LA THÉORIE DE L'HOMOTOPIE DE GROTHENDIECK

par

GEORGES MALTSINIOTIS

suivi de deux appendices par

DENIS-CHARLES CISINSKI

Version provisoire août 2001

Préface.

Le but de ce livre est de rendre accessible la très belle théorie de l'homotopie de Grothendieck, telle qu'elle est développée dans "Pursuing Stacks" ("À la poursuite des champs"). Il est basé sur une suite d'exposés que j'ai fait au groupe de travail " Algèbre et topologie homotopiques" à l'Institut de Mathématiques de Jussieu. Les idées, notions, propositions, théorèmes, et démonstrations dans le corps principal de ce travail sont directement inspirés par le texte de Grothendieck. La seule partie originale est formée par les deux appendices, par Denis-Charles Cisinski, où quelques affirmations sans démonstration, et conjectures de Grothendieck sont établies. De plus, dans le deuxième de ces appendices le lien des théorèmes A et B de Quillen avec la théorie de Grothendieck est explicité.

La lecture de ce livre ne remplace évidemment pas celle de "Pursuing Stacks". Son ambition est de rendre cette dernière plus facile, en donnant une exposition plus systématique (et plus "bourbachique") des idées de Grothendieck. Tous les sujets traités dans "la poursuite" ne sont pas couverts par ces notes. En particulier, il n'est pas fait mention d'infini-groupoïdes, ni d'abélianisation, ou schématisation des types d'homotopie, et l'aspect toposique n'est pas considéré (sauf dans l'introduction). De plus, la structure de journal "intime" mathématique, qui fait de "Pursuing Stacks" une lecture passionnante, pleine de surprises, et précieuse pour la compréhension de la génèse des concepts, est perdue.

Je voudrais remercier Alain Bruguières, Albert Burroni, et Bernhard Keller pour les innombrables discussions que j'ai eues avec eux, et Denis-Charles Cisinski pour sa lecture attentive du texte, pour une première rédaction du dernier paragraphe, et pour les deux appendices, issus de sa thèse, qu'il a accepté de joindre à ce livre. Je suis reconnaissant aux membres de l'équipe "géométrie et topologie algébriques" et plus particulièrement à Bruno Kahn et Fabien Morel, pour leur soutien sans faille.

Georges Maltsiniotis

Introduction.

1.1. La catégorie homotopique Hot. La catégorie homotopique Hot est définie classiquement comme étant la catégorie dont les objets sont les CW-complexes, et les morphismes les classes d'homotopie d'applications continues entre CW-complexes. On démontre qu'on obtient une catégorie équivalente en localisant la catégorie $\mathcal{T}op$ de *tous* les espaces topologiques et applications continues, relativement aux équivalences faibles topologiques. On rappelle que si M désigne une catégorie et W une partie de $\mathsf{Fl}(M)$, il existe (quitte à éventuellement agrandir l'univers de base) une catégorie $W^{-1}M$ (localisée de M relativement à W) et un foncteur $\gamma : M \to W^{-1}M$ (foncteur de localisation) tel que, pour tout $w \in W$, $\gamma(w)$ soit un isomorphisme de $W^{-1}M$, et qui soient universels pour cette propriété. Autrement dit, pour tout foncteur $F : M \to M'$ tel que, pour tout $w \in W$, $F(w)$ soit inversible, il existe un unique foncteur $\widetilde{F} : W^{-1}M \to M'$ tel que $F = \widetilde{F}\gamma$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "F"'] & W^{-1}M \arrow[d, dashed, "\widetilde{F}"] \\ & M' \end{tikzcd} .$$

Si l'on note $W_{\mathcal{T}op}$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{T}op)$ formée des équivalences faibles topologiques, autrement dit, des applications continues $f : X \to Y$ telles que :

a) $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ soit une application bijective ;

b) pour tout $n \geq 1$, et tout $x \in X$, $\pi_n(f,x) : \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y,f(x))$ soit un isomorphisme de groupes ;

alors la catégorie homotopique Hot est équivalente à la catégorie $W_{\mathcal{T}op}^{-1}\mathcal{T}op$.

La catégorie homotopique peut être également définie, à équivalence de catégories près, en termes d'ensembles simpliciaux. La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ des préfaisceaux (foncteurs contravariants à valeurs dans la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles) sur la catégorie $\mathbf{\Delta}$ des simplexes, catégorie dont les objets sont les ensembles

$$\Delta_m = \{0, 1, \dots, m\} \ , \quad m \in \mathbb{N} \ ,$$

ordonnés par l'ordre naturel, et les morphismes les applications croissantes. Les simplexes topologiques standards

$$\Delta_m^{\mathcal{T}op} = \{(x_0, x_1, \dots x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=0}^{m} x_i = 1 \ , \ x_i \geq 0 \ , \ 0 \leq i \leq m\}$$

forment un espace topologique cosimplicial $\Delta^{\mathcal{T}op}$ (foncteur covariant de $\mathbf{\Delta}$ dans $\mathcal{T}op$), en définissant, pour tout morphisme $\varphi : \Delta_m \to \Delta_n$ de $\mathbf{\Delta}$, une application continue

$$\Delta_\varphi^{\mathcal{T}op} \ : \ \Delta_m^{\mathcal{T}op} \longrightarrow \Delta_n^{\mathcal{T}op}$$

par

$$\Delta^{\mathcal{T}op}_{\varphi}(x_0,x_1,\dots,x_m)=(y_0,y_1,\dots,y_n)\quad,\quad \text{où}\quad y_j=\sum_{\varphi(i)=j}x_i\quad,\quad 0\leq j\leq n\quad.$$

On en déduit un unique (à isomorphisme unique près) couple de foncteurs adjoints

$$|\,.\,|:\widehat{\mathbf{\Delta}}\longrightarrow\mathcal{T}op\quad,\qquad S:\mathcal{T}op\longrightarrow\widehat{\mathbf{\Delta}}$$

(foncteur de réalisation topologique, et foncteur ensemble simplicial singulier) tel que la restriction de $|\,.\,|$ à la catégorie $\mathbf{\Delta}$ (identifiée à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, par le plongement de Yoneda) soit isomorphe au foncteur $\Delta^{\mathcal{T}op}:\mathbf{\Delta}\to\mathcal{T}op$. Pour tout ensemble simplicial K, l'espace topologique $|K|$ est le quotient

$$|K|=\coprod_m \Delta^{\mathcal{T}op}_m\times K_m\Big/\!\sim\quad,$$

où l'ensemble K_m est considéré comme espace topologique discret, et $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par les relations élémentaires

$$(x,K_{\varphi}(y))\sim(\Delta^{\mathcal{T}op}_{\varphi}(x),y)\ ,\quad \varphi:\Delta_m\to\Delta_n\in\mathsf{Fl}(\mathbf{\Delta})\ ,\quad x\in\Delta^{\mathcal{T}op}_m\ ,\quad y\in K_n\quad.$$

Pour tout espace topologique X, l'ensemble simplicial $S(X)$ est défini par

$$(S(X))_m=\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^{\mathcal{T}op}_m,X)\quad,\qquad m\geq 0\quad.$$

Une équivalence faible simpliciale est un morphisme d'ensembles simpliciaux dont la réalisation topologique est une équivalence d'homotopie. Si l'on note $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathbf{\Delta})$ formée des équivalences faibles, on démontre que la catégorie localisée $W^{-1}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}\widehat{\mathbf{\Delta}}$ est équivalente à la catégorie homotopique Hot. De façon plus précise, les foncteurs $|\,.\,|$ et S sont compatibles aux équivalences faibles, et induisent des équivalences de catégories

$$W^{-1}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}\widehat{\mathbf{\Delta}}\longrightarrow W^{-1}_{\mathcal{T}op}\mathcal{T}op\quad,\qquad W^{-1}_{\mathcal{T}op}\mathcal{T}op\longrightarrow W^{-1}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}\widehat{\mathbf{\Delta}}$$

quasi-inverses l'une de l'autre (voir par exemple [**GZ**]).

La catégorie homotopique Hot peut être aussi obtenue, à équivalence de catégories près, comme localisation de la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories. L'inclusion $\mathbf{\Delta}\hookrightarrow\mathcal{C}at$, définie en associant à l'ensemble ordonné Δ_m, $m\geq 0$, la catégorie correspondante, fournit un objet cosimplicial de $\mathcal{C}at$, d'où un couple de foncteurs adjoints

$$c:\widehat{\mathbf{\Delta}}\longrightarrow\mathcal{C}at\quad,\qquad N:\mathcal{C}at\longrightarrow\widehat{\mathbf{\Delta}}$$

(foncteur de réalisation catégorique, et foncteur nerf) tel que la restriction de c à $\mathbf{\Delta}$ soit l'inclusion $\mathbf{\Delta}\hookrightarrow\mathcal{C}at$. Pour toute petite catégorie C, l'ensemble simplicial $N(C)$ (nerf de C) est défini par

$$(N(C))_m=\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(\Delta_m,C)\quad,\qquad m\geq 0\quad,$$

l'ensemble ordonné Δ_m étant identifié à la catégorie correspondante. Plus concrètement, $(N(C))_m$ est l'ensemble formé des suites de m flèches composables de C. Une équivalence faible catégorique est un foncteur entre petites catégories dont le nerf est une équivalence faible simpliciale. Si l'on note $W_{\mathcal{C}at}$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée des équivalences faibles, on démontre que la catégorie localisée $W_{\mathcal{C}at}^{-1}\mathcal{C}at$ est équivalente à la catégorie homotopique Hot. De façon plus précise, le foncteur nerf induit une équivalence de catégories

$$W_{\mathcal{C}at}^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}^{-1}\widehat{\mathbf{\Delta}} \quad .$$

(Voir par exemple [**T1**].) (En revanche, contrairement au foncteur de réalisation topologique, le foncteur de réalisation catégorique n'est pas compatible aux équivalences faibles.)

