MARCEL EVRARD

THEORIE DE L'HOMOTOPIE

INTRODUCTION.

On sait que l'homotopie singulière est inadaptée aux espaces topologiques généraux. Pour ceux-ci, l'idée naturelle est de transposer la théorie de Čech donc essentiellement d'étudier l'homotopie d'un recouvrement et par suite d'un complexe simplicial ou d'une catégorie.

Nous avons écarté l'homotopie simpliciale très technique et pratiquement incalculable pour développer une théorie d'homotopie des catégories C'est l'objet de la première partie. On y remarquera le rôle essentiel joué par les théorèmes A et B de Quillen que nous démontrons de nouveau. On y verra aussi que, du point de vue homotopique, la théorie simpliciale, ou plutôt semi-simpliciale, et la théorie catégorique sont équivalentes.

Dans la seconde partie, nous étudions l'homotopie d'un espace topologique, établissons l'exactitude de la suite d'homotopie de certaines applications propres et montrons, entre autres que la théorie ainsi définie coïncide avec la théorie classique pour des espaces localement de type d'homotopie trivial. Nous donnons en outre quelques applications de ceci aux variétés analytiques complexes et à la complétion homotopique de quelques espaces.

PREMIERE PARTIE

HOMOTOPIE ALGEBRIQUE

TABLE DES MATIERES.

A. - LE GROUPE FONDAMENTAL

I - Définition du groupe fondamental.

II - Fibrés localement triviaux et revêtements.

III - Définition du pro-groupe fondamental.

B. - PROPRIÉTÉS COHOMOLOGIQUES

I - Les groupes $H^n(\underline{I};F)$.

II - Propriétés fonctorielles.

III - Les groupes $H^n(S;F)$.

C. - LES GROUPES D'HOMOTOPIE

I - Les catégories de chemins $\Lambda^n(\underline{I})$.

II - Les catégories de lacets $\Omega^n(\underline{I})$.

III - Les groupes $\pi_n(\underline{I})$.

IV - La suite exacte d'homotopie associée à un morphisme.

V - L'homomorphisme de Hurewicz.

VI - Le théorème de Whitehead.

D. - MORPHISMES FIBRÉS

I - La factorisation d'un $\underline{C}_1^*$-morphisme.

II - Morphismes quasi-fibrés.

III - Morphismes fibrés.

IV - Morphismes pseudo-fibrés.

V - Morphismes quasi-fibrés dans $\underline{\text{Pro}}\text{-}\underline{C}^*$.

E - COMPLEXES SEMI-SIMPLICIAUX ET CATÉGORIES

I - Les foncteurs S,C et C_N.

II - Les groupes $\pi_n(X)$ et $\pi_n(C_N(X))$

III - Les ensembles $[X,Y]_e$ et $[C_N(X), C_N(Y)]$.

CONVENTIONS.

- Si E est un ensemble, $\underline{E}^d$ est la catégorie discrète (sans morphismes propres) ayant E pour ensemble d'objets

- Si G est un monoïde, $\underline{G}$ est la catégorie de ce monoïde.

- Un <u>point</u> d'une catégorie est un objet de cette catégorie.

- Si $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est un morphisme de catégories :

$\underline{u}_g^{-1}(I') = \{I, \underline{u}(I) \longrightarrow I'\}$ = fibre à gauche de $\underline{u}$ au-dessus de I'

$u_d^{-1}(I') = \{I, I' \xrightarrow{u'} u(I)\}$ = fibre à droite de $\underline{u}$ au-dessus de I'.

- U étant un univers donné une fois pour toutes, $\underline{C}$ est la catégorie de $\mathfrak{U}$-petites catégories; $\underline{C}^*$ est la catégorie de U-petites catégories pointées.

A. - LE GROUPE FONDAMENTAL.

I - Définition du groupe fondamental.

$[n]$ désigne l'ensemble ordonné des entiers compris entre 0 et n ; $\underline{\Delta}(n)$ est la catégorie associée.

1) Soit $\underline{I}$ une petite catégorie. Un chemin de $\underline{I}$ de longueur n est un diagramme $\bar{I}$ de $\underline{I}$ de la forme :

$$I_o \xrightarrow{i_1} I_1 \xleftarrow{i_2} \cdots\cdots \xrightarrow{i_{2n-1}} I_{2n-1} \xleftarrow{i_{2n}} I_{2n} .$$

Le chemin opposé à $\bar{I}$, $\bar{I}^{-1}$, est défini par le diagramme :

$$I_{2n} \xrightarrow{i_{2n}} I_{2n-1} \xleftarrow{i_{2n-1}} \cdots\cdots \xrightarrow{i_2} I_1 \xleftarrow{i_1} I_o .$$

Ces chemins forment une catégorie involutive $K\wedge_n(\underline{I})$ dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\bar{I} = I_o \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & I_1 \arrow[d] & \cdots \arrow[l, "i_2"'] \arrow[r, "i_{2n-1}"] & I_{2n-1} \arrow[d] & I_{2n} \arrow[l, "i_{2n}"'] \arrow[d] \\
\bar{J} = J_o \arrow[r, "j_1"] & J_1 & \cdots \arrow[l, "j_2"'] \arrow[r, "j_{2n-1}"] & J_{2n-1} & J_{2n} \arrow[l, "j_{2n}"']
\end{tikzcd}$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on construit ainsi un foncteur :

$$\underline{C} \xrightarrow{K\wedge n} \underline{C}$$

qui est représentable, donc commute aux produits fibrés.

On pose : $K\wedge(\underline{I}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_o} K\wedge_n(\underline{I})$.

2) Si $[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$ est une application strictement croissante, à tout chemin $\bar{I}$ de longueur n de la forme ci-dessus, on associe un chemin $\varphi(\bar{I})$ de longueur m défini par :

$$\varphi(\tilde{I}) = \underset{0}{I_o} \xrightarrow{id} \underset{1}{I_o} \xleftarrow{id} \underset{2}{I_o} \xrightarrow{id} \dots \xleftarrow{id} \underset{2\varphi(1)-2}{I_o} \xrightarrow{i_1} \underset{2\varphi(1)-1}{I_1} \xleftarrow{i_2} \underset{2\varphi(1)}{I_2} \xrightarrow{id} \dots$$
$$\dots \xrightarrow{i_{2n-1}} \underset{2\varphi(n)-1}{I_{2n-1}} \xleftarrow{i_{2n}} \underset{2\varphi(n)}{I_{2n}} \xrightarrow{id} \dots \xleftarrow{id} \underset{2m}{I_{2n}}$$

d'où une transformation naturelle :

$$K\Lambda_n \xrightarrow{\varphi} K\Lambda_m$$

La catégorie des chemins de $\underline{I}$, notée $\Lambda(\underline{I})$, est définie de la forme suivante :

i) $Ob(\Lambda(\underline{I})) = Ob(K\Lambda(\underline{I}))$

ii) Si $\tilde{I}$ et $\tilde{J}$ sont des chemins de $\underline{I}$ de longueurs respectives n et m :

$$\underset{\Lambda(\underline{I})}{Hom}(\tilde{I},\tilde{J}) = \left\{(\varphi,u) \; ; \; [n] \xrightarrow{\varphi} [m] \text{ strictement croissante} \atop \varphi(\tilde{I}) \xrightarrow{u} \tilde{J} \in K\Lambda_m(\underline{I})\right\}$$

Notons que le foncteur ainsi construit :

$$\underline{C} \xrightarrow{\Lambda} \underline{C}$$

est involutif mais n'est plus représentable.

On désigne par $\underline{p}_o$ et $\underline{p}_1$ les morphismes de $\Lambda(\underline{I})$ dans $\underline{I}$ qui associent à tout chemin son origine et son extrémité. Deux morphismes $\underline{u}$ et $\underline{v}$ de $\underline{I}$ dans $\underline{I}'$ sont alors dits homotopes (dans $\underline{C}$ ou $\underline{C}^*$) s'il existe un morphisme $\underline{r}$ de $\underline{I}$ dans $\Lambda(\underline{I}')$ tel que $\underline{p}_o \circ \underline{r} = \underline{u}$ et $\underline{p}_1 \circ \underline{r} = \underline{v}$. Un morphisme $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$ est une équivalence d'homotopie s'il existe un morphisme $\underline{I}' \xrightarrow{v} \underline{I}$ tel que $\underline{u} \circ \underline{v}$ et $\underline{v} \circ \underline{u}$ sont homotopes à l'identité.

Exemples I 2 a : i) S'il existe une transformation naturelle de $\underline{u}$ dans $\underline{v}$, $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont homotopes.

ii) Tout foncteur possédant un adjoint est une équivalence d'homotopie.

Si I_o est un point de $\underline{I}$, $\underline{I}$ est contractile en I_o si le morphisme naturel de $\underline{I}$ sur I_o est homotope à l'identité.

Exemple I 2 b : Toute catégorie possédant un objet initial ou final est contractile en un point.

Si $\underline{J}$ et $\underline{K}$ sont des sous-catégories de $\underline{I}$, $\Lambda(\underline{I};\underline{J},\underline{K})$ est la sous-catégorie de $\Lambda(\underline{I})$ définie par le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} \Lambda(\underline{I}) \arrow[r, "\underline{p}_0 \times \underline{p}_1"] & \underline{I} \times \underline{I} \\ \Lambda(\underline{I};\underline{J},\underline{K}) \arrow[u] \arrow[r] & \underline{J} \times \underline{K} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Si I_o est un point de $\underline{I}$, on remarque que $\Lambda(\underline{I};\underline{I},I_o)$ est contractile en I_o.

3) L'ensemble des composantes connexes $\pi_o(\underline{I})$ de $\underline{I}$ est le quotient de $\mathrm{Ob}(\underline{I})$ par la relation d'équivalence :

$$I \sim J \iff \exists\, \bar{I} \in \Lambda(\underline{I}) \text{ tel que } \underline{p}_o(\bar{I}) = I \text{ et } \underline{p}_1(\bar{I}) = J.$$

On note, $[\underline{I}]$, la composante connexe de I.

Proposition I 3 : Le foncteur :

$$\underline{C} \xrightarrow{\pi_o} \underline{\mathrm{Ens}}$$

possède les propriétés suivantes :

i) $\pi_o(\underline{u}) = \pi_o(\underline{v})$ si $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont homotopes.

ii) $\pi_o(\underline{I} \times \underline{J}) \simeq \pi_o(\underline{I}) \times \pi_o(\underline{J})$

iii) $\pi_o(\underline{I}^o) = \pi_o(\underline{I})$

iv) $\pi_o(\underline{I}) = *$ si $\underline{I}$ est filtrante

v) Pour tout morphisme $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$,

- $\pi_o(\underline{u})$ est surjectif si $\underline{u}_g^{-1}(I')$ est non vide pour tout I'
- $\pi_o(\underline{u})$ est bijectif si $\underline{u}_g^{-1}(I')$ est non vide et connexe pour tout I'.

Pour tout ensemble E, on pose :

$$H^{o}(\underline{I};E) = \underset{\underline{\underline{Ens}}}{\mathrm{Hom}}(\pi_{o}(\underline{I}),E)$$

et on désigne par $\underline{C}_o(\underline{C}^*_o)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{C}$ ($\underline{C}^*$) formée des catégories connexes.

4) Si $\underline{I}$ est pointée en I_o, la catégorie $\Omega(\underline{I})$ des lacets de $\underline{I}$ est la sous-catégorie de $\Lambda(\underline{I})$ formée des chemins d'origine et d'extrémité I_o.

Autrement dit :

$$\Omega(\underline{I}) = \Lambda(\underline{I};I_o,I_o)$$

Si on pointe $\Omega(\underline{I})$ en I_o, le foncteur

$$\underline{C}^* \xrightarrow{\Omega} \underline{C}^*$$

est involutif et muni d'une loi de composition naturelle : $(\bar{I},\bar{J}) \rightsquigarrow \bar{I}\bar{J}$.

On pose :

$$\pi_1(\underline{I}) = \pi_o(\Omega(\underline{I}))$$

Proposition I 4 : Pour toute petite catégorie pointée $\underline{I}$, $\pi_1(\underline{I})$ est un groupe, et le foncteur :

$$\underline{C}^* \xrightarrow{\pi_1} \underline{Gr}$$

possède les propriétés suivantes :

i) $\pi_1(\underline{u}) = \pi_1(\underline{v})$ si $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont homotopes

ii) $\pi_1(\underline{I} \times \underline{J}) \simeq \pi_1(\underline{I}) \times \pi_1(\underline{J})$

iii) $\pi_1(\underline{I}^o) \simeq \pi_1(\underline{I})$

iv) $\pi_1(\underline{I}) = 1$ si $\underline{I}$ est filtrante

v) Pour tout morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ tel que $\underline{u}_g^{-1}(I')$ soit non vide et connexe pour tout I', $\pi_1(\underline{u})$ est surjectif.

On désigne par $\underline{C}_1(\underline{C}_1^*)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{C}(\underline{C}^*)$ formé de catégories connexes et simplement connexes.

II - Fibrés localement triviaux et revêtements.

1) Un fibré localement trivial est un triple $(\underline{I},\underline{I}',\eta)$ où $\underline{I}$ et $\underline{I}'$ sont des petites catégories et $Fl(\underline{I}) \xrightarrow{\eta} Aut(\underline{I}')$ est un homomorphisme de monoïdes $(\eta(v \circ u) = \eta(v) \circ \eta(u))$.

I s'appelle la base du fibré et $\underline{I}'$ sa fibre.

A tout fibré localement trivial $(\underline{I},\underline{I}',\eta)$, on associe un morphisme :

$$\underline{I}(\eta) \xrightarrow{\underline{p}} \underline{I}$$

où $\underline{I}(\eta)$ est le produit semi-direct de $\underline{I}$ par $\underline{I}'$, c'est-à-dire :

i) $Ob(\underline{I}(\eta)) = Ob(\underline{I} \times \underline{I}')$

ii) $Hom_{\underline{I}(\eta)}((I,I'),(J,J')) = \{(u,u');\ I \xrightarrow{u} J \in \underline{I},\ I' \xrightarrow{u'} \eta(u)^{-1}(J') \in \underline{I}'\}$

avec la composition : $(v,v') \circ (u,u') = (v \circ u,\ \eta(u)^{-1}(v') \circ u')$.

Le morphisme $\underline{p}$ est un exemple de morphisme fibré qui sera étudié en détail au §D.

Si $\underline{I}$ et $\underline{I}'$ sont pointées en I_o et I'_o, $\underline{I}(\eta)$ est pointé en (I_o,I'_o) et il existe un morphisme naturel : $\underline{I}' \xrightarrow{\underline{s}'} \underline{I}(\eta)$ $(I' \rightsquigarrow (I_o,I'))$.

On définit l'application "bord" :

$$\pi_1(\underline{I}) \xrightarrow{\partial_\eta} \pi_o(\underline{I}')$$

par :

$$\partial_\eta[I] = [\eta(i_{2n})^{-1} \circ \eta(i_{2n-1}) \circ \dots \circ \eta(i_2)^{-1} \circ \eta(i_1)(I'_o)].$$

On vérifie aisément que la suite :

$$\pi_1(\underline{I}') \xrightarrow{\pi_1(\underline{s}')} \pi_1(\underline{I}(\eta)) \xrightarrow{\pi_1(\underline{p})} \pi_1(\underline{I}) \xrightarrow{\partial_\eta} \pi_o(\underline{I}') \xrightarrow{\pi_o(\underline{s}')} \pi_o(I(\eta)) \xrightarrow{\pi_o(\underline{p})} \pi_o(\underline{I})$$

est exacte.

2) Si E est un ensemble, un <u>revêtement</u> de $\underline{I}$ de fibre E est un fibré localement trivial de la forme $(\underline{I},\underline{E}^d,\eta)$; η peut être considéré comme un homomorphisme de monoïdes de $Fl(\underline{I})$ dans $Bij(E)$.

Un <u>système local</u> sur $\underline{I}$, à valeurs dans une catégorie $\underline{J}$, est un foncteur $\underline{I}^o \xrightarrow{F} \underline{J}$ tel que $F(u)$ soit une bijection pour tout morphisme u.

<u>Proposition</u> II 2 a : Si $\underline{I}$ est connexe, la catégorie des revêtements de $\underline{I}$ est équivalente à la catégorie des systèmes locaux d'ensembles sur $\underline{I}$.

<u>Preuve</u> : Pointons $\underline{I}$ en I_o et choisissons, pour tout I de $\underline{I}$ un chemin e_I de I_o à I. Les foncteurs

$$(\underline{I},\underline{E}^d,\eta) \rightsquigarrow F$$
$$G \rightsquigarrow (\underline{I},\underline{H}^d,\pi)$$

définis par $F(I) = E$, $F(u) = \eta(u)^{-1}$, $H = G(I_o)$,
$\pi(I \xrightarrow{u} J) = G(e_I I \xrightarrow{u} J\, e_J^{-1})^{-1}$ fournissent l'équivalence cherchée.

<u>Proposition</u> II 2 b : Si $\underline{I}$ est connexe et pointée, la catégorie des revêtements de $\underline{I}$ est équivalente à la catégorie des $\pi_1(\underline{I})$-ensembles.

<u>Preuve</u> : Un ensemble E sur lequel $\pi_1(\underline{I})$ opère par φ étant désigné par (E,φ), on construit des équivalences :

$$(\underline{I},\underline{E}^d,\eta) \rightsquigarrow (E,\eta')$$
$$(E,\varphi') \rightsquigarrow (\underline{I},\underline{E}^d,\varphi)$$

par : $\eta'([\bar{I}])(x) = \eta(i_{2n})^{-1} \circ \eta(i_{2n-1}) \circ \ldots \circ \eta(i_1)(x)$
$\varphi(I \xrightarrow{u} J) = \varphi'([e_I (I \xrightarrow{u} J) e_J^{-1}])$.

3) Un fibré <u>principal homogène</u> est un triple $(\underline{I},G,f)$ où $\underline{I}$ est une petite catégorie, G un groupe et $Fl(\underline{I}) \xrightarrow{f} G$ un homomorphisme de monoïdes ($f(v \circ u) = f(u)f(v)$).

Un tel fibré définit un fibré localement trivial $(\underline{I},\underline{G}^d,\eta)$ où $Fl(\underline{I}) \xrightarrow{\eta} Aut(\underline{G}^d) = Bij(G)$ est défini par $\eta(u)(g) = gf(u)$.

On pose : $\underline{I}(f) = \underline{I}(\eta)$, $\partial f = \partial\eta$.

Un $\underline{C}$-morphisme de $(\underline{I},G,f)$ dans $(\underline{I}',G',f')$ est un triple $(\underline{u},h,s)$ où $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est un $\underline{C}$-morphisme, $G \xrightarrow{h} G'$ un homomorphisme de groupes et $Ob(\underline{I}) \xrightarrow{s} G'$ une application telle que, pour tout $I \xrightarrow{u} J$ de $\underline{I}$:

$$h \circ f(u) = s(I) \quad f'(\underline{u}(u)s(J)^{-1}.$$

Tout $\underline{C}$-morphisme $(\underline{u},h,s)$ définit un $\underline{C}$-morphisme $\underline{u}(h,s)$ de $\underline{I}(f)$ dans $\underline{I}(f')$ au dessus de $\underline{u}$ par :

$$\underline{u}(h,s)(I,g) = (\underline{u}(I),h(g)s(I)).$$

La notion de $\underline{C}^*$-morphisme est définie comme ci-dessus, mais en ajoutant $s(I_o) = 1$.

<u>Propriété</u> II 3 a : Si $(\underline{I},G,f)$ est un fibré principal homogène, G opère sur $\underline{I}(f)$ par automorphismes suivant : $g \rightsquigarrow a_g$ $(a_g(I,g') = (I,gg'))$ et le quotient de $\underline{I}(f)$ par G est isomorphe à $\underline{I}$.

<u>Propriété</u> II 3 b : Si $(\underline{I},G,f)$ est un fibré principal homogène pointé (c'est-à-dire si $\underline{I}$ est pointé), l'homomorphisme "bord" :

$$\pi_1(\underline{I}) \xrightarrow{\partial f} G$$

est défini par :

$$\partial_f([\bar{I}]) = f(i_1)f(i_2)^{-1} \ldots\ldots\ldots f(i_{2n-1})f(i_{2n})^{-1}.$$

et la suite suivante est exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\underline{I}(f)) \xrightarrow{\pi_1(\underline{p})} \pi_1(\underline{I}) \xrightarrow{\partial} G \xrightarrow{\pi_0(\underline{p}')} \pi_0(\underline{I}(f)) \xrightarrow{\pi_0(\underline{p})} \pi_0(\underline{I}) \longrightarrow *$$

Si G est un groupe, on pose :

i) $Z^1(\underline{I};G)$ = ensemble des fibrés principaux homogènes de groupe G.

ii) $H^1(\underline{I};G)$ = ensemble des classes de fibrés principaux homogènes de groupe G $\underline{C}$-isomorphes.

Ces deux ensembles sont naturellement pointés. De plus, on vérifie facilement la :

<u>Proposition</u> II 3 c : Pour tout $\underline{C}_o$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ tel que $\underline{u}_g^{-1}(I')$ soit non vide et connexe pour tout I', la suite d'ensembles pointés :

$$* \longrightarrow H^1(\underline{I}';G) \longrightarrow H^1(\underline{I};G) \longrightarrow \varprojlim_{I'} H^1(\underline{u}_g^{-1}(I');G)$$

est exacte pour tout groupe G.

4) Si $\underline{I}$ est connexe, un <u>revêtement galoisien</u> de $\underline{I}$ de groupe G est un fibré principal homogène $(\underline{I},G,f)$ tel que $\underline{I}(f)$ soit connexe.

Si, de plus, $\underline{I}$ est pointé, un <u>revêtement universel</u> de $\underline{I}$ est un revêtement galoisien $(\underline{I}, \pi_1(\underline{I}),f)$ tel que ∂f = id. On le note $(\underline{I},f)$.

<u>Exemple</u> II 4 a: Si on choisit pour tout I de $\underline{I}$ un chemin e_I tel que $[e_{I_o}] = 1$, l'homomorphisme de monoïdes :

$$\mathrm{Fl}(\underline{I}) \xrightarrow{\quad e \quad} \pi_1(\underline{I})$$
$$I \xrightarrow{u} J \rightsquigarrow [e_I \ I \xrightarrow{u} J \ e_J^{-1}]$$

est un revêtement universel de $\underline{I}$.

Inversement, tout revêtement universel peut s'obtenir de cette manière; car de l'égalité : $f(e_I\ I \xrightarrow{u} J\ e_J^{-1}) = f(e_I)\ f(u)\ f(e_J^{-1})$, on déduit que $f(I \xrightarrow{u} J) = [f_I\ I \xrightarrow{u} J\ f_J^{-1}]$ où f_I est tel que $[e_I\ f_I^{-1}] = f(e_I)$.

<u>Propriété</u> II 4 b : Si $(\underline{I},G,f)$ est un revêtement galoisien, G est isomorphe à $\mathrm{Aut}_{\underline{I}}(\underline{I}(f))$ (voir II 3 a). En particulier, si $(\underline{I},f)$ est un revêtement universel, $\pi_1(\underline{I}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\underline{I}}(\underline{I}(f))$.

