèche $u_{J',J}$ dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X_{J'} \arrow[r] \arrow[d, "u_{J'}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_J \arrow[d, "\tilde{u}_{J',J}"'] \arrow[dd, bend left, "u_J"] \\
Y_{J'} \arrow[r] & Y_{J',J} \arrow[d, "u_{J',J}"'] \\
& Y_J
\end{tikzcd}$$

est dans C.

Question : est-il exacte qu'il suffit, pour la validité de $(*)$, de supposer

a) $u_\bullet \in C_I$, i.e. $u_{J',J} \in C$ quand $J = I/i_0$, $J' = J \backslash \{i_0\}$, et

b) *I localement fini ?*

[page 24]

Lemme. *Soit $P \subset I$ l'ensemble des $i_0 \in I$ tels que pour tout ouvert K de $J = I/i_0$, la flèche $u_{K,J}$ est dans C. Ceci dit, soit $i_0 \in I$ tel que tout $i < i_0$ soit dans P. Alors $i_0 \in P$.* (On suppose $u_\bullet \in C_I$, mais I quelconque.)

En effet, soit $K \subset J = I/i_0$ un ouvert. Si $K = J$, il est trivial que $u_{K,J} \in C$ (c'est un isomorphisme). Si $K = J$, on a

$$K \ \subset \ J' \overset{\text{déf}}{=} J \backslash \{i_0\} \ \subset \ J,$$

et pour prouver que $u_{K,J} \in C$, il suffit de prouver que $u_{K,J'}, u_{J',J} \in C$. Or $u_{J',J} \in C$ par hypothèse $u_\bullet \in C_I$. Et $u_{K,J'} \in C$ par ce que a été prouvé pour le cas de J', compte tenu que par hypothèse sur i_0, tout $i \in J'$ (i.e. tout $i < i_0$) est dans P.

Corollaire. *Si I est artinien, $P = I$.*

Car toute partie P de I ayant la propriété qu'on vient de dire ($I/i_0 \subset P \Longrightarrow i_0 \in P$) est égale à I. Si en effet il y avait $x_0 \notin P$, il existerait $x_1 < x_0$ avec $x_0 \notin P$, et par récurrence on construirait une suite strictement décroissante dans I, absurde.

[page 25]

2 Description de $C_I \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I^\circ))$, pour I ensemble ordonné

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie, stable par (petites) $\varinjlim$, $C \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ ("cofibrations"). On suppose

(2.1)
$$\begin{cases} \text{a)} \quad C \quad \text{contient les isomorphismes et est stable} \\ \qquad\qquad \text{par cochangement de base.} \\ \text{b)} \quad C \quad \text{stable par composition transfinie.} \end{cases}$$

Soit I un (petit) ensemble ordonné, et considérons

$$\mathcal{M}(I^\circ) \ = \ \underline{\mathrm{Hom}}(I, \mathcal{M}),$$

on va définir une partie

$$C_I \ \subset \ \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I^\circ))$$

ainsi, pour $u_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ flèche dans $\mathcal{M}(I^\circ)$:

(2.2)
$$u_\bullet \in C_I \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \forall\ i_0 \in I \text{ et pour tout ouvert } J \subset I/i_0 = K, \\ \text{la flèche } u_{J,K} \text{ est dans } C. \end{array}$$

Voici la définition de $u_{J,K}$. Pour tout ouvert J de I, on pose

(2.3)
$$\begin{cases} X_J \ = \ \varinjlim\limits_{i \in J} X_i, \quad Y_J \ = \ \varinjlim\limits_{i \in J} Y_i, \\ u_J : X_J \longrightarrow Y_J, \qquad u_J \ = \ \varinjlim\limits_{i \in J} u_i, \end{cases}$$

et on considère, pour $K \subset J$, le diagramme

`[page 26]`

$$
\begin{tikzcd}
X_K \arrow[r, "\tau^X_{K,J}"] \arrow[d, "u_K"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_J \arrow[d, "\tilde{u}_{K,J}"'] \arrow[dd, bend left, "u_J"] & \\
Y_K \arrow[r, "\tau^Y_{K,J}"] & Y_{K,J} \arrow[d, "u_{K,J}"'] & = Y_K \amalg_{X_K} X_J \\
& Y_J \; . &
\end{tikzcd}
$$

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{M}$ $\mathfrak{U}$-catégorie stable par petites $\varinjlim$, $C \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, satisfaisant les conditions de stabilité* (2.1) *(par cochangement de base et par composition transfinie), I un petit ensemble ordonné, $u_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ une flèche dans $\mathcal{M}(I^\circ)$.*

1°) *On suppose $u_\bullet \in C_I$ (cf.* (2.2)*). Soient $K \subset J$ deux ouverts de I. Alors $u_{K,J}$ (défini dans* (2.4)*) est dans C.*

2°) *Supposons I artinien. Pour qu'on ait $u_\bullet \in C_I$, i.e. pour que $u_{K,J}$ soit dans C pour tout couple $(K \subset J)$ d'ouverts tel que J ait un plus grand élément, i.e. soit de la forme I/i_0 (i.e. aussi, par 1°), pour* tout *couple d'ouverts $J \subset K$), (il faut et) il suffit qu'il en soit ainsi dans le cas particulier où $J = I/i_0$, $J' = I'/i_0 \overset{\text{déf}}{=} I/i_0 - \{i_0\} = \{i \in I \mid i < i_0\}$.*

`[page 27]`

3°) *Supposons encore I artinien [11]. Soit $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ un localiseur modérément saturé, tel que $TC \overset{\text{déf}}{=} C \cap W$ satisfasse également aux conditions de stabilité* (2.1) *(par cochangement de base, par composition transfinie). Les conditions suivantes sur une flèche $u_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ dans $\mathcal{M}(I^\circ)$ sont équivalentes.*

   a) *$u_\bullet \in (TC)_I$, i.e. pour tout $i_0 \in I$ et K ouvert de $J = I/i_0$, la flèche $u_{K,J}$ est dans TC.*

   b) *$u_\bullet \in C_I \cap W_{I^\circ}$, i.e. pour tout $i_0 \in I$, on a $u_{i_0} \in W$, et pour tout ouvert K de $I/i_0 = J$, on a $u_{K,J} \in C$.*

Donnons tout de suite les corollaires principaux.

Corollaire 2.2. *Supposons $(u_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet) \in C_I$. Alors*

a) *$\forall\, i \in I$, $u_i : X_i \longrightarrow Y_i$ est dans C.*

b) *La flèche*

(2.2.1) $$u_I \;:\; X_I \longrightarrow Y_I$$

est dans C. Plus généralement, pour toute partie ouverte J de I, la flèche

(2.2.2) $$u_J \;:\; X_J \longrightarrow Y_J$$

est dans C.

[11] J'ignore si cette hypothèse est nécessaire, cf. commentaire p. 39.

[page 28]

Pour a), on applique 1°) (ou simplement la *définition* de C_I) dans le cas de l'inclusion d'ouverts $\emptyset \hookrightarrow I/i$, vu qu'on a

$$u_{\emptyset,I/i} \;\simeq\; u_i \;.$$

Pour b), on applique 1°) à l'inclusion $\emptyset \longrightarrow I$, vu que

$$u_{\emptyset,I} \;\simeq\; u_I \;,$$

et plus généralement

$$u_{\emptyset,J} \;\simeq\; u_J \;.$$

Corollaire 2.3. *Supposons $u_\bullet \in C_I \cap W_{I^\circ}$. Alors pour toute inclusion d'ouverts $K \subset J$ de I, on a $u_{K,J} \in TC$, et en particulier (prenant $K = \emptyset$), on a $u_J \in TC$. Enfin, pour tout $i \in I$, on a $u_i \in TC$.*

Corollaire 2.4. *Soit $X_\bullet$ dans $\mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}}$ un système inductif C-cofibrant, i.e. tel que $\emptyset_I \longrightarrow X_\bullet$ soit dans C_I, i.e. tel que pour tout $i_0 \in I$ et tout ouvert K de $J = I/i_0$, la flèche de transition $\tau_{K,J} : X_K = \varinjlim_{i\in K} X_i \longrightarrow X_J \simeq X_{i_0}$ soit dans C. Alors pour* tout *couple d'ouverts $K \subset J$, la flèche*

$$\tau_{K,J} \;:\; \varinjlim_{i\in K} X_i \;\longrightarrow\; \varinjlim_{i\in J} X_i$$

est dans C [12]*. En particulier (faisant $K = I/k$, $J = I/j$ pour $k \leq j$), si $k \leq j$ sont dans I, le morphisme de transition*

$$\tau_{k,j} \;:\; X_k \;\longrightarrow\; X_j$$

[page 29]

est dans C. Enfin, si $W \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$ est comme dans (2.1. 3°)*, et si $\emptyset_I \longrightarrow X$ est dans W_{I°, i.e. les X_i sont W-coasphériques, alors $X_\bullet$ est dans $\mathcal{M}(I^\circ)_{TC}$ (où $TC = C \cap W$), et pour tout ouvert J de I, $X_J = \varinjlim_{i\in J} X_i$ est dans $\mathcal{M}_{TC}$, donc X_J est W-coasphérique, et pour tout couple d'ouverts $K \subset J$, la flèche de transition $\tau_{K,J}$ est dans TC.*

Signalons enfin le complément suivant au théorème 2.1, qui résultera de sa démonstration :

Corollaire 2.5. *Supposons que l'espace topologique associé à I (dont les ouverts sont les ouverts de I, et les I/i forment une base d'ouverts) soit* noethérien, *i.e. toute suite croissante d'ouverts est stationnaire. Alors toutes les conclusions dans le théorème* 2.1 *et ses corollaires restent valables, en supposant seulement la stabilité de C ou de $TC = C \cap W$ par composition simple (au lieu de composition transfinie), en plus des deux autres stabilités.*

[12] et réciproquement, caractérise les objets C-cofibrants.

`[page 30]`

Démonstration du théorème 2.1 et du corollaire 2.5.

2.1. 1°) On peut supposer $J = I$, $K \subset I$. On construit une suite transfinie strictement croissante d'ouverts I_α, avec

$$\begin{cases} I_0 &= K, \\ I_{\alpha+1} &= I_\alpha \cup I/s_\alpha \quad \text{où } s_\alpha \in I \backslash I_\alpha \text{ (si } I_\alpha \neq I\text{, sinon, la construction transfinie s'arrête),} \\ I_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ ordinal limite.} \end{cases}$$

Il existe un α_0 tel qu'on ait $I_{\alpha_0} = I$. On voit alors comme au paragraphe 1

`[page 31]`

que pour tout α, on a

$$(*) \qquad u_{I_\alpha, I_{\alpha+1}} \in C,$$

car il est déduit de $u_{(I/s_\alpha)\cap I_\alpha, I/s_\alpha}$ par cochangement de base. Cf. diagramme (6), p. 17, qu'il faudrait dégager en lemme, débarrassé des particularités techniques de la situation, i.e. un lemme sur les homomorphismes de carrés cartésiens :

Lemme 2.6. *Soit un homomorphisme de carrés cocartésiens $X_\bullet$, $Y_\bullet$, dans une catégorie $\mathcal{M}$ avec sommes amalgamées (**N.B.** il suffit que les sommes amalgamées intervenant ci-dessus existent) :*

$$(2.6.1) \qquad \begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f_0"'] & & X_1 \arrow[dr] \arrow[dd, "f_1" near end] & \\ & X'_0 \arrow[rr] \arrow[dd, "f'_0" near start] & & X'_1 \arrow[dd, "f'_1"] \\ Y_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y_1 \arrow[dr] & \\ & Y'_0 \arrow[rr] & & Y'_1 \end{tikzcd} .$$

Soient Z_0, Z_1 les deux carrés latéraux et considérons, pour tout carré commutatif $Z = \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$*, la flèche u_Z du diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X' \arrow[d] & \\ Y \arrow[r] & \tilde{Z} \arrow[r, "u_Z"'] & Y' \end{tikzcd} .$$

[page 32]

Alors la flèche u_{Z_1} se déduit de u_{Z_0} par cochangement de base, de façon plus précise, on a un carré cocartésien, où $T =$

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] \\ Y_0 \arrow[r] & Y_1 \end{tikzcd}$$

et $T' =$

$$\begin{tikzcd} X'_0 \arrow[r] \arrow[d] & X'_1 \arrow[d] \\ Y'_0 \arrow[r] & Y'_1 \end{tikzcd}$$

désignent la face postérieure et antérieure du cube (2.6.1) :

(∗)
$$\begin{tikzcd} \tilde{Z}_0 \arrow[r, "u_{Z_0}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & Y'_0 \arrow[d] \\ \tilde{Z}_1 \arrow[r, "u_{Z_1}"] & Y'_1 \end{tikzcd} ,$$

qu'on voit sur la base du diagramme

(∗∗)
$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f_0"'] & & X_1 \arrow[dr] \arrow[dd, "f_1"] & & \\ & X'_0 \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ddr, "f'_0"] & & X'_1 \arrow[dd] \arrow[ddr, "f'_1"] & \\ Y_0 \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] \arrow[drrr, phantom, "\text{cocart.}"] & & Y_1 \arrow[dr] & & \\ & \tilde{Z}'_0 \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "u_{Z_0}"'] \arrow[drrr, phantom, "\text{cocart.}"] & & \tilde{Z}'_1 \arrow[dr, "u_{Z_1}"] & \\ & & Y'_0 \arrow[rr] & & Y'_1 \end{tikzcd} ,$$

dans lequel le cube est un cube totalement cocartésien, déduit du carré cocartésien X en l'"exponentiant" par la flèche $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ [plutôt, par la flèche (f_0, f_1) de $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$]*.*

La base du cube, et le carré

[page 33]

composé de celui-ci et de (∗) (base du diagramme polyédral (∗∗)) étant cocartésien, il en est de même de (∗).

Lemme 2.7. *Soit $(I_\alpha)_{\alpha \leq \alpha_0}$ une suite ordinale croissante d'ouverts de I. Alors $u_{I_0, I_{\alpha_0}} : Y_{I_0, I_{\alpha_0}} \longrightarrow Y_{I_{\alpha_0}}$ est composé transfini, indexé par l'ensemble des ordinaux $-1 \leq \alpha < \alpha_0$, d'une suite de flèches v_α, où chaque v_α est déduit de $u_{I_\alpha, I_{\alpha+1}}$ par cochangement de base (et de $u_{I_0} : X_{I_0} \longrightarrow Y_{I_0}$ pour $\alpha = 0$).*

Pour le voir, on introduit la suite transfinie d'objets $Z_\alpha = Y_{I_\alpha, I_{\alpha_0}}$, définis par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X_{I_\alpha} \arrow[r] \arrow[d] & X_{I_{\alpha_0}} \arrow[d] \\
Y_{I_\alpha} \arrow[r] & Y_{I_\alpha, I_{\alpha_0}} = Z_\alpha \arrow[d] \\
 & Y_{I_{\alpha_0}} \ ,
\end{tikzcd}$$

on a $Z_0 = Y_{I_\alpha, I_{\alpha_0}}$, $Z_{\alpha_0} = Y_{I_\alpha, I_{\alpha_0}}$, $Z_\alpha = \varinjlim_{\beta<\alpha} Z_\beta$ si α

[page 34]

ordinal limite. Donc il reste à déterminer les $v_{\alpha,\alpha+1} : Z_\alpha \longrightarrow Z_{\alpha+1}$ (pour $\alpha < \alpha_0$), ce qu'on voit sur le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X_{I_\alpha} \arrow[r] \arrow[d] & X_{I_{\alpha+1}} \arrow[r] \arrow[d] & X_{I_{\alpha_0}} = Z_0 \arrow[d] \\
Y_{I_\alpha} \arrow[r] & Y_{I_\alpha, I_{\alpha+1}} \arrow[r] \arrow[d, "u_{I_\alpha, I_{\alpha+1}}"] & Y_{I_\alpha, I_{\alpha_0}} = Z_\alpha \arrow[d, "v_{\alpha,\alpha+1}"] \\
 & Y_{I_{\alpha+1}} \arrow[r] & Y_{I_{\alpha+1}, I_{\alpha_0}} = Z_{\alpha+1} \ .
\end{tikzcd}$$

Reprenons la démonstration de 2.1. On va prouver 1° par les deux lemmes précédents. Notons que lorsque l'espace sous-jacent à I est noethérien, alors la construction transfinie est forcément finie, donc on n'a pas besoin de la stabilité de C par composés transfinis infinis.

[page 35]

Prouvons 2°. On suppose donc que pour tout $i_0 \in I$, on ait $u_{I_{<\alpha_0}, I/i_0} \in C$, on veut en déduire que $u_\bullet \in C_I$, i.e. $u_{J,I/i_0} \in C$ pour *tout* ouvert.

Lemme 2.8. (Sous hypothèse artinienne sur I.) *Soit $P \subset I$ l'ensemble des $i_0 \in I$ tels que pour $u_\bullet | I/i_0$ soit dans C_{I/i_0}, i.e. que pour tout $i \leq i_0$, et tout ouvert K de I/i, on ait $u_{K,I/i} \in C$. Soit $i_0 \in I$ tel que $I_{<i_0} \subset P$. Alors $i_0 \in P$.*

Démonstration. Il reste à prouver que si $K \subset I/i_0 = J$ est un ouvert, alors $u_{K,J} \in C$. On peut supposer $K \neq I/i_0$, i.e. $K \subset I_{<i_0} \overset{\text{déf}}{=} J'$. Mais alors par hypothèse initiale sur $u_\bullet$, on a $u_{J',J} \in C$, et d'autre part, par hypothèse sur i_0, $u_\bullet | J'$ est dans $C_{J'}$. Donc par le théorème 2.1. 1°, on a $u_{K,J'} \in C$. Donc par transitivité $u_{K,J} \in C$, q.e.d.