Ainsi, on dispose de plusieurs catégories, $\mathcal{T}op$, $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, $\mathcal{C}at$, dont les objets peuvent servir comme "modèles" pour les types d'homotopie.

1.2. La problématique de Grothendieck et "l'hypothèse inspiratrice". Le défi que Grothendieck se pose dans "Pursuing Stacks" est de chercher *toutes* les catégories dont les objets sont des "modèles" pour les types d'homotopie. De façon plus précise, il s'agit de trouver tous les triplets (M, W, μ), où M est une catégorie, W une partie de $\mathsf{Fl}(M)$, et $\mu : M \to \mathsf{Hot}$ un foncteur, tels que pour tout $w \in W$, $\mu(w)$ soit un isomorphisme, et tels que le foncteur $\widetilde{\mu} : W^{-1}M \to \mathsf{Hot}$, déduit de μ par la propriété universelle de la catégorie localisée, soit une équivalence de catégories

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\mu"'] & W^{-1}M \arrow[d, dashed, "\wr", "\widetilde{\mu}"'] \\ & \mathsf{Hot} \end{tikzcd} \quad .$$

Dans cette recherche, il est guidé par ce qu'il appelle une "hypothèse inspiratrice" ("inspiring assumption"), qui n'est jamais formellement utilisée, mais sert uniquement comme source d'intuitions :

"La catégorie des auto-équivalences de Hot *est équivalente à la catégorie ponctuelle".*

En d'autres termes : toute auto-équivalence de Hot est isomorphe au foncteur identique, et le seul automorphisme du foncteur identique est l'identité.[(1)]

En particulier, dans la situation ci-dessus, si $\mu' : M \to \mathsf{Hot}$ est un deuxième foncteur ayant les mêmes propriétés que μ, et si $\widetilde{\mu}^{-1}$ désigne un quasi-inverse de $\widetilde{\mu}$, le foncteur

[1]L'argument qu'il donne en faveur de cette hypothèse paraît naïf. C'est essentiellement : "S'il y avait une auto-équivalence non triviale de Hot, ou un automorphisme non identique du foncteur identique, j'en aurais entendu parler, ou j'aurais une idée pour en définir un". En réalité, c'est moins naïf qu'il n'y paraît. L'hypothèse inspiratrice n'est pas une conjecture. Ce que cet argument prétend est que s'il y avait un contre-exemple, il serait hautement non constructif et non canonique, à coups d'axiomes du choix. Ainsi, pour des foncteurs, ou morphismes de foncteurs, construits explicitement, il y a toute chance qu'elle soit satisfaite. L'hypothèse inspiratrice nous incite alors à chercher une preuve directe.

$\widetilde{\mu}'\widetilde{\mu}^{-1} : \mathsf{Hot} \to \mathsf{Hot}$ est une auto-équivalence de Hot, et l'hypothèse inspiratrice implique que ce foncteur est canoniquement isomorphe au foncteur identique, et par suite que les foncteurs $\widetilde{\mu}$ et $\widetilde{\mu}'$ sont canoniquement isomorphes, et μ et μ' aussi. On peut donc se limiter à chercher les couples (M, W), tels que la catégorie $W^{-1}M$ soit équivalente à Hot. Grothendieck appelle *modélisateur homotopique*, ou plus simplement *modélisateur*, un tel couple.

Modulo l'hypothèse inspiratrice, la question de départ se réduit donc à la recherche de tous les modélisateurs. Bien entendu, Grothendieck n'arrivera pas à donner une reponse complète à une question aussi générale, voire naïve. Néanmoins, moyennant quelques hypothèses restrictives, il arrive, de façon assez stupéfiante, à donner une caractérisation, dans le cas où M est une catégorie de préfaisceaux $\widehat{A}$ sur une petite catégorie A. Il dit alors que $\widehat{A}$ est un *modélisateur élémentaire* et A une *catégorie test*. Les modélisateurs élémentaires généralisent le modélisateur bien connu $(\widehat{\mathbf{\Delta}}, W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}})$ des ensembles simpliciaux.

1.3. La définition toposique de Hot. Pour la définition même de la catégorie homotopique Hot, Grothendieck ne choisit pas la version classique. Il n'aime pas trop les méthodes simpliciales, et se méfie des espaces topologiques. Son modélisateur préféré est $(\mathcal{C}at, W_{\mathcal{C}at})$, et son inspiration toposique. Il définit donc les équivalences faibles dans $\mathcal{C}at$ comme étant les foncteurs $u : A \to B$, entre petites catégories, tels que le morphisme de topos $(u^*, u_*) : \widehat{A} \to \widehat{B}$ (où u^* désigne le foncteur image inverse de préfaisceaux $F \mapsto u^*(F) = Fu$, $F \in \mathsf{Ob}(\widehat{B})$, et u_* son adjoint à droite) soit une équivalence d'Artin-Mazur. Un morphisme de topos $\psi : X \to Y$ est une équivalence d'Artin-Mazur si pour tout $m \geq 0$, le morphisme

$$H^m(Y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^m(X, \psi^*(\mathcal{F})) \quad ,$$

induit par ψ, est un isomorphisme, pour tout faisceau localement constant $\mathcal{F}$ sur Y, d'ensembles si $m = 0$, de groupes si $m = 1$, de groupes abéliens si $m \geq 2$. Il note $\mathcal{W}_\infty$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée des équivalences faibles ainsi définies, et il affirme (sans preuve, puisqu'il n'utilise jamais formellement ce résultat) que $\mathcal{W}_\infty = W_{\mathcal{C}at}$, autrement dit, que sa définition coïncide avec la définition classique.(2) Ainsi, il définit la catégorie homotopique Hot comme étant la catégorie localisée $\mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at$.

---

(2) Une démonstration détaillée de ce fait est exposée dans [**M**]. L'idée de la démonstration est de comparer l'espace classifiant $|N(A)|$, réalisation topologique du nerf d'une petite catégorie A, à son topos classifiant $\widehat{A}$. Pour cela, on définit un morphisme de topos, fonctoriel en A,

$$\mathcal{T}(|N(A)|) \longrightarrow \widehat{A} \quad ,$$

où pour tout espace topologique X, $\mathcal{T}(X)$ désigne le topos des faisceaux d'ensembles sur X, et on démontre que ce morphisme est une équivalence d'Artin-Mazur. Ensuite, on montre que pour tout espace topologique "gentil" X, par exemple un CW-complexe, les espaces de cohomologie du topos $\mathcal{T}(X)$ et de l'espace topologique X sont canoniquement isomorphes. Enfin, un théorème de Whitehead donne une caractérisation cohomologique des équivalences faibles topologiques, analogue à la définition des équivalences d'Artin-Mazur (les conditions sur le π_0 et le π_1 étant équivalentes aux conditions sur le H^0 et

Ensuite, il vérifie que $\mathcal{W}_\infty$ satisfait à un certain nombre de propriétés formelles de stabilité (déjà démontrées par Quillen pour $W_{\mathcal{C}at}$ [**Q**]), dont la plus importante correspond au théorème A de Quillen :

Si $u : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$ tel que, pour tout objet b de B, $u/b : A/b \to B/b$ soit dans $\mathcal{W}_\infty$, alors u est dans $\mathcal{W}_\infty$.

La catégorie A/b est la catégorie dont les objets sont les couples $(a, p : u(a) \to b)$, où a est un objet de A et p un morphisme de B, et u/b est le foncteur $(a,p) \mapsto (u(a),p)$, induit par u. Dans le contexte toposique adopté par Grothendieck, ce résultat est extrêmement naturel, et sa démonstration est directe. En effet, si $\psi : X \to Y$ est un morphisme de topos, on dit que ψ est asphérique si pour tout objet y de Y, le morphisme de topos $\psi/y : X/y \to Y/y$, induit par ψ, est une équivalence d'Artin-Mazur. Un argument cohomologique standard montre que pour vérifier l'asphéricité de ψ, on peut se limiter à des y appartenant à une famille génératrice du topos Y. En particulier, si $u : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$ et si $X = \widehat{A}$, $Y = \widehat{B}$, et $\psi = (u^*, u_*)$, comme les objets de B forment une famille génératrice du topos Y, pour montrer que ψ est asphérique, il suffit de vérifier que pour tout objet b de B,

$$X/b = \widehat{A}/b \simeq \widehat{A/b} \longrightarrow \widehat{B/b} \simeq \widehat{B}/b = Y/b$$

est une équivalence d'Artin-Mazur, autrement dit, que $A/b \to B/b$ est dans $\mathcal{W}_\infty$. Ainsi, cette dernière condition implique l'asphéricité du morphisme de topos $\psi : X \to Y$, et en particulier, en prenant l'objet final de $Y = \widehat{B}$, on en déduit que $\widehat{A} \to \widehat{B}$ est une équivalence d'Artin-Mazur, autrement dit que $u : A \to B$ est dans $\mathcal{W}_\infty$, ce qui prouve le théorème A de Quillen dans ce cadre.