<u>Théorème</u> II 4 c (théorie de Galois dans $\underline{C}^*$) : Soit $(\underline{I},f)$ un revêtement universel. Les applications :

$$(\underline{I},G,h) \rightsquigarrow \partial_h$$
$$k \rightsquigarrow (\underline{I},G,k \circ f)$$

établissent une correspondance biunivoque entre les classes de fibrés principaux homogènes (revêtements galoisiens) de groupe G $\underline{C}^*$-isomorphes et les homomorphismes (homomorphismes surjectifs) de $\pi_1(\underline{I})$ dans G.

Preuve : Si f est défini par $f(I \xrightarrow{u} J) = [f_I \; I \xrightarrow{u} J \; f_J^{-1}]$, $\partial_h \circ f\,(I \xrightarrow{u} J) = h(f_I)\, h(I \xrightarrow{u} J)\, h(f_J^{-1})$; ce qui montre que h et $\partial_h \circ f$ sont $\underline{C}^*$-isomorphes.

D'autre part, $\partial_{k \circ f} = k \circ \partial_f = k$.

Théorème II 4 d : (théorie de Galois dans $\underline{C}$) : Soit $(\underline{I},f)$ un revêtement universel. Les applications :

$$(\underline{I},G,h) \rightsquigarrow \partial_h$$
$$k \rightsquigarrow (\underline{I},G,k \circ f)$$

établissent une correspondance biunivoque entre les classes de fibrés principaux homogènes de groupe G $\underline{C}$-isomorphes et les classes d'homomorphismes conjugués de $\pi_1(\underline{I})$ dans G.

Si, on désigne par $\mathrm{Hom}(H,G)_G$ l'ensemble pointé des classes d'homo--morphismes conjugués de H dans G, le théorème ci-dessus exprime que :

$$H^1(\underline{I};G) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(\underline{I}),G)_G.$$

5) Soient $(\underline{I},G,f)$ et $(\underline{I}',G',f')$ des revêtements galoisiens pointés et

$$\begin{tikzcd} \underline{I}(f) \arrow[r, "\underline{v}"] \arrow[d, "\underline{p}"] & \underline{I}'(f') \arrow[d, "\underline{p}'"] \\ \underline{I} \arrow[r, "\underline{u}"] & \underline{I}' \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de $\underline{C}^*$-morphismes.

Un tel morphisme $\underline{v}$ au-dessus de $\underline{u}$ s'il existe est unique; en effet pour tout $(I,g) \xrightarrow{u} (J,gf(u))$ de $\underline{I}(f)$, $\underline{v}(I,g) = \underline{v}'(I,g) \Longleftrightarrow \underline{v}(J,gf(u)) = \underline{v}'(J,gf(u))$. Comme $\underline{v}(I_o,1) = \underline{v}'(I_o,1)$ et que $\underline{I}(f)$ est connexe, cela entraîne que $\underline{v} = \underline{v}'$.

On désigne par $G \xrightarrow{\sigma_1(\underline{v})} G'$, l'unique homomorphisme de groupes tel que $\sigma_1(\underline{v}) \circ \partial_f = \partial_{f'} \circ \pi_1(\underline{u})$.

Comme $(\underline{I}, G', \sigma_1(\underline{v}) \circ f)$ et $(\underline{I}, G', f' \circ Fl(\underline{u}))$ sont $\underline{C}^*$-isomorphes, il existe (théorème II 4 c) une application : $Ob(I) \xrightarrow{s(\underline{v})} G'$ telle que :

i) $s(\underline{v})(I_o) = 1$

ii) $\sigma_1(\underline{v}) \circ f(u) = s(\underline{v})(I) f'(\underline{u}(u)) s(\underline{v})(J)^{-1}$ pour tout $I \xrightarrow{u} J$.

On en déduit que : $\underline{v}(I,g) = (\underline{u}(I), \ \sigma_1(\underline{v})(g) \ s(\underline{v})(I))$. En particulier, $s(\underline{v})$ est uniquement déterminé.

On a ainsi prouvé :

<u>Proposition</u> II 5 a : Soient $(\underline{I}, G, f)$ et $(\underline{I}', G', f')$ des revêtements galoisiens pointés. Les applications :

$$(\underline{u}, h, s) \rightsquigarrow (\underline{u}, \underline{u}(h,s))$$
$$(\underline{u}, \underline{v}) \rightsquigarrow (\underline{u}, \sigma_1(\underline{v}), s(\underline{v}))$$

étalissent une correspondance biunivoque entre les $\underline{C}^*$-morphismes de $(\underline{I}, G, f)$ dans $(\underline{I}', G', f')$ et les diagrammes commutatifs de $\underline{C}^*$-morphismes de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \underline{I}(f) & \xrightarrow{\underline{v}} & \underline{I}'(f') \\ \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}'} \\ \underline{I} & \xrightarrow{\underline{u}} & \underline{I}' \end{array}$$

Le résultat suivant précise les relations entre les fibres à gauche de $\underline{u}$ et celles de $\underline{v}$.

<u>Proposition</u> II 5 b : Si $\sigma_1(\underline{v})$ est surjectif pour tout objet (I', g') de $\underline{I}'(f')$, on peut construire un homomorphisme de monoïdes :

$$Fl(\underline{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{f''(I', g')} \ker \sigma_1(\underline{v})$$

tel que :

$$\underline{v}_g^{-1}(I', g') \cong [\underline{u}_g^{-1}(I')](f''(I', g')).$$

Preuve : On choisit pour tout point $(I,\underline{u}(I) \xrightarrow{t} I')$ de $\underline{u}_g^{-1}(I')$ un élément $g(I,t)$ de G tel que :

$$\sigma_1(v)(g(I,t)) = g'f'(t)^{-1}s(\underline{v})(I)^{-1}$$

et on définit un homomorphisme de monoïdes :

$$\mathrm{Fl}(\underline{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{f''(I',g')} \ker \sigma_1(\underline{v})$$

par : $(I,t) \xrightarrow{u} (J,r) \rightsquigarrow g(I,t)f(u)g(J,r)^{-1}$.

Le morphisme :

$$[\underline{u}_g^{-1}(I')]\ (f''(I',g')) \longrightarrow \underline{v}_g^{-1}(I',g')$$
$$((I,t),h) \rightsquigarrow ((I,hg(I,t)),t)$$

est alors un isomorphisme.

La proposition II 3 c peut alors se compléter suivant :

Proposition II 5 c : Pour tout $\underline{C}_o$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$ tel que $\underline{I}'$ soit filtrante et $\underline{u}_g^{-1}(I')$ non vide et connexe pour tout I', et pour tout groupe G :

$$H^1(I;G) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{I'} H^1(\underline{u}_g^{-1}(I');G)$$

Preuve : Supposons par exemple $\underline{I}'$ filtrante à droite.

D'après la proposition ci-dessus, il est équivalent de démontrer la propriété pour $\underline{I}$ ou pour un revêtement universel de $\underline{I}$. On peut donc supposer que I est simplement connexe et il suffit (théorème II 4 d) de montrer que pour tout I' de $\underline{I}'$ et tout x de $\pi_1(\underline{u}_g^{-1}(I'))$, il existe un morphisme $I' \xrightarrow{u'} J'$ de $\underline{I}'$ tel que l'image de x dans $\pi_1(\underline{u}_g^{-1}(I'))$ soit l'identité. Or $\underline{I}'$ étant filtrante à droite, tout lacet de $\underline{u}_g^{-1}(I')$ est homotope à l'identité dans $\underline{u}_g^{-1}(J')$ pour un morphisme $I' \xrightarrow{u'} J'$ convenable.

6) Pour tout morphisme $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$ et tout objet I' de $\underline{I}'$, on construit le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \Lambda(\underline{I}';\underline{I}',I') \arrow[r, "\underline{p}_o"] & \underline{I}' \\ \underline{u}_H^{-1}(I') \arrow[u] \arrow[r] & \underline{I} \arrow[u, "\underline{u}"'] \end{tikzcd}$$

$\underline{u}_H^{-1}(I')$ est la <u>fibre homotopique</u> de $\underline{u}$ en I' et il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \underline{u}_g^{-1}(I') \arrow[dr] & \\ \underline{u}^{-1}(I') \arrow[ur] \arrow[dr] & & \underline{u}_H^{-1}(I') \\ & \underline{u}_d^{-1}(I') \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où tous les morphismes sont naturels.

De plus, pour tout $I' \xrightarrow{u'} J'$, les morphismes canoniques :

$$\underline{u}_H^{-1}(I') \xrightarrow{\underline{u}_H^{-1}(u')} \underline{u}_H^{-1}(J')$$

$$\underline{u}_H^{-1}(J') \xrightarrow{\underline{u}_H^{-1}(u')^{*}} \underline{u}_H^{-1}(I')$$

sont des équivalences d'homotopie.

<u>Propriété</u> II 6 a : Si $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est un morphisme pointé, on définit l'application "bord"

$$\pi_1(I') \xrightarrow{\partial} \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(I'_o))$$

par : ($\bar{I}'$ comme dans I 1).

$$\partial([\bar{I}']) = \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(i'_{2n}))^{-1} \circ \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(i'_{2n-1})) \circ \dots \circ \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(i'_1))([I_o, I'_o \xrightarrow{id} I'_o])$$

La suite :

$$\pi_1(\underline{u}_H^{-1}(I'_o)) \longrightarrow \pi_1(\underline{I}) \xrightarrow{\pi_1(\underline{u})} \pi_1(\underline{I}') \xrightarrow{\partial} \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(I'_o)) \longrightarrow \pi_o(\underline{I}) \xrightarrow{\pi_o(\underline{u})} \pi_o(\underline{I}')$$

est alors exacte.

Proposition II 6 b : Si $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est tel que

i) Pour tout I', $\underline{u}_g^{-1}(I')$ est non vide.

Alors : $\varinjlim_{I'} \pi_o(\underline{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{I'} \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(I'))$

ii) Pour tout I', $\underline{u}_g^{-1}(I')$ est non vide et connexe.

Alors $\varprojlim_{I'} H^1(\underline{u}_H^{-1}(I');G) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{I'} H^1(\underline{u}_g^{-1}(I');G)$

pour tout groupe G.

Enfin, notons la :

Proposition II 6 c : Tout morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$, tel que I' soit connexe, admet une décomposition :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\underline{u}"] \arrow[dr, "\underline{u}_o"'] & & I' \\ & \underline{I}'_o \arrow[ur, "\underline{p}"'] & \end{tikzcd}$$

telle que :

i) Les fibres homotopiques de $\underline{u}_o$ sont connexes.

ii) $\underline{p}$ est un revêtement.

Preuve : Pointons $\underline{I}'$ en I'_o et choisissons, pour tout I', un chemin $e_{I'}$ de I'_o à I'. L'application :

$$Fl(\underline{I}') \xrightarrow{\quad \eta \quad} Bij(\pi_o(\underline{u}_H^{-1}(I'_o)))$$

$$I' \xrightarrow{u'} J' \rightsquigarrow \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(e_{I'}, I' \xrightarrow{u'} J'\ e_{J'}^{-1}))$$

est un homomorphisme de monoïdes.

On pose : $\underline{I}'_o = \underline{I}'(\eta)$, $\underline{p}$ = projection canonique et on définit $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}_o} \underline{I}'_o$ par $\underline{u}_o(I) = (\underline{u}(I), c_I)$ où $C_I = [I, c^{-1}_{\underline{u}(I)}]$.

Pour tout objet (I',x) de $\underline{I}'(\eta)$, $(\underline{u}_o)^{-1}_H\ (I',x)$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{u}^{-1}_H(I')$ formée des objets $(I,\bar{I}')$ tels que $[I, \bar{I}' e^{-1}_{I'}] = x$ donc est une composante connexe de $\underline{u}^{-1}_H(I')$.

III - Définition du pro-groupe fondamental.

1) Une pro-catégorie, notée $(\underline{N},S)$ ou S, est un foncteur :

$$\underline{N} \xrightarrow{S} \underline{C}$$

tel que $\underline{N}$ soit une petite catégorie filtrante à gauche.

Les pro-catégories forment une catégorie $\underline{\text{Pro}}\ -\underline{C}$ dont les morphismes sont définis par :

$$\text{Hom}_{\underline{\text{Pro-C}}}((\underline{N},S),(\underline{N}',S')) = \varprojlim_{N'} \varinjlim_{N} \text{Hom}_{\underline{C}}(S(N),S'N'))$$

Si $\underline{D}$ est une catégorie quelconque, on définit de même la catégorie $\underline{\text{Pro-D}}$ des pro-objets de $\underline{D}$.

Propriété III 1 a : Un morphisme $\underline{N} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{N}'$ est initial si :

i) Pour tout N' de $\underline{N}'$, $\underline{u}^{-1}_g(N')$ est non vide.

ii) Pour tout couple $\underline{u}(N) \overset{v'}{\underset{u'}{\rightrightarrows}} N'$, il existe $M \xrightarrow{w} N$ tel que $u' \circ \underline{u}(w) = v' \circ \underline{u}(w)$.

Si $\underline{u}$ est initial, pour tout $(\underline{N}',S')$, $(\underline{N}, S' \circ \underline{u}) \longrightarrow (\underline{N}',S')$ est un isomorphisme.

Propriété III 1 b : Toute transformation naturelle $(\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N},S')$ est un morphisme de $\underline{\text{Pro-C}}$. Inversement, tout morphisme de $\underline{\text{Pro-C}}$ est de cette forme à isomorphisme près ((A-M)-Appendice).

<u>Propriété</u> III 1 c : Si $\underline{D}$ est une catégorie abélienne, <u>Pro-D</u> est aussi une catégorie abélienne. De plus, si $(\underline{N},S') \xrightarrow{\varphi'} (\underline{N},S)$ et $(\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N},S")$ sont des transformations naturelles telles que :

$$S'(N) \xrightarrow{\varphi'(N)} S(N) \xrightarrow{\varphi(N)} S"(N)$$

soit exacte pour tout N, alors

$$(\underline{N},S') \xrightarrow{\varphi'} (\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N},S")$$

est exacte dans <u>Pro-D</u>.

A tout pro-catégorie $\underline{N} \xrightarrow{S} \underline{C}$, on associe le morphisme

$$\underline{N}(S) \xrightarrow{p} \underline{N}$$
$$(N,I) \rightsquigarrow N$$

où $\underline{N}(S)$ est la catégorie des couples (N,I) et des morphismes $(N,I) \xrightarrow{(f,u)} (M,J)$ avec $N \xrightarrow{f} M$ dans $\underline{N}$ et $S(f)(I) \xrightarrow{u} J$ dans $S(M)$.

On remarquera que $S(N) = \underline{p}^{-1}(N) \longrightarrow \underline{p}_g^{-1}(N)$ est une équivalence d'homotopie pour tout N.

Un <u>foncteur contravariant</u>, d'ensembles par exemple, sur S est un foncteur :

$$\underline{N}(S)^{\circ} \xrightarrow{F} \underline{Ens}$$

autrement dit, la donnée :

i) Pour tout N, d'un foncteur $S(N)^{\circ} \xrightarrow{F_N} \underline{Ens}$

ii) Pour tout $N \xrightarrow{f} M$, d'une transformation naturelle $F_M \circ S(f) \xrightarrow{F_f} F_N$ telle que $F_{g \circ f} = F_f \circ F_g(S(f))$ pour tout $N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P$.

F est un <u>système local</u> si pour tout N, F_N est un système local.

Les notions de fibré localement trivial et revêtement s'étendent sans difficulté aux pro-catégories. En particulier, un revêtement universel de $\underline{N} \xrightarrow{S} \underline{C}_o^*$ est la donnée pour tout N d'un revêtement universel $(S(N),f(N))$. Cette donnée définit une pro-catégorie $\underline{N} \xrightarrow{S(f)} \underline{C}_1^*$ et un morphisme naturel $S(f) \longrightarrow S$. De plus, 2 revêtement universels sont isomorphes.

2) Si $\underline{N} \xrightarrow{S} \underline{C}_o^*$ est une pro-catégorie pointée, le <u>pro-groupe fondamental</u> de S est le foncteur

$$\begin{array}{c} \underline{N} \xrightarrow{\underline{\pi}_1(S)} \underline{Gr} \\ N \rightsquigarrow \pi_1(S(N)) \end{array}$$

Le <u>groupe fondamental</u> de S est défini par :

$$\pi_1(S) = \varprojlim \underline{\pi}_1(S).$$

Si G est un groupe, on pose :

$$H^1(S;G) = \varinjlim_{\underline{N}} H^1(S(N));G)$$

<u>Proposition</u> III 2 a : Soit une pro-catégorie $\underline{N} \xrightarrow{S} \underline{C}_o^*$

i) Pour tout groupe G, $H^1(S,G) \xrightarrow{\sim} \underset{\underline{\text{Pro-Gr}}}{\text{Hom}} (\underline{\pi}_1(S),G)_G$

ii) $\varinjlim_{\underline{N}} \pi_1(S(N)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{N}(S))$

iii) Théorème de Van Kampen : Si $\varinjlim S$ existe,

$$\varinjlim_{\underline{N}} \pi_1(S(N)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\varinjlim S).$$

<u>Preuve</u> : L'assertion i) est une conséquence du théorème II 4 d. La proposition II 5 c appliquée au morphisme $\underline{N}(S) \xrightarrow{p} \underline{N}$ entraîne que $H^1(\underline{N}(S);G) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\underline{N}} H^1(S(N);G)$ pour tout groupe G. On en déduit immédia- -tement l'assertion ii). Si $\varinjlim S$ existe, le morphisme naturel $\underline{N}(S) \longrightarrow \varinjlim S$ a des fibres à gauche filtrantes donc $\pi_1(\underline{N}(S)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\varinjlim S)$ ce qui prouve iii).

Une section de $\underline{N}(S) \xrightarrow{p} \underline{N}$ est donc la donnée :

i) Pour tout N, d'un objet $\underline{s}(N)$ de $S(N)$.

ii) Pour tout $N \xrightarrow{u} M$ d'un morphisme $\underline{s}(u)$ de $S(u)(\underline{s}(N))$ dans $\underline{s}(M)$, tel que :

$$\underline{s}(v) \circ S(v)(\underline{s}(u)) = \underline{s}(v \circ u)$$

si $N \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} P$

Un <u>point</u> de S est une section $\underline{s}$ de $\underline{p}$ telle que $\underline{s}(u) = id.$ pour tout u. On désigne par $\underline{P}(S)$ la catégorie des points de S. Tout morphisme $(\underline{N},S) \longrightarrow (\underline{N}',S')$ de $\underline{\text{Pro-C}}$ définit un morphisme $\underline{P}(S) \longrightarrow \underline{P}(S')$.

Exemple III 2 b : Soit un revêtement galoisien (S,G,f) d'une pro-catégorie $\underline{N} \xrightarrow{S} \underline{C}_o$ autrement dit la donnée :

i) D'un foncteur : $\underline{N} \xrightarrow{G} \underline{Gr}$

ii) Pour tout N, d'un homomorphisme de monoïdes : $Fl(S(N)) \xrightarrow{f(N)} G(N)$ vérifiant une propriété de compatibilité évidente.

A ce revêtement est associé un morphisme $(\underline{N},S(f)) \longrightarrow (\underline{N},S)$ de $\underline{Pro}\text{-}\underline{C}_o$. Le morphisme

$$\underline{P}(S(f)) \longrightarrow \underline{P}(S)$$

qu'il définit n'est autre que le revêtement galoisien :

$$Fl(\underline{P}(S)) \longrightarrow \varprojlim G$$

$$\underline{s} \xrightarrow{\varphi} \underline{t} \rightsquigarrow (f(N)(\varphi(N)))_N.$$

Proposition III 2 c : Soit une transformation naturelle

$$(\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N},S')$$

où $(\underline{N},S)$ et $(\underline{N},S')$ appartiennent à $\underline{Pro}\text{-}\underline{C}_o$, telle que pour tout $\underline{N}(S')^o \xrightarrow{F'} \underline{Ens}$, l'application naturelle :

$$\varinjlim_N \varprojlim_{I'} F'(N,I') \longrightarrow \varprojlim_{\underline{s}' \in P(S')} \varinjlim_N F'(N,\underline{s}'(N))$$

soit bijective.

Alors, pour tout groupe G :

i) La suite :

$$* \longrightarrow H^1(S',G) \longrightarrow H^1(S;G) \longrightarrow \varprojlim_{\underline{s}'} H^1(\varphi_g^{-1}(\underline{s}');G)$$

est exacte

ii) L'application

$$\varprojlim_{\underline{s}'} H^1(\varphi_H^{-1}(\underline{s}');G) \longrightarrow \varprojlim_{\underline{s}'} H^1(\varphi_g^{-1}(\underline{s}');G)$$

est une bijection.

Preuve: C'est une conséquence des propositions II 3 c et II 6 b.

Les pro-catégories $\varphi_H^{-1}(\underline{s}')$ et $\varphi_g^{-1}(\underline{s}')$ sont définies par les foncteurs :

$$N \rightsquigarrow [\varphi(N)]_H^{-1}(\underline{s}'(N)) \text{ et } N \rightsquigarrow [\varphi(N)]_g^{-1}(s'(N)).$$

B. - PROPRIÉTÉS COHOMOLOGIQUES.

I - Les groupes $H^n(\underline{I};F)$.

1) Si $\underline{I}$ est une petite catégorie, $\hat{\underline{I}}$ désigne la catégorie des foncteurs $\underline{I}^\circ \xrightarrow{F} \underline{Ab}$ et des transformations naturelles de foncteurs.

Donc :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{I}}}(F,G) = \varprojlim_{I} \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(F(I),G(I))$$

On définit les foncteurs $\mathrm{Hom}(F,G)$ et $F \otimes G$ par :

- $\mathrm{Hom}(F,G)(I) = \varprojlim_{J \to I} \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(F(I),G(I))$
- $F \otimes G(I) = F(I) \otimes G(I)$

De l'isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}(F,\mathrm{Hom}(G,H)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(F \otimes G,H)$$

on déduit, entre autres, les implications :

F et G projectifs $\Longrightarrow$ $F \otimes G$ projectif

F projectif et G injectif $\Longrightarrow$ $\mathrm{Hom}(F,G)$ injectif.

Proposition I 1 a : La catégorie abélienne $\hat{\underline{I}}$ possède suffisamment de projectifs et d'injectifs.

Preuve : i) Existence de projectifs.

Si $F \in \hat{\underline{I}}$, pour tout I de $\underline{I}$, on choisit un épimorphisme $F'(I) \xrightarrow{i'(I)} F(I)$ tel que $F'(I)$ soit un $\mathbb{Z}$-module projectif et on construit un épimorphisme $F_o \xrightarrow{i} F$ par :

- $F_o(I) = \bigoplus_{I \xrightarrow{u} I_o} F(I_o)$
- $i(I)(x,u) = F(u) \circ i'(I_o)(x)$

Il est clair que F_o est un projectif.

ii) Existence d'injectifs.

On procède dualement.

Si F et G $\in \hat{\underline{I}}$, on définit pour tout entier n, les foncteurs $\mathrm{Ext}^n(F,G)$ et $\mathrm{Tor}_n(F,G)$ par :

$$\mathrm{Ext}^n(F,G)(I) = H^n(\mathrm{Hom}(F_*,G)(I)) = H^n(\mathrm{Hom}(F,G^*)(I))$$
$$\mathrm{Tor}_n(F,G)(I) = H_n(F_* \otimes G\,(I))$$

où $F_*(G^*)$ est une résolution projective (injective) de F(G).