Corollaire 2.9. *Si I est artinien, alors $P = I$, i.e. $u_\bullet \in C_I$.*

Cela prouve donc 2.1. 2°. Notons que $\mathrm{Esp}(I)$ est noethérien, il en est de même de tout ouvert (tel J' ci-dessus), donc

[page 36]

pour la conclusion du lemme, inutile de supposer C stable par composition infinie.

Prouvons 2.1. 3°. On a a) $\Longrightarrow$ b), car par 2.1. 1°, $u_\bullet \in (TC)_I$ implique que pour $i \in I$, $u_i : X_i \longrightarrow Y_i$ est dans TC (cf. cor. 2.1 a). Donc il reste à prouver b) $\Longrightarrow$ a), i.e. si $u_\bullet \in C \cap W_{I^\circ}$, alors $u_\bullet \in (TC)_I$, i.e. les $u_{K,I/i_0}$ sont dans TC. On sait déjà que $u_{K,I/i_0} \in C$ par hypothèse $u_\bullet \in C_I$, donc il faut prouver que c'est dans W. On est ramené à prouver que $u_K \in W$, i.e. $u_K \in TC$, car par le diagramme (où $J = I/i_0$)

$$\begin{tikzcd}
X_K \arrow[r] \arrow[d, "u_K"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_J \arrow[d, "\tilde{u}_{K,J}"'] \arrow[dd, bend left, "u_J"] \\
Y_K \arrow[r] & Y_{K,J} \arrow[d, "u_{K,J}"'] \\
& Y_J \ ,
\end{tikzcd}$$

$u_K \in TC$ implique $\tilde{u}_{K,J} \in TC$, et comme $u_J \simeq u_{i_0} \in W$ par hypothèse, il en résulte bien $u_{K,J} \in W$ par saturation. Mais on va s'y prendre autrement :

[page 37]

Lemme 2.9. *I ensemble ordonné quelconque, C, W comme dans th.* 2.1, 1° *et* 3°, *$u_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ dans $C_I \cap W_{I^\circ}$. Soit P l'ensemble des $i_0 \in I$ tels que $u_\bullet | I/i_0$ soit dans $(TC)_{I/i_0}$. Si $i_0 \in I$ est tel que $I_{<i_0} \subset P$, alors $i_0 \in P$.*

En effet, il reste à prouver que pour tout ouvert K de $J = I/i_0$, $K \neq J$, on a $u_{K,J} \in TC$. Mais pour ceci, il suffit de voir que $u_K, u_J \in W$ (comme on venait de le voir). Or $u_J \simeq u_{i_0} \in W$ par hypothèse. D'autre part $u_\bullet | K \in (TC_K)$ puisque $K \subset I_{<i_0} \subset P$, donc par le théorème 2.1, 1°, on conclut que $u_K \in TC$.

Si maintenant on suppose I artinien, il résulte de 3.9 que $P = I$, donc $u_\bullet \in (TC)_I$, q.e.d.

Cela achève la démonstration du théorème 2.1, et aussi du corollaire 2.5, vu que pour la démonstration du lemme 2.9 également, les hypothèses infinies sur C, $C \cap W$ sont inutiles si $\mathrm{Top}(I)$ est noethérien, donc ses ouverts sont aussi noethériens.

Remarques.

1) Dans 2.1. 2°, l'hypothèse I artinien n'est par superflue, comme on voit en prenant $I = \mathbf{N}^{\mathrm{opp}} \simeq \mathbf{Z}^{\leq 0}$,

[page 38]

et pour une flèche

$$\emptyset_{\mathcal{M}(I)} \longrightarrow Y_\bullet \, .$$

Dire que cette flèche est dans C_I signifie que les morphismes de transition $Y_i \xrightarrow{u_i} Y_{i+1}$ sont dans C, *et* que les Y_i sont C-cofibrants, i.e. $\emptyset_{\mathcal{M}} \longrightarrow Y_i$ est dans C, pour tout i. Mais la condition envisagée dans 2.1. 1° est seulement que les u_i sont dans C. Donc en prenant pour $Y_\bullet$ un système inductif constant de valeur Y, avec Y non C-cofibrant, i.e. $\emptyset_{\mathcal{M}} \longrightarrow Y$ non dans C, on a un contre-exemple.

Avec le même I, on voit que $u_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ est dans C si et seulement si

a) les $u_i \in C$, et

b) les $u_{i,i+1} : Y_{i,i+1} \longrightarrow Y_{i+1}$ sont dans C.

Si de plus les u_i sont dans W, donc dans TC, on voit comme ci-dessus que $u_{i,i+1} \in TC$ pour tout i, donc $u_\bullet \in (TC)_I$. Donc ici on a encore

$$(TC)_I \;=\; C_I \cap W_{I^\circ}\ ,$$

quoique I ne soit pas artinien. J'ignore si l'hypothèse artinienne dans 2.1. 3° est superflue ou non.

2) Soit $u_\bullet \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I^\circ))$ [13], donc $u_\bullet$ est un objet de $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M}(I^\circ)) \simeq \mathcal{M}(I^\circ \times \mathbf{\Delta}^1) = \mathcal{M}((I \times (\mathbf{\Delta}^1)^{\mathrm{opp}})^{\mathrm{opp}})$. On vérifie que pour que cet objet soit C-cofibrant, il faut et il suffit que

1°) $X_\bullet$ soit C-cofibrant, et

2°) $u_\bullet \in C_I$ (ce qui implique que $Y_\bullet$ est aussi cofibrant).

[page 39]

3 Catégories de modèles à cofibrations

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie munie de deux ensembles de flèches

$$W,\ C\ \subset\ \mathrm{Fl}(\mathcal{M})\ .$$

On suppose que $\mathcal{M}$ contient un objet initial, et :

Cof$_0$ W est modérément saturé, i.e. contient les isomorphismes et si f, g sont composables, et si deux parmi f, g, gf sont dans W, le troisième aussi.

Cof$_1$ C contient les isomorphismes, est stable par composition et par cochangement de base.

Cof$_2$ $TC \overset{\text{déf}}{=} C \cap W$ est stable par cochangement de base.

Cof$_3$ Toute flèche f dans $\mathcal{M}$ s'écrit

$$f \;=\; pi$$

avec $i \in C$, $p \in W$.

Ce sont les axiomes de K. S. Brown (forme duale), qui suppose de plus que les objets de $\mathcal{M}$ sont C-cofibrants, i.e. $\emptyset_{\mathcal{M}} \longrightarrow X$ est dans C. Je ne ferai pas cette hypothèse. La sous-catégorie $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$ de $\mathcal{M}$ formée des

[page 40]

objets C-cofibrants satisfait aux axiomes de Brown, de plus on prouve que

$$\mathrm{Ho}_W(\mathcal{M}_{\mathrm{c}}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Ho}_W(\mathcal{M})$$

est une équivalence. Ainsi les résultats de Brown relatifs à $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$, muni des ensembles de flèches induits par W, C, sont applicables à $\mathrm{Ho}_W(\mathcal{M})$ et à ses avatars (tels $\mathrm{Ho}_W(S\backslash\mathcal{M})$, $\mathrm{Ho}_W(\mathcal{M}/T)$ et $\mathrm{Ho}_W(S\underset{u_0}{\backslash\mathcal{M}}/T)$, où $u_0 : S \longrightarrow T$ est donné). Il se trouve que pour l'essentiel, les résultats homotopiques standard (notamment suite exacte de cofibrations relatifs aux opérations homotopiques "à droite" (ou faut-il dire à gauche ? il s'agit pourtant de questions d'exactitude à droite, non à gauche)) sont valables. Il me faudra revenir dessus de façon plus circonstanciée par la suite. Notamment, il y a une bonne théorie de carrés W-cocartésiens (et *dans* $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$, il y a assez de W-cofibrations [14], ...),

[13] $I^\circ = I^{\mathrm{opp}}$.

[14] Plus précisément, par K. S. Brown, *dans* $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}$, les objets de C sont des W_{c}-cofibrations.

[page 41]

et de plus, ceux-ci sont *exacts.* La catégorie $\mathrm{Ho}_W(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Ho}_W(\mathcal{M}_c)$ "se calcule" par un calcul de fractions à gauche dans $\pi\mathcal{M}_c$, où $\pi\mathcal{M}_c$ est la catégorie déduite de $\mathcal{M}_c$ en y remplaçant les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_c}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)$ par le quotient par une relation d'homotopie convenable :

$f, g : X \rightrightarrows Y$ sont QB-homotopes (au sens de *Quillen-Brown*) s'il existe un $X' \xrightarrow{\alpha} X$ dans W (et on peut supposer $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_c$ également) tel que $f\alpha \overset{1}{\sim} g\alpha$

au sens de Quillen, i.e. il existe un objet cylindre
$$\begin{tikzcd} I_{X'} \arrow[r, "\in W"] & X' \\ X' \vee X' \arrow[u, "\in C"] \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$
pour X', tel que $(f\alpha, g\alpha) \ : \ X' \vee X' \longrightarrow Y$ se factorise par un $h' : I_{X'} \longrightarrow Y$.

C'est de ce critère que résulte l'exactitude (à gauche) des carrés W-cocartésiens.

Je veux voir comment une structure de cofibrations sur $\mathcal{M}$ s'étend aux catégories $\mathcal{M}(I^\circ) = \underline{\mathrm{Hom}}(I, M)$. On a dans $\mathcal{M}(I^\circ)$

[page 42]

l'ensemble W_{I°, et C_I (il vaut mieux sans doute le noter aussi C_{I°) défini au paragraphe précédent. Il s'agit de vérifier les axiomes. L'axiome Cof_0 est immédiat, et bien connu pour I une catégorie quelconque.

Cof_1 : C_{I° contient les isomorphismes, c'est clair, parce que C les contient. Stable par composition $X_\bullet \xrightarrow{u} Y_\bullet \xrightarrow{v} Z_\bullet$, regardons $K \subset J$, posons $w = v \circ u$,

$$\begin{tikzcd} X_K \arrow[r] \arrow[d] & X_J \arrow[d] & & \\ Y_K \arrow[r] \arrow[d] & Y_{K,J} \arrow[r, "u_{K,J}"] \arrow[d] & Y_J \arrow[d] & \\ Z_K \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "u'_{K,J}"] \arrow[rr, phantom, bend right, "\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{w_{K,J}}"] & Z_{K,J} \arrow[r, "v_{K,J}"] & Z_J \end{tikzcd},$$

$w_{K,J}$ est composé de $v_{K,J}$, qui est dans C, et $u'_{K,J}$, qui l'est car déduit de $u_{K,J}$ par cochangement de base.

(**N.B.** On a déjà fait le raisonnement avec un seul $u_\bullet$, et *trois* ouverts $J \subset K \subset L$. Il

[page 43]

y aurait lieu d'introduire la notion de C-carré $\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] \\ X_2 \arrow[r] & X_3 \end{tikzcd}$, comme un carré tel que

$X_1 \amalg_{X_0} X_2 \longrightarrow X_3$ soit dans C (**N.B.** notion symétrique pour les foncteurs de symétrie des carrés), et dire que le composé de deux C-carrés est un C-carré.)

Cochangement de base

$$\begin{tikzcd} X_\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y_\bullet \arrow[d] \\ X'_\bullet \arrow[r, "u'"] & Y'_\bullet \end{tikzcd} .$$

Considérons $K \subset J$, on a

$$\begin{tikzcd}
& X_K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_J \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[ddl] & \\
& Y_K \arrow[r] \arrow[ddl] \arrow[dl, phantom, "\text{cocart.}"] & Y_{K,J} \arrow[r, "u_{K,J}"] \arrow[ddl] \arrow[dl, phantom, "\text{cocartésien}"] & Y_J \arrow[ddl] \\
X'_K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X'_J \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
Y'_K \arrow[r] & Y'_{K,J} \arrow[r, "u'_{K,J}"] & Y'_J &
\end{tikzcd} ,$$

où les trois carrés latéraux marqués "cocart." sont cocartésiens, ainsi que le carré en plan incliné. Il en résulte, d'abord que le quatrième carré latéral du cube est lui aussi cocartésien,

`[page 44]`

puis que le carré ayant deux côtés $u_{K,J}$, $u'_{K,J}$ est cocartésien. (**N.B.** comparer le diagramme similaire p. 32 – il y aurait un lemme commun à dégager, distinguant deux cas ...)

Cof$_2$. Pour prouver que $C_{I^\circ} \cap W_{I^\circ}$ est stable par cochangement de base, je ne vois pas de façon de le faire, si je ne sais déjà qu'on a

$$(*) \qquad C_{I^\circ} \cap W_{I^\circ} \ = \ (TC)_{I^\circ} \ ,$$

et alors on applique le résultat précédent (où W n'entrait pas) à TC au lieu de C. Mais pour avoir $(*)$, il faut que je suppose qu'on est dans l'un des deux cas suivants (de façon à pouvoir appliquer le théorème 2.1 et son corollaire 2.5).

a) I fini, ou plus généralement I artinien *et* $\mathrm{Top}(I)$ est noethérien.

b) I artinien, et de plus C et TC sont stables par composition transfinie.

Cof$_3$. L'axiome de facorisation me paraît a priori le plus délicat [15]. Mais cela sort finalement sans trop de mal. Soit donné

$$f \ : \ X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$$

[15] L'argument qui suit s'applique à d'autres situations de factorisation, par exemple pour un précouple de Quillen donné (Φ, Ψ) dans $\mathcal{M}$.

[page 45]

dans $\mathcal{M}(I^\circ)$, considérons les triples

$$(J,\ Z,\ i,\ p)\ ,$$

où $J \subset I$ est un ouvert, Z un objet de $\mathcal{M}(J^\circ)$, et i, p sont des flèches

$$\begin{cases} X|J \xrightarrow{i} Z \xleftarrow{p} Y|J \\ \text{avec } i \in C_{J^\circ},\ p \in W_{J^\circ}. \end{cases}$$

On ordonne les quadruples par prolongement. Si on a un ensemble totalement ordonné, de $(J_\alpha, Z_\alpha, i_\alpha, p_\alpha)$, posant $J = \bigcup I_\alpha$, on trouve de Z, i, p uniques sur J qui prolongent les Z_α, i_α, p_α donnés, de plus on aura $i \in C_{J^\circ}$, $p \in W_{J^\circ}$, car l'appartenance à C_{J° resp. W_{J° est question locale sur J. Donc par Zorn, on est ramené à prouver que si (J, Z, i, p) est maximal, on a $J = I$ – d'ou la factorisation voulue $f = pi$. Donc à prouver que si $J \neq I$, le quadruple n'est pas maximal. Considérons le fermé non vide $I\backslash J$. I est supposé artinien, il y a un *élément minimal* i_0 de $I\backslash J$. Posons

[page 46]

$$J' \ = \ J \cup \{i_0\} \ = \ J \cup I/i_0,$$

et montrons qu'on peut prolonger le triplet Z, i, p en Z', j', p' sur J'. Posant $K' = I/i_0$, $K = J \cap K = I_{<i_0}$, on a donc

$$\begin{tikzcd} K = J \cap K' \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & K' = I/i_0 \arrow[d, hook] \\ J \arrow[r, hook] & J' = J \cup K'. \end{tikzcd}$$

On voit alors que les prolongements de (Z, i, p) de J à J' correspondent à ceux de $(Z|K', i|K', p|K')$ à K. Pour ceci, on note que pour une flèche φ d'objets de $\mathcal{M}(J'^\circ)$, cette flèche est dans $C_{J'^\circ}$ resp. $W_{J'^\circ}$, si et seulement si ses restrictions à J et à K' le sont.

On est donc ramené au cas standard d'un ensemble ordonné avec objet final e_0, ensemble ordonné qu'on va noter I, et l'ensemble ordonné I' des objets $i < e_0$, i.e. $I' = I\backslash\{i_0\}$. On a $f : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$, flèche dans $\mathcal{M}(I^\circ)$, une factorisation de $f|I'$ en $p' \circ i'$ avec $i' \in C_{I'^\circ}$, $p' \in W_{I^\circ}$,

[page 47]

et il s'agit de la prolonger en une factorisation similaire de f. On note que la donnée d'un objet $X_\bullet$ de $\mathcal{M}(I^\circ)$ équivaut à celle d'un objet $X'_\bullet$ de $\mathcal{M}(I'^\circ)$ (la restriction de X à I') et d'une flèche

$$X'_{I'} \xrightarrow{\alpha_X} X_{e_0} = X_0$$

dans $\mathcal{M}$, où $X'_{I'} = \varinjlim_{i' \in I'} X'_{i'}$. Donc la donnée de la flèche $f : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ revient à celle de $f' = f|I' : X'_\bullet \longrightarrow Y'_\bullet$, et d'une flèche $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ rendant commutatif le carré

$$\begin{tikzcd}
X'_{I'} \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "f'_{I'}"'] & X_0 \arrow[d, "f_0"] \\
Y'_{I'} \arrow[r, "\alpha_Y"] & Y_0 \, .
\end{tikzcd}$$

De même, trouver une factorisation de f en pi, qui prolonge une factorisation donnée $f' = p'i'$ sur J', revient à la donnée d'un diagramme commutatif

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
 & X'_{I'} \arrow[rr, "\alpha_X"] \arrow[dl, "i'_{I'}"'] \arrow[dd, "f'_{I'}"' near start] & & X_0 \arrow[dl, "i_0"'] \arrow[dd, "f_0"] \\
Z_{I'} \arrow[rr, "\alpha_Z"' near start] \arrow[dr, "p'_{I'}"'] & & Z_0 \arrow[dr, "p_0"] & \\
 & Y'_{I'} \arrow[rr, "\alpha_Y"'] & & Y_0 \, ,
\end{tikzcd}$$

[page 48 vide]

[page 49]

où l'objet Z_0, et les trois flèches α_Z, i_0, p_0 sont à déterminer. Si on a $i' \in C_{I'^\circ}$, $p \in W_{I'^\circ}$, alors on conclut par théorème 2.1. 1° (cor. 2.2) que

$$i'_{I'} \ \in \ C \ ,$$

et si on veut que $i \in C_{I^\circ}$, $p \in W_{I^\circ}$, il reste seulement à exiger

$$p_0 \in W, \qquad (i'_{I',I} : \underbrace{Z_{I'} \amalg_{X_{I'}} X_0}_{Z'_0} \longrightarrow Z_0) \in C,$$

d'après le théorème 2.1. 2°. On va alors construire le diagramme $(*)$, à partir du diagramme similaire ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
 & X_{I'} \arrow[rr, "\alpha_X"] \arrow[dl, "i'_{I'} \in C"'] \arrow[dd, "f'_{I'}" near end] \arrow[ddrr, phantom, "\text{cocart.}" near start] & & X_0 \arrow[dl, "i'_0 \in C"'] \arrow[dd, "f_0" near start] \arrow[dr, dotted, "i_0 = j_0 i'_0"] & \\
Z_{I'} \arrow[rr, "\alpha'_Z" near end] \arrow[dr, "p'_{I'}"'] & & Z'_0 = Z_{I',I} \arrow[rr, dotted, "j_0 \in C" near end] \arrow[dr, "p'_0"'] & & Z_0 \arrow[dl, dotted, "p_0 \in W"] \\
 & Y_{I'} \arrow[rr, "\alpha_Y"] & & Y_0 &
\end{tikzcd}$$

(avec Z_0 de $(*)$ remplacé par $Z'_0 = Z_{I',I}$) en factorisant la flèche canonique $p'_0 : Z'_0 \longrightarrow Y_0$ en

$$p'_0 \ = \ p_0 j_0 \ , \qquad \text{avec } p_0 \in W,\ j_0 \in C \ ,$$

et en posant

$$i_0 \ = \ j_0 i'_0 \ ,$$

ce qui achève la construction.