1.4. Les catégories test. Les équivalences d'Artin-Mazur permettent de définir une notion d'équivalence faible pour les morphismes d'un topos. Soient X un topos et $\varphi : x \to x'$ un morphisme de X. On dit que φ est une équivalence faible de X si le morphisme de topos $X/x \to X/x'$, induit par φ, est une équivalence d'Artin-Mazur. En particulier, si A est une petite catégorie et $X = \widehat{A}$ est le topos des préfaisceaux sur A, un morphisme de préfaisceaux $\varphi : F \to F'$ est une équivalence faible de $\widehat{A}$ si le morphisme de topos

$$\widehat{A/F} \simeq \widehat{A}/F = X/F \longrightarrow X/F' = \widehat{A}/F' \simeq \widehat{A/F'}$$

---

le H^1 non abélien), ce qui permet d'affirmer qu'une application continue $f : X \to Y$ entre CW-complexes est une équivalence faible topologique si et seulement si le morphisme correspondant de topos $\mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(Y)$, défini par les foncteurs image inverse et image directe de faisceaux, est une équivalence d'Artin-Mazur. On termine la démonstration, grâce à une propriété du type "deux sur trois" pour les équivalences d'Artin-Mazur, en considérant, pour un morphisme $A \to B$ de $\mathcal{C}at$, le carré commutatif de morphismes de topos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(|N(A)|) & \longrightarrow & \widehat{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}(|N(B)|) & \longrightarrow & \widehat{B} \end{array} \quad ,$$

dont les flèches horizontales sont des équivalences d'Artin-Mazur.

est une équivalence d'Artin-Mazur, autrement dit, si le foncteur $A/F \to A/F'$, induit par φ, est dans $\mathcal{W}_\infty$. On note $W_{\widehat{A}}$ la partie de $\mathsf{Fl}(\widehat{A})$ formée des équivalences faible de $\widehat{A}$. Si l'on note $i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at$ le foncteur associant à un préfaisceau F la catégorie A/F, et à un morphisme de préfaisceaux $\varphi : F \to F'$ le foncteur $A/F \to A/F'$, induit par φ, alors $\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W}_\infty)$.

La question que Grothendieck se pose est de savoir quand est-ce que $(\widehat{A}, \mathcal{W}_{\widehat{A}})$ est un modélisateur, autrement dit, quand est-ce que la catégorie localisée $\mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$ est équivalente à la catégorie homotopique Hot. Dans l'esprit de l'hypothèse inspiratrice, il se demande plutôt quand est-ce que le foncteur $\bar{\imath}_A : \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \to \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at = \mathsf{Hot}$, induit par i_A, est une équivalence de catégories. Il est alors tenté d'appeler une telle catégorie A catégorie test. En fait, la terminologie qu'il adoptera en définitive pour cette notion sera celle de *pseudo-catégorie test*. En effet, il constate qu'il est extrêmement difficile de trouver des critères pour caractériser les catégories satisfaisant à cette propriété, et dans sa philosophie, une propriété difficile à tester ne constitue pas une “bonne notion”. D'autre part, le foncteur i_A admet un adjoint à droite

$$i_A^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad\qquad C \mapsto \big(a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, C)\big) \quad ,$$

qui ne respecte pas forcement les équivalences faibles. Il est alors assez tentant d'appeler catégorie test une pseudo-catégorie test telle que $i_A^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$. D'autant plus, que Grothendieck démontre qu'alors le foncteur $\bar{\imath}_A^* : \mathsf{Hot} = \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \to \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$, induit par i_A^*, est une équivalence de catégories quasi-inverse de $\bar{\imath}_A$, et il trouve un critère très simple pour qu'une petite catégorie A satisfasse à ces conditions. Pour cela, il faut et il suffit que pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i_A^*(C)$ soit asphérique (on dit qu'un préfaisceau F sur A est asphérique si l'unique foncteur de la catégorie $i_A(F) = A/F$ vers la catégorie ponctuelle est dans $\mathcal{W}_\infty$). Finallement, une telle catégorie A sera appelée *catégorie test faible*, et $\widehat{A}$ un *modélisateur élémentaire faible*. En effet, Grothendieck observe que cette notion n'est pas locale, dans le sens que si A est une catégorie test faible, il n'en est pas nécessairement de même pour A/a, $a \in \mathsf{Ob}(A)$. Ainsi, il appelle *catégorie test locale* une petite catégorie A telle que pour tout objet a de A, A/a soit une catégorie test faible. Enfin, il dit que A est une *catégorie test*, et que $\widehat{A}$ est un *modélisateur élémentaire*, si A est à la fois une catégorie test locale et une catégorie test faible. Ce sont les notions de catégorie test locale et de catégorie test qui s'avèrent être les plus importantes. De plus, ces catégories admettent des caractérisations étonnamment simples. Si on note Δ_1 la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$, alors pour qu'une petite catégorie A soit une catégorie test locale, il faut et il suffit que le préfaisceau $i_A^*(\Delta_1)$ (qui est l'objet de Lawvere du topos $\widehat{A}$, représentant le foncteur $F \mapsto \{\text{sous-objets de } F\}$) soit localement asphérique (on dit qu'un préfaisceau F sur A est localement asphérique si pour tout objet a de A, la restriction de F à A/a est un préfaisceau asphérique sur A/a). De plus, une catégorie test locale est une catégorie test si et seulement si l'unique foncteur de A vers la catégorie ponctuelle est dans $\mathcal{W}_\infty$ (on dit alors que A est asphérique). La dernière (et plus forte) variante de catégorie test, introduite par Grothendieck, est celle de *catégorie test stricte*. C'est une catégorie test A telle que le foncteur $i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at$ soit compatible aux produits finis, à équivalence faible près. On dit alors que la catégorie des préfaisceaux $\widehat{A}$ est un *modélisateur élémentaire strict.* Grothendieck démontre que la catégorie des simplexes $\mathbf{\Delta}$ est une catégorie test stricte, et celle des ensembles simpliciaux $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ un modélisateur élémentaire strict.

1.5. Les foncteurs test. Les foncteurs test généralisent, dans le cadre des catégories test, le foncteur nerf de la théorie simpliciale. Si A est une catégorie test faible, on aimerait appeler foncteur test faible un foncteur $i : A \to \mathcal{C}at$ tel que si on note i^* le foncteur

$$i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad C \longmapsto \big(a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(a), C)\big) \quad ,$$

on ait $i^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$ et le foncteur $\overline{\imath}^* : \mathsf{Hot} = \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \to \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$, induit par i^*, soit une équivalence de catégories. Par exemple, le foncteur $a \mapsto A/a$ satisfait à ces propriétés, puisque alors i^* est le foncteur i_A^*, déjà considéré, et aussi, si A est la catégorie des simplexes $\mathbf{\Delta}$, le foncteur d'inclusion $i : \mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathcal{C}at$, puisqu'alors i^* est le foncteur nerf N. Néanmoins, il n'y a pas de caractérisation simple des foncteurs satisfaisant à ces propriétés. Cependant, on remarque que si le foncteur i est pleinement fidèle, alors ces conditions impliquent que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est asphérique. Grothendieck ajoute cette dernière condition à la définition d'un foncteur test faible, et il obtient ainsi une notion aisément caractérisable.

Plus précisément, il définit un *foncteur test faible* comme étant un foncteur $i : A \to \mathcal{C}at$, d'une catégorie test faible A vers la catégorie des petites catégories, tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit une catégorie asphérique, et tel que $i^*(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Il démontre qu'alors le foncteur $\overline{\imath}^* : \mathsf{Hot} = \mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \to \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$, induit par i^*, est une équivalence de catégories, quasi-inverse de $\overline{\imath}_A$ (ce qui est conforme à “l'hypothèse inspiratrice”), et il obtient la caractérisation suivante. Soient A une catégorie test faible, et $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) *i est un foncteur test faible ;*

ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique.*

Ensuite, il définit un *foncteur test local* comme étant un foncteur $i : A \to \mathcal{C}at$, de source une catégorie test locale, tel que pour tout objet a de A, le foncteur $A/a \to \mathcal{C}at$, induit par i, soit un foncteur test faible, et il obtient la caractérisation suivante. Soient A une petite catégorie arbitraire, et $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) *A est une catégorie test locale et i un foncteur test locale ;*

ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique.*

De plus, si pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ possède un objet final (ce qui est une condition suffisante d'asphéricité), alors ces deux conditions sont aussi équivalentes à la condition suivante :

iii) *$i^*(\Delta_1)$ est un préfaisceau localement asphérique.*

Cette dernière condition est en générale très facile à vérifier, et cette caractérisation est un outil puissant pour trouver des catégories test locales, et des foncteurs test locaux. Enfin, il démontre que si A est une catégorie test et $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur test local, alors i est aussi un foncteur test faible. On dit alors que i est un *foncteur test*.

1.6. Les localisateurs fondamentaux. Après avoir obtenu une grande partie de ses résultats sur les catégories et les foncteurs test, Grothendieck constate que ses démonstrations n'utilisent pas la définition même de $\mathcal{W}_\infty$, mais seulement quelques propriétés formelles, faciles à dégager, de cette classe de flèches. Ces propriétés de stabilité sont le théorème A de Quillen, déjà mentionné, une condition de saturation faible, et le fait que si une petite catégorie admet un objet final, alors elle est asphérique. Ainsi, il reprend toute la théorie en adoptant un point de vue axiomatique, le point de départ étant une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$, appelée *localisateur fondamental*, satisfaisant à ces propriétés formelles.

De façon plus précise, un localisateur fondamental est une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

La) (Saturation faible.) Les identités sont dans $\mathcal{W}$. Si deux des trois flèches d'un triangle commutatif sont dans $\mathcal{W}$, il en est de même pour la troisième. Si un morphisme i de $\mathcal{C}at$ admet une rétraction r telle que ir soit dans $\mathcal{W}$, alors i est dans $\mathcal{W}$.

Lb) (Objet final.) Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors l'unique foncteur de A vers la catégorie ponctuelle est dans $\mathcal{W}$.