On pose, en outre :

$$\mathrm{Ext}^n_{\underline{I}}(F,G) = H^n(\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{I}}}(F_*,G)) = H^n(\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{I}}}(F,G^*))$$
$$\mathrm{Tor}^{\underline{I}}_n(F,G) = H_n(\varinjlim F_* \otimes G)$$

2) Si $\mathbb{Z}_{\underline{I}}$ désigne le foncteur constant sur $\underline{I}$, de valeur $\mathbb{Z}$, pour tout F de $\hat{\underline{I}}$ et tout $n \geq 0$, on pose :

$$H^n(\underline{I};F) = \mathrm{Ext}^n_{\underline{I}}(\mathbb{Z}_{\underline{I}},F)$$
$$H_n(\underline{I};F) = \mathrm{Tor}^{\underline{I}}_n(\mathbb{Z}_{\underline{I}},F)$$

<u>Propriété</u> I 2 a : Les groupes $H^n(\underline{I};F)$ et $H_n(\underline{I},F)$ sont caractérisés par :

i) $H^0(\underline{I};F) = \varprojlim F \quad ; \; H_0(\underline{I};F) = \varinjlim F$

ii) $H^n(\underline{I},F) = 0$ pour $n > 0$ si F est injectif

$H_n(\underline{I};F) = 0$ pour $n > 0$ si F est projectif.

iii) Pour toute suite exacte :

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

les suites :

$$0 \longrightarrow \varprojlim F' \longrightarrow \varprojlim F \longrightarrow \varprojlim F'' \longrightarrow H^1(\underline{I};F') \longrightarrow \cdots\cdots$$
$$0 \longleftarrow \varinjlim F'' \longleftarrow \varinjlim F \longleftarrow \varinjlim F' \longleftarrow H_1(\underline{I};F'') \longleftarrow \cdots\cdots$$

sont exactes.

Soit $S(\underline{I})_*$ le C.S.S associé à $\underline{I}$. On construit une résolution projective Z_* de $Z_{\underline{I}}$ par :

$$Z_n(I) = \bigoplus_{I \to I_o \to \dots \to I_n} \mathbb{Z} .$$

On pose :

$$C^n(\underline{I};F) = \mathrm{Hom}_{\hat{\underline{I}}}(Z_n,F) = \prod_{I_o \xrightarrow{u_o} I_1 \to \dots \to I_n \in S(\underline{I})_n} F(I_o)$$

La différentielle :

$$C^n(\underline{I};F) \xrightarrow{d^n} C^{n+1}(\underline{I};F)$$

se calcule par :

$$d^n(x)_u = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i x_{d_i(u)} + F(u_o)(x_{d_o(u)}).$$

et

$$H^n(\underline{I};F) = \frac{\ker d^n}{\mathrm{im}\, d^{n-1}} .$$

Proposition I 2 b : Si $\underline{I}$ est finie et si $\underline{N} \xrightarrow{F} \hat{\underline{I}}$ est un système inductif filtrant de foncteurs, pour tout $n \geqslant 0$:

$$H^n(\underline{I};\varinjlim_N F(N)) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_N H^n(\underline{I};F(N))$$

Preuve : Cela résulte simplement de l'isomorphisme :

$$C^n(\underline{I};\varinjlim_N F(N)) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_N C^n(\underline{I};F(N)).$$

Remarque I 2 c : Si G est un groupe abélien, on pose pour tout $n \geqslant 0$:

$$C^n_N(\underline{I};G) = \{x \in C^n(\underline{I};G); x_{s_i(u)} = 0 \ \forall u \in S_{n-1}(\underline{I})\} .$$

Un calcul simple montre que :

$$H^n(\underline{I};G) \simeq \frac{\ker d^n \cap C^n_N(\underline{I};G)}{\mathrm{im}\, d^{n-1} \cap C^n_N(\underline{I};G)} .$$

Les groupes $H_n(\underline{I};F)$ se calculent de manière duale.

3) On désigne par $\underline{\mathcal{C}}$ la catégorie des couples $(\underline{I},F)$ avec $\underline{I} \in \underline{C}$ et $F \in \hat{\underline{I}}$ et des morphismes $(\underline{I},F) \xrightarrow{(\underline{u},\varphi)} (\underline{I}',F')$ avec $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}' \in \underline{C}$ et $F' \circ \underline{u} \xrightarrow{\varphi} F \in \hat{\underline{I}}$.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit un homomorphisme naturel :

$$C^n(\underline{I}';F') \xrightarrow{C^n(\underline{u},\varphi)} C^n(\underline{I};F)$$

et par conséquent un homomorphisme :

$$H^n(\underline{I}';F') \xrightarrow{H^n(\underline{u};\varphi)} H^n(\underline{I};F)$$

ayant des propriétés fonctorielles évidentes.

A tout $(\underline{I},F)$ de $\underline{\mathcal{C}}$, on associe l'objet $(\Lambda(\underline{I}),\Lambda(F))$ et les morphismes :

$$(\Lambda(\underline{I}),\Lambda(F)) \xrightarrow{(\underline{p}_i,\pi_i)} (\underline{I},F) \qquad i = 0,1$$

définis par :

$$\Lambda(F)(I_o \longrightarrow I_1 \longleftarrow I_2 \longrightarrow \ldots \longleftarrow I_{2n}) = F(I_o) + F(I_2) + \ldots + F(I_{2n})$$

$\pi_i(\bar{I})$ = projection naturelle de $F(\underline{p}_i(\bar{I}))$ sur $\Lambda(F)(\bar{I})$.

Proposition I 3 a : Pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$H^n(\underline{p}_o,\pi_o) = H^n(\underline{p}_1,\pi_1).$$

Preuve : On définit pour tout n un homomorphisme

$$C^{n+1}(\underline{I};F) \xrightarrow{s^n} C^n(\Lambda(\underline{I});\Lambda(F))$$

par itération de la formule :

$$s^n(x)\left(\begin{array}{ccccc} I_o & \xrightarrow{u_o} I_1 & \to \ldots & \xrightarrow{u_{n-1}} & I_n \\ \downarrow f_o & \downarrow f_1 & & & \downarrow f_n \\ J_o & \xrightarrow{v_o} J_1 & \to \ldots & \xrightarrow{v_{n-1}} & J_n \end{array}\right) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x_{I_o \xrightarrow{u_o} I_1 \to \ldots \to I_j \xrightarrow{f_j} J_j \to \ldots \xrightarrow{v_{n-1}} J_n}$$

On voit alors que :

$$s^n \circ d^n - d^{n-1} \circ s^{n-1} = C^n(\underline{p}_o, \pi_o) - C^n(\underline{p}_1, \pi_1).$$

Des morphismes $(\underline{I},F) \xrightarrow{(\underline{u}_i,\varphi_i)} (\underline{I}',F')$, $i = 0,1$, sont dits <u>homotopes</u> s'il existe un morphisme $(\underline{I},F) \xrightarrow{(\underline{v},\psi)} (\Lambda(\underline{I}'), \Lambda(F'))$ tel que $(\underline{p}_i, \pi_i) \circ (\underline{v},\psi) = (\underline{u}_i, \varphi_i)$, $i = 0,1$.

La proposition ci-dessus a pour conséquence :

<u>Théorème</u> I 3 b : Si $(\underline{u}_o,\varphi_o)$ et $(\underline{u}_1,\varphi_1)$ sont deux morphismes homotopes, $H^n(\underline{u}_o,\varphi_o) = H^n(\underline{u}_1,\varphi_1)$ pour tout $n \geqslant 0$.

II - <u>Propriétés fonctorielles</u>.

Dans ce qui suit, on ne considère que les groupes de cohomologie. Les propriétés homologiques se déduisent par une dualité évidente de celles énoncées ci-dessous.

1) Pour tout $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$, on définit des foncteurs :

$$\hat{\underline{I}}' \xrightarrow{\underline{u}^*} \hat{\underline{I}}, \quad \hat{\underline{I}} \xrightarrow{\underline{u}_+} \hat{\underline{I}}' \quad \text{et} \quad \hat{\underline{I}} \xrightarrow{\underline{u}_*} \hat{\underline{I}}'$$

par les formules :

$$\underline{u}^*(F')(I) = F'(\underline{u}(I))$$
$$\underline{u}_+(F)(I') = \varinjlim F|\underline{u}_d^{-1}(I')$$
$$\underline{u}_*(F)(I') = \varprojlim F|\underline{u}_g^{-1}(I')$$

<u>Propriété</u> II 1 a : Les foncteurs $\underline{u}^*$, $\underline{u}_+$ et $\underline{u}_*$ sont adjoints suivant les formules :

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{I}}}(F,\underline{u}^*(G')) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\underline{I}}'}(\underline{u}_+(F),G')$$

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{I}}}(\underline{u}(F'),G) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\underline{I}}'}(F',\underline{u}_*(G))$$

Il en résulte que :

i) $\underline{u}^*$ est exact.

ii) $\underline{u}_+$ est exact à droite et transforme projectifs en projectifs.

iii) $\underline{u}_*$ est exact à gauche et transforme injectifs en injectifs.

On en déduit en outre des morphismes naturels de $\mathcal{C}$ $(\underline{I},\underline{u}^*(F')) \xrightarrow{(\underline{u},id)} (\underline{I}',F')$ et $(\underline{I},F) \xrightarrow{(u,\rho)} (\underline{I}',\underline{u}_*(F))$; d'où pour tout $n \geq 0$, des homomorphismes naturels :

$$H^n(\underline{I}';F') \xrightarrow{H^n(\underline{u};F')} H^n(\underline{I};\underline{u}^*(F'))$$

$$H^n(\underline{I}';\underline{u}_*(F)) \xrightarrow{H^n(\underline{u};F)} H^n(\underline{I};F)$$

<u>Proposition</u> II 1 b : Soit un $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$

i) Si $\underline{u}_d^{-1}(I')$ est non vide et filtrante à gauche pour tout I', alors :

$$H^n(\underline{I};F') \xrightarrow{H^n(u;F')} H^n(\underline{I};u^*(F'))$$

est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$ et tout F' de $\hat{\underline{I}}'$.

ii) Si $\underline{u}_g^{-1}(I')$ est non vide et filtrante à droite pour tout I', alors :

$$H^n(\underline{I}';\underline{u}_*(F)) \xrightarrow{H^n(u;F)} H^n(\underline{I};F)$$

est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$ et tout F de $\hat{\underline{I}}$.

<u>Preuve</u> : Dans le cas i), $H^o(\underline{I}';F') \xrightarrow{\sim} H^o(I;\underline{u}^*(F'))$, $\underline{u}_+$ est exact donc $\underline{u}^*$ transforme injectifs en injectifs.

Dans le cas ii), $H^o(\underline{I}';\underline{u}_*(F)) \xrightarrow{\sim} H^o(\underline{I};F)$ et $\underline{u}_*$ est exact.

Il suffit donc d'utiliser I 2 a.

<u>Corollaire</u> II 1 c : Soit un C-morphisme $I \xrightarrow{u} I'$

i) Si $\underline{u}$ possède un adjoint à gauche, $H^n(\underline{u};F')$ est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$ et tout F' de $\hat{\underline{I}}'$.

ii) Si u possède un adjoint à droite, $H^n(\underline{u};F)$ est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$ et tout F de $\hat{\underline{I}}$.

Proposition II 1 d : Si $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est une $\underline{C}$-équivalence d'homotopie, alors :

i) $H^n(\underline{I}';F') \xrightarrow{H^n(\underline{u};F')} H^n(\underline{I};\underline{u}^*(F'))$ est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$ et tout système local F'

ii) $H^n(\underline{I}';\underline{u}_*(F)) \xrightarrow{H^n(\underline{u};F)} H^n(\underline{I};F)$ est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$ et tout système local F.

Preuve : Si $\underline{I}' \xrightarrow{\underline{v}} \underline{I}$ est inverse de $\underline{u}$ pour l'homotopie, on construit dans $\hat{\underline{I}}$ et $\hat{\underline{I}}'$ des morphismes naturels $\underline{u}^* \circ \underline{v}^*(F) \xrightarrow{\psi} F$ et $\underline{v}^* \circ u^*(F') \xrightarrow{\theta} F'$ lorsque F et F' sont des systèmes locaux; $(\underline{v},\theta)$ et $(\underline{v},\psi)$ sont inverses pour l'homotopie dans $\mathcal{C}$ de ($\underline{u}$ id) et $(\underline{u},\rho)$.

2) La suite spectrale de Leray.

Théorème II 2 a : Pour tout $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ et tout F de $\hat{\underline{I}}$, il existe une suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = H^p(\underline{I}';H^q(\underline{u}_g^{-1}(\ );F)) \Longrightarrow H^*(\underline{I};F).$$

Preuve : Les suites spectrales associées au double complexe

$$C^{p,q} = C^p(\underline{I}';\underline{u}_*(F^q))$$

où F^* est une résolution injective de F, s'écrivent :

$${}'E_2^{p,q} = H^p(\underline{I}';H^q(\underline{u}_g^{-1}(\ );F)$$

$${}''E_2^{p,q} = H^p(H^q(\underline{I}';\underline{u}_*(F^*)))$$

Comme $"E_2^{p,q} = 0$ pour $q > 0$ et $"E_2^{p,0} = H^p(\underline{I};F)$, il en résulte que $'E_2^{p,q}$ converge vers $H^*(\underline{I};F)$.

<u>Application</u> II 2 b : Si $(\underline{I},\underline{E}^d,\eta)$ est un revêtement de $\underline{I}$ (A II 2), la suite spectrale du morphisme $\underline{I}(\eta) \xrightarrow{p} I$ relativement à $F \in \hat{\underline{I}}(\eta)$ s'écrit $E_2^{p,0} \doteq H^p(\underline{I};p_*(F))$, $E_2^{p,q} = 0$ pour $q > 0$.

Il en résulte que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$H^n(\underline{I};\underline{p}_*(F)) \xrightarrow{\sim} H^n(\underline{I}(\eta));F)$$

<u>Application</u> II 2 c : Si $(\underline{I},G,f)$ est un revêtement galoisien de $\underline{I}$ (A II 4), on définit une catégorie $\underline{I}'$ par Ob $\underline{I}'$ = Ob $\underline{I} \times G$, $\mathrm{Hom}_{\underline{I}'}((I,x),(J,y)) = \mathrm{Hom}_{\underline{I}}(I,J)$.

On construit alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{I}(f) \arrow[r] \arrow[dr, "\underline{p}"'] & \underline{I}' \arrow[r, "\underline{q}"] \arrow[d, "\underline{i}"] & \underline{G} \\
& \underline{I} &
\end{tikzcd}$$

par : $\underline{q}(I,x) = *$, $\underline{q}((I,x) \xrightarrow{u} (J,y)) = y\, x^{-1} f(u)^{-1}$

$\underline{i}(I,x) = I$, $\underline{i}((I,x) \xrightarrow{u} (J,y)) = I \xrightarrow{u} J$

Si $F \in \hat{\underline{I}}$, la suite spectrale de $\underline{q}$ relativement à $\underline{i}^*(F)$ s'écrit :

$$E_2^{p,q} = H^p(G;H^q(\underline{I}(f);\underline{p}^*(F))) \Longrightarrow H^*(\underline{I}';\underline{i}^*(F))$$

Or $\underline{i}$ possède un adjoint à gauche, donc (II 1 c) :

$$E_2^{p,q} = H^p(G;H^q(\underline{I}(f);\underline{p}^*(F))) \Longrightarrow H^*(\underline{I};F).$$

3) Application aux morphismes galoisiens.

Un morphisme $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}$ est quasi-galoisien si :

i) $\mathrm{Ob}\,\underline{u} = \mathrm{id}$

ii) $\mathrm{Fl}(\underline{u})$ est surjectif.

iii) Pour tout couple $(I \xrightarrow{f} J,\ I \xrightarrow{g} J)$ tel que $\underline{u}(f) = \underline{u}(g)$ il existe $J \xrightarrow{t} J$ unique tel que $t \circ f = g$ et $\underline{u}(t) = \mathrm{id}$.

$\underline{u}$ est galoisien s'il vérifie en plus :

iv) Pour tout couple $(I \xrightarrow{f} J,\ I \xrightarrow{g} J)$ tel que $\underline{u}(f) = \underline{u}(g)$ il existe $I \xrightarrow{s} I$ tel que $f \circ s = g$ et $\underline{u}(s) = \mathrm{id}$.

Enfin, une petite catégorie I est quasi-galoisienne (galoisienne) si le morphisme naturel $\underline{I} \longrightarrow \underline{I}^{o}$ où $\underline{I}^{o}$ est la catégorie plate associée à $\underline{I}$, est quasi-galoisien (galoisien).

Si $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$ est quasi-galoisien, on pose pour tout I :

$$G(I) = \{ I \xrightarrow{f} I \in \underline{I} \ ;\ \underline{u}(f) = \mathrm{id} \} .$$

G(I) est donc un groupe et pour tout $I \xrightarrow{f} J$ de $\underline{I}$, il existe un homomorphisme naturel :

$$\begin{array}{ccc} G(I) & \xrightarrow{\quad G(f) \quad} & G(J) \\ g & \rightsquigarrow & h \qquad (h \circ f = f \circ g) \end{array}$$

Proposition II 3. : Pour tout C-morphisme quasi-galoisien $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$ et tout F de $\hat{\underline{I}}$, il existe une suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = H^p(\underline{I}';H^q(G(\ );F(\ )) \Longrightarrow H^*(\underline{I};F)$$

Preuve : Par II 2 a, il suffit de montrer que :

$$\begin{array}{ccl} \underline{G(I)} & \longrightarrow & \underline{u}_g^{-1}(I) \\ * & \rightsquigarrow & (I,\mathrm{id}) \\ g & \rightsquigarrow & (I,\mathrm{id}) \xrightarrow{g} (I,\mathrm{id}) \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie.

Pour tout $(I, J \xrightarrow{s} I)$ de $\underline{u}_g^{-1}(I)$, on choisit un morphisme $J \xrightarrow{f(s)} I$ tel que $\underline{u}(f(s)) = s$.

On définit ensuite :

$$\begin{array}{ccc} \underline{u}_g^{-1}(I) & \longrightarrow & \underline{G(I)} \\ (J, J \xrightarrow{s} I) & \rightsquigarrow & * \end{array}$$

$$(J, J \xrightarrow{s} I) \xrightarrow{g} (K, K \xrightarrow{t} I) \rightsquigarrow h \qquad (h \circ f(s) = f(t) \circ g).$$

Ce morphisme est l'inverse du précédent, pour l'homotopie.

III - Les groupes $H^n(S;F)$.

On utilise les notations de A III.

1) Si $(\underline{N}, S)$ est une pro-catégorie, on désigne par $\hat{S}$ la catégorie abélienne des foncteurs $\underline{N}(S)^\circ \xrightarrow{F} \underline{Ab}$. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose :

$$H^n(S;F) = \varinjlim_{N} H^n(S(N);F_N).$$

Les morphismes naturels $S(N) \longrightarrow \underline{N}(S)$ définissent pour tout $n \geqslant 0$ un homomorphisme :

$$H^n(\underline{N}(S);F) \longrightarrow H^n(S(N);F_N)$$

d'où, par passage à la limite inductive, un homomorphisme :

$$H^n(\underline{N}(S);F) \longrightarrow H^n(S;F)$$

qu'on peut considérer comme un edge-homomorphisme de la suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = H^p(\underline{N};H^q(S(N);F_N)) \Longrightarrow H^*(\underline{N}(S);F)$$

associée au morphisme naturel $\underline{N}(S) \longrightarrow \underline{N}$.

2) $\underline{P}(S)$ étant la catégorie des points de S, on construit des foncteurs :

$$\hat{S} \xrightarrow{\underline{u}^*} \widehat{\underline{P}(S)} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\underline{P}(S)} \xrightarrow{\underline{u}_*} \hat{S}$$

par :

$$\underline{u}^*(F)(\underline{s}) = F_{\underline{s}} = \varinjlim_{N} F(N, \underline{s}(N)).$$

$$\underline{u}_*(G)(N,I) = \varprojlim_{\underline{s},\, \underline{s}(N) \xrightarrow{f} I} G(\underline{s})$$

Propriété III 2 a :

i) $\underline{u}_*$ est adjoint à droite de $\underline{u}^*$

ii) $\underline{u}^*$ est exact

iii) $\underline{u}_*$ est exact à gauche et transforme injectifs en injectifs.

Pour tout G de $\widehat{\underline{P}(S)}$, les morphismes naturels $\underline{P}(S) \longrightarrow S(N)$ définissent un homomorphisme $H^n(S(N); \underline{u}_*(G)_N) \longrightarrow H^n(\underline{P}(S);G)$ d'où par passage à la limite inductive, un homomorphisme :

$$H^n(S;\underline{u}_*(G)) \longrightarrow H^n(\underline{P}(S);G) \qquad n \geqslant 0$$

Si $F \in \hat{S}$, l'homomorphisme $H^n(S;F) \longrightarrow H^n(S;\underline{u}_* \circ \underline{u}^*(F))$ déduit de $F \longrightarrow u_* \circ \underline{u}^*(F)$, combiné avec le précédent, détermine un second homomorphisme :

$$H^n(S;F) \longrightarrow H^n(\underline{P}(S);\underline{u}^*(F))$$

Proposition III 2 b : Si S est une pro-catégorie telle que pour tout $n \geqslant 0$ et tout F de $\hat{S}$ vérifiant $\underline{u}^*(F) = 0$ on ait $H^n(S;F) = 0$, alors :

i) Pour tout $n \geqslant 0$ et tout G de $\widehat{\underline{P}(S)}$ =

$$H^n(S;\underline{u}_*(G)) \xrightarrow{\sim} H^n(\underline{P}(S);G)$$

ii) Pour tout $n \geqslant 0$ et tout F de $\hat{S}$:

$$H^n(S;F) \xrightarrow{\sim} H^n(\underline{P}(S);\underline{u}^*(F)).$$

<u>Preuve</u> : Le foncteur

$$\begin{aligned} \hat{\underline{P}}(S) &\longrightarrow \underline{Ab} \\ G &\rightsquigarrow H^n(S;\underline{u}_*(G)) \end{aligned}$$

vérifie les conditions de (I 2 a) ce qui prouve i).

D'autre part, si $F \in \hat{S}$, le noyau F' et le conoyau F'' de $F \longrightarrow u_* \circ \underline{u}^*(F)$ sont tels que $\underline{u}^*(F') = \underline{u}^*(F'') = 0$; donc $H^n(S;F) \xrightarrow{\sim} H^n(S;\underline{u}_* \circ \underline{u}^*(F))$. Cet isomorphisme joint à i) entraîne ii).

C. - LES GROUPES D'HOMOTOPIE.

I - Les catégories de chemins $\Lambda^n(\underline{I})$.

1) Si $\underline{I}$ est une petite catégorie, pour $n \geqslant 1$ on pose

$$\Lambda^n(\underline{I}) = \Lambda(\Lambda^{n-1}(\underline{I}))$$
$$K\Lambda^n(\underline{I}) = K\Lambda(K\Lambda^{n-1}(\underline{I})).$$

où $\Lambda^1(I) = \Lambda(\underline{I})$ et $K\Lambda^1(\underline{I}) = K\Lambda(\underline{I})$ (A I).