On a ainsi prouvé le

[page 50]

Théorème 3.1. *Soit $(\mathcal{M}, W, C)$ une catégorie à cofibrations (cf. page 39), $\mathcal{M}$ stable par $\varinjlim$ finies. Pour tout ensemble odonné I, considérons le tuple $(\mathcal{M}(I^\circ), W_{I^\circ}, C_{I^\circ})$ correspondant, où C_{I° est défini au paragraphe 2 (cf. à ce sujet le théorème 2.1). Supposons que I soit un ensemble ordonné* artinien *(p.ex. I localement fini, i.e. les I/i finis). Supposons de plus qu'on soit dans l'un des deux cas suivants :*

a) *L'espace $\mathrm{Esp}(I)$ est noethérien, i.e. toute suite croissante d'ouverts de I est stationnaire (p.ex. I fini).*
b) *C et $TC = C \cap W$ sont stables, non seulement par composition ordinaire, mais aussi par composition transfinie. Dans ce cas, on suppose aussi $\mathcal{M}$ stable par petites $\varinjlim$ filtrantes (donc par petites $\varinjlim$ quelconques).*

Sous ces conditions, $(\mathcal{M}(I^\circ), W_{I^\circ}, C_{I^\circ})$ est également une catégorie à cofibrations.

Proposition 3.2. *Soit $u : I \longrightarrow I'$ une application croissante entre ensembles ordonnés, d'où un couple de foncteurs adjoints*

$$\mathcal{M}(I^\circ) \underset{u^*}{\overset{u_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}(I'^\circ) \ . \tag{3.2.1}$$

[page 51]

a) *Le foncteur u^* est compatible avec les localiseurs $W_{I'^\circ}$, W_{I°. Si I est discrète, ou u étale, alors u^* applique $C_{I'^\circ}$ dans C_{I°. Il en est encore de même quand u est localement cofiltrant, i.e. si pour tout $i' \in \mathrm{Ob}\, I'$, la catégorie $i'\backslash I$ est localement filtrante, i.e. ses composantes connexes sont cofiltrantes (condition $\mathrm{PS_g}$ 1 sur $i'\backslash I$)* [(16)].
b) *Dans tous les cas, $u_!$ transforme C_{I° en $C_{I'^\circ}$, TC_{I° en $TC_{I'^\circ}$, enfin $\mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}}$ en $\mathcal{M}(I'^\circ)_{\mathrm{c}}$.*

Démonstration. Prouvons a), dans le cas le plus gênant, où on suppose seulement que u est localement faiblement cofiltrant. On applique II 7.4 (p. 92), qui nous dit que $\forall i \in \mathrm{Ob}\, I$,

[page 52]

considérant le morphisme induit par u

$$I/i \longrightarrow I'/i' \qquad (\text{où } i' = u(i)),$$

celui-ci est *(globalement)* faiblement cofiltrant, et que pour tout ouvert U de I/i, désignant par U' l'ouvert engendré par son image, le morphisme induit $v : U \longrightarrow U'$ est encore faiblement cofiltrant, et a fortiori *cofinal.* Soit alors $f' : X' \longrightarrow Y'$ une flèche dans $C_{I'^\circ}$, prouvons que

$$\underbrace{u^*(f')}_{f} : \underbrace{u^*(X')}_{X} \longrightarrow \underbrace{u^*(Y')}_{Y}$$

est dans C_{I°, i.e. que pour tout $i \in I$, et U ouvert de I/i, dans le diagramme canonique

[16]inutile de parler de "faiblement" localement cofiltrant, car il s'agit d'ensembles ordonnés où il n'y a pas à distinguer entre notions forte et faible.

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} X_U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X(i) \arrow[d] \\ Y_U \arrow[r] & Y_{U,i} \arrow[d, "v_{U,i}"] \\ & Y(i)\ , \end{tikzcd}$$

[page 53]

la flèche $v_{U,i}$ est dans C. Le diagramme $(*)$ s'envoie dans le diagramme similaire pour $f' : X' \longrightarrow Y'$, $i' = u(i)$, et l'ouvert $U' \subset I'/i'$ engendré par $u(U)$:

$$(**)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] X_U \arrow[rr] \arrow[dr, "f_U"] \arrow[dd, "c_U^{X'}"'] & & X(i) \arrow[dr] \arrow[dd, "\mathrm{id}", near end] & & \\ & Y_U \arrow[rr] \arrow[dd, "c_U^{Y'}", near start] \arrow[ur, phantom, "\text{cocart.}"] & & Y_{U,i} \arrow[dr, "v_{U,i}"] \arrow[dd, "c^{f'}_{U,i}"] & \\ X'_{U'} \arrow[rr] \arrow[dr, "f'_{U'}"'] & & X'(i') \arrow[dr] & & Y(i) \arrow[dd, "\mathrm{id}"] \\ & Y'_{U'} \arrow[rr] \arrow[ur, phantom, "\text{cocart.}"] & & Y'_{U',i'} \arrow[dr, "v_{U',i'}"'] & \\ & & & & Y'(i')\ . \end{tikzcd}$$

Par cofinalité, les deux flèches verticales $c_U^{X'}$ et $c_U^{Y'}$ sont des isomorphismes, en plus de $X(i) \xrightarrow{id} X'(i')$, donc la quatrième flèche du cube, $c^{f'}_{U,i}$, est un isomorphisme. Comme $v_{U',i'}$ est dans C, $v_{U,i}$ aussi, on gagne.

Prouvons b). Soit donc

$$f \ :\ X \longrightarrow Y$$

une flèche dans C_I, et soit

$$f' \ =\ u_!(f)\ :\ u_!(X) = X' \longrightarrow u_!(Y) = Y',$$

prouvons que c'est dans $C_{I'^\circ}$, donc que

[page 54]

pour deux ouverts $U' \subset V'$ de I' (où on peut supposer que $V' = I'/i'$), dans le diagramme-base de $(**)$, $v_{U',V'}$ soit dans C. Soit $U = u^{-1}(U')$, $V = u^{-1}(V')$, et considérons le diagramme similaire à $(**)$, défini par les deux inclusions d'ouverts $U' \subset V'$, $U \subset V$. Cette fois, comme la formation de $u_!$ commute aux restrictions aux ouverts, par transitivité des $\varinjlim$, les trois flèches vertivales $c^X_{U'}$, $c^Y_{U'}$, $c^X_{V'}$ sont des isomorphismes, donc aussi $c^f_{U',V'}$. De même, la flèche $Y_V \longrightarrow Y'_{V'}$ (à la place de $Y(i) \longrightarrow Y'(i')$) est un isomorphisme. Comme $v_{U,V} \in C$, il en est de même de $v_{U',V'}$, ce qui prouve que $f' \in C_{I'^\circ}$. On procède de même pour TC_I. Enfin, l'assertion que $u_!$ applique $\mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}}$ dans $\mathcal{M}(I'^\circ)_{\mathrm{c}}$ résulte des définitions et de $u_!(C_{I^\circ}) \subset C_{I'^\circ}$.

Corollaire 3.3 (de prop. 3.2 et th. 3.1). *Soit $u : I \longrightarrow I'$ comme dans* 3.2. *Supposons de plus I artinien, et*

`[page 55]`

qu'on soit pour $\mathcal{M}$, W, C, I dans l'une des conditions a), b) *du théorème* 3.1*. Alors $u_!$ induit une flèche*

$$u_{!\,\mathrm{cof}} \;:\; \mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}} \longrightarrow \mathcal{M}(I'^\circ)_{\mathrm{c}} \;\subset\; \mathcal{M}(I'^\circ)$$

qui transforme flèches de $W(I^\circ)$ en flèches de $W(I'^\circ)$ (i.e. compatible avec les localiseurs). Il induit donc un foncteur sur les localisés, d'où un

$$u_!^W \;:\; \mathrm{Ho}_W(I^\circ) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(I'^\circ) \qquad {}^{(17)}. \tag{3.3.1}$$

Démonstration. Par le théorème 3.1, on sait que $\mathcal{M}(I^\circ), W(I^\circ), C(I^\circ)$ est une structure de catégorie de modèles à cofibrations. On sait par ailleurs que $TC_{I^\circ} = C_{I^\circ} \cap W(I^\circ)$, par th. 2.1. 3° (p. 27). Donc par 3.2, $u_!$ applique $C_{I^\circ} \cap W(I^\circ)$ dans $TC_{I'^\circ} = C_{I'^\circ} \cap W(I'^\circ)$, et a fortiori, en des flèches dans $W(I'^\circ)$. Par ailleurs, par la théorie des catégories à cofibrations, on trouve que toute flèche f entre objets cofibrants est composée $f = pi$, où $i \in C_{I^\circ}$, et où p est dans $W(I^\circ)$, et de plus *inverse à gauche* d'une flèche dans $C_{I^\circ} \cap W(I^\circ)$, i.e. d'une flèche de $(TC)_{I^\circ}$. Quand

`[page 56]`

$f \in W(I^\circ)$, alors $i \in W(I^\circ)$, donc $i \in W(I^\circ) \cap C_{I^\circ} = (TC)_{I^\circ}$. Au total, toute flèche $f \in W(I^\circ)_{\mathrm{c}}$ est composée pi dans $\mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}}$, où $i \in (TC)_{I^\circ}$, et p est inverse à gauche d'une $j \in (TC)_{I^\circ}$. Comme $u_!$ transforme $(TC)_{I^\circ}$ en $(TC)_{I'^\circ}$, il transforme f en $f' = p'i'$, avec $i' \in (TC)_{I'^\circ} \subset W_{I'^\circ}$, et p' inverse à gauche d'une $j' = u_!(j)$ qui est également dans $W_{I'^\circ}$. Mais alors $i' \in W(I'^\circ)$, donc aussi $f' = p'i' \in W_{I'^\circ}$, ce qui prouve que $u_!(W(I^\circ)_{\mathrm{c}}) \subset W(I'^\circ)$. La dernière assertion provient du lemme suivant, appliqué à $(\mathcal{M}(I^\circ), W(I^\circ), C_{I^\circ})$ au lieu de $(\mathcal{M}, W, C)$:

Lemme 3.4. *Soit $(\mathcal{M}, W, C)$ une catégorie à cofibrations. Alors l'inclusion $\mathcal{M}_{\mathrm{c}} \subset \mathcal{M}$ induit une équivalence*

$$\mathcal{M}_{\mathrm{c}} W_{\mathrm{c}}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} W^{-1} = \mathrm{Ho}_W \ .$$

Nous donnerons la démonstration (par AQT `[âne qui trotte]`) ultérieurement.

Cela achève la démonstration de 3.3.

3.5. Il se pose la question si le foncteur $u_!^W$ de (3.3.1) est bien un adjoint à gauche

`[page 57]`

du foncteur en sens inverse u_W^*, induit par u^*. Notons que c'est le cas si u^* transforme $\mathcal{M}(I'^\circ)_{\mathrm{c}}$ en $\mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}}$, et quand on suppose que I' est également artinien et satisfait également à l'une des hypothèses a) b) du théorème 3.1. Car alors $(\mathcal{M}(I^\circ), W(I^\circ), C_{I^\circ})$ est une catégorie à cofibrations par le théorème 3.1, on peut lui appliquer le lemme précédent, donc u_W^* et $u_!^W$ se réalisent à partir d'un couple de foncteurs

$$\mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}} \underset{u_{\mathrm{c}}^*}{\overset{u_!^{\mathrm{c}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}(I'^\circ)_{\mathrm{c}} \ ,$$

[17]**N.B.** Cette flèche est définie, même sans supposer I' ordonné, car $u_{!\,\mathrm{cof}}$ transforme encore flèches de $W(I^\circ)$ en flèches de $W(I'^\circ)$. Cf. commentaire p. 86.

lesquels sont visiblement adjoint l'un de l'autre (puisque induits par un couple de foncteurs adjoints $u_!$, u^*), et de plus compatibles aux localiseurs. Donc on peut appliquer le lemme des foncteurs adjoints pour les localisés. Pour résumer :

Corollaire 3.5. *Supposons que I, I' soient artiniens, et qu'on soit dans l'un des deux cas suivants :*

a) *Les espaces* $\mathrm{Esp}(I)$, $\mathrm{Esp}(I')$ *sont noethériens (p.ex. I, I' finis).*

[page 58]

b) *C et $TC = C \cap W$ sont stables par composition transfinie.*

Supposons de plus que u^* applique $\mathcal{M}(I'^{\circ})_{\mathrm{c}}$ dans $\mathcal{M}(I^{\circ})_{\mathrm{c}}$, ce qui est le cas notamment si u est localement cofiltrant, i.e. les ensembles ordonnés localisés $i'\backslash I$ sont localement cofiltrants. Alors le foncteur $u_!^W$ construit dans (3.3.1) est adjoint à gauche de u_W^*.

Remarque 3.6. Quand on a un couple de foncteurs adjoints

$$\mathcal{C} \underset{u^*}{\overset{u_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}' \ ,$$

avec les localiseurs W, W' de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, u^* compatible aux localiseurs, et si de plus on a une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}_0$ de $\mathcal{C}$ telle que

a) $u_!|\mathcal{C}_0$ transforme flèches de W en flèches de W', et

b) l'inclusion $\mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{C}$ induit une *équivalence* $\mathcal{C}_0 W_0^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}W^{-1}$ (où $W_0 = W \cap \mathrm{Fl}(\mathcal{C}_0)$),

on trouve deux foncteurs canoniques

$$\mathcal{C}W^{-1} \underset{u_W^*}{\overset{u_!^W}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}'W'^{-1} \ ,$$

où $u_!^W$ est défini seulement à isomorphisme canonique près.

[page 59]

Contrairement à ce que prétend Anderson, il n'est par vrai en général que ces deux foncteurs soient adjoints, sans hypothèses supplémentaires. Voici un contrexemple : on prend $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, $u_! = u^* = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, $W' = \mathrm{Is}(\mathcal{C})$, $W = \mathrm{Fl}(\mathcal{C})$, donc u_W^* est le foncteur canonique

$$\underbrace{\Pi\,\mathcal{C}}_{\text{groupoïde fondamental}} \longleftarrow \mathcal{C} \ .$$

Supposons que $\mathcal{C}$ soit 1-connexe, i.e. $\Pi\,\mathcal{C}$ soit équivalente à e. Soit $e \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ tel que $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(e)$ soit le groupe unité, et prenons $\mathcal{C}_0 = \{e\}$. Alors l'hypothèse sur $\mathcal{C}_0$ est satisfaite. Mais si $u_!^W$ était adjoint à gauche de u_W^*, e serait objet initial de $\mathcal{C}$. Par exemple si $\mathcal{C}$ a un objet final e (ce qui implique que $\mathcal{C}$ est 1-connexe et e rigide), cet objet final devrait être initial si Anderson avait raison avec "it is clear that ...".

[page 60]

Néanmoins :

Théorème 3.7. *Soit $(\mathcal{M}, W, C)$ une catégorie à cofibrations stable par $\varinjlim$ finies, et $u : I \longrightarrow I'$ une application croissante entre ensembles ordonnés artiniens. On suppose qu'on est sous l'une des hypothèses suivantes.*

a) $\mathrm{Esp}(I)$, $\mathrm{Esp}(I')$ *sont noethériens, p.ex. I, I' finis.*

b) *C et $TC \overset{\text{déf}}{=} C \cap W$ sont stables par composition transfinie, et $\mathcal{M}$ stable par petites $\varinjlim$ filtrantes.*

Alors le foncteur $u_!^W : \mathrm{Ho}_W(I^\circ) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(I'^\circ)$ construit dans (3.3.1) *est adjoint à gauche du foncteur u_W^* en sens opposé.*

Démonstration. On utilise le diagramme bien connu

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[d, "\partial_1"'] \arrow[dd, bend left=60, "w"] \\
I \arrow[r, shift left, "\partial_0 \text{ (ouv.)}"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & I \times \mathbf{\Delta}^1 \arrow[l, shift left, dotted, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d] \\
I' \arrow[r, shift left, "\text{imm. ouv.}"] & C(u) \arrow[l, shift left, dotted, "v"]
\end{tikzcd}$$

pour factoriser u en

$$u \;=\; vw\ ,$$

où w est une *immersion fermée,* et v est déduit de $\mathrm{pr}_1 : I \times \mathbf{\Delta}^1 \longrightarrow I$ par push-out. C'est une rétraction du mapping-cone C(u) sur l'ouvert I', dont le complémentaire fermé s'identifie à I via w.