Lc) (Théorème A de Quillen.) Si $u : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$ tel que pour tout objet b de B, $u/b : A/b \to B/b$ soit dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

Grothendieck reprend donc, dans ce cadre, la théorie des catégories et foncteurs test, en introduisant la catégorie homotopique relative à $\mathcal{W}$, $\mathsf{Hot}_\mathcal{W} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$, et les notions de $\mathcal{W}$-catégories test, de $\mathcal{W}$-catégories test faibles ou locales, de $\mathcal{W}$-foncteurs test, *etc.* Il vérifie qu'on obtient les mêmes résultats, avec les mêmes démonstrations.

L'avantage de cette approche axiomatique est d'une part, sa grande clarté, et d'autre part, le fait qu'elle s'applique à d'autres contextes que celui de la catégorie homotopique classique. Elle s'applique, en particulier, en homotopie rationnelle, et plus généralement, à toute sorte d'équivalences faibles définies par des conditions cohomologiques. Grothendieck propose de considérer les localisateurs fondamentaux $\mathcal{W}$, définis exactement comme $\mathcal{W}_\infty$, mais en remplaçant les équivalences d'Artin-Mazur par d'autres classes de morphismes de topos, définies par des conditions cohomologiques. Par exemple, si k désigne un anneau commutatif (on pense plus particulièrement à $k = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$), on peut demander que le morphisme de topos $\psi : X \to Y$ induise un isomorphisme sur la cohomologie à coefficients dans k, ou à coefficients dans un k-module arbitraire, ou dans les faisceaux localement constants de k-modules. On peut varier en prenant une famille d'anneaux k_i, ou une famille de groupes commutatifs constants, par exemple $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour n premier à un ensemble de nombres premiers, conditions qu'on peut éventuellement combiner avec des conditions sur la 1-cohomologie non-abélienne à coefficients dans des faisceaux localement constants de groupes ...

Tous ces localisateurs fondamentaux satisfont à une version relative du théorème A de Quillen :

LC) *Si*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un morphisme de $\mathcal{C}at$, au dessus d'une petite catégorie C, et si pour tout objet c de C, le foncteur $u/c : A/c \to B/c$ induit par u est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

Un *localisateur fondamental fort* est un localisateur fondamental satisfaisant à cette condition (qui implique la condition Lc). Cette hypothèse plus forte sur $\mathcal{W}$ est utile pour certains résultats plus fins que la simple caractérisation des catégories et foncteurs test. Elle sert, par exemple, pour démontrer que l'image directe d'une équivalence faible de préfaisceaux par un monomorphisme est une équivalence faible, ou pour montrer que la classe formée des équivalences faibles de préfaisceaux, qui sont des monomorphismes, est stable par images directes et composés transfinis. Elle sert aussi pour établir l'existence des colimites homotopiques, et plus généralement, des extensions de Kan homotopiques. Dans "Pursuing Stacks", Grothendieck conjecture que $\mathcal{W}_\infty$ est le plus petit localisateur fondamental fort. Cette conjecture, permettant une caractérisation purement axiomatique de $\mathcal{W}_\infty$, est démontrée par Denis-Charles Cisinski, dans l'appendice B.

1.7. Plan du livre. La suite de cet ouvrage est logiquement indépendante de cette introduction. Le paragraphe 2 est consacré à l'étude des localisateurs fondamentaux, de leurs propriétés élémentaires, et des notions qui en découlent. On démontre qu'un localisateur fondamental est stable par le foncteur "passage à la catégorie opposée". On introduit et on étudie les notions de foncteur asphérique ou coasphérique (entre petites catégories). On démontre qu'un adjoint à gauche (resp. à droite) est asphérique (resp. coasphérique), et qu'une cofibration (resp. fibration) à fibres asphériques est un foncteur asphérique (resp. coasphérique). Un lemme "à la Mayer-Vietoris" est établi. Les exemples triviaux de localisateurs fondamentaux sont présentés.

Dans le paragraphe 3, on définit les équivalences faibles et les morphismes asphériques de préfaisceaux, et on introduit la notion de préfaisceau asphérique et localement asphérique. Une caractérisation des foncteurs asphériques en termes de préfaisceaux est démontrée, et une version préfaisceautique du lemme de "Mayer-Vietoris" est établie.

Dans le paragraphe 4, on définit la catégorie homotopique relative à un localisateur fondamental, et on introduit les notions de pseudo-catégorie test et de catégorie test faible. Plusieurs caractérisations des catégories test faibles sont présentées.

Le paragraphe 5 est consacré aux "outils homotopiques". On introduit les notions de segment, segment séparant, et on définit la relation d'homotopie relative à un ensemble de segments et les notions associées d'homotopisme et d'objet contractile. On établit le "lemme d'homotopie" qui relie les notions d'homotopie et d'équivalence faible. On présente l'exemple du segment de Lawvere, crucial pour la suite. On termine par l'étude de la relation d'homotopie dans la catégorie des petites catégories.

Dans le paragraphe 6, on introduit les notions importantes de catégorie test locale et catégorie test, et on en donne plusieurs caractérisations. On établit une condition suffisante pour qu'une petite catégorie, admettant des produits finis, soit une catégorie test, ce qui permet de présenter une multitude d'exemples. On termine en démontrant que la catégorie des simplexes est une catégorie test.

Dans le paragraphe 7, on étudie la variante la plus forte de catégorie test, celle de catégorie test stricte. Dans ce but, on introduit la notion de petite catégorie totalement asphérique, caractérisée par plusieur conditions équivalentes, une catégorie test stricte étant une catégorie test qui est totalement asphérique. On constate que les exemples de catégories test du paragraphe précédent sont en fait des catégories test strictes, et on présente des exemples de catégories test qui ne sont pas strictes. On définit le concept de contracteur, cas particulier de catégorie test stricte, et on démontre que la catégorie des simplexes est un contracteur.

Le paragraphe 8 est consacré à l'étude des foncteurs test. On introduit la notion de foncteur asphérique d'une petite catégorie vers la catégorie des petites catégories (notion à ne pas confondre avec celle de foncteur asphérique entre petites catégories), et on en donne plusieurs caractérisations. On en déduit les notions de foncteur test faible, de foncteur test local et de foncteur test, ainsi que des caractérisations de ces foncteurs. On présente plusieurs exemples de foncteurs test, dont l'inclusion de la catégorie des simplexes dans la catégorie des petites catégories, ce qui permet de retrouver la théorie du foncteur nerf. Enfin, on montre que la sous-catégorie de la catégorie des simplexes, ayant les mêmes objets, et comme morphismes les applications *strictement* croissantes, est une catégorie test faible, mais n'est pas une catégorie test.

Dans le paragraphe 9, on introduit le concept de localisateur fondamental fort, et on présente plusieurs définitions équivalentes. On démontre que la catégorie homotopique correspondante admet des produits finis, des sommes finies, et que le foncteur de localisation y commute.

Le but principal du paragraphe 10 est de prouver que, pour un localisateur fondamental fort, l'image directe d'une équivalence faible de préfaisceaux par un monomorphisme est une équivalence faible, et que la classe formée des équivalences faibles de préfaisceaux, qui sont des monomorphismes, est stable par images directes et composés transfinis. Pour cela, on utilise de façon essentielle la "construction de Grothendieck", associant à un foncteur, à valeurs dans la catégorie des petites catégories, une catégorie cofibrée, qui est la "2-limite inductive" de ce foncteur. Cette construction est rappelée en détails.

Le paragraphe 11 est consacré aux extensions de Kan homotopiques. Étant donné un localisateur fondamental fort $\mathcal{W}$, on associe à toute petite catégorie I, la catégorie $\mathbb{D}(I)$, localisée de la catégorie des foncteurs de I vers la catégorie des petites catégories, relativement à la classe des morphismes de foncteurs qui sont dans $\mathcal{W}$, argument par argument. Pour tout foncteur $u : I \to J$, on en déduit un foncteur image réciproque $u^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$, induit par la composition par u. Une extension de Kan homotopique est un adjoint à gauche ou à droite de u^*. On démontre l'existence d'un adjoint à gauche, en généralisant une construction de Thomason [**T2**] des colimites homotopiques. À l'aide de cet adjoint à gauche, on caractérise les élément de $\mathcal{W}$, ainsi que les foncteurs asphériques.

Dans le paragraphe 12, on introduit une classe remarquable de foncteurs entre petites catégories, les morphismes propres, ainsi que la notion duale de morphisme lisse. On démontre des propriétés de stabilité, et on en donne plusieurs caractérisations. En utilisant les propriétés des morphismes propres, on trouve une nouvelle caractérisation des morphismes coasphériques. Enfin, on démontre des théorèmes de changement de base, pour les morphismes propres ou lisses, analogues à ceux de la géométrie algébrique.

Cet ouvrage comporte deux appendices par Denis-Charles Cisinski. Dans le premier, il démontre que la catégorie des cubes, ou catégorie cubique, est une catégorie test, ce que Grothendieck affirme sans preuve dans "Pursuing Stacks". Dans le deuxième, il prouve la conjecture de Grothendieck affirmant que $\mathcal{W}_\infty$ est le plus petit localisateur fondamental fort. Par ailleurs, il donne une autre caractérisation axiomatique de $\mathcal{W}_\infty$, basée sur le théorème B de Quillen.

Références

[GZ] P. Gabriel, M. Zisman, "Calculus of fractions and homotopy theory", Ergebnisse der Mathematik, vol. 35, Springer-Verlag, 1967.

[M] I. Moerdijk, "Classifying Spaces and Classifying Topoi", Lecture Notes in Mathematics 1616, Springer-Verlag, 1995.

[PS] A. Grothendieck, "Pursuing Stacks", 1983.

[Q] D. G. Quillen, *Higher Algebraic K-Theory I,* LNM 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 85-147.

[T1] R. W. Thomason, *Cat as a closed model category*, Cahiers de Top. et Géom. Diff. Cat., 21, 3, pp. 305-324, 1980.