$K\Lambda^n(\underline{I})$ est naturellement une sous-catégorie de $\Lambda^n(\underline{I})$. De plus cette catégorie est n-graduée :

$$K\Lambda^n(\underline{I}) = \bigoplus_{m_1,\ldots,m_n} K\Lambda^n_{m_1,\ldots,m_n}(\underline{I})$$

On définit, en outre, des sous-catégories $J\Lambda^n(\underline{I})$ et $L\Lambda^n(\underline{I})$ de $\Lambda^n(\underline{I})$ de la façon suivante :

I 1 a : $J\Lambda(\underline{I})$ a pour objets ceux de $\Lambda(\underline{I})$ et pour morphismes ceux de la forme (φ,id) - $J\Lambda^n(\underline{I})$ a pour objets ceux de $\Lambda^n(\underline{I})$ et pour morphismes ceux de la forme $(\varphi,\bar{u})$ où $\bar{u}$ est une suite de morphismes de $J\Lambda^{n-1}(\underline{I})$.

I 1 b : $L\Lambda(\underline{I}) = K\Lambda(\underline{I})$. $L\Lambda^n(\underline{I})$ a pour objets ceux de $\Lambda^n(\underline{I})$ et pour morphismes ceux de la forme $(\mathrm{id},\bar{u})$ où $\bar{u}$ est une suite de morphismes de $L\Lambda^{n-1}(\underline{I})$.

Propriété I 1 c :

i) $K\Lambda^n(\underline{I})$ est une sous-catégorie pleine de $L\Lambda^n(\underline{I})$

ii) $J\Lambda^n(\underline{I}) \cap L\Lambda^n(\underline{I})$ n'a pour morphismes que des identités

iii) Tout morphisme $I \xrightarrow{u} I'$ de $\Lambda^n(\underline{I})$ se décompose uniquement suivant :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & I' \\ & J \arrow[ur, "u''"'] & \end{tikzcd}$$

où $u' \in J\Lambda^n(\underline{I})$ et $u'' \in L\Lambda^n(\underline{I})$.

iv) Si $I \in K\Lambda^n_{m_1,\dots,m_n}(\underline{I})$ et $I' \in K\Lambda^n_{p_1,\dots,p_n}(\underline{I})$, tout élément de $\mathrm{Hom}_{J\Lambda^n(\underline{I})}(I,I')$ est défini par une suite d'applications croissantes, au sens strict, $[m_i] \xrightarrow{\varphi_i} [p_i]$.

2) Structure de $J\Lambda^n(\underline{I})$.

Si $[m] \xrightarrow{\varphi_1} [p_1]$ et $[m] \xrightarrow{\varphi_2} [p_2]$ sont des applications strictement croissantes, on construit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"] & {[p_1]} \arrow[d, "\psi_1"] \\ {[p_2]} \arrow[r, "\psi_2"] & {[p_1+p_2-m]} \end{tikzcd}$$

par :

$$\psi_1 \circ \varphi_1(i) = \psi_2 \circ \varphi_2(i) = \varphi_1(i) + \varphi_2(i) - i$$

$$\left.\begin{array}{lll} \psi_l(j) = j + \varphi_l(i) - i & \text{si} & \varphi_l(i) < j < \varphi_l(i+1) \\ \psi_l(j) = j & \text{si} & j < \varphi_l(0) \\ \psi_l(j) = j + \varphi_l(m) - m & \text{si} & j > \varphi_l(m) \end{array}\right\} \quad l = 1,2$$

Le couple (φ_1,φ_2) est dit maximal s'il n'existe aucune décomposition non triviale

$$\begin{tikzcd}
{[m]} \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\theta"] \arrow[dd, "\varphi_2"'] & & {[p_1]} \\
& {[q]} \arrow[ur, "\theta_1"'] \arrow[dl, "\theta_2"] & \\
{[p_2]} & &
\end{tikzcd}$$

avec θ, θ_1, θ_2 strictement croissantes, $\theta_1 \circ \theta = \varphi_1$ et $\theta_2 \circ \theta = \varphi_2$ autrement dit, si pour tout i de $[m]$, on a :

soit $1 + \varphi_1(i) = \varphi_1(i+1)$

soit $1 + \varphi_2(i) = \varphi_2(i+1)$.

Si (φ_1, φ_2) est un couple maximal, le carré I 2 a est cartésien.

Un couple de morphismes $I \xrightarrow{(\varphi_1, \bar{u}_1)} I_1$, $I \xrightarrow{(\varphi_2, \bar{u}_2)} I_2$ de $J \wedge^n(\underline{I})$ est dit <u>maximal</u> si :

i) (φ_1, φ_2) est un couple maximal.

ii) Si (ψ_1, ψ_2) étant la somme amalgamée de (φ_1, φ_2) et posant $\psi_1(\bar{u}_1) = (v_o, \ldots, v_{2r})$, $\psi_2(\bar{u}_2) = (w_o, \ldots, w_{2r})$, (v_i, w_i) est un couple maximal de $J \wedge^{n-1}(I)$ pour $i = 0, 1, \ldots, 2r$.

On vérifie par induction les 2 propriétés suivantes :

I 2 b : Tout couple maximal de $J \wedge^n(I)$ possède une somme amalgamée.

I 2 c : Pour tout couple $I \xrightarrow{u_1} I_1$, $I \xrightarrow{u_2} I_2$ de morphismes de $J \wedge^n(\underline{I})$, il existe un diagramme commutatif de $J \wedge^n(\underline{I})$:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "u_1"] \arrow[dr] \arrow[dd, "u_2"] & & I_1 \arrow[dr] & \\
& I' \arrow[rr, "u'_1"] \arrow[dd, "u'_2"] & & I'_1 \\
I_2 \arrow[dr] & & & \\
& I'_2 & &
\end{tikzcd}$$

tel que (u'_1,u'_2) soit un couple maximal.

<u>Proposition</u> I 2 d : Pour tout entier n et tout objet I' de $\Lambda^n(\underline{I})$, il existe un objet I de $K\Lambda^n(\underline{I})$ et un morphisme $I' \xrightarrow{u} I$ de $J\Lambda^n(\underline{I})$.

<u>Preuve</u> : Cette proposition étant évidente pour n = 1, on la suppose vraie jusqu'à l'ordre n-1 inclus.

$$\text{Si } I' = I'_o \xrightarrow{i'_1} I'_1 \xleftarrow{i'_2} \;\ldots\; \xleftarrow{i'_{2m}} I'_{2m}$$, on peut supposer que I'_1 , I'_3 ,..., I'_{2m-1} sont des objets de $K\Lambda^{n-1}(\underline{I})$. D'autre part, en utilisant I 1 c iii), on vérifie immédiatement que I' possède la propriété qu'on veut démontrer si m = 1. Il suffit donc de procéder par induction sur la longueur de I'. L'utilisation de I 2 b et I 2 c donne le résultat.

II - <u>Les catégories de lacets</u> $\Omega^n(I)$.

1) Si $\underline{I}$ est pointée en I_o, pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$\Omega^n(I) = \Omega(\Omega^{n-1}(\underline{I}))$$
$$\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o) = \Lambda(\Lambda^{n-1}(\underline{I};I_o,I_o);\Lambda^{n-1}(I_o),\Lambda^{n-1}(I_o))$$
$$K\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o) = K\Lambda^n(\underline{I})\cap\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$$
$$J\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o) = J\Lambda^n(I)\cap\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$$
$$L\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o) = L\Lambda^n(I)\cap\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$$

Ces 4 dernières catégories possèdent des propriétés analogues à celles décrites ci-dessus.

2) Pour tout $n \geqslant 1$, on a des foncteurs d'inclusion :

$$K\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o) \xrightarrow{K^n} \Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$$
$$\Omega^n(\underline{I}) \xrightarrow{Z^n} \Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$$

De plus, on va construire un foncteur :

$$K\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o) \xrightarrow{J^n} \Omega^n(\underline{I})$$

et une transformation naturelle $Z^n \circ J^n \xrightarrow{\phi^n} K^n$ de la façon suivante :

On pose : $J^1 = id$, $\phi^1 = id$.

Si $\bar{I} = \bar{I}_o \xrightarrow{i_1} \bar{I}_1 \longleftarrow \ldots \longrightarrow \bar{I}_{2m-1} \xleftarrow{i_{2m}} \bar{I}_{2m} \in K\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$

On pose :

$$J^n(\bar{I}) = I_o \xrightarrow{\varphi_o} J^{n-1}(\bar{I}_o) \xrightarrow{J^{n-1}(i_1)} J^{n-1}(\bar{I}_1) \longleftarrow \ldots \longrightarrow J^{n-1}(\bar{I}_{2m-1}) \xleftarrow{J^{n-1}(i_{2m})} J^{n-1}(\bar{I}_{2m}) \xleftarrow{\varphi_1} I_o$$

où φ_o et $\varphi_1 \in J\Lambda^{n-1}(I_o)$ sont uniquement déterminés.

$$\phi^n(\bar{I}) = (\varphi'_o, \phi^{n-1}(\bar{I}_1), \ldots, \phi^{n-1}(\bar{I}_{2m}), \varphi'_1)$$

où φ'_o et $\varphi'_1 \in J\Lambda^{n-1}(I_o)$ sont, aussi, uniquement déterminés.

Propriété II 2 a : Pour tout morphisme $I \xrightarrow{u} I'$ de $\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$ tel que $I \in \Omega^n(\underline{I})$ et $I' \in K\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$, il existe un morphisme unique $I \xrightarrow{v} J^n(I')$ de $\Omega^n(\underline{I})$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & I' \\ & J^n(I') \arrow[ur, "\phi^n(I')"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif dans $\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$.

Pour tout n, on désigne par $\widehat{K\Lambda}^n(\underline{I};I_o,I_o)$ la sous-catégorie pleine de $\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$ ayant $K\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$ pour ensemble d'objets; d'où des foncteurs naturels :

$$\widehat{K\Lambda}^n(\underline{I};I_o,I_o) \xrightarrow{\hat{K}^n} \Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$$

$$\widehat{K\Lambda}^n(\underline{I};I_o,I_o) \xrightarrow{\hat{J}^n} \Omega^n(\underline{I})$$

et une transformation naturelle de foncteurs :

$$Z^n \circ \hat{J}^n \xrightarrow{\hat{\phi}^n} \hat{K}^n$$

En utilisant I 2 d, appliquée à $\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$, on voit que :

<u>Propriété II 2 b</u> : Pour tout $n \geqslant 1$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\pi_o(K\hat{\Lambda}^n(\underline{I};I_o,I_o)) \arrow[rr, "\pi_o(\hat{J}^n)"] \arrow[dr, "\pi_o(\hat{K}^n)"'] & & \pi_o(\Omega^n(\underline{I})) \arrow[dl, "\pi_o(Z^n)"] \\
& \pi_o(\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)) &
\end{tikzcd}$$

est commutatif et toutes les applications qui le composent, sont des bijections.

III - <u>Les groupes</u> $\pi_n(I)$.

1) Si $\underline{I}$ est pointée en I_o, pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$\pi_n(\underline{I}) = \pi_1(\Omega^{n-1}(\underline{I})).$$

<u>Proposition</u> III 1 a : Le foncteur :

$$\underline{C}^* \xrightarrow{\pi_n} \underline{Gr}$$

possède les propriétés suivantes :

i) $\pi_n(\underline{I}) \simeq \pi_n(\underline{I}^o)$

ii) $\pi_n(\underline{I} \times \underline{J}) \simeq \pi_n(\underline{I}) \times \pi_n(\underline{J})$

iii) $\pi_n(\underline{I})$ est un groupe abélien si $n > 1$.

iv) $\pi_n(\underline{I}) = 1$ si $\underline{I}$ est filtrante.

Preuve : $K\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)^o = K\Lambda^n(\underline{I}^o;I_o,I_o)$ et

$$K\Lambda^n(\underline{I}\times\underline{J};\ I_o\times J_o,I_o\times J_o) \simeq K\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)\times K\Lambda^n(\underline{J};J_o,J_o).$$

D'autre part, $K\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o)$ est filtrante à droite si $\underline{I}$ l'est. Les assertions i, ii, et iv sont donc conséquences de II 2 b.

D'autre part, la composition des lacets :

$$\Omega(\underline{I})\times\Omega(\underline{I}) \longrightarrow \Omega(\underline{I}) \qquad \text{(A I 4)}$$

définit un homomorphisme de groupes :

$$\pi_1(\Omega(\underline{I}))\times\pi_1(\Omega(\underline{I})) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(\Omega(\underline{I}))$$

Si x et $y \in \pi_1(\Omega(\underline{I}))$, $xy = \varphi(x,y) = \varphi(1,y)\varphi(x,1) = yx$ donc $\pi_2(\underline{I})$ est un groupe abélien; et par suite aussi $\pi_n(\underline{I})$ pour $n > 1$.

Remarque III 1 b : Nous ne montrons pas ici la propriété d'homotopie pour π_n. Ce sera une conséquence de B II 1 d et du théorème de Whitehead.

e) Influence du point de base.

Si I est un point de $\underline{I}$, $\Omega(\underline{I};I)$ désigne la catégorie des lacets de $\underline{I}$, d'origine et d'extrémité I; de même $\Omega^n(\underline{I};I)$.... ; d'où les groupes $\pi_1(\underline{I};I)$ et $\pi_n(\underline{I};I)$.

On se propose de comparer $\pi_n(\underline{I};I)$ et $\pi_n(\underline{I};J)$ lorsque I et J sont deux points de $\underline{I}$.

A tout chemin E de I à J, et à tout $n \geqslant 1$, on associe un C-morphisme :

III 2 a $$\Omega^n(\underline{I};J) \xrightarrow{\underline{u}^n_E} \Omega^n(\underline{I};I)$$

défini par induction de la façon suivante :

i) $\underline{u}^1_E(\bar{I}) = E\,\bar{I}\,E^{-1}$ (notations de A I).

ii) $\underline{u}^{n+1}_E = \underline{u}_{E^{n+1}} \circ \Lambda(\underline{u}^n_E)$ où E^{n+1} est un chemin dans $\Omega^n(\underline{I};I)$, de I à $\underline{u}_E^n(J)$, défini par :

- $E^1 = E$
- Si $E^n = I_o \rightarrow I_1 \leftarrow \dots \leftarrow I_{2m}$, on pose :

$$J_{2i-1} = I_o \rightarrow I_1 \leftarrow \dots \leftarrow I_{2i-2} \rightarrow I_{2i-1} \leftarrow I_{2i-2} \rightarrow \dots \leftarrow I_o$$

$$J_{2i} = I_o \rightarrow I_1 \leftarrow \dots \leftarrow I_{2i-1} \rightarrow I_{2i} \leftarrow I_{2i-1} \rightarrow \dots \leftarrow I_o$$

alors $E^{n+1} = I_o \longrightarrow J_1 \longleftarrow J_2 \longrightarrow \dots . \longleftarrow J_{2n}$.

Propriété III 2 b :

i) Si $E \in \Lambda(\underline{I};I,J)$ et $F \in \Lambda(\underline{I};J,K)$ alors

$$\underline{u}_{EF}^n = \underline{u}_F^n \circ \underline{u}_E^n .$$

ii) Si E et F sont deux chemins homotopes de $\Lambda(\underline{I};I,J)$ alors $\underline{u}_E^n$ et $\underline{u}_F^n$ sont des morphismes homotopes.

Il en résulte donc que :

$$\pi_n(\underline{I};J) \xrightarrow{\pi_o(\underline{u}_E^n)} \pi_n(\underline{I};I)$$

est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$.

D'autre part, la construction ci-dessus définit un morphisme :

$$\Omega(\underline{I};I) \times \Omega^n(\underline{I};I) \longrightarrow \Omega^n(\underline{I};I)$$

d'où une application :

$$\pi_1(\underline{I};I) \times \pi_n(\underline{I};I) \longrightarrow \pi_n(\underline{I};I)$$

qui est une opération de $\pi_1(\underline{I};I)$ sur $\pi_n(\underline{I};I)$.

3) Si $\underline{N} \xrightarrow{S} \underline{C}^*$ est une pro-catégorie pointée, on définit le foncteur $(n \geqslant 1)$:

$$\underline{N} \xrightarrow{\underline{\pi}_n(S)} \underline{\text{Pro-Gr}}$$

par $\underline{\pi}_n(S)(N) = \pi_n(S(N))$.

On pose :

$$\pi_n(S) = \varprojlim \underline{\pi}_n(S).$$

IV - La suite exacte d'homotopie associée à un morphisme.

1) A tout $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$, on associe le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} \Lambda(\underline{I}') \arrow[r, "\underline{p}_o"] & \underline{I}' \\ \underline{H}(\underline{u}) \arrow[u, "\underline{u}'"] \arrow[r] & \underline{I} \arrow[u, "\underline{u}"'] \end{tikzcd}$$

et on définit la factorisation :

IV 1 a)
$$\begin{tikzcd} \underline{I} \arrow[rr, "\underline{u}"] \arrow[dr, "\underline{t}"'] & & \underline{I}' \\ & \underline{H}(\underline{u}) \arrow[ur, "\underline{u}_H"'] & \end{tikzcd}$$

par $\underline{u}_H = \underline{p}_1 \circ \underline{u}'$, $\underline{t}(I) = (I, \underline{u}(I))$.

On notera que les fibres de $\underline{u}_H$ sont précisément les fibres homotopiques de $\underline{u}$ définies en A II 6.

Proposition IV 1 a : Si $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est un $\underline{C}^*$-morphisme, alors :

i) $\underline{t}$ est une équivalence d'homotopie

ii) Pour tout n, $\pi_n(\underline{H}(\underline{u})) \simeq \pi_o(\underline{H}(\Omega^n(\underline{u})))$

iii) Pour tout n, $\pi_n(\underline{u}_H^{-1}(I_o')) \simeq \pi_o(\Omega^n(\underline{u})_H^{-1}(I_o'))$.

Preuve :

i) Le morphisme $\underline{H}(\underline{u}) \xrightarrow{\underline{s}} \underline{I}$, défini par $\underline{s}(\underline{I},\bar{I}') = I$, est inverse de $\underline{t}$ pour l'homotopie.

Les démonstrations de ii) et iii) sont analogues. Il suffit donc de prouver ii).

ii) On construit les morphismes naturels :

$$- \ \Omega^n(\underline{H}(\underline{u})) \longrightarrow \Lambda^n(\underline{H}(\underline{u});H(\underline{u})_o,H(\underline{u})_o)$$

où $H(\underline{u})_o = (I_o,I'_o)$ est le point de $\underline{H}(\underline{u})$ défini par le pointage de $\underline{u}$.

$$- \ \widetilde{K}\Lambda^n(\underline{I} \underset{\underline{I}'}{\times} K\Lambda(\underline{I}');H(\underline{u})_o,H(\underline{u})_o) \longrightarrow \Lambda^n(\underline{H}(\underline{u});H(\underline{u})_o,H(\underline{u})_o)$$

$$- \ \widetilde{K}\Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o) \underset{\widetilde{K}\Lambda^n(\underline{I}';I'_o,I'_o)}{\times} \widetilde{K}\Lambda^{n+1}(\underline{I}';I'_o,I'_o) \longrightarrow \Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o) \underset{\Lambda^n(\underline{I}';I'_o,I'_o)}{\times} \Lambda^{n+1}(\underline{I}';I'_o,I'_o)$$

$$- \ \underline{H}(\Omega^n(\underline{u})) \longrightarrow \Lambda^n(\underline{I};I_o,I_o) \underset{\Lambda^n(I',I'_o,I'_o)}{\times} \Lambda^{n+1}(\underline{I}';I'_o,I'_o)$$

Sachant que $K\Lambda$ commute aux produits fibrés, et utilisant II 2 b. avec des variantes évidentes, on en déduit ii).

On désigne par $\underline{j}$, le morphisme :

$$\underline{u}_H^{-1}(I'_o) \xrightarrow{\ \underline{j}\ } \underline{I}$$
$$(I,\bar{I}') \rightsquigarrow I.$$

D'autre part, le morphisme :

$$\Omega(\underline{I}') \longrightarrow \underline{I} \underset{\underline{I}'}{\times} \Lambda(\underline{I}';\underline{I}',I'_o) = \underline{u}_H^{-1}(I'_o)$$
$$\bar{I}' \rightsquigarrow (I_o,\bar{I}')$$

définit pour tout $n \gg 0$ une application, notée ∂ :

$$\pi_{n+1}(\underline{I}') \xrightarrow{\ \partial\ } \pi_n(\underline{u}_H^{-1}(I'_o))$$

On peut alors énoncer :

<u>Théorème</u> IV 1 b : Pour tout $\underline{C}^*$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$, la suite :

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(\underline{I}') \xrightarrow{\partial} \pi_n(\underline{u}_H^{-1}(I'_o)) \xrightarrow{\pi_n(\underline{j})} \pi_n(\underline{I}) \xrightarrow{\pi_n(\underline{u})} \pi_n(\underline{I}') \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(I'_o)) \xrightarrow{\pi_o(\underline{j})} \pi_o(\underline{I}) \xrightarrow{\pi_o(\underline{u})} \pi_o(\underline{I}')$$

est exacte.

<u>Preuve</u> : Compte tenu de IV 1 a i) et ii) il suffit de vérifier l'exactitude de :

i) $\pi_o(\underline{u}_H^{-1}(I'_o)) \xrightarrow{\pi_o(\underline{j})} \pi_o(\underline{I}) \xrightarrow{\pi_o(\underline{u})} \pi_o(\underline{I}')$.

Si I est tel que $\underline{u}(I)$ est homotope à I'_o , il existe un chemin $\bar{I}'$ de $\underline{I}'$ tel que $p_o(\bar{I}') = \underline{u}(I)$ et $p_1(\bar{I}') = I'_o$; l'objet $(I,\bar{I}')$ de $\underline{u}_H^{-1}(I'_o)$ a donc pour image I dans $\underline{I}$.

ii) $\pi_o(\Omega(\underline{I}')) \xrightarrow{\partial} \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(I'_o)) \xrightarrow{\pi_o(\underline{j})} \pi_o(\underline{I})$.

Si $(I,\bar{I}') \in \underline{u}_H^{-1}(I'_o)$ est tel que I soit homotope à I_o, il existe un chemin $\bar{I}$ de $\underline{I}$ tel que $p_1(\bar{I}) = I$ et $p_o(\bar{I}) = I_o$; $\Lambda(\underline{u})(\bar{I})\bar{I}'$ est un lacet de $\underline{I}'$ dont l'image dans $\underline{u}_H^{-1}(I'_o)$ est homotope à $(I,\bar{I}')$.

iii) $\pi_o(\Omega(\underline{I})) \xrightarrow{\pi_o(\Omega(\underline{u}))} \pi_o(\Omega(\underline{I}')) \xrightarrow{\partial} \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(I'_o))$.

Si $\bar{I}'$ est un lacet de $\underline{I}'$ tel que $(I_o,\bar{I}')$ soit homotope à (I_o,I'_o) dans $\underline{u}_H^{-1}(I'_o)$, il existe un lacet $\bar{I}$ de $\underline{I}$ tel que $\Omega(\underline{u})(\bar{I})$ soit homotope à $\bar{I}'$.

<u>Remarque</u> IV 1 c : Nous verrons dans D, quelle propriété il faut imposer à $\underline{u}$ pour que, dans la suite ci-dessus, $\pi_n(\underline{u}_H^{-1}(I'_o))$ puisse être remplacé par $\pi_n(\underline{u}_g^{-1}(I'_o))$ (morphisme quasi-fibré) ou par $\pi_n(\underline{u}^{-1}(I'_o))$ (morphisme fibré).