`[page 61]`

Le foncteur de recollement entre I', I

$$H \ :\ I'^\circ \times I \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

est donné par

$$(*) \qquad \underbrace{H(i', i)}_{= \mathrm{Hom}_{C(u)}(i', i)} \;=\; \mathrm{Hom}_{I'}(i', u(i))\ .$$

La rétraction v de $C(u)$ dans I' applique i dans $u(i)$, et une flèche $i' \longrightarrow i$ correspondant à $i' \longrightarrow u(i)$ dans I' via $(*)$, est transformé par v en cette même flèche $i' \longrightarrow u(i)$. Calculons, pour i'_0 donné, la catégorie $i'_0\backslash\Big(C(u),\ v : C(u) \longrightarrow I'\Big)$, des couple d'un objet ξ de $C(u)$ et d'une flèche $i'_0 \longrightarrow v(\xi)$ dans I'. On voit que $i'_0\backslash C(u)$ admet l'ouvert $i'_0\backslash I'$, avec le complémentaire fermé $i'_0\backslash I$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
I' \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"'] & C(u) \arrow[d] & I \arrow[l, hook', "\substack{\text{fermé}\\ \text{complémentaire}\\ \text{de } I'}"] \\
& I'\ , &
\end{tikzcd}$$

ces deux catégories étant recollées par le bifoncteur

$$\begin{aligned}
(i'_0\backslash I')^\circ \times (i'_0\backslash I) \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{Ens} \\
\Big((\alpha : i'_0 \longrightarrow i'), (\beta : i'_0 \longrightarrow u(i), i)\Big) \quad &\longmapsto \quad \mathrm{Hom}_{i'_0\backslash I'}(i', u(i))
\end{aligned}$$

induit par $(*)$; i.e. les flèches de $(\alpha : i'_0 \longrightarrow i') \in \mathrm{Ob}\,(i'_0\backslash I')$ dans $(\beta : i'_0 \longrightarrow u(i)) \in i'_0\backslash I$ sont les flèches $i' \xrightarrow{\gamma} u(i)$ telles que le triangle

$$\begin{tikzcd} & i'_0 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ i' \arrow[rr, "\gamma"] & & u(i) \end{tikzcd}$$

commute.

[page 62]

Si $i' = i'_0$, $\alpha = \mathrm{id}_{i'_0}$, alors cette commutativité revient à $\gamma = \beta$, ce qui signifie qu'il y a une flèche et une seule de α dans (i, β). Cela montre donc que $(i'_0, \mathrm{id}_{i'_0})$ est un objet initial de $i'_0\backslash C(u)$. On a donc prouvé le lemme :

Lemme 3.8. *Soit $u : I \longrightarrow I'$ une flèche dans* (Cat)*, factorisons-le en*

$$I \xrightarrow{w} C(u) \xrightarrow{v} I' \ ,$$

où $C(u)$ est le mapping-cone défini page 60*, w une immersion fermée de complémentaire I', v la rétraction canonique de $C(u)$ sur I'. Ceci posé, pour tout $i'_0 \in \mathrm{Ob}\, I'$, la catégorie $i'_0\backslash(C(u), v)$ admet un objet initial – donc $v : C(u) \longrightarrow I'$ est (tout ce qu'il y a de) cofiltrante.*

Nous pouvons maintenant prouver 3.7. Tout d'abord, les hypothèses faites sur I, I' se transportent à $C(u)$ (hypothèse artinienne, et éventuellement hypothèse noethérienne sur $\mathrm{Esp}(C(u))$). Donc

[page 63]

on peut appliquer les résultats précédents, notamment 3.5, aux flèches v, w. Le lemme précédent montre bien que v satisfait aux conditions de 3.5, donc le foncteur $v_!^W$ construit dans 3.3.1 est adjoint à gauche de v_W^*. Considérons d'autre part le foncteur $w_!^W$ construit dans 3.3.1, je dis que la même conclusion s'applique. Cela provient du fait que w est une immersion fermée. En effet, dans ce cas il est immédiat que

$$w_! \ : \ \mathcal{M}(I^\circ) \longrightarrow \mathcal{M}(I'^\circ), \qquad \text{où } I = C(u),$$

est compatible avec les localiseurs, puisque l'on a

$$\begin{cases} w_!(X)(j) & \simeq & X(j) & \text{si } j \in I, \\ w_!(X)(j) & \simeq & \emptyset_{\mathcal{M}} & \text{si } j \in J\backslash I, \end{cases}$$

par le calcul des fibres

$$w_!(X)(j) \ \simeq \ \varinjlim_{i \in I/j} X(i) \ .$$

Donc la définition de $w_!^W$ donnée dans 3.3.1 revient en fait à passer directement aux catégories localisées pour $w_!$, sans avoir à se restreindre à $\mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}}$, et le lemme des foncteurs adjoints nous dit que

[page 64]

ce foncteur est adjoint à gauche de w_W^*.

Comme on a évidemment

$$u_!^W \simeq v_!^W \circ w_!^W \ , \qquad u_W^* \simeq w_W^* \circ v_W^* \ ,$$

on en conclut que $u_!^W$ est bien adjoint à gauche de u_W^*, q.e.d.

Corollaire 3.9. *Soit* $(\mathcal{M}, W, C)$ *une catégorie à cofibrations. Alors le prédérivateur* $\mathbf{D}_W$*, restreint à la catégorie* Diag_0 *formée des catégories* I ordonnées *artiniennes et telles que* $\mathrm{Esp}(I)$ *soit noethérien, satisfait aux axiomes* Dér 1 (décomposition), Dér 2 (localisation), Dér 3 (objet final), Dér 4 bis (existence de $u_!$), Dér 5 bis (mode de calcul des $u_!$), Dér 6 (exactitude des carrés W-cocartésiens). *Si* C*,* $TC = C \cap W$ *sont stables par composition transfinie, on a le même résultat sur la catégorie* Diag *formée des catégories* I *ordonnées artiniennes sans plus.*

[page 65]

3.10. Ainsi, pour avoir un dérivateur au plein sens du terme, soit sur Diag_0, soit sur Diag, il ne manque que Dér 4 (existence des u_*), Dér 5 (calcul des u_*) et Dér 6 (exactitude des carrés W-cartésiens). On va les obtenir en principe à l'aide d'une structure de *catégorie à fibrations* $(\mathcal{M}, F, W)$ associé à $(\mathcal{M}, W)$, i.e. l'espèce de structure duale de celle introduite page 39. Ces deux structures n'ont pas à être reliées entre elles d'une façon autre que par le fait qu'elles correspondent au même W. Elles sont considérablement plus faciles à construire que des structures de Quillen (W, C, F), où C, F doivent être reliés de façon extrêmement stricte, avec les propriétés $C \longleftrightarrow \underbrace{TF}_{= F\cap W}$, $\underbrace{TC}_{= C\cap W} \longleftrightarrow F$ (dont il n'est pas question dans l'axiomatique de K. S. Brown), et factorisation pour (C, TF) et (TC, F).

[page 66]

Mais revenant à la construction des $u_!^W$, il reste le problème de les construire pour une flèche $u : I' \longrightarrow I$ *quelconque* dans Cat.

À vrai dire, la construction du foncteur

$$u_!^W \ : \ \mathrm{Ho}_W(I^\circ) \longrightarrow \mathrm{Ho}_W(I'^\circ) \tag{3.3.1}$$

est valable sans supposer que I' soit une catégorie ordonnée – ça peut être une catégorie quelconque. Cela provient du fait que le foncteur induit par $u_!$,

$$u_{!\,\mathrm{cof}} \ : \ \mathcal{M}(I^\circ)_{\mathrm{c}} \longrightarrow \mathcal{M}(I'^\circ)$$

est encore compatible avec les localiseurs, comme on voit par le calcul des fibres

$$u_!(X)(i) \simeq \varinjlim_{i \in I/i'} X(i) \ .$$

Ainsi, on est ramené aux cas où $I' = e$, quitte à remplacer I par I/i', et en notant que ($I/i' \longrightarrow I$ étant étale) l'image inverse de X sur I/i' est cofibrant (cf. 3.2.a).

[page 67]

Mais il se présente à nouveau la perplexité si le foncteur (3.3.1) ainsi construit est bien adjoint à gauche de u_W^*. On peut songer à utiliser encore la même factorisation en $u = vw$, en utilisant le mapping-cone. La difficulté, cependant, c'est qu'à présent $J = C(u)$ n'est plus une catégorie ordonnée, donc on n'a pas une définition toute prête de $C_{J^\circ} \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(J^\circ))$, donnant lieu à une sous-catégorie $\mathcal{M}(J^\circ)_{\mathrm{c}}$ etc. En fait, il semblerait qu'on soit pratiquement paralysé, tant qu'on n'arrive à construire sur $\mathcal{M}(J^\circ)$ également une structure de catégorie à cofibrations, se comportant bien par rapport au foncteurs $v_!$. La "démonstration" d'ANDERSON de l'existence de $u_!$ pour *toute* flèche dans Cat, foire totalement (même pour $I \longrightarrow e$, I ensemble ordonné fini – mais là j'ai pu rétablir la situation), car il se ramène au cas où I est ordonné localement fini, et il

`[page 68]`

admet sans plus que *dans ce cas* $u_!^W$ est adjoint à gauche de u_W^*, et *de plus,* que si u est $\mathbf{W}_0$-connexe, donc $u^* : \mathcal{M}(I'^\circ) \longrightarrow \mathcal{M}(I^\circ)$ pleinement fidèle, qu'il en soit de même de u_W^* déduit par passage aux localisés. Or même si on admet que $u_!^W$ est adjoint à gauche de u_*^W, faute de disposer d'un morphisme d'adjonction tout près "en bas" (dans $\mathrm{Ho}_W(I'^\circ)$), déduit du morphisme d'adjonction dans $\mathcal{M}(I^\circ)$, il n'est absolument pas clair que u_W^* soit pleinement fidèle, i.e. $u_!^W$ un foncteur de localisation. Le contrexemple 3.6 montre bien que, même si on a adjonction (i.e. si e est un objet initial de $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$), le foncteur $u^* = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ a beau être pleinement fidèle (et même une équivalence de catégories), le foncteur localisé n'a aucune raison de l'être : cela pouverait que tout objet de Cat ayant un objet initial est équivalent à e !

`[page 69]`

3.11. Disons qu'on a une *catégorie à cofibrations stricte,* si dans l'axiome Cof_3 de factorisation (cf. p. 39), la factorisation peut être prise fonctoriellement en f. Il revient $\pm$ au même de dire que l'axiome de factorisation reste valable, quand on pense à une catégorie $\mathcal{M}(I)$ pour I dans Cat, en y définissant $W(I)$ et $C(I)$ (à ne pas confondre avec C_I) fibre par fibre. Cela revient au même tout au moins si $\mathcal{M}$ est équivalente à une petite catégorie. Sinon, il faut supposer fonctorialité pour toute *petite* sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Fl}}(\mathcal{M})$. Il vaut mieux définir la catégorie à cofibrations stricte par cette propriété de stabilité.

On voit alors que le prédérivateur $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\mathcal{M}}$ sur Cat est un dérivateur *relativement à* $\mathcal{D} = \mathrm{Diag}_0$ défini plus haut (catégories ordonnées I artiniennes, telles que $\mathrm{Esp}(I)$ soit noethérien), ou même relativement à $\mathcal{D} = \mathrm{Diag}$ (catégories ordonnées I artiniennes sans plus) lorsque C et TC sont stables par composition transfinie. J'entends par là que $u_!$ existe quand u est une flèche de $\mathcal{D}$,

`[page 70]`

et que ça reste valable quand on passe à un dérivateur induit $\mathbf{D}_Z$ (Z dans Cat quelconque) ; en d'autre termes, que $v_!$ existe quand v est de la forme $\mathrm{id}_Z \times u$, où $u : I \longrightarrow I'$ est une flèche de $\mathcal{D}$, et que le calcul se fait *au dessus de* I' selon la règle Dér 5 bis. Cela signifie donc que la flèche de changement de base pour les $f_!$ est un isomorphismes dans le cas suivant :

$$\begin{tikzcd} I \times Z \arrow[d, "u\times \mathrm{id}_Z"] & (i'\backslash I) \times Z \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\ I' \times Z & \{i'\} \times Z \arrow[l] \end{tikzcd} ,$$

où i' est un objet quelconque de I'.

L'hypothèse *stricte* pour une catégorie à cofibrations me paraît assez anodine, dans la plupart des cas à ma connaissance, elle est satisfaite. Mais même moyennant cette hypothèse, je ne vois aucun moyen de prouver l'existence de $u_!$ pour *toute* flèche de Cat, et c'est une situation bien sûr très gênante. On voudrait absolument dégager des conditions qui assurent la validité de Dér 4 bis et de Dér 5 bis (existence de $u_!$ pour

`[page 71]`

toute flèche de Cat, et mode de calcul des fibres ...).

4 Catégories à cofibrations spéciales

4.1. Je suppose à présent que

(a) $\mathcal{M}$ est stable par $\varinjlim$ filtrantes, et

(b) que ses objets sont accessibles,

de sorte qu'on est sous les conditions d'application du théorème de factorisation (XV, §1). On suppose :

(c) donné $W, C \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, satisfaisant les conditions Cof_1, Cof_2 de page 39. Pour Cof_3, cf. plus bas.

(d) C, $TC \overset{\text{déf}}{=} C \cap W$ *stables par composition transfinie* (c'est le cas si la structure provient d'une structure de Quillen close (W, C, F)).

(4.1) $$TF \overset{\text{déf}}{=} C_* \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M}) ,$$

il résulte du théorème de factorisations que toute flèche f de $\mathcal{M}$ se factorise en

$$f = pi , \qquad p \in TF,\ i \in C ,$$

pourvu qu'on fasse l'hypothèse

(e)

(4.3) $\exists\, C_0 \subset C$, *petite* partie de C, telle que $C \subset \tilde{C}_0$, i.e. $TF = (C_0)_*$.

Sous ces conditions, si on suppose

(f)

(4.4) $$TF \subset W ,$$

`[page 72]`

alors l'axiome de factorisations Cof_3 est satisfait. Inversement, si Cof_3 est satisfait, et si W est stable par facteurs directs, alors on a 4.4. Donc si W est stable par facteurs directs, Cof_3 équivaut à (4.4).

4.2. Il me semble que ces conditions, en pratique, ne seront guère jamais remplies, que si W (qui est donné en tout premier lieu, satisfaisant Cof_0 [18]), n'est pas stable par $\varinjlim$

[18] i.e. saturation faible.

filtrantes. À ce moment, pour construire la structure à cofibrations, on part de C_0 petite partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, prise telle que l'on ait

$$(C_0)_* \subset W , \tag{4.5}$$

on prend pour C au choix le saturé C_0' de C_0 par cochangement de base et composition transfinie, ou $C = \tilde{C}_0 =$ ensemble des facteurs directs de C_0'. Les conditions Cof_1 (stabilités de C), Cof_3 (factorisation) sont satisfaites automatiquement, et il reste à s'occuper de Cof_2, qui revient à la stabilité de $C \cap W$ par cochangement de base (la stabilité par composition et que ça contienne les isomorphismes, étant immédiates). C'est une condition délicate, et la seule façon standard que je vois pour l'assurer, c'est en supposant

$$C_0 \subset \mathrm{Cof}_W ; \tag{4.6}$$

[page 73]

la stabilité de W par $\varinjlim$ filtrantes (donc aussi par facteurs directs) assure alors qu'on a également

$$C \subset \mathrm{Cof}_W , \tag{4.7}$$

et par suite

$$\begin{cases} C \cap W \subset \mathrm{Cof}_W \cap W = W^{\mathrm{univ}}, \\ \text{d'où } \; TC \overset{\text{déf}}{=} C \cap W = C \cap W^{\mathrm{univ}} , \end{cases} \tag{4.8}$$

ce qui assure la stabilité de $C \cap W$ par cochangement de base. La stabilité de TC par composition transfinie résulte de celle de C, et de la stabilité de W par composition transfinie.

4.3. Je reviens aux conditions générales (a) à (f) de 4.1, sans supposer nécessairement W stable par $\varinjlim$ filtrantes. Je veux à présent étendre la structure à cofibrations aux $\mathcal{M}(I)$, I quelconque dans Cat. Nous n'avons pas pour ceci (je crois) à utiliser les développements des paragraphes 2, 3, mais nous ferons le lien avec ceux-ci par la suite.

Désignons par I_0 la catégorie discrète ayant mêmes objets que I, d'où un foncteur canonique

$$v = v_I \;:\; I_0 \longrightarrow I . \tag{4.9}$$

L'idée est de définir la structure de $\mathcal{M}(I)$ via la structure évidente de $\mathcal{M}(I_0) \simeq \mathcal{M}^{I_0}$, en jouant sur le couple de foncteurs adjoints

$$\mathcal{M}(I_0) \underset{\psi = v^*}{\overset{\varphi = v_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}(I) .$$

[page 74]

Nous allons présenter les choses de façon un peu plus générale.

Définition 4.4. J'appelle structure de cofibrations *spéciale* une structure $(\mathcal{M}, W, C)$ satisfaisant les conditions a) à f) de 4.1, que je reformule :

(a) $\mathcal{M}$ stable par petites limites inductives, et les objets de $\mathcal{M}$ sont accessibles.

b) W est faiblement saturé (i.e. Cof_0 de p. 39), C stable par cochangement de base et par composition, $TC \overset{\text{déf}}{=} C \cap W$ stable par cochangement de base (et par composition automatiquement).

b') C et TC sont stables même par composition *transfinie.*

c) $\exists$ petite partie $C_0 \subset C$ telle que $C \subset \tilde{C}_0$ ($\Longrightarrow \tilde{C} = \tilde{C}_0$).

d) $TF \overset{\text{déf}}{=} C_* \subset W$ (ce qui implique, joint à a à c, l'axiome de factorisation Cof_3 de page 39).