[T2] R. W. Thomason, *Homotopy colimits in the category of small categories*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 85, pp. 91-109, 1979.

Les localisateurs fondamentaux.

2.1. Soit M une catégorie. On dit qu'une partie W de $\mathsf{Fl}(M)$ est *faiblement saturée* si :

a) Les identités sont dans W.

b) Si deux des trois flèches d'un triangle commutatif sont dans W, il en est de même pour la troisième.

c) Si $i : X' \to X$ et $r : X \to X'$ sont deux morphismes de M tels que $ri = 1_{X'}$, et si ir est dans W, il en est de même pour r (donc aussi pour i en vertu de (a) et (b)).

Il résulte de (a) et (c) que les isomorphismes sont dans W.

On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de M est *universellement dans* W si :

i) u est quarrable (autrement dit, pour tout morphisme $B' \to B$, le produit fibré $B' \times_B A$ est représentable dans M);

ii) pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme u' est dans W.

2.2. Notons $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories, et e un objet final de $\mathcal{C}at$ (une catégorie ayant un seul objet, et l'identité de cet objet comme seul morphisme). On appelle *localisateur fondamental* une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

La) La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

Lb) Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors $A \to e$ est dans $\mathcal{W}$.

Lc) Si $u : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$ tel que pour tout objet b de B,

$$u/b : A/b \longrightarrow B/b$$

soit dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

On rappelle que A/b désigne la catégorie dont les objets sont les couples $(a, p : u(a) \to b)$, où a est un objet de A et p un morphisme de B, un morphisme de (a, p) dans un deuxième objet (a', p') de A/b étant un morphisme $f : a \to a'$ de A tel que $p = p'u(f)$. Le morphisme u/b est le foncteur induit par u.

Les éléments de $\mathcal{W}$ sont appelés des *$\mathcal{W}$-équivalences*, ou des *équivalences faibles*. On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *$\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si, pour tout oblet b de B, $u/b : A/b \to B/b$ est une équivalence faible. La condition (Lc) ci-dessus peut donc s'énoncer : un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible. On dit qu'une petite catégorie A est *$\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si le foncteur $A \to e$ est asphérique, ou de façon équivalente une équivalence faible. La condition (Lb) affirme donc qu'une petite catégorie admettant un objet final est asphérique.

Proposition 2.3. *Soit $u : A \to B$ un morphisme de Cat.*

a) *Le foncteur u est asphérique si et seulement si, pour tout objet b de B, la catégorie A/b est asphérique.*

b) *Si u est universellement dans $\mathcal{W}$, alors u est asphérique.*

DÉMONSTRATION. Pour tout objet b de B, la catégorie B/b admet un objet final $(b, 1_b)$. Il résulte donc des conditions (La) et (Lb) que $u/b : A/b \to B/b$ est une équivalence simple si et seulement si $A/b \to e$ l'est, ce qui prouve l'assertion (a). L'assertion (b) résulte de l'observation que le carré

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u/b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array} \qquad ,$$

où les flèches horizontales désignent les foncteurs canoniques, est cartésien.

Proposition 2.4. *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$A \to e$ est une équivalence faible ;*

b) *$A \to e$ est asphérique (autrement dit A est asphérique) ;*

c) *$A \to e$ est universellement dans $\mathcal{W}$.*

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (a) et (b) est évidente. L'implication $(c) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 2.3, (b). Montrons que (a) implique (c). Il s'agit de montrer que, pour toute petite catégorie B, $pr_2 : A \times B \to B$ est une équivalence faible. En vertu de (Lc) et de la proposition 2.3, (a), il suffit de montrer que, pour tout objet b de B, la catégorie $(A \times B)/b$ est asphérique. Or, on a un isomorphisme de catégories $(A \times B)/b \simeq A \times (B/b)$, et comme par hypothèse A est asphérique, il suffit, en vertu de (La), de montrer que $pr_1 : A \times B/b \to A$ est une équivalence faible. En vertu de (Lc) et de la proposition 2.3, (a), il suffit donc de montrer que, pour tout objet a de A, $(A \times B/b)/a$ est asphérique. Comme $(A \times B/b)/a \simeq A/a \times B/b$, cela résulte de (Lb), puisque $A/a \times B/b$ admet un objet final.

Corollaire 2.5. *Le produit de deux petites catégories asphériques est asphérique.*

DÉMONSTRATION. Soient A et B deux petites catégories asphériques. En vertu de la proposition 2.4, la deuxième projection $A \times B \to B$ est une équivalence faible, donc par (La) $A \times B \to e$ est une équivalence faible, ce qui prouve le corollaire.

Corollaire 2.6. *Soient $u : A \to B$, $u' : A' \to B'$ deux morphismes asphériques de Cat. Alors le foncteur $u \times u' : A \times A' \to B \times B'$ est asphérique.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que, pour tout objet (b, b') de $B \times B'$, la catégorie $(A \times A')/(b, b')$ est asphérique. Or, $(A \times A')/(b, b')$ est canoniquement isomorphe à $(A/b) \times (A'/b')$, et par hypothèse, A/b et A'/b' sont asphériques. L'assertion résulte donc du corollaire 2.5.

Lemme 2.7. *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de $\mathcal{C}at$. Si u est asphérique, pour tout objet c de C, le morphisme $u/c : A/c \to B/c$ induit par u est asphérique.*

DÉMONSTRATION. On vérifie aussitôt que pour tout objet $(b, p : v(b) \to c)$ de B/c la catégorie $(A/c)/(b,p)$ est canoniquement isomorphe à A/b, qui est asphérique, puisque u est asphérique, ce qui prouve que u/c est asphérique.

Proposition 2.8. *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de $\mathcal{C}at$. Si u est asphérique, vu est asphérique si et seulement si v l'est.*

DÉMONSTRATION. Pour tout objet c de C, on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
A/c \arrow[rr, "u/c"] \arrow[dr, "vu/c"'] & & B/c \arrow[dl, "v/c"] \\
& C/c &
\end{tikzcd}$$

et, en vertu du lemme 2.7, u/c est asphérique et en particulier une équivalence faible (Lc). On en déduit (La) que v/c est une équivalence faible si et seulement si vu/c l'est, ce qui prouve que v est asphérique si et seulement si vu l'est.

Proposition 2.9. *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Si u admet un adjoint à droite alors u est asphérique.*

DÉMONSTRATION. Soit v un adjoint à droite de u. La bijection fonctorielle

$$\mathsf{Hom}_B(u(a), b)) \simeq \mathsf{Hom}_A(a, v(b)), \quad a \in \mathsf{Ob}(A),\ b \in \mathsf{Ob}(B)$$

implique que, pour tout objet b de B, la catégorie A/b est isomorphe à la catégorie $A/v(b)$, qui admet un objet final. On en déduit que A/b est asphérique, ce qui prouve la proposition.

Corollaire 2.10. *Une équivalence de petites catégories est asphérique.*

Corollaire 2.11. *Une petite catégorie A admettant un objet initial est asphérique.*

DÉMONSTRATION. Soient $p_A : A \to e$ l'unique foncteur de A dans l'objet final de $\mathcal{C}at$, et $s_A : e \to A$ le foncteur associant à l'unique objet de e un objet initial de A. On vérifie aussitôt que p_A est un adjoint à droite de s_A. On en déduit que s_A est asphérique (2.9), donc une équivalence faible (Lc). Comme $p_A s_A = 1_e$, il résulte de (La) que p_A est une équivalence faible, ce qui prouve l'assertion.

2.12. Soit $u : A \to B$ un foncteur. On rappelle que la *fibre* de u au dessus d'un objet b de B est la sous-catégorie (non pleine) A_b de A dont les objets sont les objets a de A tels que $u(a) = b$ et dont les morphismes sont les morphismes f de A tels que $u(f) = 1_b$. Soit $c : a \to a'$ un morphisme de A. On dit que c est *cocartésien* (relativement à u, ou au dessus de B) si, pour tout morphisme $f : a \to a''$ tel que $u(f) = u(c)$, il existe un unique morphisme $g : a' \to a''$ tel que $u(g) = 1_{u(a')}$ et $f = gc$.

$$\begin{tikzcd} & a'' \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "c"'] & a' \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

On dit que u est une *précofibration* si, pour tout morphisme $p : b \to b'$ de B et tout objet a de A au dessus de b $(u(a) = b)$, il existe un morphisme cocartésien $c : a \to a'$ au dessus de p $(u(c) = p)$. On dit que u est une *cofibration* si u est une précofibration et si le composé de deux morphismes cocartésiens composables de A est un morphisme cocartésien.

Dualement, on dit qu'un morphisme de A est *cartésien* (relativement à u) si le morphisme correspondant de A° (catégorie opposée de A) est cocartésien (relativement à $u^\circ : A^\circ \to B^\circ$). On dit que le foncteur u est une *préfibration* (resp. une *fibration*) si le foncteur u° est une précofibration (resp. une cofibration).

Lemme 2.13. *Un foncteur $u : A \to B$ est une précofibration si et seulement si, pour tout objet b de B, le foncteur canonique $A_b \to A/b$ associant à un objet a de la la fibre A_b de u au dessus de b l'objet $(a, 1_b)$ de A/b admet un adjoint à gauche.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 2.14. *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$ et supposons que u soit une précofibration et que, pour tout objet b de B, la fibre A_b de u au dessus de b soit asphérique. Alors u est asphérique.*

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme précédent, pour tout objet b de B, le foncteur

$$\begin{aligned} i_b : A_b &\longrightarrow A/b \\ a &\mapsto (a, 1_b) \end{aligned}$$

admet un adjoint à gauche

$$j_b : A/b \longrightarrow A_b \quad .$$

En vertu de la proposition 2.9, le foncteur j_b est asphérique, donc une équivalence faible, et comme A_b est asphérique, il en est de même pour A/b, ce qui prouve que u est asphérique.