2) Si $(\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N},S')$ est un morphisme de $\underline{Pro}$-$\underline{C}^*$ défini par une transformation naturelle φ, la suite IV 1 b s'étend, de façon immédiate, à la suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow \underline{\pi}_{n+1}(S') \longrightarrow \underline{\pi}_n(\varphi_H^{-1}(\underline{s}'_o)) \longrightarrow \underline{\pi}_n(S) \longrightarrow \underline{\pi}_n(S') \longrightarrow$$

$$\cdots\cdots\cdots \longrightarrow \underline{\pi}_o(\varphi_H^{-1}(s')) \longrightarrow \underline{\pi}_o(S) \longrightarrow \underline{\pi}_o(S')$$

où :

$$\underline{N} \xrightarrow{\varphi_H^{-1}(s'_o)} \underline{C}^*$$

est la pro-catégorie pointée : $N \rightsquigarrow \varphi(N)_H^{-1}(\underline{s}'_o(N))$; $\underline{s}'_o$ étant le point choisi de S'.

V - L'homomorphisme de Hurewicz.

1) La suspension cohomologique et l'homomorphisme de Hurewicz.

Pour tout groupe abélien G, la suite spectrale du morphisme $\Lambda(\underline{I};\underline{I},I_o) \xrightarrow{p_o} \underline{I}$ s'écrit :

V 1 a) $$E_2^{p,q} = H^p(\underline{I};H^q(\Omega(\underline{I});G)) \Longrightarrow 0$$

La suspension cohomologique est l'homomorphisme :

V 1 b) $$H^{n+1}(\underline{I};G) \xrightarrow{s^n} H^n(\Omega(\underline{I});G)$$

défini par le diagramme commutatif :

V 1 c)
$$\begin{tikzcd} E^{n+1,0} \arrow[r, "s^n"] \arrow[d] & E_2^{0,n} \arrow[d] \\ E_{n+1}^{n+1,0} \arrow[r, "d_{n+1}", "\sim"'] & E_{n+1}^{0,n} \end{tikzcd}$$

On notera que s^n est aussi l'application déduite de l'homomorphisme :

$$C^{n+1}(\underline{I};G) \xrightarrow{f^n} C^n(\Omega(\underline{I});G)$$

obtenu par itération de la formule :

$$f^n(x)\begin{pmatrix} I_o & \xrightarrow{u_1} & I_1 & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{u_n} & I_n \\ \downarrow f_o & & \downarrow f_1 & & & & \downarrow f_n \\ J_o & \xrightarrow{v_1} & J_1 & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{v_n} & J_n \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x \; I_o \xrightarrow{u_1} I_1 \to \cdots \to I_j \xrightarrow{f_j} J_j \to \cdots \xrightarrow{v_n} J_n$$

On désigne par :

$$H^1(\underline{I};G) \xrightarrow{h^1} \mathrm{Hom}_{\underline{Gr}}(\pi_1(\underline{I}),G)$$

l'homomorphisme défini à partir de II 4 d.

Pour tout $n \geq 1$, la composition des applications :

$$H^n(\underline{I};G) \xrightarrow{s^{n-1}} H^{n-1}(\Omega(\underline{I});G) \xrightarrow{s^{n-2}} \cdots \xrightarrow{s^1} H^1(\Omega^{n-1}(\underline{I});G) \xrightarrow{h^1} \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(\pi_n(\underline{I}),G)$$

est l'homomorphisme de Hurewicz :

V 1 d) $$H^n(\underline{I};G) \xrightarrow{h^n} \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(\pi_n(\underline{I}),G)$$

2) Théorème de Hurewicz dans C^* : Soient $\underline{I}$ une petite catégorie connexe et simplement connexe et $\mathcal{C}$ une classe complète de groupes abéliens. Si n est un entier tel que $\pi_p(\underline{I}) \in \mathcal{C}$ pour tout $p \leq n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\pi_p(\underline{I}) = 0$ pour tout $p < n$

ii) $H^p(\underline{I};G) = 0$ pour tout $p < n$ et tout $G \in \mathcal{C}$.

Sous ces conditions,

$$H^n(\underline{I};G) \xrightarrow{h^n} \mathrm{Hom}_{\underline{Ab}}(\pi_n(\underline{I}),G)$$

est un isomorphisme pour tout $G \in \mathcal{C}$.

Preuve : Le théorème de Zeeman appliqué à la suite spectrale V 1 a entraîne par induction que :

$$H^p(\underline{I};G) = 0 \;\; \forall p < n \Longleftrightarrow H^p(\Omega^q(\underline{I});G) = 0 \;\; \forall p+q < n \Longleftrightarrow H^1(\Omega^{p-1}(\underline{I});G) = 0 \;\; \forall p < n$$

ce qui montre l'équivalence de i) et de ii).

Sous ces conditions, les flèches verticales de V 1 c sont des isomorphismes, donc h^n est un isomorphisme.

3) Si S est une pro-catégorie pointée, l'homomorphisme V 1 d s'étend naturellement suivant :

$$H^n(S;G) \xrightarrow{h^n} \mathrm{Hom}_{\underline{\text{Pro-Ab}}}(\underline{\pi}_n(S);G)$$

<u>Théorème de Hurewicz dans</u> $\underline{\text{Pro}}$-$\underline{C}^*$: Soient $\underline{N} \xrightarrow{S} \underline{C}_o^*$ une pro-catégorie connexe et simplement connexe et $\mathcal{C}$ une classe complète de groupes abéliens. Si n est un entier tel que $\pi_p(S(N)) \in \mathcal{C}$ pour tout N et tout $p \leqslant n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\underline{\pi}_p(S) = 0$ pour tout $p < n$

ii) $H^p(S;G) = 0$ pour tout $p < n$ et tout G de $\mathcal{C}$.

Sous ces conditions,

$$H^n(S;G) \xrightarrow{h^n} \mathrm{Hom}_{\underline{\text{Pro-Ab}}}(\underline{\pi}_n(S),G)$$

est un isomorphisme pour tout $G \in \mathcal{C}$.

<u>Preuve</u> : Si $\widetilde{S(N)}$ est un revêtement universel de S(N), la suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = \varinjlim_{N} H^p(\pi_1(S(N));H^q(\widetilde{S(N)};G)) \Longrightarrow H^*(S;G)$$

entraîne que $\varinjlim_{N} H^q(\widetilde{S(N)};G) \xrightarrow{\sim} H^q(S;G)$ pour tout q puisque S est simplement connexe.

On peut donc supposer que S(N) est simplement connexe pour tout N.

Le théorème de Zeeman appliqué à la suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = H^p(S;G) \otimes H^q(\Omega(S);G) \Longrightarrow 0$$

déduite de V 1 a, entraîne par induction que :

$$H^p(S;G) = 0 \quad \forall p < n \Longleftrightarrow H^p(\Omega^q(S);G) = 0 \quad \forall p+q < n \Longleftrightarrow H^1(\Omega^{p-1}(S);G) = 0 \quad \forall p < n$$

Sous ces conditions :

$$H^n(S;G) \xrightarrow{\sim} H^{n-1}(\Omega(S);G) \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{\text{Pro-Ab}}}(\underline{\pi}_n(S),G).$$

VI - Le théorème de Whitehead.

1) Théorème de Whitehead dans $\underline{C}^*$: Soient $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$ un $\underline{C}_o^*$-morphisme et $\mathcal{C}$ une classe complète de groupes. Si n est un entier tel que $\pi_p(\underline{I})$ et $\pi_p(\underline{I}')$ appartiennent à $\mathcal{C}$ pour tout $p \leq n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\pi_p(\underline{u})$ est un isomorphisme pour tout $p < n$ et un épimorphisme pour $p = n$.

ii) - $H^1(\underline{u};G)$ est une bijection pour tout G de $\mathcal{C}$.

- Pour tout carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \underline{I} \arrow[r, "\underline{u}"] & \underline{I}' \\ \underline{J} \arrow[u, "\underline{f}"] \arrow[r, "\underline{v}"] & \underline{J}' \arrow[u, "\underline{f}'"'] \end{tikzcd}$$

où $\underline{f}'$ est un revêtement galoisien, et tout groupe abélien G de $\mathcal{C}$, $H^p(\underline{v};G)$ est un isomorphisme pour tout $p < n$ et un monomorphisme pour $p = n$.

iii) - $H^1(\underline{u};G)$ est une bijection pour tout G de $\mathcal{C}$.

- Pour tout système local F' sur $\underline{I}'$ de groupes abéliens de $\mathcal{C}$, $H^p(\underline{u};F')$ est un isomorphisme pour tout $p < n$ et un monomorphisme pour $p = n$.

Preuve : On sait déjà que (A II 4 d) :

$\pi_1(u)$ est un isomorphisme $\Longleftrightarrow H^1(\underline{u};G)$ est une bijection pour tout G de $\mathcal{C}$.

i) $\Rightarrow$ ii) Comme $\pi_p(\underline{v}_H^{-1}(J_o')) = 0$ pour $p < n$, $H^p(\underline{v}_H^{-1}(J_o');G)$ est nul pour $p < n$ et tout G abélien $\in \mathcal{C}$. La suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = H^p(\underline{J}';H^q(\underline{v}_H^{-1}(J_o');G)) \Longrightarrow H^*(\underline{J};G)$$

entraîne donc que $H^p(\underline{v};G)$ est un isomorphisme pour $p < n$ et un monomorphisme pour $p = n$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Si F' est un système local sur $\underline{I}'$ de groupes abéliens de $\mathcal{C}$, pour tout carré cartésien :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \underline{I} & \xrightarrow{\underline{u}} & \underline{I}' \\ \uparrow \underline{f} & & \uparrow \underline{f}' \\ \underline{J} & \xrightarrow{\underline{v}} & \underline{J}' \end{array}$$

où $\underline{f}'$ est un revêtement universel, $\underline{f}'^*(F')$ est un système local constant à valeurs dans $\mathcal{C}$. Le morphisme de suites spectrales (B II 2 c) :

$$\begin{array}{ccc} {}'E_2^{p,q} = H^p(\pi_1(\underline{I}');H^q(\underline{J}';f'^*(F'))) & \Longrightarrow & H^*(\underline{I}';F') \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}''E_2^{p,q} = H^p(\pi_1(\underline{I});H^q(\underline{J};f^*\circ \underline{u}^*(F'))) & \Longrightarrow & H^*(\underline{I};\underline{u}^*(F')) \end{array}$$

entraîne que $H^p(\underline{u};F')$ est un isomorphisme pour $p < n$ et un monomorphisme pour $p = n$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^p(\underline{J};G) & \longleftarrow & H^p(\underline{J}';\underline{v}_*(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(\underline{I};f_*(G)) & \longleftarrow & H^p(\underline{I}';\underline{f}'_* \circ \underline{v}_*(G)) \end{array}$$

associé au carré cartésien $(*)$ montre (B II 2 b) que $H^p(\underline{v};G)$ est un isomorphisme pour $p < n$ et un monomorphisme pour $p = n$; comme $\underline{J}$ et $\underline{J}'$ sont simplement connexes, il en résulte que $H^p(\underline{v}_H^{-1}(J'_o);G) = 0$ pour $p < n$ donc que $\pi_p(\underline{u}_H^{-1}(I'_o)) = \pi_p(\underline{v}_H^{-1}(J'_o)) = 0$ pour $p < n$; ceci prouve i).

2) Equivalences d'homotopie faible.

Un $\underline{C}_o^*$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$ est une équivalence d'homotopie faible s'il vérifie les propriétés équivalentes du théorème de Whitehead pour tout n.

Toute équivalence d'homotopie est donc une équivalence d'homotopie faible (A I 4 et B I 3 b).

Les 2 règles d'équivalence d'homotopie suivantes sont d'application constante, la seconde étant un peu plus générale.

Théorème A de Quillen : Tout $\underline{C}_o^*$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$ tel que $\underline{u}_g^{-1}(I')$ soit non vide et homotopiquement trivial pour tout I' est une équivalence d'homotopie faible.

Preuve : La condition iii) est une conséquence de A II 3 c et de la suite spectrale de Leray.

Proposition VI 2 a : Soit un $\underline{C}_o^*$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$. On suppose qu'il existe un $\underline{C}$-morphisme $\underline{J}' \xrightarrow{v} \underline{I}'$ tel que :

i) Pour tout J' de $\underline{J}'$, $\underline{u}_g^{-1}(\underline{v}(J'))$ est non vide et homotopiquement triviale.

ii) Pour tout I' de $\underline{I}'$, $\underline{v}_d^{-1}(I')$ est non vide et filtrante à gauche.

Alors, $\underline{u}$ est une équivalence d'homotopie faible.

Preuve : Il suffit de remarquer que pour tout groupe G

$$\varprojlim_{\underline{I}'} H^1(\underline{u}_g^{-1}(I');G) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\underline{J}'} H^1(\underline{u}_g^{-1}(\underline{v}(J');G)$$

et que pour tout système local F' sur $\underline{I}'$ (B II 1 b i) :

$$H^p(\underline{I}';H^q(\underline{u}_g^{-1}(\ );\underline{u}^*(F'))) \xrightarrow{\sim} H^p(\underline{J}';H^q(\underline{u}_g^{-1}(\underline{v}(\ ));\underline{u}^*(F')))$$

Exemple VI 2 b : La catégorie barycentrique $\underline{B}(\underline{I})$ associée à une petite catégorie $\underline{I}$ est définie par :

$$\mathrm{Ob}(\underline{B}(\underline{I})) = \{(n, \underline{\Delta}(n) \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I});\ n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{B}(\underline{I})}((n,\underline{u}),(m,\underline{v})) = \{\underline{\Delta}(n) \xrightarrow{\underline{t}} \underline{\Delta}(m);\ \underline{v} \circ \underline{t} = \underline{u} \text{ et } t \text{ strictement croissante}\}.$$

$\underline{B}$ est un foncteur et on définit une transformation naturelle :

$$\underline{B}(\underline{I}) \xrightarrow{\Psi(\underline{I})} \underline{I}$$

par $\Psi(\underline{I})\ (n,\underline{u}) = \underline{u}(n)$.

Si $\underline{I}$ est pointée en I_o, $\underline{B}(\underline{I})$ est pointée en $(0,I_o)$. On montrera en E I 2 b que $\Psi(\underline{I})$ est une équivalence d'homotopie faible.

Par induction, on définit $\underline{B}^n(\underline{I})$ et $\underline{B}^n(\underline{I}) \xrightarrow{\Psi^n(\underline{I})} \underline{I}$.

VI 2 : Deux $\underline{C}_o^*$-morphismes $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ et $\underline{J} \xrightarrow{\underline{v}} \underline{I}'$ sont faiblement homotopes s'il existe des entiers n et m tels que

i) $\underline{B}^n(\underline{I}) = \underline{B}^m(\underline{J})$

ii) $\pi_p(\underline{u} \circ \Psi^n(\underline{I})) = \pi_p(\underline{v} \circ \Psi^m(\underline{J}))$ pour tout $p > 0$

En particulier, si $\underline{I} = \underline{J}$, $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont faiblement homotopes si $\pi_p(\underline{u}) = \pi_p(\underline{v})$ pour tout $p > 0$.

Pour tout couple $\underline{I}$, $\underline{J}$ de $\underline{C}_o^*$, on pose :

$[\underline{I},\underline{J}]$ = ensemble des classes d'équivalence de couples $(n,\underline{u})$ où $\underline{B}^n(\underline{I}) \xrightarrow{\underline{u}} J \in \underline{C}_o^*$, pour la relation :

$(n,\underline{u}) \sim (m,\underline{v}) \iff \underline{u}$ et $\underline{v}$ sont faiblement homotopes.

3) Si $\underline{N} \xrightarrow{S} \underline{C}$ est une pro-catégorie, pour tout N, on désigne par $\underline{N}_N$ la catégorie des morphismes $N' \xrightarrow{f} N$. A tout $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} S(N)$, on associe alors la pro-catégorie $(\underline{N}_N, S_{\underline{u}})$ définie par

$$S_{\underline{u}}(N' \xrightarrow{f} N) = S(N') \times_{S(N)} \underline{I}.$$

et le morphisme naturel $S_{\underline{u}} \longrightarrow S$. Ce morphisme est évidemment un isomorphisme, que que soit $\underline{N}$, si $\underline{u}$ est un isomorphisme.

<u>Théorème de Whitehead dans Pro-C^*</u> : Soient

$$(\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N}',S')$$

un Pro-$\underline{C}_o^*$-morphisme et $\mathcal{C}$ une classe complète de groupes. Si n est un entier ≥ 1 tel que $\underline{\pi}_p(S)$ et $\underline{\pi}_p(S')$ appartiennent à Pro-$\mathcal{C}$ pour tout $p \leq n$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\underline{\pi}_p(\varphi)$ est un isomorphisme pour $p < n$ et un épimorphisme pour $p = n$.

ii) - $H^1(\varphi;G)$ est une bijection pour tout G de $\mathcal{C}$.

- Pour tout N' de $\underline{N}'$, tout revêtement galoisien $J' \xrightarrow{f'} S'(N')$ et tout groupe abélien G de $\mathcal{C}$, si ψ est le morphisme obtenu à partir de φ par l'extension $S'_{f'} \longrightarrow S'$, $H^p(\psi;G)$ est un isomorphisme pour $p < n$ et un monomorphisme pour $p = n$.

iii) - $H^1(\varphi;G)$ est une bijection pour tout G de $\mathcal{C}$.

- Pour tout système local F' sur S' de groupes abéliens de $\mathcal{C}$, $H^p(\varphi;F')$ est un isomorphisme pour $p < n$ et un monomorphisme pour $p = n$.

<u>Preuve</u> : On peut supposer (A III 1 b) que $\underline{N} = \underline{N}'$ et que φ est une transformation naturelle de foncteurs. On reprend la démonstration du théorème de Whitehead dans $\underline{C}^*$ en tenant compte de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$.

Un Pro-$\underline{C}_o^*$-morphisme $(\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N}',S')$ est une <u>équivalence d'homotopie faible</u> s'il vérifie les propriétés équivalentes du théorème de Whitehead pour tout n.

D. - MORPHISMES FIBRÉS.

I - La factorisation d'un $\underline{C}_1^*$-morphisme.

1) Soient $\underline{I}$ une petite catégorie connexe et pointée en I_o et G un groupe abélien.

A tout élément x de $Z_N^2(\underline{I};G) = Z^2(\underline{I};G) \cap C_N^2(\underline{I};G)$ (B I 2 c), on associe l'homomorphisme de monoïdes.

$$Fl(\Omega(\underline{I})) \xrightarrow{f_x} G$$

défini par :

$$f_x\left(\begin{tikzcd} I_o \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_d"] & I_1 \arrow[d, "u_1"] & I_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "u_2"] & I_3 \arrow[d, "u_3"] & \ldots \arrow[l] & I_o \arrow[l] \arrow[d, "i_d"] \\ I_o \arrow[r, "j_1"] & J_1 & J_2 \arrow[l, "j_2"'] \arrow[r, "j_3"] & J_3 & \ldots \arrow[l] & I_o \arrow[l] \end{tikzcd}\right) = x(i_1,u_1) - x(i_2,u_1)+x(u_2,j_2) - x(u_2,j_3) + x(i_3,j_3)\ldots$$

d'où un fibré principal homogène $(\Omega(\underline{I}),G,f_x)$ (A II 3).

Proposition I 1 a : Pour tout x de $H^2(\underline{I};G)$, il existe un morphisme $\underline{K}_x^2(\underline{I};G) \xrightarrow{\underline{p}_x} \underline{I}$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega(\underline{K}_x^2(I;G)) \arrow[rr, "\underline{u}_x"] \arrow[dr, "\Omega(\underline{p}_x)"'] & & \Omega(\underline{I})(f_x) \arrow[dl, "\underline{p}"] \\ & \Omega(\underline{I}) & \end{tikzcd}$$

tels que :

i) $\underline{K}_x^2(I;G)$ est connexe

ii) $\underline{u}_x$ est une équivalence d'homotopie.

Preuve : Soit x un élément de $Z^2_N(\underline{I};G)$. On définit une catégorie $\underline{K}^2_x(\underline{I};G)$ par :

$$Ob(\underline{K}^2_x(\underline{I};G)) = Ob(\underline{I})$$
$$Hom_{\underline{K}^2_x}(I,J) = Hom_{\underline{I}}(I,J) \times G$$

avec la composition : $(v,g) \circ (u,h) = (v \circ u,\ g + h + x(u,v))$.

On pose : $\underline{p}_x(I) = I$, $\underline{p}_x(u,h) = u$.

Enfin $\underline{u}_x$ est défini par :

$$\underline{u}_x(I_o \xrightarrow{(i_1,g_1)} I_1 \xleftarrow{(i_2,g_2)} I_2 \longrightarrow \ldots \longleftarrow I_o) =$$
$$(I_o \xrightarrow{i_1} I_1 \xleftarrow{i_2} I_2 \longrightarrow \ldots \longleftarrow I_o,\ g_1 - g_2 + \ldots)\ .$$

Les assertions i) et ii) sont immédiates. De plus si x et y sont des éléments cohomologues de $Z^2_N(\underline{I};G)$, $\underline{K}^2_x(\underline{I};G)$ et $\underline{K}^2_y(\underline{I};G)$ sont isomorphes : en effet, supposons qu'il existe un élément t de $C^1(\underline{I};G)$ tel que pour tout $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} K$

$$x(u,v) - y(u,v) = t(v) - t(v \circ u) + t(u)$$

on définit :

$$\underline{K}^2_x(\underline{I};G) \xrightarrow{\underline{s}} \underline{K}^2_y(\underline{I};G)$$

par :

$$\underline{s}(I) = I, \quad \underline{s}(u,h) = (u, h - t(u)).$$

$\underline{s}$ est, clairement, un isomorphisme au-dessus de $\underline{I}$.

Corollaire I 1 b : Pour tout x de $H^2(\underline{I};G)$, la suite :

$$0 \longrightarrow \pi_2(\underline{K}^2_x(\underline{I};G)) \longrightarrow \pi_2(\underline{I}) \xrightarrow{h^2(x)} G \longrightarrow \pi_1(\underline{K}^2_x(\underline{I};G)) \longrightarrow \pi_1(\underline{I}) \longrightarrow *$$

est exacte.

De plus, $\pi_n(\underline{K}^2_x(\underline{I};G)) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\underline{I})$ pour $n > 2$.

<u>Corollaire</u> I 1 c : Si $\underline{I}$ est simplement connexe et si x est l'élément de $H^2(\underline{I};\pi_2(\underline{I}))$ tel que $h^2(x) = \mathrm{id}$,

$$\pi_n(\underline{K}^2_x(\underline{I};\pi_2(\underline{I}))) = 0 \qquad \text{pour } n = 1 \text{ et } 2$$

$$\pi_n(\underline{K}^2_x(\underline{I};\pi_2(\underline{I}))) \xrightarrow{\sim} \pi_n(I) \qquad \text{pour } n > 2.$$

2) A tout $\underline{C}^*_1$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est associé par C IV 1 un épimorphisme $\pi_2(\underline{I}') \xrightarrow{\partial} \pi_1(\underline{u}_H^{-1}(I'_o)) = \pi$.