4.5. Nous allons donner une recette générale d'extension d'une telle structure, quand on dispose d'un couple de foncteurs adjoints

$$\mathcal{M} \underset{v^*}{\overset{v_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}' \ ,$$

$\mathcal{M}$ étant muni d'une structure de cofibrations spéciale (W, C), et $\mathcal{M}'$ satisfaisant la condition liminaire a. On définira alors les parties W', C' de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M}')$

[page 75]

par

$$(4.5.1) \qquad \begin{cases} W' = (v^*)^{-1}(W) \\ C' = \text{clôture stable par cochangement de base} \\ \qquad \text{et composition transfinie de } v_!(C), \end{cases}$$

donc

$$(4.5.2) \qquad v_!(C) \subset C' \subset (v_!(C))\tilde{} = \tilde{C}' \ .$$

Je dis que (W', C'), et au choix $(W', \tilde{C}')$, est une structure de cofibrations spéciale sur $\mathcal{M}'$. On va vérifier les différentes conditions de 4.4. La condition a) est déjà acquise.

b) [19]. La saturation faible de W' résulte de celle de W, via (4.5.1). La stabilité de C' par cochangement de base et par composition (même transfinie) est acquise par définition de C', et itou pour $\tilde{C}'$ (étant Q-close à gauche). Stabilité de $TC' \overset{\text{déf}}{=} C' \cap W'$ par cochangement de base ? Il suffit de voir que si on a un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} X'_0 \arrow[r, "i'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X'_1 \arrow[d] \\ X'_2 \arrow[r, "j'"] & X'_3 \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{M}'$, avec i' dans $TC' = C' \cap W'$, alors $j' \in W'$ (car on sait déjà $j' \in C'$), i.e.
|| $v^*(j') \in W'$. Nous allons supposer que v^* *commute aux sommes amalgamées,* et on est donc ramené à prouver que $v^*(i') \in TC$. Donc

[19]**N.B.** Il vaut mieux commencer par prouver c).

`[page 76]`

on doit prouver le

Lemme 4.5.2. *Sous les conditions* (4.5.3) *et* (4.5.4) *ci-dessous, on a*

$$v^*(C') \subset C , \qquad v^*(TC') \subset TC ,$$

et si $C = \tilde{C}$*, on a* $v^*(\tilde{C}') \subset C$*,* $v^*(T\tilde{C}') \subset TC$*.*

Pour $v^*(C') \subset C$, il faut d'abord prouver

$$v^*(v_!(C)) \subset C , \tag{4.5.3}$$

et je ne vois aucun moyen – il faut le poser comme hypothèse. De plus, que v^* commute aux $\varinjlim$ quelconques (cochangement de base déjà admis – à présent on a besoin des limites inductives filtrantes)

$$v^* \text{ commute aux petites } \varinjlim \text{ quelconques} \tag{4.5.4}$$

pour conclure de (4.5.3) que $v^*(C' =$ clôture de $v_!(C)$ pour cochangement de base et composition transfinie) est également dans C. Passant à $v^*(TC') \subset TC$, par ce qui précède, $v^*(C') \subset C$, il suffit de prouver $v^*(TC') \subset W$, mais $v^*(TC') \subset v^*(W') \subset W$ par définition de W'.

Supposons $C = \tilde{C}$, i.e. C stable par facteurs directs, et prouvons $v^*(\tilde{C}') \subset C$, $v^*(T\tilde{C}') \subset TC$. Par c) plus bas, $\tilde{C}'$ est formé des facteurs directs

`[page 77]`

d'éléments de C', donc $v^*(C') \subset C$ implique $v^*(\tilde{C}') \subset C$ puisque C stable par facteurs directs.

Prouvons enfin $v^*(T\tilde{C}') \subset TC \overset{\text{déf}}{=} C \cap W$. Comme $T\tilde{C}' = \tilde{C}' \cap W'$, cela résulte de $v^*(\tilde{C}') \subset C$, et de $v^*(W') \subset W$.

Prouvons b$'$). La stabilité de C' et de $\tilde{C}'$ par composition transfinie est acquise, il reste à prouver la stabilité de $TC' = C' \cap W'$ et de $T\tilde{C}' = \tilde{C}' \cap W'$. Il suffit de voir que le composé transfinie f en question est dans W', donc que $v^*(f) \in W$, mais cela résulte du fait que v^* commute à la composition transfinie par (4.5.4), et que v^* transforme TC' et $T\tilde{C}'$ dans TC.

Prouvons c) pour C' (donc aussi pour $\tilde{C}'$). Soit C_0 une petite partie de C telle que $C \subset \tilde{C}_0$, i.e. C est contenu dans la clôture de C_0 par les trois opérations de cochangement de base, de composition transfinie, des facteurs directs. On voit alors que $v_!(C)$ est dans la clôture de $v_!(C_0)$ pour les opérations, donc aussi C', et on peut alors prendre $C'_0 = v_!(C_0)$.

Prouvons enfin d), c'est la même assertion pour C' et pour $\tilde{C}'$, puisque

$$C'_* = \tilde{C}'_* \; (\overset{\text{déf}}{=} TF') ,$$

`[page 78]`

il faut donc prouver

$$TF' \overset{\text{déf}}{=} C'_* \subset W' .$$

Cela va résulter du

Lemme 4.5.3. *On a* $TF' = (v^*)^{-1}(TF)$*.*

C'est formel par définition de TF' comme

$$TF' \;=\; (v_!(C))_* \;,$$

de TF comme

$$TF \;=\; C_* \;,$$

et de l'adjonction de $v_!$, v^*. Comme $TF \subset W$, on en conclut

$$TF' \;=\; (v^*)^{-1}(TF) \;\subset\; (v^*)^{-1}(W) = W' \;,$$

q.e.d.

Donc on a prouvé ceci :

Proposition 4.6. *Considérons un couple de foncteurs adjoints*

$$\mathcal{M} \underset{v^*}{\overset{v_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}' \;,$$

où $\mathcal{M}$ *est muni d'une structure de cofibrations* spéciale (W, C)*. On suppose de plus les conditions suivantes satisfaites.*

(4.6.1)
1°) $\mathcal{M}'$ *stable par petites* $\varinjlim$ *, ses éléments sont accessibles.*
2°) v^* *commute aux petites* $\varinjlim$ *.*
3°) $v^*(v_!(C)) \subset C$*.*

[page 79]

Considérons les parties W'*,* C' *de* $\mathrm{Fl}(\mathcal{M}')$ *définies par*

$$(4.6.2)\qquad \begin{cases} W' &= (v^*)^{-1}(W), \\ C' &= \textit{clôture de } v_!(C) \textit{ par cochangement de base et par composition} \\ & \quad \textit{transfinie.} \end{cases}$$

Alors $(\mathcal{M}', W', C')$ *est une structure à cofibrations spéciale. Si de plus* $C = \tilde{C}$*, i.e.* C *est stable par facteurs directs, alors* $(\mathcal{M}', W', \tilde{C}')$ *est également une structure à cofibrations spéciale* [(20)]*.*

4.7. J'aimerais, en vue d'énoncés du type 3.7 (établissant l'existence de foncteurs du type $u_!^W$), avoir une prise sur $TC' = C' \cap W'$, et sur $T\tilde{C}' = \tilde{C}' \cap W'$, de façon précise, j'aimerais avoir la relation

$$(4.7.1)\qquad v_!(TC) \;\subset TC' \subset v_!(TC)\tilde{}\;,$$

voire la relation légèrement plus forte

$$(4.7.2)\qquad \underbrace{v_!(TC) \;\subset TC'}\; \overset{\text{tautol.}}{\subset} \;\underbrace{T\tilde{C}' \;\subset\; (v_!(TC))\tilde{}}\;,$$

[20] **N.B.** C'est là un fait général pour les catégories à cofibrations spéciales, et devrait être explicité plus bas (cf. 5.1). L'hypothèse sur C est inutile ici (ou plutôt, il suffit au lieu de cela que W soit stable par facteurs directs *et* par composition transfinie, ce qui n'est pas une hypothèse plus réjouissante ...).

qui se décompose en deux

$$(4.7.3)\qquad \begin{cases} v_!(TC) \ \subset \ TC' \\ \quad T\tilde{C}' \ \subset \ (v_!(TC))\tilde{}. \end{cases}$$

La moins délicate des deux est la

[page 80]

première, $v_!(TC) \subset TC'$, qui revient, en vertu des définitions, impliquant

$$v_!(TC) \subset v_!(C) \subset C' ,$$

à

$$v_!(TC) \ \subset \ W' ,$$

i.e. par définition de W', à

$$(4.7.4)\qquad v^* v_!(TC) \ \subset \ TC ,$$

ce qui est une hypothèse de type (4.6.1) 3°), à joindre aux hypothèses (4.6.1).

La relation hypothétique

$$(*)\qquad \underbrace{T\tilde{C}'}_{=\tilde{C}'\cap W'} \ \subset \ (v_!(TC))\tilde{}, \quad \text{ou seulement} \quad TC' \subset (v_!(TC))\tilde{},$$

m'apparaît de nature nettement plus délicate. Comme $T\tilde{C}' \supset TC' \supset v_!(TC)$, elle équivaut à l'*égalité* de $(T\tilde{C}')_*$ resp. $(TC')_*$ et $(v_!(TC))_* = (v^*)^{-1}(TC)_*$. Posons

$$(4.7.5)\qquad \begin{cases} (TC)_* \ \overset{\text{déf}}{=} \ F \\ (TC')_* \ \overset{\text{déf}}{=} \ F' \ \supset \ (T\tilde{C}')_* \ = \ F'_\sim . \end{cases}$$

On a donc, en vertu de l'inclusion

$$v_!(TC) \ \subset \ TC' \ (\ \subset \ T\tilde{C}' \ ) ,$$

la relation

$$(4.7.6)\qquad F'_\sim \ \subset \ F' \ \subset \ (v^*)^{-1}(F) ,$$

et la question est donc si on a égalité $F' = (v^*)^{-1}(F)$, voire $F'_\sim = (v^*)^{-1}(F)$ (d'où $F'_\sim = F'$).

[page 81]

En fait, on montre assez facilement qu'on a $F'_\sim = F'$, i.e. $T\tilde{C}' \overset{\text{déf}}{=} \tilde{C}' \cap W' \subset (C' \cap W')\tilde{}$ – c'est une histoire générale de catégories à cofibrations spéciales [21]. Mais je ne vois guère comment prouver (sous des hypothèses convenables) que $F' = (v^*)^{-1}(F)$. Il me faudra revenir là-dessus au besoin [22]. Pour l'instant, je me bornerai à récolter le fruit de 4.6 dans un cas particulier :

Proposition 4.8. *Soit* $(\mathcal{M}, W, C)$ *une catégorie à cofibrations spéciale* (déf. 4.4, page 94)*. Soit* I *objet de* Cat*,* I_0 *la catégorie discrète associée, considérons* $v : I_0 \longrightarrow I$ *et*

[21] cf. prop. 5.1 ci-dessous.
[22] voir cependant prop. 5.8 ci-dessous.

$$\mathcal{M}(I_0) \underset{v^*}{\overset{v_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}(I)\ ,$$

enfin munissons $\mathcal{M}(I_0) = \mathcal{M}^{I_0}$ *de la structure de catégorie à cofibrations,* produit *de celles des facteurs, i.e. définissons* $W(I_0)$, $C(I_0)$ *"fibre à fibre". (Cela coïncide avec la définition générale donnée au paragraphe* 2, *pour* I_0 *muni de la structure d'ordre discret, et fait de* $\mathcal{M}(I_0)$ *une catégorie à cofibrations spéciale.) Alors le couple* $(v_!, v^*)$ *satisfait*

[page 82]

aux conditions de la proposition 4.6, *ainsi qu'à la condition supplémentaire à* (4.6.1),

$$(4.8.1) \qquad 4°) \qquad v^*(v_!(TC(I))) \subset TC(I)\ .$$

Donc on trouve une structure de catégorie à cofibrations spéciale sur $\mathcal{M}(I)$*, en posant*

$$(4.8.2) \qquad W(I) = (v^*)^{-1}(W(I_0))$$

(c'est en fait équivalent à la définition habituelle de $W(I)$*) et*

(4.8.3) $\quad C(I) \;=\;$ *clôture de* $v_!(C(I_0))$ *pour les opérations de cochangement de base et composition transfinie.*

On a de plus sous ces conditions :

$$(4.8.8) \qquad \underbrace{TF(I)}_{\overset{\text{déf}}{=}(C(I))_*} = (v^*)^{-1}(\underbrace{TF(I_0)}_{\substack{\overset{\text{déf}}{=}(C_{I_0})_*,\\ \textit{se définit aussi}\\ \textit{fibre par fibre}}})\ ,$$

$$(4.8.9) \qquad \begin{cases} v_!(\overbrace{(TC)(I_0)}^{C(I_0)\cap W(I_0)}) \subset TC(I) \\ F(I) \overset{\text{déf}}{=} (TC(I))_* \subset (v^*)^{-1}(F(I_0)). \end{cases} \qquad [23]$$

Démonstration. On sait déjà que $\mathcal{M}(I)$ est stable par petites $\varinjlim$, et que tout élément est accessible, comme il résulte aussitôt des propriétés idoines de $\mathcal{M}$. Il est clair aussi que v^* commute aux petites $\varinjlim$. Il reste à prouver (4.6.1. 3°), et 4° dans (4.8.1), i.e.

[page 83]

que $v^*v_! : \mathcal{M}(I_0) \longrightarrow \mathcal{M}(I_0)$ applique C dans C, TC dans TC. Or on a

$$v_!(F_0)(i) = \varinjlim_{(\alpha,j)\in i\backslash I_0} F_0(j) \qquad [24]$$

et $i\backslash I_0$ est la catégorie discrète au dessus de I_0, dont la fibre en $j \in \operatorname{Ob} I_0 = \operatorname{Ob} I$ est $\operatorname{Hom}_I(i,j)$:

$$i\backslash I_0 = \coprod_{j\in \operatorname{Ob} I} (\text{catégorie discrète associée à } \operatorname{Hom}_I(i,j))\ ,$$

[23] Ces inclusions devraient être des égalités, mais je ne sais pas le prouver sans faire des hypothèses plus fortes, du type *catégorie de Quillen spéciale.*

[24] où $j \in \operatorname{Ob} I_0 = \operatorname{Ob} I$, et $\alpha : i \longrightarrow v(j) = j$.

donc

$$v_!(F_0)(i) \;=\; \coprod_{j\in \mathrm{Ob}\, I = \mathrm{Ob}\, I_0} \underbrace{F_0(j)^{\mathrm{Hom}_I(i,j)}}_{\substack{\text{somme directe}\\ \text{de } \mathrm{Hom}_I(i,j)\\ \text{copies de } F_0(j)}} ,$$

donc on trouve

$$v^* v_! F_0(\underbrace{i}_{\in \mathrm{Ob}\, I_0 \,=\, \mathrm{Ob}\, I}) \;=\; v_!(F_0)(i) \;=\; \quad .$$

Comme C et TC sont stables par sommes directes quelconques (l'étant par sommes directes finies, à cause des conditions de stabilité finies sur C et TC, et aussi par somme infinies à cause de l'axiome de stabilité transfinie ...[25]), il s'ensuit bien que $v^*v_!$ applique $C(I_0)$ et $TC(I_0)$ en eux-mêmes.

Ainsi, la première assertion de 4.8 résulte de 4.6. De plus, (4.8.8) et (4.8.9) ont été vus dans 4.7, dans les conditions générales de 4.6 et en supposant de plus le 4° de (4.7.4).

`[page 84]`

5 Relation des catégories à cofibrations spéciales avec les catégories de Quillen spéciales

Soit $(\mathcal{M}, W, C)$ une catégorie à cofibrations spéciale. J'introduis

(5.1) $$TF \;=\; C_*, \qquad TC \;=\; C \cap W, \qquad F \;=\; (TC)_* \,,$$

donc on a

(5.2) $$\begin{tikzcd} TC \arrow[r, hook] \arrow[d, leftrightarrow] & C \arrow[d, leftrightarrow, "\perp" description] \\ F & TF \arrow[l, hook'] \end{tikzcd} ,$$

(C, TF) étant un précouple de Quillen clos à droite. On sait alors (XV 4.2 cor. 1, page 31) que $\tilde{C}$ est formé des facteurs directs d'éléments de C. Posons

(5.3) $$T\tilde{C} \;=\; \tilde{C} \cap W \,,$$

d'où

(5.4) $$TC \;\subset\; T\tilde{C} \,.$$

Proposition 5.1 *Soit $(\mathcal{M}, W, C)$ une catégorie à cofibrations spéciale. On a $T\tilde{C} \subset (TC)\tilde{}$ (et même $T\tilde{C} \subset (TC)^\natural$* [26]*), ou ce qui revient au même en vertu de (5.4), TC et $T\tilde{C}$ ont même Q-clôture à gauche :*

(5.5) $$T\tilde{C} = (T\tilde{C})\tilde{} = (TC)\tilde{} \qquad \textit{(et même } T\tilde{C} \subset (TC)^\natural\textit{)},$$

[25] mérite un lemme général ...