2.15. Soit A une catégorie. On définit une catégorie $S(A)$ comme suit :

$$\mathsf{Ob}(S(A)) = \mathsf{Fl}(A) \quad ,$$

et si $f : a \to b$ et $f' : a' \to b'$ sont deux objets de $S(A)$, l'ensemble $\mathsf{Hom}_{S(A)}(f, f')$ est formé des couples (g, h), $g : a' \to a$, $h : b \to b'$ tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[d, "h"] \\ a' \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f'"] & b' \end{tikzcd} \qquad f' = hfg$$

soit commutatif. L'identité de f est définie par $1_f = (1_a, 1_b)$, et si

$$(g,h) : f \longrightarrow f' \qquad \text{et} \qquad (g',h') : f' \longrightarrow f''$$

sont des morphismes de $S(A)$,

$$(g',h') \circ (g,h) = (gg', h'h) \quad .$$

On définit deux foncteurs :

$$A^\circ \xleftarrow{\ s_A\ } S(A) \xrightarrow{\ t_A\ } A$$

en posant pour tout objet f de $S(A)$:

$$s_A(f) = \text{source de } f \text{ comme morphisme de } A,$$

$$t_A(f) = \text{but de } f \text{ comme morphisme de } A,$$

et pour tout morphisme (g,h) de $S(A)$,

$$s_A(g,h) = g \quad , \qquad t_A(g,h) = h \quad .$$

On vérifie aussitôt que

$$\begin{aligned} I : S(A) &\longrightarrow S(A^\circ) \\ f &\longmapsto f \quad , & f \in \mathsf{Ob}(S(A)) \ , \\ (g,h) &\longmapsto (h,g) \quad , & (g,h) \in \mathsf{Fl}(S(A)) \ , \end{aligned}$$

définit un isomorphisme de catégories tel que

$$s_{A^\circ} I = t_A \qquad \text{et} \qquad t_{A^\circ} I = s_A \quad .$$

Lemme 2.16. *Pour toute catégorie A, les foncteurs $s_A : S(A) \to A^\circ$ et $t_A : S(A) \to A$ sont des cofibrations.*

DÉMONSTRATION. Montrons que t_A est une cofibration. Soient $h : b \to b'$ un morphisme de A et $f : a \to b$ un objet de $S(A)$ tel que $t_A(f) = b$. Notons $h_*(f)$ l'objet $h_*(f) = hf : a \to b'$ de $S(A)$ et $c(h,f)$ le morphisme $c(h,f) = (1_a, h) : f \to h_*(f)$ de $S(A)$.

$$\begin{tikzcd} a & a \arrow[l, "1_a"'] \arrow[d, "hf"] \\ b \arrow[u, leftarrow, "f"'] \arrow[r, "h"] & b' \end{tikzcd} \qquad c(h,f) : f \longrightarrow h_*(f)$$

$$b \xrightarrow{\ h\ } b'$$

On a $t_A(c(h,f)) = h$ et on vérifie aussitôt que le morphisme $c(h,f)$ est cocartésien (relativement à t_A), ce qui prouve que t_A est une précofibration. En remarquant que, pour tout morphisme $h' : b' \to b''$ de A, on a

$$(h'h)_*(f) = h'hf = h'_*(h_*(f))$$

et

$$c(h', h_*(f))c(h,f) = (1_a, h')(1_a, h) = (1_a, h'h) = c(h'h, f) \quad ,$$

on en déduit que t_A est une cofibration.

En appliquant ce qui précède à la catégorie opposée, on en déduit que $s_A = t_{A^\circ} I$ est aussi une cofibration, ce qui prouve le lemme.

Lemme 2.17. *Pour toute petite catégorie A, les foncteurs $s_A : S(A) \to A^\circ$ et $t_A : S(A) \to A$ sont asphériques.*

DÉMONSTRATION. On vérifie aussitôt que les fibres de s_A et t_A admettent un objet initial. L'assertion résulte alors du corollaire 2.11, du lemme 2.16 et de la proposition 2.14.

2.18. Soit $u : A \to B$ un foncteur. On en déduit un foncteur

$$\begin{aligned} S(u) : S(A) &\longrightarrow S(B) \\ f &\longmapsto u(f) \quad , \qquad && f \in \mathsf{Ob}(S(A)) \ , \\ (g,h) &\longmapsto (u(g), u(h)) \quad , \qquad && (g,h) \in \mathsf{Fl}(S(A)) \ , \end{aligned}$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

(2.18.1)
$$\begin{tikzcd} A^\circ \arrow[d, "u^\circ"'] & S(A) \arrow[l, "s_A"'] \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "S(u)"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B^\circ & S(B) \arrow[l, "s_B"'] \arrow[r, "t_B"] & B \end{tikzcd} \quad .$$

Proposition 2.19. *Soient $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$ et $u^\circ : A^\circ \to B^\circ$ le foncteur opposé. Alors u est une équivalence faible si et seulement si u° l'est.*

DÉMONSTRATION. Considéront le diagramme commutatif 2.18.1 ci-dessus. En vertu du lemme 2.17 et de (Lc), les morphismes t_A, t_B, s_A et s_B sont des équivalences faibles. En utilisant la propriété de saturation (La), on en déduit que u est une équivalence faible si et seulement si $S(u)$ l'est, et $S(u)$ est une équivalence faible si et seulement si u° l'est, ce qui prouve la proposition.

Corollaire 2.20. *Soit A une petite catégorie. Alors A est asphérique si et seulement si la catégorie opposée A° l'est.*

Corollaire 2.21. *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$ et supposons que u soit une préfibration et que, pour tout objet b de B, la fibre A_b de u au dessus de b soit asphérique. Alors u est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION. Par définition, u est une préfibration signifie que $u^\circ : A^\circ \to B^\circ$ est une précofibration et comme, pour tout $b \in \mathsf{Ob}(B)$, $(A^\circ)_b = (A_b)^\circ$, l'assertion résulte du corollaire 2.20, de la proposition 2.14, de (Lc) et de la proposition 2.19.

Remarque 2.22. La situation paraît dissymétrique. Cela vient du fait qu'on a privilégié les foncteurs asphériques, ce qui correspond à privilégier la cohomologie par rapport à l'homologie. Pour rétablir la symétrie, il suffit d'introduire la notion de foncteur coasphérique. On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *$\mathcal{W}$-coasphérique*, ou plus simplement *coasphérique*, si le morphisme $u^\circ : A^\circ \to B^\circ$ est asphérique. Pour tout objet b de B, notons $b\backslash A$ la catégorie dont les objets sont les couples $(a, p : b \to u(a))$, où a est un objet de A et p un morphisme de B, un morphisme de (a,p) dans un deuxième objet (a',p') de $b\backslash A$ étant un morphisme $f : a \to a'$ de A tel que le triangle

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p'"] & \\ u(a) \arrow[rr, "u(f)"'] & & u(a') \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On a un isomorphisme canonique $A^\circ/b \simeq (b\backslash A)^\circ$ et le foncteur

$$b\backslash u : b\backslash A \to b\backslash B \quad ,$$

induit par u, s'identifie au foncteur

$$(u^\circ/b)^\circ : (A^\circ/b)^\circ \to (B^\circ/b)^\circ \quad .$$

Il résulte alors de la proposition 2.19 (resp. du corollaire 2.20 et de la proposition 2.3, (a)) que $u : A \to B$ est coasphérique si et seulement si, pour tout $b \in \mathsf{Ob}(B)$, le foncteur $b\backslash u : b\backslash A \to b\backslash B$ est une équivalence faible (resp. la catégorie $b\backslash A$ est asphérique). En vertu de (Lc) et de la proposition 2.19, un foncteur coasphérique est une équivalence faible. En vertu de la proposition 2.9, un foncteur admettant un adjoint à gauche est coasphérique. Enfin, il résulte de la proposition 2.14 et du corollaire 2.20 que si u est une préfibration à fibres asphériques alors u est coasphérique.

2.23. Soit A une catégorie. On rappelle qu'un *crible* de A est une sous-catégorie pleine U de A telle que si $a' \to a$ est un morphisme de A, et si a est un objet de U, il en de même pour a'. Un *cocrible* de A est une sous-catégorie pleine F de A telle que F° soit un crible de A°, autrement dit, si $a \to a'$ est un morphisme de A, et si a est un objet de F, il en est de même pour a'. Si Δ_1 désigne la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$, alors pour tout foncteur $u : A \to \Delta_1$, $u^{-1}(0)$ (resp. $u^{-1}(1)$) est un crible (resp. un cocrible) de A et l'application :

$$u \longmapsto u^{-1}(0) \qquad (\text{resp.} \quad u \longmapsto u^{-1}(1)\ )$$

établit une bijection de la classe des foncteurs de A dans Δ_1 sur la celle des cribles (resp. cocribles) de A.

Proposition 2.24. *Soient A une petite catégorie et U_1, U_2 deux cribles de A tels que $A = U_1 \cup U_2$. Alors si U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont asphériques, il en est de même pour A.*

DÉMONSTRATION. Se donner un crible de A équivaut à se donner un foncteur $A \to \Delta_1$, le crible étant l'image réciproque de 0. La donnée des cribles U_1 et U_2 de A équivaut à la donnée d'un foncteur $A \to \Delta_1 \times \Delta_1$, et dire que A est la réunion des cribles U_1 et U_2 équivaut à dire que ce foncteur se factorise par la sous-catégorie

$$B = \left\{ \begin{tikzcd}[row sep=small] & (0,1) \\ (0,0) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (1,0) \end{tikzcd} \right\}$$

de $\Delta_1 \times \Delta_1$, et alors $U_1 \simeq A/(0,1)$, $U_2 \simeq A/(1,0)$ et $U_1 \cap U_2 \simeq A/(0,0)$. L'hypothèse que U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont asphériques implique donc que le foncteur $A \to B$ est asphérique. Comme B admet un objet initial, il résulte du corollaire 2.11 que B est asphérique. Il résulte alors de (Lc) et (La) que A est asphérique, ce qui prouve la proposition.