L'homomorphisme h^2 étant bijectif ((C V 2), on peut trouver un élément x' de $Z^2_N(\underline{I}';\pi)$ tel que $h^2([x']) = \partial$. D'autre part, l'image de $[x']$ dans $H^2(\underline{I};\pi)$ étant nulle, il existe un élément x de $C^1_N(\underline{I};\pi)$ tel que d(x) soit égal à l'image de x' dans $C^2_N(\underline{I};\pi)$. Au couple (x,x') ainsi constitué; on associe un homomorphisme de **monoïdes** :

$$\mathrm{Fl}(\underline{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{f'_{x,x'}(I')} \pi$$

défini par :

$$f'_{x,x'}(I')\left[(I,\underline{u}(I) \xrightarrow{u'} I') \xrightarrow{w} (J,\underline{u}(J) \xrightarrow{v'} I')\right] = x(w) - x'(\underline{u}(w),v').$$

<u>Théorème</u> I 2 a : A tout $\underline{C}^*_1$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$, on peut associer un diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd} \underline{I} \arrow[rr, "\underline{u}"] \arrow[dr, "\underline{u}_1"'] & & \underline{I}' \\ & \underline{K}^2(\underline{u}) \arrow[ur, "\underline{p}_{\underline{u}}"'] & \end{tikzcd}$$

tel que :

i) $\underline{K}^2(\underline{u})$ est connexe et simplement connexe.

ii) $\pi_2(\underline{u}_1)$ est surjectif, $\pi_2(\underline{p}_{\underline{u}})$ est injectif et $\pi_n(\underline{p}_{\underline{u}})$ est bijectif pour $n > 2$.

iii) Pour tout I' de $\underline{K}^2(\underline{u})$:

$$(\underline{u}_1)_g^{-1}(I') \longrightarrow \underline{u}_g^{-1}(\underline{p}_{\underline{u}}(I'))$$

est un revêtement galoisien de groupe $\pi_1(\underline{u}_H^{-1}(I'_o))$.

Preuve : Si $(x,x') \in C^1_N(\underline{I};\pi) \times Z^2_N(\underline{I}';\pi)$ est défini comme ci-dessus, on pose : $\underline{K}^2(\underline{u}) = \underline{K}^2_{x'}(\underline{I}';\pi)$, $\underline{p}_{\underline{u}} = \underline{p}_{x'}$.

Le morphisme $\underline{u}_1$ est défini par :

$$\underline{u}_1(I) = \underline{u}(I)$$
$$\underline{u}_1(I \xrightarrow{u} J) = (\underline{u}(I) \xrightarrow{\underline{u}(u)} \underline{u}(J),\ -x(u))$$

Les assertions i) et ii) sont conséquences du diagramme commutatif où la ligne horizontale est exacte (I 1 b) :

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_2(\underline{I}) \arrow[d, "\pi_2(\underline{u}_1)"] \arrow[dr, "\pi_2(\underline{u})"] & & & \\
0 \arrow[r] & \pi_2(\underline{K}^2(\underline{u})) \arrow[r, "\pi_2(\underline{p}_{\underline{u}})"] & \pi_2(\underline{I}') \arrow[r] & \pi_1(\underline{u}_H^{-1}(I'_o)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Enfin, pour tout I' de $\underline{I}'$, $(\underline{u}_1)_g^{-1}(I') \xrightarrow{\sim} [\underline{u}_g^{-1}(I')](f'_{x,x'}(I'))$.

Corollaire I 2 b : Si $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est un $\underline{C}^*_1$-morphisme tel que :

i) Pour tout I', $\underline{u}_g^{-1}(I')$ est non vide et connexe.

ii) Pour tout $I' \xrightarrow{u'} J'$, $\pi_1(\underline{u}_g^{-1}(I')) \to \pi_1(\underline{u}_g^{-1}(J'))$ est une bijection,

Alors $\underline{u}$ se décompose suivant :

$$\begin{tikzcd}
\underline{I} \arrow[rr, "\underline{u}"] \arrow[dr, "\underline{u}_1"'] & & \underline{I}' \\
 & \underline{K}^2(\underline{u}) \arrow[ur, "\underline{p}_{\underline{u}}"'] &
\end{tikzcd}$$

où, pour tout I', $(\underline{u}_1)_g^{-1}(I')$ est non vide, connexe et simplement connexe. De plus, $\pi_2(\underline{u}_1)$ est surjectif $\pi_2(\underline{p}_{\underline{u}})$ est injectif et $\pi_n(\underline{p}_{\underline{u}})$ est bijectif pour $n \geq 2$.

Preuve : C'est une conséquence de I 2 a et de A II 6 b ii).

Remarque I 2 c : Cette décomposition a évidemment pour but de se débarrasser des groupes fondamentaux des fibres à gauche de $\underline{u}$ afin de pouvoir utiliser la suite spectrale de Leray dont le terme $E_2^{p,q}$ est décomposé.

II - Morphismes quasi-fibrés.

1) Un $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est quasi-fibré si pour tout $I' \xrightarrow{u'} J'$ de $\underline{I}'$, $\underline{u}_g^{-1}(I') \longrightarrow \underline{u}_g^{-1}(J')$ est une équivalence d'homotopie faible (C VI 2).

Cette définition implique, bien entendu, que $\underline{u}_g^{-1}(I')$ est non vide pour tout I'. Elle entraîne, en outre, que pour tout système local F de groupes abéliens sur $\underline{I}$ et tout $n \geqslant 0$, le foncteur :

$$\underline{I}'^{o} \xrightarrow{H^n(u;F)} \underline{Ab}$$
$$I' \rightsquigarrow H^n(\underline{u}_g^{-1}(I');F)$$

est un système local.

Tout revêtement est un morphisme quasi-fibré.

Proposition II 1 a) : Soient des $\underline{C}$-morphismes $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ et $\underline{I}' \xrightarrow{\underline{u}'} \underline{I}''$

i) Si $\underline{u}$ et $\underline{u}'$ sont quasi-fibrés, $\underline{u}' \circ \underline{u}$ est quasi-fibré

ii) Si $\underline{u}$ et $\underline{u}' \circ \underline{u}$ sont quasi-fibrés, $\underline{u}'$ est quasi-fibré.

Preuve : Indiquons seulement que ceci est conséquence de la suite exacte (G groupe) :

$$* \longrightarrow H^1(\underline{u}'^{-1}_g(I''),G) \to H^1((\underline{u}' \circ \underline{u})_g^{-1}(I'');G) \to \varprojlim_{(I',\underline{u}'(I') \to I'')} H^1(\underline{u}_g^{-1}(I');G)$$

et de la suite spectrale ($F \in \hat{\underline{I}}$) :

$$E_2^{p,q} = H^p(\underline{u}'^{-1}_g(I''); H^q(\underline{u}_g^{-1}(\ );F)) \Longrightarrow H^*((\underline{u}' \circ \underline{u})_g^{-1}(I'');F).$$

2) Tout $\underline{C}_o$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ tel que

$$\underline{u}_g^{-1}(I') \longrightarrow \underline{u}_H^{-1}(I')$$

soit une équivalence d'homotopie faible pour tout I' est quasi-fibré (A II 6).

Inversement :

Théorème II 2 a : Si $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est un morphisme quasi-fibré, pour tout I' de $\underline{I}'$:

$$\underline{u}_g^{-1}(I') \longrightarrow \underline{u}_H^{-1}(I')$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Preuve : On procède par décompositions successives de u.

i) On peut évidemment supposer $\underline{I}'$ connexe et utiliser la décomposition de A II 6 c :

$$\begin{tikzcd} \underline{I} \arrow[rr, "\underline{u}"] \arrow[dr, "\underline{u}_o"'] & & \underline{I}' \\ & \underline{I}'_o \arrow[ur, "\underline{p}"'] & \end{tikzcd}$$

$\underline{u}_o$ est quasi-fibré à fibres à gauche connexes et : pour tout I', $\pi_o(\underline{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_o(\underline{u}_H^{-1}(I'))$ (A II 6 b).

ii) On peut donc supposer que $\underline{u}$ est un $\underline{C}_o^*$-morphisme à fibres à gauche connexes; $\pi_1(\underline{u})$ est surjectif et pour tout I', $\pi_1(\underline{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\underline{u}_H^{-1}(I'))$ (A II 6 b).

On construit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \underline{I} \arrow[r, "\underline{u}"] & \underline{I}' \\ \underline{J} \arrow[u, "\underline{p}"] \arrow[r, "\underline{v}"] & \underline{J}' \arrow[u, "\underline{p}'"'] \end{tikzcd}$$

où $\underline{p}$ et $\underline{p}'$ sont des revêtements universels.

On peut appliquer A II 5 b) : $\underline{v}$ est quasi-fibré et pour $n \geq 1$, $\pi_n(\underline{v}_g^{-1}(J')) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\underline{u}_g^{-1}(\underline{p}'(I')))$, $\pi_n(\underline{v}_H^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\underline{u}_H^{-1}(I'))$.

iii) On peut donc considérer que $\underline{u}$ est un C_1^*-morphisme à fibres à gauche connexes.

Dans la décomposition I 2 a :

$$\begin{tikzcd} \underline{I} \arrow[rr, "\underline{u}"] \arrow[dr, "\underline{u}_1"'] & & \underline{I}' \\ & \underline{K}^2(\underline{u}) \arrow[ur, "\underline{p}_{\underline{u}}"'] & \end{tikzcd}$$

$\underline{u}_1$ est quasi-fibré (I 2 a iii) à fibres à gauche connexes et simplement connexes (I 2 b). De plus, pour tout $n > 1$, $\pi_n((\underline{u}_1)_g^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\underline{u}_g^{-1}(I'))$ et $\pi_n((\underline{u}_1)_H^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\underline{u}_H^{-1}(I'))$ à cause de I 2 a iii) et C IV 1 b).

iv) On est réduit finalement au cas où $\underline{u}$ est un $\underline{C}_1^*$-morphisme à fibres à gauche connexes et simplement connexes. Le théorème de Zeeman appliqué aux suites spectrales de $\underline{u}$ et $\underline{u}_H$ (C IV 1 a) :

$$E_2^{p,q} = H^p(\underline{I}';\mathbb{Z}) \otimes H^q(\underline{u}_g^{-1}(I');\mathbb{Z})) \Longrightarrow H^*(\underline{I};\mathbb{Z})$$

$${}'E_2^{p,q} = H^p(\underline{I}';\mathbb{Z}) \otimes H^q(\underline{u}_H^{-1}(I');\mathbb{Z}) \Longrightarrow H^*(\underline{I};\mathbb{Z})$$

entraîne que $H^q(\underline{u}_H^{-1}(I');\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^q(\underline{u}_g^{-1}(I');\mathbb{Z})$ pour $q \geqslant 0$

donc que $\pi_q(u_H^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_q(\underline{u}_g^{-1}(I'))$ pour $q \geqslant 0$.

On en déduit (C IV 1 b) :

<u>Théorème B de Quillen</u> : Si $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est un $\underline{C}^*$-morphisme quasi-fibré, on peut construire une suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(\underline{I}') \xrightarrow{\partial} \pi_n(\underline{u}_g^{-1}(I_o')) \xrightarrow{\pi_n(\underline{j})} \pi_n(\underline{I}) \xrightarrow{\pi_n(\underline{u})} \pi_n(\underline{I}') \longrightarrow$$
$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_o(\underline{u}_g^{-1}(I_o')) \xrightarrow{\pi_o(\underline{j})} \pi_o(\underline{I}) \xrightarrow{\pi_o(\underline{u})} \pi_o(I')$$

où $\underline{j}$ est le morphisme naturel de $\underline{u}_g^{-1}(I_o')$ dans $\underline{I}$

III - Morphismes fibrés.

1) Définition III 1 a) : Un $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}^*} \underline{I}'$ est fibré si :

i) $\underline{u}$ est quasi-fibré

ii) Pour tout diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\underline{I} \arrow[r, "\underline{u}"] & \underline{I}' \\
\underline{J} \arrow[u, "\underline{f}"] \arrow[r, "\underline{v}"] & \underline{J}' \arrow[u, "\underline{f}'"']
\end{tikzcd}$$

et tout J' de $\underline{J}'$, $\underline{v}_g^{-1}(J') \longrightarrow \underline{u}_g^{-1}(f'(J'))$ est une équivalence d'homotopie faible.

Propriétés III 1 b :

Soient des $\underline{C}$-morphismes $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ et $\underline{I}' \xrightarrow{\underline{u}'} \underline{I}''$

- $\underline{u}$ et $\underline{u}'$ fibrés $\Longrightarrow$ $\underline{u}' \circ \underline{u}$ fibré

- $\underline{u}$ et $\underline{u}' \circ \underline{u}$ fibrés $\Longrightarrow$ $\underline{u}'$ fibré.

Proposition III 1 c : Si $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est un morphisme fibré pour tout I' de $\underline{I}'$:

$$\overset{-1}{\underline{u}}(I') \longrightarrow u_g^{-1}(I')$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Preuve : I' étant un point fixé de $\underline{I}'$, formons le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\underline{I} \arrow[r, "\underline{u}"] & \underline{I}' \\
\underline{u}^{-1}(I') \times \underline{u}^{-1}(I') \arrow[u, "\underline{f}"] \arrow[r, "\underline{v}"] & \underline{u}^{-1}(I') \arrow[u, "\underline{f}'"']
\end{tikzcd}$$

avec $\underline{v}(I,J) = J$, $\underline{f}(I,J) = I$ et $\underline{f}'(J) = I'$.

Pour tout J de $\underline{u}^{-1}(I')$, $\underline{v}_g^{-1}(J) = \underline{u}^{1}(I') \times \underline{I}(J)$ où $\underline{I}(J)$ est la catégorie des morphismes $K \xrightarrow{s} J$ tels que $u(s) = id$.

Comme $\underline{I}(J)$ est fitrante à droite, $\underline{u}^{-1}(I') \to \underline{u}_g^{-1}(I')$ est une équivalence d'homotopie faible.

On en déduit :

Proposition III 1 d : Si $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$ est un $\underline{C}^*$-morphisme fibré on peut construire une suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(\underline{I}') \xrightarrow{\partial} \pi_n(\underline{u}^{-1}(I'_o)) \xrightarrow{\pi_n(\underline{i})} \pi_n(\underline{I}) \xrightarrow{\pi_n(\underline{u})} \pi_n(\underline{I}') \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_o(\underline{u}^{-1}(I'_o)) \xrightarrow{\pi_o(\underline{i})} \pi_o(\underline{I}) \xrightarrow{\pi_o(\underline{u})} \pi_o(\underline{I}')$$

où $\underline{u}^{-1}(I'_o) \xrightarrow{i} \underline{I}$ désigne l'inclusion.

2) Exemples de morphismes fibrés.

Pour tout $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$, on pose :

$\underline{u}^{-1}(I,\ \underline{u}(I) \xrightarrow{s'} J')$ = catégorie des morphismes $I \xrightarrow{s} J$ tels que $\underline{u}(s) = s'$

$\underline{u}^{-1}(I,\ J' \xrightarrow{s'} \underline{u}(I))$ = catégorie des morphismes $J \xrightarrow{s} I$ tels que $\underline{u}(s) = s'$.

Proposition III 2 a : Soit un $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{u} \underline{I}'$ tel que ;

i) Pour tout $(I, \underline{u}(I) \xrightarrow{s'} J')$, $\underline{u}^{-1}(I, s')$ est non vide et homotopiquement triviale.

ii) Pour tout $(I, J' \xrightarrow{s'} \underline{u}(I))$, $\underline{u}^{-1}(I, s')$ est non vide et filtrante à droite.

Alors $\underline{u}$ est un morphisme fibré.

Preuve : Les propriétés i) et ii) se conservent par extension de la base et entraînent que, pour tout I', $\underline{u}^{-1}(I') \longrightarrow \underline{u}_g^{-1}(I')$ et $\underline{u}^{-1}(I') \longrightarrow \underline{u}_d^{-1}(I')$ sont des équivalences d'homotopie faible. Il suffit donc de montrer que $\underline{u}$ est quasi-fibré. Pour tout morphisme $I' \xrightarrow{u'} J'$ de $\underline{I}'$, le couple de morphismes $\underline{u}^{-1}(I') \longrightarrow \underline{u}_g^{-1}(J')$ et $\underline{u}^{-1}(J') \longrightarrow \underline{u}_g^{-1}(J')$ vérifie les conditions de C VI 2 a; donc $\underline{u}^{-1}(I') \longrightarrow \underline{u}_g^{-1}(J')$ est une équivalence d'homotopie faible et par suite, $\underline{u}_g^{-1}(I') \longrightarrow \underline{u}_g^{-1}(J')$ l'est également.

Corollaire III 2 b : Tout $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ tel que pour tout I', $\underline{u}^{-1}(I') \longrightarrow \underline{u}_g^{-1}(I')$ possède un adjoint à gauche et $\underline{u}^{-1}(I') \longrightarrow u_d^{-1}(I')$ possède un adjoint à droite, est un morphisme fibré.

Exemples III 2 c :

i) Tout fibré localement trivial (A II 1) est un morphisme fibré.

ii) Si $\underline{J}$ et $\underline{K}$ sont des sous-catégories de $\underline{I}$, la projection

$$\Lambda(\underline{I};\underline{J},\underline{K}) \xrightarrow{\underline{p}_0 \times \underline{p}_1} \underline{J} \times \underline{K}$$

est un morphisme fibré.

iii) Pour tout morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}$, le morphisme $\underline{H}(\underline{u}) \xrightarrow{u_H} \underline{I}'$ (C IV 1) est fibré.

3) Systèmes d'homotopie.

Un système d'homotopie sur $\underline{C}^*$ est la donnée d'une suite de foncteurs $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ définis sur $\underline{C}^*$ à valeurs dans $(\underline{Ens}^*)$ pour $n = 0$, $(\underline{Gr})$ pour $n = 1$ et $(\underline{\mathring{A}b})$ pour $n > 1$, et pour tout $\underline{C}^*$-morphisme fibré $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ d'une suite $(\pi_{n+1}(\underline{I}') \xrightarrow{\partial_n} \pi_n(\underline{u}^{-1}(I'_0)))$ d'homomorphismes tels que :

i) Pour tout $\underline{I}$ de $\underline{C}^*$, $\pi_o(\underline{I})$ = ensemble pointé des composantes connexes de $\underline{I}$.

ii) Pour tout $\underline{I}$ contractile de $\underline{C}^*$, $\pi_n(\underline{I})$ a un seul élément pour tout n.

iii) Pour tout diagramme commutatif de $\underline{C}^*$.

$$\begin{tikzcd} \underline{I} \arrow[r, "\underline{u}"] & \underline{I}' \\ \underline{J} \arrow[u, "\underline{f}"] \arrow[r, "\underline{v}"] & \underline{J}' \arrow[u, "\underline{f}'"'] \end{tikzcd}$$

où $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont fibrés, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \pi_{n+1}(\underline{I}') \arrow[r, "\partial_n"] & \pi_n(\underline{u}^{-1}(I_o')) \\ \pi_{n+1}(\underline{J}') \arrow[u, "\pi_{n+1}(\underline{f}')"] \arrow[r, "\partial_n"] & \pi_n(\underline{v}^{-1}(J_o')) \arrow[u, "\pi_n(\underline{f}|\underline{v}^{-1}(J_o'))"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif pour tout n.

Un <u>morphisme</u> d'un système d'homotopie (π_n, ∂_n) dans un autre (π_n', ∂_n') est la donnée pour tout entier n d'une transformation naturelle

$$\pi_n \xrightarrow{h_n} \pi_n'$$

telle que h_o = id et que pour tout morphisme fibré $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \pi_{n+1}(\underline{I}') \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "h_{n+1}(\underline{I}')"] & \pi_n(\underline{u}^{-1}(I_o')) \arrow[d, "h_n(\underline{u}^{-1}(I_o'))"] \\ \pi'_{n+1}(\underline{I}') \arrow[r, "\partial'_n"] & \pi_n'(\underline{u}^{-1}(I_o')) \end{tikzcd}$$

[<u>Théorème</u> III 3 : Deux systèmes d'homotopie sont isomorphes.

<u>Preuve</u> : Si (π_n, ∂_n) et (π_n', ∂_n') sont 2 systèmes d'homotopie donnés, on construit par induction une transformation naturelle h_n par :

- $h_o = \mathrm{id}$

-

$$\begin{tikzcd} \pi_n(\underline{I}) \arrow[r, "h_n(\underline{I})"] \arrow[d, "\partial_n", "\wr"'] & \pi'_n(\underline{I}) \arrow[d, "\partial'_n", "\wr"'] \\ \pi_{n-1}(\Omega(\underline{I})) \arrow[r, "h_{n-1}(\Omega(\underline{I}))"] & \pi'_{n-1}(\Omega(\underline{I})) \end{tikzcd}$$

où ∂_n et ∂'_n sont associés au fibré : $\Lambda(\underline{I};\underline{I},I_o) \xrightarrow{\underline{p}_o} \underline{I}$.

Comme ∂_n et ∂'_n sont des isomorphismes, $h_n(\underline{I})$ est un isomorphisme.

IV - Morphismes pseudo-fibrés.

En fait, la famille des morphismes fibrés qu'on vient de définir va se révéler trop pauvre dans l'étude du paragraphe suivant. Nous sommes donc amenés à introduire une définition intermédiaire que nous allons justifier par des exemples.

1) Les catégories $\underline{L}(M;n)$ et $\underline{K}(M;n)$.

Si M est un ensemble et n un entier $\geqslant 0$, $\underline{L}(M,n)$ est la catégorie formée des couples (p,x) où $p \in \mathbb{N}$ et $x \in C^n_N(\underline{\Delta}(p);M)$ et dont les morphismes de (p,x) dans (q,y) sont les applications croissantes, au sens large, $[p] \xrightarrow{\varphi} [q]$ telles que $x(u) = y(\varphi \circ u)$ pour tout u.

Autrement dit, un objet (p,x) de $\underline{L}(M,n)$ est une suite

$(x_{i_o,i_1,\dots,i_n})$ de M avec $0 \leqslant i_o < i_1 < \dots < i_n \leqslant p$.

Proposition IV 1 a : $\underline{L}(M;n)$ est homotopiquement triviale.

Preuve : On construit une rétraction de $\underline{L}(M,n)$ sur $(0,0)$

$$\underline{L}(M,n) \xrightarrow{\underline{r}} \Lambda(\underline{L}(M,n))$$

$$\underline{r}(p,x) = (p,x) \xrightarrow{\partial_o} (p+1,y^o) \xleftarrow{\delta_1} (p,x^1) \xrightarrow{\delta_1} (p+1,y^1) \xleftarrow{\delta_2} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\delta_p} (p+1,y^p) \xleftarrow{\delta_{p+1}} (p,x^p) \longrightarrow (0,0)$$

où x^i et y^i sont définis de la façon suivante : si $x = (x_{i_o,i_1,\dots,i_n})$, on pose :

$$- \; x^i_{i_o,i_1,\dots,i_n} = y^i_{i_o,i_1,\dots,i_n} = 0 \qquad \text{si } i_o \leqslant i$$

$$- \; x^i_{i_o,i_1,\dots,i_n} = x_{i_o,i_1,\dots,i_n} \qquad \text{si } i_o > i$$

$$- \; y^i_{i_o,i_1,\dots,i_n} = x_{i_o-1,i_1-1,\dots,i_n-1} \qquad \text{si } i_o > i$$

Si M est un ensemble, $\underline{K}(M;0)$ est la catégorie des couples (p,x), où $x \in M$, et des morphismes $(p,x) \xrightarrow{\varphi} (q,x)$, où $[p] \xrightarrow{\varphi} [q]$ est croissante au sens large.

Donc $$\underline{K}(M;0) = \underline{M}^d \times \underline{\Delta}$$

$\underline{\Delta}$ étant la catégorie associée à l'ensemble ordonné des entiers.