[26] **N.B.** Pour une partie A de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M})$, $A^\natural$ désigne l'ensemble des facteurs directs d'éléments de A.

d'où

$$(5.6) \qquad (\tilde{C})_* = C_* \; (= TF), \qquad (T\tilde{C})_* = (TC)_* \; (= F) \qquad {}^{(27)}.$$

De plus, si W stable par facteurs directs (ou si seulement tout facteur direct d'une flèche de TC est dans W), et si de plus W est stable par composition transfinie, alors $(\mathcal{M}, W, \tilde{C})$ est une catégorie à cofibrations spéciale. De plus, $T\tilde{C}$ est Q-saturé à gauche, donc (par 5.5)

$$(5.7) \qquad T\tilde{C} \;=\; (TC)^\natural \,.$$

[page 85]

Démonstration. Prouvons

$$T\tilde{C} \;\subset\; (TC)\tilde{}\,,$$

et plus précisément, que tout élément de $T\tilde{C}$ est facteur direct d'un élément de TC :

$$T\tilde{C} = (TC)^\natural \,.$$

Soit donc $f \in T\tilde{C} \overset{\text{déf}}{=} \tilde{C} \cap W$, considérons leur factorisation de f en pi, avec $i \in C$, $p \in TF$. Comme $TF \subset W$, on a $p \in W$, donc $i \in W$, donc $i \in C \cap W \overset{\text{déf}}{=} TC$. Comme $f \in C$, $p \in TF$, il existe $q : Y \longrightarrow X'$ tel que $pq = \mathrm{id}_Y$, $qf = i$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f\in C\cap W"] \arrow[dr, "i\in C"'] & & Y \arrow[dl, dotted, "q"'] \\ & X' \arrow[ur, bend right, "p\in TF"'] & \end{tikzcd}$$

donc f apparaît comme facteur direct de $i \in TC$, q.e.d.

Prouvons que $(\mathcal{M}, W, \tilde{C})$ est une catégorie à cofibrations spéciale (déf. 4.4, page 74). Condition a) sur $\mathcal{M}$ acquise, condition b), la partie sur W, aussi. La stabilité de $\tilde{C}$ par cochangement de base et par composition OK, aussi (pour b$'$) la stabilité par composition transfinie. Stabilité de $T\tilde{C} = \tilde{C} \cap W$ par cochangement de base : il reste à prouver que si on a un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & Y \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y' \end{tikzcd} ,$$

si $i \in \tilde{C} \cap W$, alors $i' \in W$ (car on sait déjà que $i' \in \tilde{C}$). Mais la démonstration précédente montre que c'est facteur direct *dans* $X\backslash\mathcal{M}$ d'une flèche dans TC, donc i' est facteur direct d'une flèche de $TC \subset W$. Donc si W est stable par facteurs directs, $i' \in W$.

[27] Ces relations ne dépendent pas de l'hypothèse W stable par facteurs directs.

`[page 86]`

Cela achève de prouver b). Pour b′), il reste à voir que $T\tilde{C}$ est stable par composition transfinie. Je ne vois pas d'autre façon de le voir, qu'en supposant que W lui-même est stable par composition transfinie (ce qui paraît à peine moins exigeant que la stabilité de W par $\varinjlim$ `[filtrantes]`). Cela achève de prouver b, b′). La condition c) sur C implique la même condition sur $\tilde{C}$. Enfin, comme $\tilde{C}_* = C_*$, la condition d) est la même pour C et $\tilde{C}$. Cela achève de prouver que $(\mathcal{M}, W, \tilde{C})$ est une catégorie à cofibrations spéciale. (**N.B.** on avait besoin de deux hypothèses supplémentaires sur W, stabilité par facteurs directs et par composition transfinie, pour établir que $T\tilde{C}$ est stable par cochangement de base et par composition transfinie). Le dernière assertion de 5.1 et la relation (5.7) qui en résulte, revient à dire que $T\tilde{C} = \tilde{C} \cap W$ est stable par facteurs directs, ce qui est évident par la même propriété de $\tilde{C}$, et l'hypothèse faite sur W de stabilité par facteurs directs (ou seulement que les facteurs directs d'éléments de $T\tilde{C}$ sont dans W, donc dans $T\tilde{C}$).

`[page 87]`

Proposition 5.2. *Soit* $(\mathcal{M}, W, C)$ *une catégorie à cofibrations spéciale. Alors avec les notations de* (5.1), *on a*

$$W = TF \circ TC, \tag{5.8}$$

$$TF = F \cap W. \tag{5.9}$$

Démonstration. Soit $f \in W$, écrivons $f = pi$, avec $i \in C$, $p \in TF$, donc $p \in W$, donc $i \in W$, donc $i \in C \cap W = TC$, d'où (5.8).

Prouvons (5.9). On a $TF \subset F \cap W$, prouvons inversement qu'une $f \in F \cap W$ est dans TF. Écrivons $f = pi$, avec $p \in TF$, $i \in TC$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f \in F\cap W"] \arrow[dr, "i\in TC"'] & & Y \\ & X' \arrow[ur, "p \in TF"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $f \in F$, $i \in TC$, et $TC \longleftrightarrow F$ par définition de F, $\exists\, r : X' \longrightarrow X$ tel que $ri = \mathrm{id}_X$, $fr = p$. Donc f est facteur direct de $p \in TF$, et comme $TF = C_*$ est stable par facteurs directs, on conclut que $f \in TF$.

Corollaire 5.3. *Soit* $(\mathcal{M}, W, C)$ *une catégorie à cofibrations spéciale. Pour que* (W, C, F), $(F \overset{\text{déf}}{=} (TC)_*)$ *soit un triple de Quillen dans* $\mathcal{M}$, *il faut et il suffit que le couple* (TC, F) *satisfasse à l'axiome de factorisation (i.e. que ce soit un précouple de Quillen). Pour que cette structure de Quillen soit clos, il faut et il suffit que* C *soit stable par facteurs directs.*

`[page 88]`

Démonstration. La nécessité de l'axiome de factorisation pour (TC, F), pour avoir un triple de Quillen, est tautologique. Pour la suffisance, ayant déjà les deux précouples de Quillen (C, TF), (TC, F) avec

(5.2)
$$\begin{tikzcd} TC \arrow[r, hook] \arrow[d, leftrightarrow] & C \arrow[d, leftrightarrow] \\ F & TF \arrow[l, hook'] , \end{tikzcd}$$

et $TC = C \cap W$, le fait que (W, C, F) est un triple de Quillen est le corollaire 4 p. 36 de XV : Les conditions $TC = C \cap W$, $TF = F \cap W$, $W = TF \circ TW$ sont équivalentes, et équivalentes au fait que (W, C, F) soit un triple de Quillen.

Par la définition de Quillen des triples *clos,* par les propriétés

$$\underbrace{W = TF \circ TC}_{\substack{\text{vraie pour tous} \\ \text{le triples} \\ \text{de Quillen}}}, \qquad C = (TF)^*, \qquad \underbrace{F = (TC)_*}_{\substack{\text{vraie dans} \\ \text{le cas actuel}}} ,$$

il reste à exprimer que $C = (TF)^*$, ce qui équivaut à C stable par facteurs directs (cf. loc. cit. cor. 1, p. 31), q.e.d.

Remarque 5.4. Les énoncés 5.2 et 5.3, et la relation $T\tilde{C} \subset (TC)^\natural$ dans proposition 5.1, ne font pas appel à la totalité de l'hypothèse que $(\mathcal{M}, W, C)$ soit une catégorie à cofibrations spéciale, mais seulement que l'on ait une catégorie à cofibrations, avec $C \mathrel{+\!\!\!\longleftrightarrow} \underbrace{TF}_{\overset{\text{déf}}{=} C_*} \subset W$,

[page 89]

i.e. une catégorie avec W, C satisfaisant Cof_0, Cof_1, Cof_2 de la page 39, plus $TF \overset{\text{déf}}{=} C_* \subset W$, plus l'axiome de factorisation pour (C, TF) (lequel implique Cof_3).

Corollaire 5.5. *Soit $(\mathcal{M}, W, C)$ une catégorie à cofibrations spéciale, telle qu'il existe une* petite *partie $TC_0 \subset TC = C \cap W$, avec*

(5.5.1)
$$TC \ \subset \ TC_0\tilde{}\ ,$$

ou ce qui revient au même, $(TC)\tilde{} = (TC_0)\tilde{}$, i.e.

(5.5.2)
$$\underbrace{F}_{\overset{\text{déf}}{=} (TC)_*} \ = \ (TC_0)_* \ .$$

Alors (W, C, F) est un triple de Quillen. Ce triple est clos si et seulement si C est stable par facteurs directs.

En effet, le théorème de factorisation dans XV §1 implique que moyennant l'hypothèse faite sur $TC_0 \subset TC$, le couple (TC, F) satisfait à la condition de factorisation. En effet, par les conditions b, b′ de la définition 4.4, TC a les propriétés de stabilité voulues (contient les isomorphismes, est stable par cochangement de base et par composition transfinie).

[page 90]

Définition 5.6. Les triples de Quillen déduits comme dans 5.5 d'une catégorie à cofibrations spéciale sont dits *spéciaux.* Ainsi un triple de Quillen (W, C, F) dans $\mathcal{M}$ est spécial s'il satisfait les conditions a) à d) dans la définition (4.4), concernant (W, C) exclusivement, plus les deux conditions suivantes.

c′) $\exists$ petite partie TC_0 de TC, telle que $TC \subset (TC_0)\tilde{}$.

e) $F = (TC)_*$.

Corollaire 5.7. *Soit* (W, C, F) *un triple de Quillen* clos *dans* $\mathcal{M}$. *Pour que ce triple soit spécial, il faut et il suffit qu'il satisfasse les conditions suivantes.*

a) *$\mathcal{M}$ stable par petites* $\varinjlim$ *, et ses éléments sont accessibles.*

c, c′) *Il existe une petite partie C_0 de C, TC_0 de TC, telles que l'on ait*

$$(5.7.1) \qquad C = C_0\tilde{} , \qquad TC = (TC_0)\tilde{} .$$

En effet, toutes les autres conditions a) à e), y inclus c′) de 5.6, sont automatiquement satisfaites.

`[page 91]`

Proposition 5.8. *Considérons un couple de foncteurs adjoints*

$$(5.8.1) \qquad \mathcal{M} \underset{v^*}{\overset{v_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}' ,$$

où $\mathcal{M}$ est munie d'un triple de Quillen spécial clos $(W, C, F = (TC)_*)$, avec $TC = C \cap W$ (cf. définition 5.6). *On suppose satisfaites les conditions suivantes* (comparer prop. 4.6, relations (4.6.1), et (4.7.4)) :

$$(5.8.2) \quad \begin{cases} \text{a)} & \mathcal{M}' \textit{ stable par petites } \varinjlim \textit{, ses éléments sont accessibles.} \\ \text{b)} & v^* \textit{ commute aux petites } \varinjlim . \\ \text{c)} & v^*(v_!(C)) \subset C,\ v^*(v_!(TC)) \subset TC. \end{cases}$$

Définissons (W', C', F') *dans* $\mathcal{M}'$ (comparer prop. 4.6, notamment 4.6.2) *par*

$$(5.8.3) \quad \begin{cases} W' &= (v^*)^{-1}(W) \\ C' &= v_!(C)\tilde{} \\ F' &= (TC')_* , \qquad \text{où } TC' \overset{\text{déf}}{=} C' \cap W' . \end{cases}$$

Alors (W', C', F') *est un triple de Quillen clos spécial dans* $\mathcal{M}'$, *et on a de plus*

$$(5.8.4) \qquad F' = (v^*)^{-1}(F) , \qquad TF' = (v^*)^{-1}(TF) ,$$

$$(5.8.5) \qquad TC' = (v_!(TC))\tilde{} .$$

`[page 92]`

Démonstration. Par 4.6, on sait déjà que $(\mathcal{M}', W', C')$ est une catégorie à cofibrations spéciale. (**N.B.** Ce qui est noté C' ici, était noté $\tilde{C}'$ dans la proposition 4.5. On doit utiliser la dernière assertion de 4.6, où on suppose C stable par facteurs directs, OK car (W, C, F) supposé clos.) Pour prouver que $(W', C', F' \overset{\text{déf}}{=} (TC')_*)$ est un triple de Quillen spécial, il reste, par 5.3 et définition 5.6, à prouver qu'il existe une petite partie TC'_0 de TC', telle que

$$(5.8.6) \qquad (\, TC'_0 \;\subset\,)\; TC' \;\subset\; (TC'_0)\breve{}\;.$$

(Ce triple de Quillen sera de plus clos, puisque C' est Q-clos à gauche par définition.) Soit donc TC_0 une petite partie de TC telle que

$$(5.8.7) \qquad TC \;\subset\; (TC_0)\breve{}\;,$$

qui existe par hypothèse sur (W, C, F). On prendra

$$(5.8.8) \qquad TC'_0 \;\overset{\text{déf}}{=}\; v_!(TC_0)\;.$$

On a vu dans 4.7 qu'on a

$$(5.8.9) \qquad v_!(TC) \;\subset\; TC'$$

(résulte de l'hypothèse $v^*(v_!(TC)) \subset TC$ dans (5.8.2. c)), a fortiori

$$TC'_0 \;=\; v_!(TC_0) \;\subset\; TC'\;,$$

`[page 93]`

il reste à prouver

$$(5.8.10) \qquad TC' \;\overset{?}{\subset}\; (TC'_0)\breve{}\;,$$

ce qui équivaut à $(TC')\breve{} \subset (TC'_0)\breve{}$, ou encore à

$$(5.8.10 \text{ bis}) \qquad (TC'_0)_* \;\overset{?}{\subset}\; (TC')_* \;\overset{\text{déf}}{=}\; F'\;,$$

alors qu'on a a priori l'inclusion inverse (déduite de $TC'_0 \subset TC'$)

$$(5.8.11) \qquad F' \;\subset\; (TC'_0)_*\;.$$

Or par adjonction, on a

$$\begin{aligned} (\,\underbrace{TC'_0}_{v_!(TC_0)}\,)_* &= (v_!(TC_0))_* \\ &= (v^*)^{-1}(\;\underbrace{(TC_0)_*}_{=(TC)_* \overset{\text{déf}}{=} F}\;) \\ &= (v^*)^{-1}(F)\;, \end{aligned}$$

donc (5.8.11) s'écrit

$$(5.8.12) \qquad F' \;\subset\; (v^*)^{-1}(F)\;, \qquad \text{i.e. } v^*(F') \;\subset\; F$$

(comparer (4.7.6)), et il faut montrer que cette inclusion est une égalité (sur quoi j'avais buté p. 80, 81 ...), ce qui n'est autre que la première des deux relations (5.8.4). Mais c'est sous la forme initiale (5.8.10) (transposée de (5.8.4)) que nous allons prouver la chose, finalement. Notons que l'on a

[page 94]

$$\underbrace{(v_!(TC_0))}_{TC'_0}{}^{\sim} \;=\; (v_!(TC))^{\sim}\,,$$

puisque TC est la clôture de TC_0 pour les opérations de cochangement de base, de composition transfinie, et de facteurs directs, et que $v_!$ commute à ces opérations. Donc on doit montrer simplement

(5.8.12 bis) $$TC' \;\subset\; (v_!(TC))^{\sim}$$

(où il n'est plus question de TC_0). Mais le théorème de factorisation s'applique au couple

$$\Big((v_!(TC))^{\sim},\ (v_!(TC))_* = (v^*)^{-1}(F)\Big)\,,$$

puisque $(v_!(TC))^{\sim} = (TC'_0)^{\sim}$, TC'_0 petit. Si donc on a $f' \in TC' = C' \cap W'$, factorisons f' en $p'i'$, avec

(5.8.13) $$i' \;\in\; (v_!(TC))^{\sim}\,, \qquad p' \;\in\; (v^*)^{-1}(F)\,.$$

(∗)
$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "f'\in C'\cap W'"] \arrow[dr, "i'"'] & & Y' \arrow[dl, dotted, "q'"'] \\
& X'_1 \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}$$

Notons qu'on a

[page 95]

(5.8.14) $$(v_!(TC))^{\sim} \;\subset\; TC' \;(\;\overset{\text{déf}}{=}\; C' \cap W'\;)$$

car $v_!(TC) \subset TC' \subset C'$, donc $(v_!(TC))^{\sim} \subset \tilde{C}' = C'$, et il reste à prouver que $v_!(TC)^{\sim} \subset W'$, i.e. $v^*((v_!(TC))^{\sim}) \subset W$. Or je dis qu'on a même

$$v^*((v_!(TC))^{\sim}) \;\subset\; TC\,,$$

i.e.

(5.8.15) $$v_!(TC)^{\sim} \;\subset\; (v^*)^{-1}(TC)\,.$$

Cela résulte du fait que TC est Q-clos, donc Q-saturé à gauche, ce qui implique, comme v^* commute aux petites $\varinjlim$, que $(v^*)^{-1}(T)$ l'est également. D'autre part, il contient $v_!(TC)$, donc aussi le Q-saturé à gauche de $v_!(TC)$. Mais ce dernier est *égal* à la Q-clôture $(v_!(TC))^{\sim}$, par le théorème de factorisation, vu que $TC'_0 \subset v_!(TC) \subset (TC'_0)^{\sim}$, avec TC'_0 petit.

Ainsi, (5.8.13) et (5.8.14) impliquent $i' \in TC' = C' \cap W'$, donc $i' \in W'$, d'où $p' \in W'$, i.e. $v^*(p') \in W$, et comme par hypothèse

[page 96]

(5.8.13) on a $v^*(p') \in F$, on a $v^*(p') \in TF$, i.e.

$$p' \ \in \ (v^*)^{-1}(TF) \ = \ TF' \ (\overset{\text{déf}}{=} \ C' \ ) \ ,$$

l'égalité $(v^*)^{-1}(TF) = TF'$, i.e.

$$(v^*)^{-1}(C_*) \ = \ (v_!(C))_* \ ,$$

résultant de l'adjonction de $v_!$, v^*. Au total, on a donc

$$p' \ \in \ TF' \ (\ = \ C'_* \ ) \ , \tag{5.8.16}$$

et comme $f' \in C'$, le diagramme $(*)$, page 114, nous montre qu'il existe

$$q' \ : \ Y' \longrightarrow X'_1 \ ,$$

avec $p'q' = \mathrm{id}$, $q'f' = i'$. Donc f' est facteur direct de $i' \in v_!(TC)\breve{}$, donc on a $f' \in v_!(TC)\breve{}$, d'où la relation

$$TC' \ \subset \ v_!(TC)\breve{} \ ,$$

ce qui achève de prouver que (W', C', F') est un triple de Quillen spécial et clos.