Corollaire 2.25. *Soient A une petite catégorie et F_1, F_2 deux cocribles de A tels que $A = F_1 \cup F_2$. Alors si F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ sont asphériques, il en est de même pour A.*

DÉMONSTRATION. Le corollaire résulte, en vertu de 2.20, de la proposition 2.24, appliquée à la catégorie opposée A°.

EXEMPLE 2.26. La classe $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ de toutes les flèches de $\mathcal{C}at$ est un localisateur fondamental appelé *localisateur fondamental trivial*. On dit qu'un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est *non trivial* si $\mathcal{W} \neq \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$.

Proposition 2.27. *Si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ n'est pas trivial, alors toute catégorie asphérique est non vide.*

DÉMONSTRATION. En effet, supposons que la catégorie vide $\emptyset$ soit asphérique. Pour toute petite catégorie C, le carré

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[d] \\ C \arrow[r] & e \end{tikzcd}$$

étant cartésien, il résulte de la proposition 2.4 que $\emptyset \to C$ est une équivalence faible, ce qui implique que la catégorie C est asphérique. Ainsi, toute petite catégorie est asphérique, et on en déduit, par la condition de saturation (La), que tout morphisme de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible, ce qui contredit la non trivialité de $\mathcal{W}$.

EXEMPLE 2.28. La partie $\mathcal{W}_{gr}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée du foncteur identique de la catégorie vide, et de tous les foncteurs de source (donc aussi de but) une catégorie non vide est un localisateur fondamental. On dit qu'un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est *grossier* s'il contient $\mathcal{W}_{gr}$. Il résulte immédiatement de la proposition 2.27 que les seuls localisateurs fondamentaux grossiers sont $\mathcal{W}_{gr}$ et le localisateur fondamental trivial $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$.

EXEMPLE 2.29. La partie $\mathcal{W}_\infty$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ formée des équivalences faibles usuelles de $\mathcal{C}at$ est un localisateur fondamental (B.13).

Les équivalences faibles dans une catégorie de préfaisceaux.

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

3.1. On se fixe une petite catégorie A. On note $\widehat{A}$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur A. Pour tout objet a de A, on note aussi a le préfaisceau $x \mapsto \mathsf{Hom}_A(x,a)$ représenté par a, et on identifie A à une sous-catégorie pleine de $\widehat{A}$. On définit un couple de foncteurs :

$$i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad i_A^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A}$$

$$F \mapsto A/F \quad , \qquad C \mapsto \big(a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, C)\big)$$

et des morphismes de foncteurs :

$$\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at} \quad , \qquad \eta : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A \quad .$$

Pour toute petite catégorie C, le foncteur :

$$\varepsilon_C : A/i_A^*(C) \longrightarrow C$$

est défini par :

$$(a, A/a \xrightarrow{v} C) \longmapsto v(a, 1_a) \quad ,$$

et pour tout préfaisceau F et tout objet a de A, l'application :

$$\eta_F(a) : F(a) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/a, A/F)$$

est définie par :

$$(a \xrightarrow{s} F) \longmapsto (A/a \xrightarrow{s_*} A/F) \quad ,$$

où s_* est défini par :

$$(x, p : x \to a) \longmapsto (x, sp : x \to F) \quad .$$

Proposition 3.2. *Le couple des foncteurs (i_A, i_A^*) forme un couple de foncteurs adjoints* (le foncteur i_A est adjoint à gauche du foncteur i_A^*) *et les morphismes de foncteurs*

(3.2.1) $$\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at} \quad , \qquad \eta : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A$$

sont les morphismes d'adjonction.

La démonstration est laissée au lecteur.

3.3. On dit qu'un morphisme de préfaisceaux sur A :

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

est une *équivalence faible* ou $\mathcal{W}$-*équivalence* si le foncteur correspondant :

$$i_A(\varphi) : A/F \longrightarrow A/G$$

est une équivalence faible. On note $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ la classe des équivalences faibles de $\widehat{A}$:

$$\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W}) \quad . \tag{3.3.1}$$

L'ensemble des équivalences faibles de $\widehat{A}$ est une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(\widehat{A})$. On dit qu'un morphisme de préfaisceaux :

$$\varphi : F \longrightarrow G$$

est $\mathcal{W}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si le foncteur correspondant :

$$i_A(\varphi) : A/F \longrightarrow A/G$$

est asphérique. En vertu de (Lc) (2.2), un morphisme asphérique de préfaisceaux est une équivalence faible.

Proposition 3.4. *Soit $\varphi : F \to G$ un morphisme de préfaisceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *φ est asphérique* ;

b) *pour tout objet a de A et tout morphisme $a \to G$ de $\widehat{A}$, la catégorie $A/(a \times_G F)$ est asphérique* ;

c) *φ est universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$* (2.1).

Démonstration. Dire que φ est asphérique signifie que le foncteur $A/F \to A/G$ est asphérique, autrement dit que pour tout objet $a \to G$ de A/G, la catégorie $(A/F)/(a \to G) \simeq A/(a \times_G F)$ est asphérique (2.3), ce qui prouve l'équivalence de (a) et (b).

Si φ est universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, en particulier, pour tout morphisme $a \to G$, avec a objet de A, le morphisme $a \times_G F \to a$ est dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, donc le foncteur $A/(a \times_G F) \to A/a$ est une équivalence faible et, comme A/a admet un objet final, il en résulte que $A/(a \times_G F)$ est asphérique, ce qui prouve $(c) \Rightarrow (b)$.

Supposons maintenant φ asphérique, et soit $G' \to G$ un morphisme arbitraire de préfaisceaux. Montrons que $G' \times_G F \to G'$ est dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Il suffit de montrer qu'il est asphérique, autrement dit, en vertu de l'implication $(b) \Rightarrow (a)$, que pour tout mophisme $a \to G'$ de $\widehat{A}$, $A/(a \times_{G'} G' \times_G F) \simeq A/(a \times_G F)$ est asphérique, ce qui résulte de l'asphéricité de φ et de l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. On a donc $(a) \Rightarrow (c)$.

3.5. Soit F un objet de $\widehat{A}$. On dit que F est $\mathcal{W}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si la catégorie A/F est asphérique, autrement dit si $i_A(F)$ est asphérique. Si F est un préfaisceau représentable, la catégorie A/F admet un objet final, et il en résulte que F est asphérique. En vertu de la proposition 3.4, un morphisme $u : F \to G$ de $\widehat{A}$ est asphérique si et seulement si pour tout morphisme $a \to G$ de $\widehat{A}$, avec a objet de A, le préfaisceau $a \times_G F$ est asphérique.

3.6. Pour toute petite catégorie A, on note $e_{\widehat{A}}$ un objet final de $\widehat{A}$. Considéront les propriétés :

a) le préfaisceau F est asphérique ;

b) le morphisme $F \to e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible ;

c) le morphisme $F \to e_{\widehat{A}}$ est asphérique ;

d) le morphisme $F \to e_{\widehat{A}}$ est universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$.

En vertu de la proposition 3.4, les conditions (c) et (d) sont équivalentes et, en vertu de (Lc) (2.2), ces conditions impliquent la condition (b) qui est, en général, strictement plus faible. Si la catégorie A n'est pas asphérique aucune des conditions (b), (c), (d) n'implique la condition (a). Si A est asphérique, ce qui équivaut à affirmer que $e_{\widehat{A}}$ est asphérique, alors les conditions (a) et (b) sont équivalentes (et l'équivalence de ces conditions pour tout F équivaut à l'asphéricité de A), mais toujours plus faibles, en général, que les conditions équivalentes (c) et (d). On verra que ces quatres conditions sont équivalentes si et seulement si A est totalement asphérique (7.2). On dit que F est *localement* $\mathcal{W}$-*asphérique*, ou plus simplement *localement asphérique*, s'il satisfait aux conditions équivalentes (c) et (d).

Cette terminologie est justifiée par l'observation suivante : un préfaisceau F est localement asphérique si et seulement si, pour tout $a \in \mathsf{Ob}(A)$, le préfaisceau $F|(A/a)$ induit par F sur A/a est asphérique. En effet, on a des isomorphismes

$$(A/a)/(F|(A/a)) \simeq A/(a \times F) \simeq A/(a \times_{e_{\widehat{A}}} F) \quad .$$

Proposition 3.7. *Soient A une petite catégorie, F un préfaisceau sur A, et F_1 et F_2 deux sous-préfaisceaux de F tels que $F = F_1 \cup F_2$. Si les préfaisceaux F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ sont asphériques, il en est de même pour le préfaisceau F.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que la catégorie A/F est asphérique. Par hypothèse, les catégories A/F_1, A/F_2 et $A/F_1 \cap F_2$ sont asphériques. Or, A/F_1 et A/F_2 s'identifient à des cribles de A/F, $A/F_1 \cap F_2$ s'identifiant au crible intersection. L'hypothèse $F = F_1 \cup F_2$ implique que A/F est la réunion des cribles A/F_1 et A/F_2. La proposition résulte donc de la proposition 2.24.