Si M est un groupe, $\underline{K}(M;1)$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{L}(M;1)$ formée des couples (p,x) tels que

$$x_{i,j}\, x_{j,k} = x_{i,k} \qquad \text{si } i < j < k.$$

Autrement dit, $\underline{K}(M;1)$ est la catégorie des couples (p,x) où $x = (x_i)$, $0 \leqslant i < p$, est une suite de M, et dont les morphismes $(p,x) \xrightarrow{\varphi} (q,y)$ sont les applications $[p] \xrightarrow{\varphi} [q]$ croissantes au sens large telles que

$$x_i = y_{\varphi(i)}\, y_{\varphi(i)+1} \cdots y_{\varphi(i+1)-1} \qquad 0 \leqslant i < p.$$

Le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \underline{K}(M,1) & \xrightarrow{\quad t \quad} & \underline{M} \\ (p,x) \xrightarrow{\varphi} (q,y) & \rightsquigarrow & y_{\varphi(p)}\, y_{\varphi(p)+1} \cdots y_{q-1} \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie faible, car $\underline{t}_g^{-1}(*)$ est la catégorie des couples (p,x) où $x = (x_i)$, $0 \leqslant i \leqslant p$, et des morphismes $(p,x) \xrightarrow{\varphi} (q,y)$ tels que :

$$x_i = y_{\varphi(i)}\, y_{\varphi(i)+1} \cdots y_{\varphi(i+1)-1} \qquad 0 \leqslant i \leqslant p$$

Elle se rétracte sur (0,1) par :

$$(p,x) \xrightarrow{\delta_{p+1}} (p+1,y^p) \xleftarrow{\delta_p} (p,x^{p-1}) \xrightarrow{\delta_p} (p+1,y^{p-1}) \longleftarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow (p+1,y^o) \xleftarrow{\delta_o} (p,1) \longrightarrow (0,1)$$

où
$$x^i = (x_o,x_1,\dots,x_{i-1},x_i x_{i+1} x_{i+2}\dots x_p,\underbrace{1,1,\dots,1}_{p-i})$$
$$y^i = (x_o,x_1,\dots,x_{i-1},x_i x_{i+1} x_{i+2}\dots x_p,\underbrace{1,1,\dots,1}_{p+1-i})$$

Si M est un groupe abélien, $\underline{K}(M;n)$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{L}(M;n)$ formée des couples (p,x) tels que x appartient à $Z_N^n(\underline{\Delta}(p);M)$.

L'homomorphisme :

$$C_N^n(\underline{\Delta}(p);M) \xrightarrow{\quad d \quad} Z_N^{n+1}(\underline{\Delta}(p);M)$$

définit un morphisme :

$$\underline{L}(M;n) \xrightarrow{\quad \underline{d} \quad} \underline{K}(M;n+1)$$

[Proposition IV 1 b : $\underline{d}$ est une quasi-fibration.

Preuve : Soit un morphisme $(p,x) \xrightarrow{\varphi} (q,y)$ de $\underline{K}(M,n+1)$. Choisissons un élément z de $C_N^n(\underline{\Delta}(q);M)$ tel que d(z) = y et construisons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\underline{d}_g^{-1}(p,x) & \longrightarrow & \underline{d}_g^{-1}(q,y) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \underline{u}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \underline{v}} \\
\underline{d}_g^{-1}(p,0) & \longrightarrow & \underline{d}_g^{-1}(q,0)
\end{array}$$

par : $\underline{u}(\theta,t) = (\theta,t - C_N^n(\Psi \circ \theta)(z))$

$\underline{v}(\Psi,t) = (\Psi,s - C_N^n(\Psi)(z))$.

Il est clair que $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont des isomorphismes. On peut donc supposer que $y = 0$.

On construit alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{d}_g^{-1}(p,0) \arrow[rr] \arrow[dr, "\underline{i}"] & & \underline{d}_g^{-1}(q,0) \arrow[dl, "\underline{j}"'] \\
& \underline{K}(M;n) &
\end{tikzcd}$$

par : $\underline{i}([r] \xrightarrow{\theta} [p], z) = (r,z)$

$\underline{j}([r] \xrightarrow{\psi} [q], z) = (r,z)$

Pour tout (m,z) de $\underline{K}(M;n)$, $\underline{i}_g^{-1}(m,z)$ est la catégorie des couples d'applications croissantes au sens large :

$$([r] \longrightarrow [m], [r] \longrightarrow [p])$$

elle est filtrante à gauche donc homotopiquement triviale. Par suite, $\underline{i}$, et donc aussi $\underline{j}$, est une équivalence d'homotopie faible; il est donc de même de $\underline{d}_g^{-1}(p,0) \longrightarrow \underline{d}_g^{-1}(q,0)$.

Corollaire IV 1 c : Pour tout $n \geqslant 0$:

$$\pi_p(\underline{K}(M;n)) = 0 \qquad \text{si } p \neq n$$

$$\pi_n(K(M;n)) \simeq M.$$

Preuve : Cela résulte du théorème B et du calcul de l'homotopie des fibres à gauche; or $\underline{d}_g^{-1}(0,0) = \underline{K}(M;n)$.

Remarque IV 1 d : $\underline{d}^{-1}(p,x)$ a le type d'homotopie de la catégorie discrète dont l'ensemble des objets est $Z_N^n(\Delta(p);M)$. Ce type d'homotopie est donc variable quand (p,x) varie. Par suite $\underline{d}$ n'est pas une fibration.

Proposition IV 1 e : Pour tout $n \geqslant 0$, $H^n(\underline{I};M) \xrightarrow{\sim} [\underline{I},\underline{K}(M,n)]$. (c VI 2 c).

<u>Preuve</u> i) Tout élément x de $Z^n(\underline{I};M)$ définit un morphisme :

$$\underline{B}(\underline{I}) \xrightarrow{\underline{x}} \underline{K}(M;n)$$

$$(p, I_0 \to I_1 \to \dots \to I_p) \rightsquigarrow (p, x') \text{ avec } x'([n] \xrightarrow{\varphi} [p]) =$$

$$x(I_{\varphi(0)} \to I_{\varphi(1)} \to \dots \to I_{\varphi(p)})$$

et une application :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,M) & \xrightarrow{h'_x} & Z^n(\underline{I};M) \\ u & \rightsquigarrow & Z^n(id;u)(x), \end{array}$$

de telle manière que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^n(\underline{K}(M,n);M) \arrow[r, "H^n(\underline{x};M)"] \arrow[d, "h^n"] & H^n(\underline{B}(\underline{I});M) \\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,M) \arrow[r, "h_x"] & H^n(\underline{I};M) \arrow[u, "H^n(\Psi(I);M)"'] \end{tikzcd}$$

où h_x est induite par h'_x, soit commutatif (h^n est l'homomorphisme de Hurewicz et $\Psi(\underline{I})$ a été défini en C VI 2 b).

Il en résulte que 2 éléments cohomologues x et y de $\underline{Z}^n(\underline{I};M)$ donnent des morphismes $\underline{x}$ et $\underline{y}$ faiblement homotopes; d'où :

$$H^n(\underline{I};M) \longrightarrow [\underline{I}, \underline{K}(M,n)]$$

ii) Inversement, tout morphisme $\underline{B}^p(\underline{I}) \xrightarrow{\underline{u}} \underline{K}(M,n)$ définit par composition :

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,M) \xleftarrow[\sim]{h^n} H^n(\underline{K}(M,n);M) \xrightarrow{H^n(\underline{u};M)} H^n(\underline{B}^p(\underline{I});M) \xleftarrow[\sim]{H^n(\Psi^n(\underline{I});M)} H^n(\underline{I};M)$$

une application :

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,M) \xrightarrow{h_{\underline{u}}} H^n(\underline{I};M)$$

d'où une application :

$$\begin{array}{ccc} [\underline{I}, \underline{K}(M,n)] & \longrightarrow & H^n(\underline{I};M) \\ \underline{u} & \rightsquigarrow & h_{\underline{u}}(id) \end{array}$$

inverse de la précédente.

2) <u>Définition</u> IV 2 a : Un $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est <u>pseudo-fibré</u> si :

i) $\underline{u}$ est quasi-fibré

ii) Tout $\underline{C}$-morphisme $\underline{J}' \xrightarrow{\underline{f}'} \underline{I}'$ est faiblement homotope (C VI 2 c) à un morphisme $\underline{J}'_1 \xrightarrow{\underline{f}'_1} \underline{I}'$ tel que dans le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} \underline{I} \arrow[r, "\underline{u}"] & \underline{I}' \\ \underline{J} \arrow[u, "\underline{f}"] \arrow[r, "\underline{v}"] & \underline{J}'_1 \arrow[u, "\underline{f}'_1"'] \end{tikzcd}$$

$\underline{v}_g^{-1}(J'_1) \longrightarrow \underline{u}_g^{-1}(f'_1(J'_1))$ soit une équivalence d'homotopie faible pour tout J'_1.

<u>Exemple</u> IV 2 b : $\underline{L}(M;n) \xrightarrow{\underline{d}} \underline{K}(M;n+1)$ est pseudo-fibré. En effet, par IV 1 e, tout morphisme $\underline{I}' \xrightarrow{\underline{u}} \underline{K}(M;n+1)$ est faiblement homotope à un morphisme de la forme $\underline{B}(\underline{I}') \xrightarrow{\underline{x}} \underline{K}(M;n+1)$ où $x \in Z^{n+1}(\underline{I}';M)$. Dans le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} \underline{L}(M;n) \arrow[r, "\underline{d}"] & \underline{K}(M;n+1 \\ \underline{I} \arrow[u] \arrow[r, "\underline{v}"] & \underline{B}(\underline{I}') \arrow[u, "\underline{x}"'] \end{tikzcd}$$

$\underline{v}_g^{-1}(p, I'_i \rightarrow I'_1 \rightarrow \ldots \rightarrow I'_p)$ est la catégorie des couples $([q] \xrightarrow{\varphi} [p], x')$ avec φ croissante au sens large $x' \in C^n_N(\underline{\Delta}(q);M)$ et $d(x') = Z^{n+1}_N(\varphi)\ (\underline{x}(\ , I'_o \rightarrow I'_1 \rightarrow . \rightarrow I'_p))$. Le morphisme :

$$\underline{v}_g^{-1}(p, I'_o \rightarrow I'_1 \rightarrow .. \rightarrow I'_p) \rightarrow \underline{d}_g^{-1}(\underline{x}(p, I'_o \rightarrow I'_1 \rightarrow \rightarrow I'_p))$$

est donc en fait une égalité.

<u>Conséquence</u> IV 2 c : Pour toute petite catégorie connexe et pointée $\underline{I}$, il existe une suite de pseudo-fibrations

$$\underline{I}_{n+1} \xrightarrow{\quad \underline{p}_n \quad} \underline{B}(\underline{I}_n) \qquad \underline{I}_o = \underline{I}$$

telles que :

i) Les fibres à gauche de $\underline{p}_n$ ont le type d'homotopie de $\underline{K}(\pi_{n+1}(\underline{I}),n)$

ii) $\pi_p(\underline{I}_n) = 0$ pour $p \leqslant n$

iii) Si $\underline{I}_n \xrightarrow{\underline{q}_n} \underline{I}$ est défini par :

$$\underline{q}_n = \psi^n(\underline{I}) \circ B^{n-1}(\underline{p}_o) \circ \dots \circ B(\underline{p}_{n-2}) \circ \underline{p}_{n-1}.$$

Alors, $\pi_p(\underline{q}_n)$ est un isomorphisme pour $p > n$.

Pour tout $\underline{C}_o^*$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$, il existe une suite de diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \underline{I}'_{n+1} \arrow[r, "\underline{p}'_n"] & \underline{B}(\underline{I}'_n) \\ \underline{I}_{n+1} \arrow[u, "\underline{u}_{n+1}"'] \arrow[r, "\underline{p}_n"] & \underline{B}(\underline{I}_n) \arrow[u, "\underline{B}(\underline{u}_n)"'] \end{tikzcd} \qquad \underline{u}_o = \underline{u}$$

où $\underline{p}_n$ et $\underline{p}'_n$ sont des pseudo-fibrations ayant les propriétés ci-dessus.

V - Morphismes quasi-fibrés dans $\underline{\text{Pro}}$-$\underline{C}^*$.

On se propose, dans ce paragraphe, d'étendre le théorème II 2 a aux morphismes de $\underline{\text{Pro}}$-$\underline{C}$. Compte-tenu de A III 1 b, on se limitera aux transformations naturelles de foncteurs de la forme $(\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N},S')$.

1) Soit

$$(\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N},S')$$

un morphisme de $\underline{\text{Pro}}$-$\underline{C}_o^*$. On suppose, pour simplifier, que pour tout N les fibres à gauche de $\varphi(N)$ sont non vides et connexes.

Passant aux revêtements universels et utilisant I 2 a, on construit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varphi"] & & S' \\ \tilde{S} \arrow[u, "\pi"] \arrow[rr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}_1"'] & & \tilde{S}' \arrow[u, "\pi'"'] \\ & K^2(\tilde{\varphi}) \arrow[ur, "\pi_{\tilde{\varphi}}"'] & \end{tikzcd}$$

avec $\quad \underline{N} \xrightarrow{K^2(\tilde{\varphi})} \underline{\text{Pro}}\text{-}\underline{C}_1^*$

$\qquad\quad N \rightsquigarrow \underline{K}^2(\tilde{\varphi}(N))$

tel que, pour tout point $\underline{s}'$ de $K^2(\tilde{\varphi})$, on ait une suite exacte :

$$\text{V 1 a : } \ldots \longrightarrow \underline{\pi}_n(S) \longrightarrow \underline{\pi}_n(S') \longrightarrow \underline{\pi}_{n-1}((\tilde{\varphi}_1)_H^{-1}(\underline{s}')) \longrightarrow \underline{\pi}_{n-1}(S) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \underline{\pi}_2(S') \longrightarrow \pi_1((\varphi_H)^{-1}(\pi' \circ \pi_{\tilde{\varphi}}(s'))) \longrightarrow \underline{\pi}_1(S) \longrightarrow \underline{\pi}_1(S')$$

Passant au "foncteur point" : on en déduit un diagramme commutatif (dans $\underline{C}^*$) :

$$\begin{tikzcd}
\underline{P}(S) \arrow[rr, "\underline{P}(\varphi)"] & & \underline{P}(S') \\
\underline{P}(\tilde{S}) \arrow[u, "\underline{P}(\pi)"] \arrow[rr, "\underline{P}(\tilde{\varphi})"] \arrow[dr, "P(\tilde{\varphi}_1)"'] & & \underline{P}(\tilde{S}') \arrow[u, "\underline{P}(\pi')"'] \\
& P(K^2(\tilde{\varphi})) \arrow[ur, "P(\pi_{\tilde{\varphi}})"'] &
\end{tikzcd}$$

tel que :

<u>Propriété</u> V 1 b : Si $\underline{P}(S)$ et $\underline{P}(S')$ sont connexes :

i) $\underline{P}(\pi)$ et $\underline{P}(\pi')$ sont des revêtements galoisiens de groupe $\pi_1(S)$ et $\pi_1(S')$. (voir A exemple III 2 b).

ii) Si de plus, $\underline{P}(\tilde{S}')$ est simplement connexe, la partie inférieure du diagramme est isomorphe à :

$$\begin{tikzcd}
\underline{P}(\tilde{S}) \arrow[rr, "\underline{P}(\tilde{\varphi})"] \arrow[dr, "\underline{P}(\tilde{\varphi})_1"'] & & \underline{P}(\tilde{S}') \\
& \underline{K}^2(\underline{P}(\tilde{\varphi})) \arrow[ur, "p_{\underline{P}(\tilde{\varphi})}"'] &
\end{tikzcd}$$

(il suffit d'expliciter $\underline{P}(K^2(\tilde{\varphi}))$).

<u>Définition</u> V 1 c : Un morphisme de <u>Pro-C</u> :

$$(\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N},S')$$

est <u>quasi-fibré</u> si, pour tout morphisme $\underline{s}' \longrightarrow \underline{t}'$ de $\underline{P}(S')$,

$$\varphi_g^{-1}(\underline{s}') \longrightarrow \varphi_g^{-1}(\underline{t}')$$

est une équivalence d'homotopie.

Nous rappelons (A III 2 c) que $\varphi_g^{-1}(s')$ désigne la pro-catégorie : $N \rightsquigarrow [\varphi(N)]_g^{-1}(\underline{s}'(N))$.

2) Si $\mathcal{C}$ est une classe complète de groupes, nous désignons par $\underline{C}(\mathcal{C})$ la sous-catégorie de $\underline{C}$ formée des objets $\underline{I}$ tels que $\pi_n(\underline{I})$ appartient à $\mathcal{C}$ (en fait, ses composantes connexes) pour tout $n > 0$ et des morphismes $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ tels que $\pi_n(\underline{u}_g^{-1}(I'))$ appartient à $\mathcal{C}$ pour tout n et tout I' de $\underline{I}'$.

<u>Théorème</u> V 2 a : Soient $\mathcal{C}$ une classe complète de groupes <u>finis</u> et :

$$(\underline{N},S) \xrightarrow{\varphi} (\underline{N},S')$$

un morphisme quasi-fibré de $\underline{\text{Pro}}\text{-}\underline{C}_o^*(\mathcal{C})$ tel que :

i) Pour tout $\underline{N}(S')^\circ \xrightarrow{F'} (\underline{\text{Ens}}\text{-}\underline{\text{finis}})$

$$\varinjlim_N \varprojlim_{I'} F'(N,I') \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\underline{s}'\in P(S')} \varinjlim_N F'(N,\underline{s}'(N))$$

ii) Pour tout $\underline{N}(S')^\circ \xrightarrow{F'} (\mathcal{C}\text{-}\underline{\text{Ab}})$ et tout $n \geqslant 0$

$$H^n(S';F') \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^n(\underline{P}(S');\underline{u}^*(F'))$$

(notation de B III 2)

Alors, pour tout point $\underline{s}'$ de S',

$$\varphi_g^{-1}(\underline{s}') \longrightarrow \varphi_H^{-1}(\underline{s}')$$

est une équivalence d'homotopie faible.

__Preuve__ : La condition i) entraîne (A III 2 c iii) que

$$\underline{\pi}_1(\varphi_g^{-1}(\underline{s}')) \xrightarrow{\sim} \underline{\pi}_1(\varphi_H^{-1}(\underline{s}'))$$

Il suffit donc de démontrer que $\underline{\pi}_n(\varphi_g^{-1}(\underline{s}')) \xrightarrow{\sim} \underline{\pi}_n(\varphi_H^{-1}(\underline{s}'))$ pour $n > 1$. Nous procédons en 2 pas :

- __1er pas__ :

i) La condition ii) est vérifiée pour $\tilde{S}'$.

Compte-tenu de (B III 2 b), il suffit de montrer que pour tout $\underline{N}(\tilde{S}')^{\circ} \xrightarrow{F'} (\mathcal{C}\text{-}\underline{Ab})$ tel que $\underline{u}^*(F) = 0$ alors $\underline{u}^*(\pi'_*(F')) = 0$.

Or :

$$\underline{u}^*(\pi'_*(F'))(\underline{s}') = \varinjlim_N \prod_{g \in \pi_1(S'(N))} F'(N, \underline{s}'(N).g) \xleftarrow{\sim} \prod_{(g_N) \in \pi_1(S')} \varinjlim_N F'(N, \underline{s}'(N)g_N) = 0$$

car les limites inductives filtrantes commutent aux produits finis.

ii) La condition ii) est vérifiée pour $K^2(\tilde{\varphi})$.

Soit $\underline{N}(K^2(\varphi))^{\circ} \xrightarrow{F'} (\mathcal{C}\text{-}\underline{Ab})$ tel que $\underline{u}^*(F') = 0$. Ecrivons la suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = \varinjlim_N H^p(\tilde{S}'(N); H^q(\pi_1(\tilde{\varphi}(N)_H^{-1}(\ )); F'(N,\ )) \Longrightarrow H^*(K^2(\varphi), F')$$

Le foncteur :

$$\begin{array}{ccc} \underline{N}(S')^{\circ} & \xrightarrow{H^q(\pi_1(\tilde{\varphi})_H)} & (\mathcal{C}\text{-}\underline{Ab}) \\ (N, I') & \rightsquigarrow & H^q(\pi_1(\tilde{\varphi}(N)_H^{-1}(N, I')); F'(N, I')) \end{array}$$

est tel que $\underline{u}^*(H^q(\pi_1(\tilde{\varphi})_H))(\underline{s}') = H^q(\varprojlim \pi_1(\tilde{\varphi}(N)_H^{-1}(N, \underline{s}'(N)); \underline{u}^*(F)(\underline{N}))$,

donc $H^n(K^2(\varphi), F') = 0$ pour tout $n > 0$.

- __2ème pas__ : Compte-tenu de V 1, et de ce qui précède, on peut supposer que, pour tout N, $\varphi(N)$ est un morphisme de $\underline{C}_1(\mathcal{C})$ à fibres à gauche non vides, connexes et simplement connexes. Le théorème de Zeeman, appliqué aux 2 suites spectrales :

$$E_2^{p,q} = H^p(S';G) \otimes H^q(\varphi_g^{-1}(\underline{s}');G) \Longrightarrow H^*(S;G)$$

$$E^{p,q} = H^p(S';G) \otimes H^q(\varphi_H^{-1}(\underline{s}');G) \Longrightarrow H^*(S;G)$$

entraîne que $H^p(\varphi_H^{-1}(\underline{s}');G) \xrightarrow{\sim} H^p(\varphi_g^{-1}(\underline{s}');G)$ pour tout $p \geqslant 0$ et tout G de ($\mathcal{C}$-$\underline{Ab}$). Ce qui achève la démonstration.

Corollaire V 2 b : Sous les conditions précédentes, la suite :

$$\ldots \longrightarrow \underline{\pi}_n(S) \longrightarrow \underline{\pi}_n(S') \longrightarrow \underline{\pi}_{n-1}(\varphi_g^{-1}(s')) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow \underline{\pi}_o(\varphi_g^{-1}(s'))$$

est exacte.

E. - COMPLEXES SEMI-SIMPLICIAUX ET CATÉGORIES.

Si $\underline{S}(\underline{S}^*)$ désigne la catégorie des C.S.S (C.S.S pointés), on se propose de démontrer que les catégories $\underline{S}^*$ et $\underline{C}^*$ sont équivalentes pour l'homotopie.

I - Les foncteurs S,C et C_N.

1) On définit des foncteurs :

$$\underline{C} \xrightarrow{S} \underline{S} \quad , \quad \underline{S} \xrightarrow{C} \underline{C} \quad \text{et} \quad \underline{S} \xrightarrow{C_N} \underline{C}$$

par :

$$- \; S(\underline{I})_n = \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(\underline{\Delta}(n),\underline{I})$$

- $C(X)$ = catégorie des couples (n,x) où $n \in \mathbb{N}_o$ et $x \in X_n$ et des morphismes $(n,x) \xrightarrow{\varphi} (m,y)$ où $[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$ est une application croissante, au sens large, telle que $X(\varphi)(y) = x$

- $C_N(X)$ est la sous-catégorie de $C(X)$ obtenue par restriction aux applications φ strictement croissantes.

On définit de même S^*, C^* et C^*_N.

Propriétés I 1 a :

i) Pour tout n et tout groupe abélien G :

$$C(K(G;n)) = \underline{K}(G;n) \qquad \text{(D IV 1)}$$

ii) C et C_N commutent aux produits fibrés.

iii) Si $X \xrightarrow{u,v} Y$ sont des $\underline{S}^*$-morphismes homotopes. $C(u)$ et $C(v)$ sont $\underline{C}^*$-homotopes.