Les deux relations (5.8.4) ont été prouvées chemin faisant (la deuxième étant essentiellement triviale, et la première représentant la difficulté principale dans la démonstration). Reste à établir (5.8.5). Mais on sait déjà (5.8.9) que

$$v_!(TC) \ \subset \ TC' \ ,$$

[page 97]

d'où

$$v_!(TC)\breve{} \ \subset \ TC',$$

puisque TC' est Q-clos à gauche (ou parce que ça a été prouvé dans (5.8.14)), on a déjà prouvé l'inclusion en sens inverse (5.8.12 bis), assertion équivalente à (5.8.4) (et qui représentait la principale difficulté).

Remarque 5.9. Si on ne suppose pas que la structure sur $\mathcal{M}$ soit close, alors la démonstration donnée de 5.8 montre qu'on trouve pourtant sur $\mathcal{M}'$ une structure de Quillen spéciale, en définissant cette fois C' comme dans 4.6. Mais je doute qu'on aura jamais à travailler avec des triples de Quillen spéciaux qui ne soient aussi clos. De toute façon, si W est stable par petites $\varinjlim$ filtrantes [(28)] (et je doute qu'on trouve des triples de Quillen spéciaux en dehors de ce cas), alors si (W, C, F) est un triple de Quillen spécial, il en est de même de $(W, \tilde{C} = C^\natural, F)$, et je présume qu'on a tout intérêt à remplacer le triple initial par celui-ci.

[28] ce qui implique la stabilité par facteurs directs, et implique aussi la même propriété pour $W' \overset{\text{déf}}{=} (v^*)^{-1}(W)$.

[page 98]

6 Application à la construction des dérivateurs (associés aux triples de Quillen spéciaux)

Théorème 6.1. [29] *Soit* (W, C, F) *un triple de Quillen clos spécial sur la catégorie* $\mathcal{M}$ (cf. déf. 5.6, p. 90, et cor. 5.7). *Pour tout* I *dans* Cat, *considérons la catégorie*

$$\mathcal{M}(I) \;=\; \underline{\mathrm{Hom}}(I^\circ, \mathcal{M}) \;, \tag{6.1.1}$$

et considérons

$$W(I),\; F(I) \;\subset\; \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I)) \;,$$

définis par

(6.1.2) $u : X \longrightarrow Y$ *dans* $\mathcal{M}(I)$ *est dans* $W(I)$ *(resp.* $F(I)$*) si et seulement si* $\forall\, i \in \mathrm{Ob}\, I$, $u(i) : X(i) \longrightarrow Y(i)$ *est dans* W *(resp.* F*).*

a) *Il existe une structure de Quillen close (nécessairement unique) dans* $\mathcal{M}(I)$*, ayant* $W(I)$ *et* $F(I)$ *comme ensembles des quasi-isomorphismes et de fibrations respectivement. On a donc aussi*

$$\begin{cases} TF(I) \;=\; F(I) \cap W(I) \;=\; \{u \in \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I)) \mid u(i) \in TF \;\; \forall\, i \in \mathrm{Ob}\, I\}, \\ C(I) \;=\; TF(I)^*. \end{cases} \tag{6.1.3}$$

Cette structure de Quillen est spéciale.

[page 99]

b) *Soit* I_0 *la catégorie discrète ayant même ensemble d'objets que* I*, et*

$$v_I \;\; ou \;\; v \;:\; I_0 \longrightarrow I \tag{6.1.4}$$

le foncteur canonique. Désignons par

$$C(I) \;=\; (TF(I))^*, \qquad TC(I) \;=\; C(I) \cap W(I) \;=\; F(I)^* \tag{6.1.5}$$

les ensembles de cofibrations resp. de cofibrations triviales dans $\mathcal{M}(I)$*, et utilisons les mêmes notations* $C(I_0)$*,* $TC(I_0)$ *pour* I_0*. On a alors*

(6.1.6) $u : X_0 \longrightarrow Y_0$ *dans* $\mathcal{M}(I_0)$ *est dans* C_0 *(resp.* TC_0*) si et seulement si pour tout* i *dans* $\mathrm{Ob}\, I$, $u(i) : X_0(i) \longrightarrow Y_0(i)$ *est dans* C *(resp.* TC*).*

Enfin on a

$$\begin{cases} C(I) \;=\; (v_!(C(I_0)))\breve{} \\ TC(I) \;=\; (v_!(TC(I_0)))\breve{}\;. \end{cases} \tag{6.1.7}$$

c) *Soit*

$$u \;:\; I \longrightarrow I'$$

une flèche dans Cat*, considérons le couple des foncteurs adjoints*

$$\mathcal{M}(I) \underset{u^*}{\overset{u_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}(I') \;. \tag{6.1.8}$$

[29] C'est le résultat principal dans cette partie XVII des notes.

[page 100]

Ce couple satisfait aux conditions de Quillen pour les couples de foncteurs adjoints entre catégories de Quillen (Hom. Alg. Chp. I, §4, th. 3, p. 4.5), *de sorte qu'ils définissent par passage aux localisés un couple des foncteurs adjoints*

$$\mathrm{Ho}_W(I) \underset{u^*_W}{\overset{u_!^W}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ho}_W(I') \ . \tag{6.1.9}$$

On a, plus précisément, les relations

$$\begin{cases} u_!(C(I)) \ \subset \ C(I') \\ u_!(TC(I)) \ \subset \ TC(I') \ , \end{cases} \tag{6.1.10}$$

d'où

$$(u_!(\mathcal{M}(I))_{\mathrm{c}}) \ \subset \ \mathcal{M}(I')_{\mathrm{c}} \ , \tag{6.1.11}$$

et de plus

(6.1.12) *pour toute flèche f dans $\mathcal{M}(I)_{\mathrm{c}}$, telle que $f \in W(I)$, on a $u_!(f) \in W(I')$, i.e. $(u_!)_{\mathrm{c}} : \mathcal{M}(I)_{\mathrm{c}} \longrightarrow \mathcal{M}(I')_{\mathrm{c}}$ est compatible avec les localiseurs.*

D'autre part on a

$$\begin{cases} u^*(F(I')) \ \subset \ F(I) \\ u^*(TF(I')) \ \subset \ TF(I) \\ u^*(W(I')) \ \subset \ W(I) \ , \end{cases} \tag{6.1.13}$$

donc

$$\begin{cases} u^*(\mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}}) \ \subset \ \mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}} \\ u^*_{\mathrm{f}} : \mathcal{M}(I')_{\mathrm{f}} \longrightarrow \mathcal{M}(I)_{\mathrm{f}} \ \textit{est compatible avec les localiseurs.} \end{cases} \tag{6.1.14}$$

[page 101]

d) *Supposons que I soit une catégorie ordonnée, et considérons l'ensemble $C_I \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I))$ défini dans* §2 [30] (cf. page 25, cf. aussi th. 2.1, p. 26, et ses corollaires). *On a alors*

$$\begin{cases} C_I \ \supset \ C(I) \\ TC_I \ \supset \ TC(I) \ , \end{cases} \tag{6.1.15}$$

et on a égalité quand I est un ensemble ordonné artinien.

Démonstration. L'assertion a) est un cas particulier de 5.8, appliqué au couple de foncteurs adjoints

$$\mathcal{M}(I_0) \underset{v^*}{\overset{v_!}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}(I) \ .$$

Les conditions (5.8.2) sont satisfaites, cela a été vu dans (4.8). La proposition 5.8 nous dit alors l'existence d'une structure de triple de Quillen close sur $\mathcal{M}(I)$, dont l'ensemble des quasi-isomorphismes $W(I)$ et l'ensemble des fibrations $F(I)$, sont donnés par la première formule (5.8.3) et par la première formule (5.8.4), ce qui équivaut aux définitions (6.1.2). (**N.B.** Le fait que $\mathcal{M}(I_0)$, avec la structure $W(I_0)$, $C(I_0)$, $F(I_0)$ évidente (produit), est

[30] Au paragraphe 2, c'était noté C_{I° au lieu de C_I.

`[page 102]`

bien une catégorie de Quillen spéciale close, est $\pm$ tautologique.)

Prouvons b). La relation (6.1.6) est tautologique. Les relations (6.1.7) sont contenues dans 5.8 (cf. deuxième relation dans (5.8.3) pour $C' = v_!(C)\breve{}$, i.e. $C(I) = (v_!(C(I_0)))\breve{}$, et (5.8.5) pour $TC(I) = (v_!(TC(I_0)))\breve{}$).

Prouvons c). La première assertion est, par Quillen, un cas particulier des relations (6.1.10) à (6.1.14), c'est elles qu'il s'agit d'établir. Les relations (6.1.13) et par suite (6.1.14) sont tautologiques en vertu des définitions, donc il s'agit d'établir *(6.1.10)* et (6.1.12).

Pour les formules (6.1.10), j'utilise le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "u"'] & I_0 \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "u_0"] \\ I' & I'_0 \arrow[l, "v'"'] \end{tikzcd} ,$$

et je note que les foncteurs $u_!^{\mathcal{M}}$, $u_{0!}^{\mathcal{M}}$, commutant aux petites limites inductives, se

`[page 103]`

comportent bien pour l'opération

$$\Phi \longmapsto \Phi\breve{}\ ,$$

quand Φ est une partie de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I))$ resp. de $\mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I_0))$ qui est Q-accessible, i.e. telle qu'il existe une *petite* partie $\Phi_0 \subset \Phi$ avec $\Phi \subset \tilde{\Phi}_0$, plus précisément, on a

$$u_!(\Phi\breve{}) \ \subset\ (u_!(\Phi))\breve{}\ .$$

Ceci noté, on a par b)

$$C(I) \ =\ (v_!(C(I_0)))\breve{}\ ,$$

d'où

$$u_!(C(I)) \ \subset\ (\underbrace{u_!(v_!(C(I_0)))}_{(uv)_!(C(I_0))})\breve{}\ ,$$

et le deuxième membre s'écrit aussi

$$(v'_! u_{0!}(C(I_0)))\breve{} \ \overset{?}{\subset}\ (v'_!(I'_0))\breve{} \ =\ C(I')\ .$$

Donc tout revient à montrer que

$$\text{(6.1.16)} \qquad u_{0!}(C(I_0)) \ \subset\ C(I'_0)\ ,$$

ce qui résulte aussitôt du calcul de $u_{0!}$ à coups de sommes directes, et du fait que C est stable par sommes directes quelconques. Cela prouve donc $u_!(C(I)) \subset C(I')$, et on prouve de même $u_!(TC(I)) \subset TC(I')$, qui se ramène de même au cas particulier

$$\text{(6.1.17)} \qquad u_{0!}(TC(I_0)) \ \subset\ TC(I'_0)\ .$$

[page 104]

Il reste à prouver (6.1.12), et on procède comme pour 3.3 (p. 54), en utilisant le fait qu'une flèche f dans $\mathcal{M}(I)_c$ qui est dans $W(I)$, s'écrit dans $\mathcal{M}(I)_c$ sous la forme $f = pi$, où $i \in TC(I)$, et où p est inverse à gauche (rétraction) d'une flèche $j \in TC(I)$. On aura donc $u_!(f) = u_!(p)u_!(i)$, et $u_!(i) \in TC(I')$ par (6.1.10), et $u_!(p)$ est inverse à gauche de $u_!(j) \in TC(I')$. On a alors $u_!(i), u_!(j), u_!(p) \in W(I')$, d'où $u_!(f) \in W(I')$, q.e.d.

Prouvons enfin d). Compte tenu de la définition de C_I, pour établir $C(I) \subset C_I$, il suffit de voir ceci :

Corollaire 6.2. [31] *Soit I quelconque dans* Cat*, soient $U \subset V$ deux fermés dans I (i.e. des ouverts dans I°), et soit $f : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ une flèche dans $C(I)$ (resp. dans $TC(I)$). Posons encore*

[page 105]

$$X_U \;=\; \varinjlim_{i \in U} X(i), \qquad X_V \;=\; \varinjlim_{i \in U} X(i)\ ,$$

et de même pour Y, et considérons le diagramme

(6.2.1)
$$\begin{tikzcd}
X_U \arrow[r, "\text{trans.}"] \arrow[d, "u_U"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X_V \arrow[d] \arrow[dd, dotted, bend left, "u_V"] \\
Y_U \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "\text{trans.}"'] & Y_{U,V} \arrow[d, "u_{U,V}"'] \\
 & Y_V\ .
\end{tikzcd}$$

Alors la flèche $u_{U,V}$ est dans C (resp. TC).

Démonstration de 6.2. Admettons que la restriction d'une flèche de $C(I)$ resp. $TC(I)$ à un fermé V de I est dans $C(V)$ resp. $TC(V)$ (cf. ... ci-dessous). Cela nous permet de supposer $V = I$. La donnée de U, qui est un ouvert de I°, équivaut à la donnée d'une flèche $v : I^\circ \longrightarrow \mathbf{\Delta}^1$ (en prenant la fibre en 0), ou encore à la donnée d'une flèche $u : I \longrightarrow (\mathbf{\Delta}^1)^\circ \simeq \mathbf{\Delta}^1$ (en prenant le fibre en 1). Or

(6.2.2)
$$u \;:\; I \longrightarrow \mathbf{\Delta}^1\ , \qquad U \;=\; I_1 \overset{\text{déf}}{=} u^{-1}(\{1\})\ .$$

[page 106]

On a alors
$$X_U \;=\; u_!(X)(1), \quad X_I \;=\; u_!(X)(0)\ ,$$

et le morphisme de transition $X_U \longrightarrow X_I$ est déduit de la flèche $0 \xrightarrow{\partial} 1$ dans $\mathbf{\Delta}^1$, et de même pour Y. Soit
$$\xi \;=\; u_!(X), \qquad \eta \;=\; u_!(Y)\ ,$$

[31] **N.B.** Ce résultat se généralise, sous les conditions générales dans 6.2.5.

donc le diagramme (6.2.1) s'identifie au diagramme déduit de

$$\varphi \,:\, \xi \longrightarrow \eta \;, \qquad \varphi \,=\, u_!(f) \;,$$

comme

(6.2.3)
$$\begin{tikzcd} \xi(1) \arrow[r, "\xi(\partial)"] \arrow[d, "\varphi(1)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & \xi(0) \arrow[d] \arrow[dd, bend left, dotted, "\varphi(0)"] \\ \eta(1) \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "\eta(\partial)"'] & \tilde{\eta} \arrow[d, "\tilde{\varphi}"'] \\ & \eta(0) \end{tikzcd} \quad .$$

Or par 6.1.10 appliqué à $u : I \longrightarrow \mathbf{\Delta}^1$, la relation $f \in C(I)$ resp. $f \in TC(I)$ implique $\varphi \in C(\mathbf{\Delta}^1)$ resp. $\varphi \in TC(\mathbf{\Delta}^1)$. Donc pour établir 6.1, on est ramené au cas particulier où $I = \mathbf{\Delta}^1$, $U = \{1\}$, $V = I$, donc à prouver le

Lemme 6.2.4. *Soit $\varphi : \xi \longrightarrow \eta$ une flèche dans $\mathcal{M}(\mathbf{\Delta}^1)$. Si $\varphi \in C(\mathbf{\Delta}^1)$ (resp.*

`[page 107]`

$\varphi \in TC(\mathbf{\Delta}^1)$), alors la flèche $\tilde{\varphi}$ dans le diagramme (6.2.3) *est dans C (resp. TC).*

Plus généralement, et plus précisément :

Lemme 6.2.5. *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie stable par sommes amalgamées, et Φ une partie Q-close à gauche* (on prendra $\Phi = C$, et $\Phi = TC$, dans le cas du lemme 6.2.4). *Soit $\Psi = \Phi_*$, et considérons, pour toute I dans* Cat, *$\Phi(I)$, $\Psi\langle I\rangle$ dans $\mathcal{M}(I)$, définis par :*

(6.2.5.1) *$u : X \longrightarrow Y$ dans $\mathcal{M}(I)$ est dans $\Psi\langle I\rangle$ si et seulement si $\forall\, i \in \operatorname{Ob} I$, $u(i) : X(i) \longrightarrow Y(i)$ est dans Ψ,*

(6.2.5.2)
$$\Phi(I) \;=\; \Psi\langle I\rangle^*.$$

Prenons le cas $I = \mathbf{\Delta}^1 = \{0 \xrightarrow{\partial} 1\}$, et soit $u : X \longrightarrow Y$ une flèche dans $\mathcal{M}(\mathbf{\Delta}^1)$, correspondant à un carré commutatif

(6.2.5.3)
$$\begin{tikzcd} X(1) \arrow[r, "X(\partial)"] \arrow[d, "u(1)"'] & X(0) \arrow[d, "u(0)"] \\ Y(1) \arrow[r, "Y(\partial)"] & Y(0) \end{tikzcd} \;.$$

Considérons le diagramme correspondant

[page 108]

(6.2.5.4)
$$\begin{tikzcd}
X(1) \arrow[r, "X(\partial)"] \arrow[d, "u(1)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{cocart.}"] & X(0) \arrow[d] \arrow[dd, dotted, bend left, "u(0)"] \\
Y(1) \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "Y(\partial)"'] & \tilde{Y} \arrow[d, "\tilde{u}"'] \\
& Y(0)
\end{tikzcd} .$$

Pour qu'on ait $u \in \Phi(\boldsymbol{\Delta}^1)$, il faut et il suffit que l'on ait

(6.2.5.5)
$$u(0),\ u(1),\ \tilde{u} \ \in \ \Phi \, .$$

J'ai déjà vérifié la chose (sous forme duale), mais ne retrouve plus l'endroit (peut-être n'ai-je pas pris des notes). Je n'ai pas envie de rechercher la démonstration ici.

Pour achever de prouver 6.1. d), i.e. l'égalité $C(I) = C_I$ pour I artinien, j'ai envie de prouver encore quelque chose de plus générale que voici :

Corollaire 6.3. *Soient* $(\mathcal{M}, \Phi, \Psi)$ *et* $I \longmapsto \Phi(I) \subset \mathrm{Fl}(\mathcal{M}(I))$ *comme dans* 6.2.5. *Soit I un ensemble ordonné, et considérons aussi Φ_I défini (dans la situation duale) page* 25 (2.2) *(mais avec des notations duales ...). Je dis que l'on a*

(6.3.1)
$$\Phi_I \ \supset \ \Phi(I) \, ,$$

[page 109]

et on a égalité si I est noethérien, i.e. I° est artinien.

Démonstration. La démonstration de $\Phi(I) \subset \Phi_I$ est celle qu'on vient de donner. Il reste à prouver que si I est noethérien, on a $\Phi_I \subset \Phi(I)$. Étant donnée $i : A \longrightarrow B$ dans Φ_I, il faut prouver que $u \in \Phi(I)$, i.e. que pour un diagramme commutatif dans $\mathcal{M}(I)$,

(6.3.2)
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\
B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dotted, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

avec $p \in \Psi\langle I \rangle$, i.e. $p(i) : X(i) \longrightarrow Y(i)$ dans Ψ pour tout i, $\exists\ h : B \longrightarrow X$ laissant le diagramme commutatif. On va revenir aux notations duales, en travaillant dans $\mathcal{M}(I^\circ)$, avec I artinien. On considère l'ensemble $\mathcal{H}$ des couple (U, h_U) d'un ouvert U de I et d'un $h_U : B|U \longrightarrow X|U$, rendant commutatif la restriction à U de (6.3.2). On ordonne $\mathcal{H}$ par prolongement, on note que toute partie totalement ordonnée (U_α, h_{U_α}) dans $\mathcal{H}$ a une borne supérieure, savoir $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, h_U défini par les h_{U_α} sur les U_α.

`[page 110]`

(**N.B.** L'ensemble $\mathcal{H}$ n'est pas vide, car $(\emptyset, h_\emptyset)$ est dans $\mathcal{H}$ – mais c'est contenu dans l'énoncé précédent que toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{H}$ y a une borne supérieure ...). Par Zorn, il existe un élément maximal (U, h_U). À prouver que $U = I$, et on aura terminé. Ou encore que si (U, h_U) tel que $U \neq I$, ce n'est *pas* maximal. Soit $F = I \backslash U \neq \emptyset$ le fermé complémentaire. Par l'hypothèse artinienne sur I, F a un élément minimal i_0. Soit

$$U' \;=\; U \cup \overbrace{I/i_0}^{V} \;=\; U \cup \{i_0\}\ ,$$

on va prolonger h_U en $h_{U'}$ sur U', on aura terminé. Pour ceci, soit $V_0 = V \cap U = V \backslash \{i_0\}$, on est ramené à prolonger la restriction h_{V_0} de h_U à V_0, de V_0 à V. Au total, on peut supposer $I = I/i_0$ muni d'un élément final i_0, $U = I \backslash \{i_0\}$, et montrer qu'une $(U, h_U) \in \mathcal{H}$ se prolonge à I. Soient A', B', X', Y' les restrictions de A, B, X, Y à U (qu'on pourra aussi noter I'). La donné de A équivaut à celle de A', celle de $A_0 = A(i_0) \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$, et d'une flèche de

$$A'_{I'} \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{i' \in I'} A'(i') \xrightarrow{\lambda_A} A_0\ (\simeq A_I)\ ,$$

`[page 111]`

et de même pour B, X, Y. Plus précisément, la catégorie $\mathcal{M}(I^\circ)$ s'interprète comme celle des triples $X = (X', X_0, \lambda_X)$, où $X' \in \mathcal{M}(I'^\circ)$, $X_0 \in \mathcal{M}$, et $\lambda_X : X'_{I'} \longrightarrow X_0$. À ce compte, la donnée du diagramme (6.3.2) équivaut à celle d'un diagramme carré similaire

(6.3.3)
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "i'"'] & X' \arrow[d, "p'"] \\ B' \arrow[r, "\beta'"'] \arrow[ur, dotted, "h'"] & Y' \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{M}(I'^\circ)$, d'où un diagramme dans $\mathcal{M}$

(6.3.4)
$$\begin{tikzcd} A'_{I'} \arrow[r, "\alpha'_{I'}"] \arrow[d, "i'_{I'}"'] & X'_{I'} \arrow[d, "p'_{I'}"] \\ B'_{I'} \arrow[r, "\beta'_{I'}"'] \arrow[ur, dotted, "h'_{I'}"] & Y'_{I'}\ , \end{tikzcd}$$

d'un autre diagramme carré *dans* $\mathcal{M}$

(6.3.5)
$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "i_0"'] & X_0 \arrow[d, "p_0"] \\ B_0 \arrow[r, "\beta_0"'] & Y_0\ , \end{tikzcd}$$

et enfin d'un homomorphisme $\lambda = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_X, \lambda_Y)$ du carré (6.3.4) dans le carré (6.3.5) :

[page 112]

(6.3.6)

$$\begin{tikzcd}
A'_{I'} \arrow[rr, "\alpha'_{I'}"] \arrow[dr, "i'_{I'}"] \arrow[dd, "\lambda_A"'] & & X'_{I'} \arrow[dr, "p'_{I'}"] \arrow[dd, "\lambda_X"] & \\
& B'_{I'} \arrow[ur, dotted, "h'_{I'}"] \arrow[rr, "\beta'_{I'}"] \arrow[dd, "\lambda_B"'] & & Y'_{I'} \arrow[dd, "\lambda_Y"] \\
A_0 \arrow[rr, "\alpha_0"] \arrow[dr, "i_0"'] & & X_0 \arrow[dr, "p_0"] & \\
& B_0 \arrow[ur, dotted, "h_0"'] \arrow[rr, "\beta_0"] & & Y_0
\end{tikzcd}$$

[32]

D'autre part, la question de prolonger $(I', h') \in \mathcal{H}$ en (I, h), revient à celle de trouver $h_0 : B_0 \longrightarrow X_0$ dans $\mathcal{M}$, de façon qu'avec $h'_{I'}$ cela fasse encore un diagramme commutatif de (6.3.6), ce qui revient à dire que d'une part les deux triangles formés dans le carré de base sont commutatifs :

$$p_0 h_0 = \beta_0, \qquad h_0 i_0 = \alpha_0 \ , \tag{6.3.7}$$

et d'autre part le carré diagonal défini par $h'_{I'}$, h_0 soit commutatif (ce qui exprime qu'on a une flèche h de B dans X) :

$$\lambda_X h'_{X'} = h_0 \lambda_B \ . \tag{6.3.8}$$

[page 113]

Mais le diagramme (6.3.6), où la flèche en traits pointillés denses $h'_{I'}$ est déjà acquise, et h_0 en pointillés espacés reste à trouver, donne naissance au diagramme, dans lequel est mis en évidence la flèche $\tilde{i} \in \Phi$ qui exprime l'hypothèse $i \in C(i)$, compte tenu de $i' \in C(I')$:

(6.3.9)

$$\begin{tikzcd}
A'_{I'} \arrow[rr, "\alpha'_{I'}"] \arrow[dr, "i'_{I'}"] \arrow[dd, "\lambda_A"'] & & X'_{I'} \arrow[dr, "p'_{I'}"] \arrow[dd, "\lambda_X"] & \\
& B'_{I'} \arrow[ur, dotted, "h'_{I'}"] \arrow[rr, "\beta'_{I'}"] \arrow[dd, "s"'] \arrow[dl, phantom, "\text{cocart.}"] & & Y'_{I'} \arrow[dd, "\lambda_Y"] \\
A_0 \arrow[rr, "\alpha_0"] \arrow[dr, "r"'] \arrow[ddr, dotted, "i_0"'] & & X_0 \arrow[dr, "p_0 \in \Psi"] & \\
& \tilde{B} \arrow[ur, dotted, "\tilde{h}_0"] \arrow[rr, dotted, "\tilde{\beta}_0"] \arrow[d, "\tilde{i} \in \Phi"] & & Y_0 \\
& B_0 \arrow[uur, dotted, "h_0"] \arrow[urr, "\beta_0"'] & &
\end{tikzcd}$$

B_0 ,

[32]**N.B.** La condition $p \in \Psi\langle I \rangle$ s'exprime par $p' \in \Psi\langle I' \rangle$ et $\boxed{p_0 \in \Psi.}$

où la flèche $\tilde{h}_0$ en traits pointillés denses de $\tilde{B} \overset{\text{déf}}{=} A_0 \amalg_{A'_{I'}} B'_{I'}$ dans X_0, est définie par les conditions de commutativité

$$\tilde{h}_0 r \;=\; \alpha_0, \qquad \tilde{h}_0 s \;=\; \lambda_X h'_{I'}\ , \tag{6.3.10}$$

ce qui est licite, vu que

$$\begin{aligned} \alpha_0\lambda_A &= (\lambda_X h'_{I'})i'_{I'} \\ &= \lambda_X(h'_{I'}i'_{I'}) \\ &= \lambda_X\alpha'_{I'}. \end{aligned}$$

`[page 114]`

Quant à la flèche $\tilde{\beta}_0 : \tilde{B} \longrightarrow Y_0$, elle est donnée par la condition de commutativité

$$\tilde{\beta}_0 r \;=\; p_0\alpha_0, \qquad \tilde{\beta}_0 s \;=\; \lambda_Y \beta'_{I'}\ , \tag{6.3.11}$$

ce qui est encore licite, puisque

$$(p_0\alpha_0)\lambda_A \;=\; (\lambda_Y\beta'_{I'})i'_{I'}$$

en vertu de la commutativité du cube (6.3.6). Pour établir la commutativité totale du diagramme (6.3.9) (traits pleins, et traits pointillés denses pour $h'_{I'}$, $\tilde{h}_0$ et $\tilde{\beta}_0$ – à l'exclusion de h_0 pas encore construit), il faut encore vérifier d'une part les relation

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{h}_0 r &= \alpha_0, \quad p_0\tilde{h}_0 = \tilde{\beta}_0, \\ \lambda_X h'_{I'} &= \tilde{h}_0 s \end{aligned}\right. \tag{6.3.12}$$

[33],

établissant la commutativité du cube supérieur avec le carré diagonal (diagramme du type (6.3.6), la flèche pointillée h_0 y incluse), d'autre part les relations

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{i}r &= i_0 \qquad (\text{et } \tilde{i}s = \lambda_B \text{ pour mémoire}) \\ \beta_0\tilde{i} &= \tilde{\beta}_0\ , \end{aligned}\right. \tag{6.3.13}$$

où la première ligne est déjà connue par définition de $\tilde{B}$ et de $\tilde{i}$. La deuxième

`[page 115]`

se ramène aux deux relations

$$\begin{aligned} (\beta_0\tilde{i})r &= \beta_0(\tilde{i}r) \\ &= \beta_0 i_0 \\ &= p_0\alpha_0 \\ &= \tilde{\beta}_0 r\ , \end{aligned}$$

OK par commutativité du carré de base de (6.3.5),

$$\begin{aligned} (\beta_0\tilde{i})s &= \beta_0(\tilde{i}s) \\ &= \beta_0\lambda_B \\ &= \lambda_Y\beta'_{I'} \\ &= \tilde{\beta}_0 s\ , \end{aligned}$$

[33] **N.B.** la première et la troisième de ces relations sont déjà connues, cf. (6.3.10).

OK par commutativité du carré antérieur dans (6.3.6).

Donc il reste à vérifier la deuxième relation (6.3.12),

$$p_0\tilde{h}_0 \;=\; \tilde{\beta}_0 \;,$$

ce qui se ramène à

$$\begin{aligned} (p_0\tilde{h}_0)r &= p_0(\tilde{h}_0 r) \\ &= p_0\alpha_0 \\ &= \tilde{\beta}_0 r \;, \end{aligned}$$

OK par (6.3.11),

$$\begin{aligned} (p_0\tilde{h}_0)s &= p_0(\tilde{h}_0 s) \\ &= p_0(\lambda_X h'_{I'}) \\ &= (p_0\lambda_X)h'_{I'} \\ &= (\lambda_Y p'_{I'})h'_{I'} \\ &= \lambda_Y(p'_{I'}h'_{I'}) \\ &= \lambda_Y\beta'_{I'} \\ &= \tilde{\beta}_0 s \;, \end{aligned}$$

OK.

Ceci posé, je dis que les contraintes (6.3.7), (6.3.8) sur h_0 reviennent à la commutativité des deux triangles dans les carré

(6.3.14)
$$\begin{tikzcd} \tilde{B} \arrow[r, "\tilde{h}_0"] \arrow[d, "\tilde{i}\in\Phi"'] & X_0 \arrow[d, "p_0\in\Psi"] \\ B_0 \arrow[r, "\beta_0"'] \arrow[ur, dotted, "h_0"] & Y_0 \;, \end{tikzcd}$$

[page 116]

i.e. aux deux relations

(6.3.15)
$$h_0\tilde{i} \;=\; \tilde{h}_0 \;, \qquad p_0 h_0 \;=\; \beta_0 \;.$$

La deuxième de ces relations n'est autre que la première relation (6.3.7), et il reste à voir que la première relation (6.3.15) équivaut à l'ensemble des deux relations restantes dans (6.3.7), (6.3.8) :

(6.3.16)
$$h_0 i_0 \;=\; \alpha_0 \;, \qquad \lambda_X h'_{I'} \;=\; h_0 \underbrace{\lambda_B}_{\tilde{i}s}$$

Or la relation en question $h_0\tilde{i} = \tilde{h}_0$ équivaut à l'ensemble des deux relations

$$\begin{aligned}(h_0\tilde{i})r &= h_0(\tilde{i}r)\\ &= h_0 i_0\\ &\overset{?}{=} \alpha_0\\ &= \tilde{h}_0 r,\end{aligned}$$

équivalent à $h_0 i_0 = \alpha_0$,

$$\begin{aligned}(h_0\tilde{i})s &= h_0(\tilde{i}s)\\ &= h_0\lambda_B\\ &\overset{?}{=} \lambda_X h'_{I'}\\ &= \tilde{h}_0 s,\end{aligned}$$

équivalent à $h_0\lambda_B = \lambda_X h'_{I'}$, c'est OK.

Ceci posé, dans le carré (6.3.14), les hypothèses $i \in \Phi(I)$, $p \in \Psi\langle I\rangle$ impliquent $\tilde{i}_0 \in \Phi$, $p_o \in \Psi$. Donc la flèche cherchée h_0 existe, q.e.d.

Cela achève la démonstration du corollaire 6.3, et par là aussi, celle de la dernière partie, d), de 6.1. On est heureux !

`[page 117]`

Proposition 6.4. [34] *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie, et $\Phi \longleftrightarrow \Psi$ un couple Q-clos en Q-dualité ($\Phi = \Psi^*$, $\Psi = \Phi_*$). Soit $u : I \longrightarrow I'$ une flèche dans* Cat*, d'où une suite de foncteurs adjoints*

$$\mathcal{M}(I) \underset{u_*}{\overset{u_!}{\underset{\longleftarrow u^*}{\rightrightarrows}}} \mathcal{M}(I') \ .$$

On définit $\Phi(I)$, $\Psi\langle I\rangle$, $\Phi(I')$, $\Psi\langle I'\rangle$ comme dans 6.2.5. *On a alors :*

ⓐ

$$(6.4.1)\qquad \begin{cases} u_!(\Phi(I)) \subset \Phi(I') \ , \\ u^*(\Psi\langle I'\rangle) \subset \Psi\langle I\rangle \ . \end{cases}$$

ⓑ *On a l'équivalence*

$$(6.4.2)\qquad u^*(\Phi(I')) \subset \Phi(I) \iff u_*(\Psi\langle I\rangle) \subset \Psi\langle I'\rangle \ .$$

ⓒ *Les relations équivalentes* (6.4.2) *ont lieu dans chacun des trois cas suivants :*

1°) *u est coétale.*

2°) *I est discrète.*

3°) *Pour tout $i' \in \mathrm{Ob}\, I'$, les composantes connexes de I/i' admettent un objet final.*

[34] Sous réserve d'existence des $\varinjlim$ et des $\varprojlim$ pertinentes dans $\mathcal{M}$. On peut supposer pour simplifier $\mathcal{M}$ stable par $\varinjlim$ et $\varprojlim$.

Corollaire 6.5. *Soit* (W, C, F) *un triple de Quillen clos spécial dans* $\mathcal{M}$, *et définissons, pour toute* I *dans* Cat, $C(I)$, $TC(I)$ *et* $F(I)$, $TF(I)$ *comme dans le théorème* 6.1. a). *On a alors*

[page 118]

les équivalences

$$\text{(6.5.1)} \qquad \Big(u^*(C(I')) \ \subset \ C(I)\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(u_*(TF) \ \subset \ TF'\Big)\,,$$

$$\text{(6.5.2)} \qquad \Big(u^*(TC(I')) \ \subset \ TC(I)\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(u_*(F) \ \subset \ F'\Big)\,.$$

Les conditions équivalentes (6.5.1) *ainsi que* (6.5.2) *sont satisfaites quand on est dans l'un des cas* 1°) 2°) 3°) *de* 6.4. c).

Démonstration de 6.4. Les assertions a , b sont $\pm$ tautologiques, par adjonction, comparer XIII, prop. 2, et cor., page 46. Pour prouver c), il suffit de traiter le cas 3°), car 1° $\Longrightarrow$ 3°, 2° $\Longrightarrow$ 3°. Mais le calcul de

$$u_*(X)(i') \ \simeq \ \varprojlim_{i \in I/i'} X(i)$$

montre que si les composantes connexes $(I/i')_\alpha$ de I/i' ont chacune un objet final e_α, alors

$$u_*(X)(i') \ \simeq \ \prod_\alpha X(e_\alpha)\,.$$

Or Ψ, étant clos à droite, est stable par produits quelconques, donc $X \in \Psi\langle I\rangle$ implique que les $u_*(X)(i')$ sont dans Ψ, donc u_* est dans $\Psi\langle I'\rangle$, q.e.d.