Proposition I 1 b : Pour tout X de $\underline{S}^*$; l'inclusion :

$$\underset{N}{C}(X) \xrightarrow{i} C(X)$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Preuve : Pour tout (n,x) de $C(X)$, soit $\underline{I}(n,x)$ la sous-catégorie de $\underline{i}_g^{-1}(n,x)$ formée des applications strictement croissantes de la forme $[p] \longrightarrow [n]$. L'inclusion : $\underline{I}(n,x) \xrightarrow{j} \underline{i}_g^{-1}(n,x)$ est une équivalence d'homotopie. En effet, le morphisme $\underline{i}_g^{-1}(n,x) \xrightarrow{k} \underline{I}(n,x)$ où $\underline{k}(\varphi)$ = application injective déduite de φ par la factorisation naturelle, est tel que $\underline{k} \circ \underline{j}' = \mathrm{id}$ et que $\underline{j} \circ \underline{k}$ soit homotope à l'identité. Comme $\underline{I}(n,x)$ est contractile, $\underline{i}_g^{-1}(n,x)$ est homotopiquement triviale.

2) Pour tout X de $\underline{S}$, on pose :

$$Sd(X) = S \circ C_N(X)$$

Un simplexe d'ordre n de Sd(X) est donc la donnée :

i) D'une suite d'applications strictement croissantes :

$$[m_o] \xrightarrow{\varphi_o} [m_1] \longrightarrow \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} [m_n]$$

ii) D'un élément x de X_{m_n}.

Sd(X) est la subdivision barycentrique de X.

On définit une transformation naturelle :

$$Sd(X) \xrightarrow{\varphi(X)} X$$

par :

$$\varphi(X)((\varphi_o, \ldots, \varphi_{n-1});x) = X(\varphi)(x)$$

$$\text{où } [n] \xrightarrow{\varphi} [m_n] \quad \text{est défini par } \varphi(i) = m_i$$

Proposition I 2 a (Zisman) : Pour tout X de $\underline{S}^*$:

$$Sd(X) \xrightarrow{\varphi(X)} X$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Pour tout $\underline{I}$ de $\underline{C}$, on pose :

$$\underline{B}(\underline{I}) = C_N \circ S(\underline{I}) \qquad \text{(barycentre de } \underline{I}\text{)}$$

Un objet de $\underline{B}(\underline{I})$ est donc un couple $(n, I_o \xrightarrow{u_o} I_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{u_{n-1}} I_n)$
Un morphisme de $(n, I_o \xrightarrow{u_o} I_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{u_{n-1}} I_n)$ dans $(m, J_o \xrightarrow{v_o} J_1 \rightarrow . \xrightarrow{v_m} J_m)$ est donc une application strictement croissante $[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$ telle que :

$$J_{\varphi(0)} \longrightarrow J_{\varphi(1)} \longrightarrow \dots \longrightarrow J_{\varphi(n)} = I_o \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_n.$$

On définit une transformation naturelle :

$$\underline{B}(\underline{I}) \xrightarrow{\Psi(\underline{I})} \underline{I}$$

par

$$\Psi(\underline{I})(n, I_o \xrightarrow{u_o} I_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{u_{n-1}} I_n) = I_n.$$

Proposition I 2 b : Pour tout I de C :

$$\underline{B}(\underline{I}) \xrightarrow{\Psi(\underline{I})} \underline{I}$$

est une équivalence d'homotopie faible.

<u>Preuve</u> : Soit $C \circ S(\underline{I}) \xrightarrow{\Psi'(\underline{I})} \underline{I}$ l'extension naturelle de $\Psi(\underline{I})$; compte-tenu de I 1 b), il suffit de montrer que $\Psi'(\underline{I})$ est une équivalence d'homotopie faible. Pour tout I de $\underline{I}$, la catégorie $\underline{J} = [\Psi'(\underline{I})]_g^{-1}(I)$ est formée des suites de la forme $(n, I_o \xrightarrow{u_o} I_1 \rightarrow \dots \longrightarrow I_n \xrightarrow{u_n} I)$. On construit une rétraction de $\underline{J}$ en $(0, I \xrightarrow{id} I)$:

$$\underline{J} \xrightarrow{\underline{r}} \Lambda(\underline{J})$$

par :

$$\underline{r}(n, I_o \xrightarrow{u_o} I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \xrightarrow{u_n} I) = (0, I \xrightarrow{id} I) \longleftrightarrow (n, I \xrightarrow{id} I \rightarrow . \xrightarrow{id} I) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\delta_o} (n+1, I_o \xrightarrow{v_o} I \xrightarrow{id} I \rightarrow . \xrightarrow{id} I) \xleftarrow{\delta_1} (n, I_o \xrightarrow{v_o} I \xrightarrow{id} I \rightarrow \xrightarrow{id} I) \xrightarrow{\delta_1} \dots$$
$$\dots \xleftarrow{\delta_{n+1}} (n, I_o \xrightarrow{u_o} I_1 \xrightarrow{u_1} I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \xrightarrow{u_n} I)$$

avec $v_i = u_n \circ u_{n-1} \circ \dots \circ u_i$.

Propriétés I 2 c :

i) Pour tout $\underline{C}^*$-morphisme $C_N(X) \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}$, les morphismes $\psi(\underline{I}) \circ C_N(S(\underline{u}))$ et $\underline{u} \circ C_N(\varphi(X))$ de $C_N \circ S \circ C_N(X)$ dans $\underline{I}$ sont $\underline{C}^*$-homotopes.

ii) Pour tout $\underline{C}^*$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} C_N(X)$, les morphismes $\underline{u} \circ \psi(\underline{I})$ et $C_N(\varphi(X) \circ S(\underline{u}))$ de $B(\underline{I})$ dans $C_N(X)$ sont $\underline{C}^*$-homotopes.

Il suffit de les expliciter.

II - Les groupes $\pi_n(X)$ et $\pi_n(C_N(X))$.

Si X est un C.S.S pointé connexe, nous allons montrer que les groupes $\pi_n(X)$, calculés simplicialement, et les groupes $\pi_n(C_N(X))$, calculés par la méthode indiquée dans les paragraphes A et C, sont isomorphes.

1) Pour tout groupe G, il est clair que :

$$H^1(X;G) \xrightarrow{\sim} H^1(C_N(X);G)$$

D'autre part, tout système local F de groupes abéliens sur $C_N(X)$ est un système local sur X. L'homomorphisme :

$$C^n(X;F) \xrightarrow{f^n} C^n(C_N(X);F)$$

défini par

$$f^n(u)\left([m_0] \xrightarrow{\varphi_0} [m_1] \to \dots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} [m_n], x\right) = F(\varphi)^{-1}\left(u_{X(\varphi)(x)}\right)$$

où $[n] \xrightarrow{\varphi} [m_n]$ est défini par $\varphi(i) = m_i$ est une équivalence d'homotopie.

Donc :

$$H^n(X;F) \xrightarrow{\sim} H^n(C_N(X);F) \qquad n \geq 0.$$

2) Proposition II 2 a : Soit un $\underline{S}$-morphisme $X \xrightarrow{f} Y$. Pour tout n et tout y de Y_n, l'inclusion naturelle :

$$[C_N(f)]_g^{-1}(n,y) \xrightarrow{i} C_N(f^{-1}(y))$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Preuve : Rappelons que $f^{-1}(y)$ est le C.S.S dont les simplexes d'ordre n sont les couples $([p] \xrightarrow{\varphi} [n],x)$ où φ est croissante au sens large et $x \in X_p$ vérifie $f(x) = Y(\varphi)(y)$. Pour tout objet $([p] \xrightarrow{\varphi} [n],x)$ de $C_N(f^{-1}(y))$, $\underline{i}_g^{-1}(\varphi,x)$ est la catégorie des applications strictement croissantes de la forme $[r] \xrightarrow{\psi} [p]$ telles que $\varphi\circ\psi$ soit strictement croissante. Cette catégorie est homotopiquement triviale. En effet, on peut supposer φ surjective donc de la forme $\varphi = \sigma_{i_{n-p}} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}$ avec $i_1 > \dots > i_{n-p}$. On construit alors une rétraction $\underline{r}$ de $\underline{i}_g^{-1}(\varphi,x)$ sur $\delta = \delta_{i_1} \circ \dots \circ \delta_{i_{n-p}}$ par

$$\underline{r}(\psi) = ([r] \xrightarrow{\psi} [p]) \xrightarrow{\theta} ([n] \xrightarrow{\delta'} [p]) \xleftarrow{\nu} ([n-s] \xrightarrow{\partial\circ\nu} [p]) \xrightarrow{\nu} ([n] \xrightarrow{\delta} [p])$$

avec : - $\delta = \delta_{i'_1} \circ \dots \circ \delta_{i'_{n-p}}$

$$\delta_{i'_{j_t}} = \delta_{i_{j_t}+1} \qquad \text{pour } t = 1,2,\dots,s ; j_1 > j_2 > \dots > j_1$$

$$\delta_{i'_j} = \delta_{i_j} \qquad \text{pour } j \notin \{j_1,\dots,j_s\}.$$

- $\psi = \delta' \circ \theta$

- ν = unique application strictement croissante de $[n-1]$ dans $[n]$ telle que $\delta \circ \nu = \delta' \circ \nu$.

Théorème II 2 b : Si un S-morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ est fibré au sens de Kan, le morphisme $C_N(X) \xrightarrow{C_N(f)} C_N(Y)$ est pseudo-fibré.

Preuve :

i) $C_N(f)$ est quasi-fibré.

Il suffit en effet de remarquer que pour tout groupe G, $y \rightsquigarrow H^1(f^{-1}(y);G)$ est un système local sur Y, et que pour tout $\pi_1(f^{-1}(y))$-module M, $y \rightsquigarrow H^n(f^{-1}(y);M)$ est un système local sur Y pour tout $n \geqslant 0$.

ii) Pour tout $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{u} C_N(Y)$, construisons le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ Z \arrow[u] \arrow[r, "g"] & S(I) \arrow[u, "\varphi(Y) \circ S(\underline{u})"'] \end{tikzcd}$$

g est fibré au sens de Kan et le diagramme

$$\begin{tikzcd} C_N(X) \arrow[r, "C_N(f)"] & C_N(Y) \\ C_N(Z) \arrow[u] \arrow[r, "C_N(g)"] & B(\underline{I}) \arrow[u, "C_N(\varphi(Y) \circ S(\underline{u}))"'] \end{tikzcd}$$

est cartésien dans $\underline{C}$; d'autre part $C_N(\varphi(Y) \circ S(\underline{u}))$ est faiblement homotope à $\underline{u}$ (I 2 c ii)).

Théorème II 2 c : Pour tout C.S.S pointé connexe X et tout $n > 0$, les groupes $\pi_n(X)$ et $\pi_n(C_N(X))$ sont isomorphes.

Preuve : Posons $X_n = \mathrm{cosk}_n(X)$. De la suite de fibrations de Kan$(X_{n+1} \to X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, on déduit (II 2 b) une suite de pseudo-fibrations $(C_N(X_{n+1}) \to C_N(X_n))$ dont les fibres à gauche ont le type d'homotopie de $\underline{K}(\pi_{n+1}(X);n)$ (II 2 a, I 1 b et I 1 a i).

i) $H^1(X_n;G) = *$ pour tout G et tout $n \geqslant 1$ et $H^m(X_n;\mathbb{Z}) = 0$ pour tout $m \leqslant n$; par II 1, il en est de même de $H^1(C_N(X_n);G)$ et $H^m(C_N(X_n);\mathbb{Z})$.

Donc $\pi_m(C_N(X_n)) = 0$ pour $m \leqslant n$.

ii) De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_{n+1}(C_N(X_{n+1})) \longrightarrow \pi_{n+1}(C_N(X_n)) \longrightarrow \pi_n(\underline{K}(\pi_{n+1}(X);n)) \longrightarrow 0$$

de la nullité de $\pi_{n+1}(C_N(X_{n+1}))$ et de D IV 1 c, on déduit que $\pi_{n+1}(C_N(X_n)) \simeq \pi_{n+1}(X)$.

iii) D'autre part

$$\pi_m(C_N(X_{n+1})) \xrightarrow{\sim} \pi_m(C_N(X_n)) \quad m > n+1 .$$

Donc pour tout $m > 0$:

$$\pi_m(C_N(X)) = \pi_m(C_N(X_o)) \xleftarrow{\sim} \pi_m(C_N(X_{m-1})) \xrightarrow{\sim} \pi_m(X)$$

Corollaire II 2 d : Pour toute petite catégorie connexe pointé $\underline{I}$ et tout $n > 0$, les groupes $\pi_n(\underline{I})$ et $\pi_n(S(\underline{I}))$ sont isomorphes.

C'est en effet une conséquence de I 2 b et II 2 c.

III - Les ensembles $[X,Y]_e$ et $[C_N(X),C_N(Y)]$.

1) Proposition III 1 a : Pour tout couple f,g de $\underline{S}^*$-morphismes faiblement homotopes, $C_N(f)$ et $C_N(g)$ sont faiblement homotopes.

Preuve : Posons $X_n = \mathrm{cosk}_n(X)$, $Y_n = \mathrm{cosk}_n(Y)$. Si $X \xrightarrow{f,g} Y$ sont les $\underline{S}^*$-morphismes donnés, on peut construire une suite de diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} X_{n+1} & \longrightarrow & X_n \\ f_{n+1} \downarrow\downarrow g_{n+1} & & f_n \downarrow\downarrow g_n \\ Y_{n+1} & \longrightarrow & Y_n \end{array} \qquad f_o = f \text{ et } g_o = g$$

où les morphismes horizontaux sont des fibrations de Kan. Par passage au foncteur C_N, on obtient des diagrammes commutatifs (II 2 c) :

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(C_N(X_n)) & \xrightarrow{\sim} & \pi_{n+1}(X) \\ \Big\downarrow\Big\downarrow & & \pi_{n+1}(f)\Big\downarrow\Big\downarrow\pi_{n+1}(g) \\ \pi_{n+1}(C_N(Y_n)) & \xrightarrow{\sim} & \pi_{n+1}(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(C_N(X_n)) & \xrightarrow{\sim} & \pi_{n+1}(C_N(X)) \\ \Big\downarrow\Big\downarrow & & \Big\downarrow\Big\downarrow \\ \pi_{n+1}(C_N(Y_n)) & \xrightarrow{\sim} & \pi_{n+1}(C_N(Y)) \end{array}$$

Donc $\pi_n(f) = \pi_n(g)$ pour tout n entraîne $\pi_n(C_N(f)) = \pi_n(C_N(g))$ pour tout n.

Corollaire III 1 b : Pour tout couple $\underline{u},\underline{v}$ de $\underline{C}^*$-morphismes faiblement homotopes, $S(\underline{u})$ et $S(\underline{v})$ sont faiblement homotopes.

2) Si X et Y sont des C.S.S pointés connexes, on désigne par $[X,Y]_e$ l'ensemble des classes d'équivalence des couples $(n, Sd^n(X) \xrightarrow{f} Y)$ pour la relation :

$(n,f) \sim (m,g) \Longleftrightarrow \exists\ p \geqslant n,m$ tel que $f \circ \varphi^{p-n}(Sd^n(X))$ et
$g \circ \varphi^{p-m}(Sd^m(X))$ sont faiblement homotopes dans S^*.

$[X,Y]_e$ est l'ensemble élargi des classes d'homotopie de X dans Y.

D'où, par III 1 a, une application naturelle (voir C VI 2 c) :

$$[X,Y]_e \longrightarrow [C_N(X), C_N(Y)].$$

Théorème III 2 a : Pour tout couple X,Y de C.S.S pointés connexes :

$$[X,Y]_e \xrightarrow{\sim} [C_N(X), C_N(Y)].$$

Preuve :

i) Injectivité - Si (n,f) et (m,g) sont tels que $C_N(f)$ et $C_N(g)$ sont faiblement homotopes, il existe un entier p tel que $C_N(f) \circ \psi^{p-n}(C_N(Sd^n(X)))$ et $C_N(g) \circ \psi^{p-m}(C_N(Sd^m(X)))$ le soient au sens habituel; donc $S(C_N(f)) \circ \psi^{p-n}(Sd^{n+1}(X))$ et $S(C_N(g)) \circ \varphi^{p-m}(Sd^{m+1}(X))$ sont faiblement homotopes et par suite $S(C_N(f))$ et $S(C_N(g))$ le sont aussi; il en est donc de même de f et g.

ii) Surjectivité : Par I 2c ii), tout $\underline{C}^*$-morphisme $B^n(C_N(X)) \xrightarrow{\underline{u}} C_N(Y)$ est l'image de $Sd^{n+1}(X) \xrightarrow{\Psi(Y) \circ S(\underline{u})} Y$.

Corollaire III 2 b : Pour tout couple $\underline{I},\underline{J}$ de petites catégories pointées connexes :

$$[\underline{I},\underline{J}] \xrightarrow{\sim} [S(\underline{I}),S(\underline{J})]_e$$

IV - Dictionnaire.

1) Si $\underline{I}$ est une petite catégorie, $D(\underline{I})$ désigne la catégorie des flèches de $\underline{I}$. Convenons de dire que deux $\underline{C}^*$-morphismes $\underline{u}$ et $\underline{v}$, de $\underline{I}$ dans $\underline{I}'$, sont fortement homotopes s'il existe un $\underline{C}^*$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{r}} D(\underline{I}')$ tel que $\underline{p}_o \circ \underline{r} = \underline{u}$ et $\underline{p}_1 \circ \underline{r} = \underline{v}$ (avec $\underline{p}_o(I \xrightarrow{f} J) = I$ et $\underline{p}_1(I \xrightarrow{f} J) = J$).

Proposition IV 1 : Deux $\underline{C}^*$-morphismes $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont fortement homotopes si et seulement si $S(\underline{u})$ et $S(\underline{v})$ sont homotopes.

Preuve : Si $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u},\underline{v}} \underline{I}'$ sont fortement homotopes suivant $\underline{I} \xrightarrow{\underline{r}} D(\underline{I}')$, on définit pour tout n, des applications :

$$S(\underline{I})_n \xrightarrow{k_n^i} S(\underline{I}')_{n+1}, \ i=0,1,\dots,n$$

par :

$$k_n^i(I_o \xrightarrow{u_o} I_1 \to \dots \xrightarrow{u_{n-1}} I_n) = \underline{u}(I_o) \xrightarrow{\underline{u}(u_o)} \dots \to \underline{u}(I_i) \xrightarrow{\underline{r}(I_i)} \underline{v}(I_i) \to \dots \xrightarrow{\underline{v}(u_{n-1})} \underline{v}(I_n)$$

qui est l'homotopie cherchée.

Réciproquement, si (k_n^i) définit une homotopie entre $S(\underline{u})$ et $S(\underline{v})$, on construit un morphisme :

$$\underline{I} \xrightarrow{\underline{r}} D(\underline{I}')$$

par $\underline{r}(I) = \underline{u}(I) \xrightarrow{k_o^o(I)} \underline{v}(I)$. Il suffit de vérifier que pour tout morphisme

$I \xrightarrow{u} J$ de $\underline{I}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{u}(I) \arrow[r, "k_o^o(I)"] \arrow[d, "\underline{u}(u)"'] & \underline{v}(I) \arrow[d, "\underline{v}(u)"] \\
\underline{u}(J) \arrow[r, "k_o^o(J)"] & \underline{v}(J)
\end{tikzcd}$$

est commutatif; or $d_1 \circ k_1^o(u) = \underline{v}(u) \circ k_o^o(I)$ et $d_1 \circ k_1^1(u) = k_o^o(J) \circ \underline{u}(u)$.

TABLEAU

$$\begin{tikzcd}
\text{(dans } \underline{C}^*\text{)} & & \text{(dans } \underline{S}^*\text{)} \\
\underline{u} \text{ et } \underline{v} \text{ fortement homotopes} \arrow[Rightarrow, d] \arrow[Leftrightarrow, rr] & & S(\underline{u}) \text{ et } S(\underline{v}) \text{ homotopes} \arrow[Rightarrow, dd] \\
\underline{u} \text{ et } \underline{v} \text{ homotopes} \arrow[Rightarrow, d] & & \\
\underline{u} \text{ et } \underline{v} \text{ faiblement homotopes} \arrow[Leftrightarrow, rr] & & S(\underline{u}) \text{ et } S(\underline{v}) \text{ faiblement homotopes}
\end{tikzcd}$$

2) Un $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est une K-fibration s'il possède la propriété (K) suivante ainsi que sa duale (K^*) :

(K) Pour tout couple $(I, \underline{u}(I) \xrightarrow{s'} J')$, la catégorie $\underline{u}^{-1}(I,s')$ des morphismes $I \xrightarrow{s} J$ tels que $\underline{u}(s) = s'$ est non vide et est telle que $\mathrm{Hom}(s_1,s_2)$ a un élément et un seul pour tout couple (s_1,s_2).

On vérifie aisément qu'un K-fibration est une fibration.

Proposition IV 2 : Un $\underline{C}$-morphisme $\underline{I} \xrightarrow{\underline{u}} \underline{I}'$ est une K-fibration si et seulement si $S(\underline{u})$ est une fibration au sens de Kan.

Preuve : Remarquons que la condition (K) est équivalente aux 3 conditions suivantes :

(K_o) : Pour tout (I,s'), $\underline{u}^{-1}(I,s')$ est non vide.

(K_1) : Pour tout couple $I \xrightarrow{f} J$, $I \xrightarrow{g} K$ de morphismes de $\underline{I}$ et tout morphisme $\underline{u}(J) \xrightarrow{h'} \underline{u}(K)$ de $\underline{I}'$ tel que $h' \circ \underline{u}(f) = \underline{u}(g)$, il existe $J \xrightarrow{k} K$ tel que $h \circ f = g$.

(K_2) : Pour tout $I \xrightarrow{f} J \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} K$ tel que $h \circ f = g \circ f$ et $\underline{u}(h) = \underline{u}(g)$ alors $h = g$.

Si (F_n) est la condition de Kan à l'ordre n, on voit facilement que :

$$(F_o) \Longleftrightarrow (K_o) \text{ et } (K_o^*)$$
$$(F_1) \Longleftrightarrow (K_1) \text{ et } (K_1^*)$$
$$(F_n) \Longleftrightarrow (K_2) \text{ et } (K_2^*) \qquad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Dans ce qui suit, un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de C.S.S est appelé une quasi-fibration si pour toute application croissante $[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$ et tout y de Y_m, $f^{-1}(Y(\varphi)(y)) \longrightarrow f^{-1}(y)$ est une équivalence d'homotopie faible.

TABLEAU

(dans $\underline{C}^*$) (dans $\underline{S}^*$)

$$\begin{tikzcd}
\underline{u} \text{ K-fibration} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & S(\underline{u}) \text{ fibration de Kan} \arrow[dd, Rightarrow] \\
\underline{u} \text{ fibration} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\underline{u} \text{ quasi-fibration} \arrow[r, Leftrightarrow] & S(\underline{u}) \text{ quasi-fibration.}
\end{tikzcd}$$

BIBLIOGRAPHIE.

A-M Artin-Mazur : *Etale homotopy (Lecture Notes in Mathematics - n° 100).*

E Evrard M : *Homotopie d'un espace topologique relativement à un recouvrement. Applications à l'homotopie des préschémas. (Thèse. Sc. math. Paris VII 1973).*

G-Z Gabriel-Zisman : *Calculus of fractions and homotopy theory (Ergebnisse der Mathematick n°35).*

Q Quillen : *Higher algebraic K-theory (Lecture Notes in Mathematics. n°341).*