3.8. Soit maintenant $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. On note $u^* : \widehat{B} \to \widehat{A}$ le foncteur "image réciproque par u", associant à un préfaisceau F de $\widehat{B}$ le préfaisceau $F \circ u$ de $\widehat{A}$. Pour tout préfaisceau F de $\widehat{B}$, le foncteur $u : A \to B$ induit un foncteur

$$\begin{aligned} u/F : A/F = A/u^*(F) &\longrightarrow B/F \\ (a, a \xrightarrow{s} u^*(F)) &\mapsto (u(a), u(a) \xrightarrow{s} F) \end{aligned}$$

(en considérant, par Yoneda, s comme un élément de $u^*(F)(a) = F(u(a))$). On définit ainsi un morphisme de foncteurs

$$\lambda := \lambda_u : i_A u^* \longrightarrow i_B$$

en posant $\lambda_F = u/F$, pour F objet de $\widehat{B}$.

Proposition 3.9 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *u est asphérique ;*

b) *pour qu'un préfaisceau F de $\widehat{B}$ soit asphérique, il faut et il suffit que le préfaisceau $u^*(F)$ de $\widehat{A}$ soit asphérique ;*

b′) *si F est un préfaisceau asphérique de $\widehat{B}$, alors $u^*(F)$ est un préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$;*

b″) *pour tout objet b de B, le préfaisceau $u^*(b)$ de $\widehat{A}$ est asphérique ;*

c) *pour tout préfaisceau F de $\widehat{B}$, le foncteur $\lambda_F : A/u^*(F) \to B/F$ est une équivalence faible ;*

c′) *pour tout préfaisceau F de $\widehat{B}$, le foncteur $\lambda_F : A/u^*(F) \to B/F$ est asphérique ;*

c″) *pour tout objet b de B, le foncteur $\lambda_b : A/u^*(b) \to B/b$ est une équivalence faible ;*

et si ces conditions sont satisfaites, on a :

d) *pour qu'un morphisme φ de $\widehat{B}$ soit une équivalence faible, il faut et il suffit que $u^*(\varphi)$ soit une équivalence faible de $\widehat{A}$.*

De plus, si A et B sont asphériques, les conditions (a) *à* (d) *sont équivalentes, et équivalentes à la condition :*

d′) *si φ est une équivalence faible de $\widehat{B}$, alors $u^*(\varphi)$ est une équivalence faible de $\widehat{A}$.*

DÉMONSTRATION. L'implication $(b) \Rightarrow (b')$ est évidente, l'implication $(b') \Rightarrow (b'')$ résulte du fait qu'un préfaisceau représentable est asphérique (3.5), l'implication $(b'') \Rightarrow (c'')$ des La, Lb, (2.2), l'implication $(c'') \Rightarrow (c')$ de l'observation que pour tout préfaisceau F de $\widehat{B}$ et tout objet $(b, b \xrightarrow{s} F)$ de B/F, on a des isomorphismes canoniques $(B/F)/(b,s) \simeq B/b$ et $(A/u^*(F))/(b,s) \simeq A/b = A/u^*(b)$, l'implication $(c') \Rightarrow (c)$ de Lc (2.2), et l'implication $(c) \Rightarrow (b)$ de La (2.2). Enfin, on remarque que (c'') est une paraphrase de (a), ce qui prouve l'équivalence des conditions (a) à (c'').

L'implication $(c) \Rightarrow (d)$ résulte de la commutativité du carré

$$\begin{tikzcd}
A/u^*(F) \arrow[r, "i_A(u^*(\varphi))"] \arrow[d, "\lambda_F"'] & A/u^*(G) \arrow[d, "\lambda_G"] \\
B/F \arrow[r, "i_B(\varphi)"'] & B/G
\end{tikzcd} \quad ,$$

pour $\varphi : F \to G$ morphime de $\widehat{B}$, et de la condition de saturation La (2.2).

Si A et B sont asphériques, montrons l'implication $(d') \Rightarrow (b')$. Soit donc F un préfaisceau asphérique de $\widehat{B}$. Comme B est asphérique, le morphisme canonique $\varphi : F \to e_{\widehat{B}}$ est une équivalence faible de $\widehat{B}$, et en vertu de (d'), $u^*(\varphi) : u^*(F) \to u^*(e_{\widehat{B}}) = e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible de $\widehat{A}$. Comme A est asphérique, on en déduit que $u^*(F)$ est asphérique. L'implication $(d) \Rightarrow (d')$ étant évidente, ceci prouve, sous l'hypothèse de l'asphéricité de A et B, l'équivalence des conditions (a) à (d'), et achève la démonstration de la proposition.

3.10. Soient maintenant A et B deux petites catégories. On définit un foncteur

$$\begin{aligned} \boxtimes : \widehat{A} \times \widehat{B} &\longrightarrow \widehat{A \times B} \\ (F, G) &\longmapsto pr_1^*(F) \times pr_2^*(G) \quad , \end{aligned}$$

où

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

désignent les projections. On vérifie aussitôt qu'on a un isomorphisme fonctoriel canonique :

$$i_{A\times B}(F \boxtimes G) = A \times B / F \boxtimes G \xrightarrow{\sim} A/F \times B/G = i_A(F) \times i_B(G) \quad .$$

Proposition 3.11. a) *Soient F, G des préfaisceaux sur A, B respectivement. Si F et G sont asphériques* (resp. *localement asphériques*), *il en est de même pour $F \boxtimes G$.*

b) *Soient $u : F \to F'$, $v : G \to G'$ des morphismes de préfaisceaux sur A, B respectivement. Si les morphismes u et v sont asphériques, il en est de même pour $u \boxtimes v$.*

Démonstration. La proposition résulte aussitôt de ce qui précède et des corollaires 2.5 et 2.6.

Les catégories test faibles.

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

4.1. Soient M une catégorie et W une partie de $\mathsf{Fl}(M)$. On rappelle qu'il existe (quitte à agrandir l'univers de base) une catégorie $W^{-1}M$ et un foncteur $\gamma : M \to W^{-1}M$ tel que, pour tout $w \in W$, $\gamma(w)$ soit un isomorphisme de $W^{-1}M$, et qui soient universels pour cette propriété. Autrement dit, pour tout foncteur $F : M \to M'$ tel que, pour tout $w \in W$, $F(w)$ soit inversible, il existe un unique foncteur $\widetilde{F} : W^{-1}M \to M'$ tel que $F = \widetilde{F}\gamma$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "F"'] & W^{-1}M \arrow[d, dashed, "\widetilde{F}"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

On dit que $W^{-1}M$ est la *catégorie des fractions de M relativement à W* et que γ est le *foncteur de localisation*. On dit que la partie W de $\mathsf{Fl}(M)$ est *fortement saturée* si W est formée exactement des flèches qui deviennent inversibles par le foncteur de localisation. On vérifie aussitôt qu'une partie fortement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$ est aussi faiblement saturée (cf. 2.1). On dit que le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est un *localisateur fondamental fortement saturé* si la partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est fortement saturée.

4.2. On appelle *catégorie homotopique relative au localisateur fondamental $\mathcal{W}$*, ou plus simplement *catégorie homotopique*, et on note $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$, ou plus simplement Hot, la catégorie $\mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$. On appelle *foncteur de localisation canonique* et on note $\gamma_{\mathcal{W}}$, ou plus simplement γ, le foncteur de localisation $\gamma : \mathcal{C}at \to \mathsf{Hot}$.

Si $\mathcal{W}$ est le localisateur fondamental trivial (2.26), $\mathcal{W} = \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$, alors la catégorie homotopique $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à l'objet final de $\mathcal{C}at$. Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{gr}$ (2.28), alors la catégorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie $\Delta_1 = \{0 \to 1\}$. Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$ est formé des équivalences faibles usuelles (2.29), alors la catégorie $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W}}$ est équivalente à la catégorie homotopique usuelle des CW-complexes.

4.3. On appelle *$\mathcal{W}$-modélisateur*, ou plus simplement *modélisateur*, un couple (M, W), où M est une catégorie et W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$, tel que la catégorie des fractions $W^{-1}M$ soit équivalente à la catégorie homotopique Hot. Si (M, W) et (M', W') sont deux modélisateurs, on dit qu'un foncteur $F : M \to M'$ est un *morphisme de modélisateurs* si :

a) $W = F^{-1}(W')$;

b) le foncteur $\overline{F} : W^{-1}M \longrightarrow W'^{-1}M'$ induit par F est une équivalence de catégories.

Le couple $(\mathcal{C}at, \mathcal{W})$ est un modélisateur, appelé le *modélisateur fondamental*.

4.4. On se fixe une petite catégorie A. On rappelle que

$$i_A : \widehat{A} \longrightarrow \mathcal{C}at$$

désigne le foncteur canonique :
$$F \longmapsto A/F$$
(cf. 3.1) et que
$$\mathcal{W}_{\widehat{A}} = i_A^{-1}(\mathcal{W})$$
désigne l'ensemble des équivalences faibles de $\widehat{A}$ (cf. 3.3). On note $\mathsf{Hot}_{\mathcal{W},A}$, ou plus simplement Hot_A, la catégorie des fractions $\mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$ et $\gamma_A : \widehat{A} \to \mathsf{Hot}_A$ le foncteur de localisation. On dit que A est une *$\mathcal{W}$-pseudo-catégorie test*, ou plus simplement une *pseudo-catégorie test*, si :

a) A est asphérique ;

b) le foncteur :
$$\bar{\imath}_A : \mathsf{Hot}_A = \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at = \mathsf{Hot}$$
induit par i_A est une équivalence de catégories.

Proposition 4.5. *Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental fortement saturé, les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *A est une pseudo-catégorie test* ;

b) *$(\widehat{A}, \mathcal{W}_{\widehat{A}})$ est un modélisateur et le foncteur i_A est un morphisme de modélisateurs dans le modélisateur fondamental $(\mathcal{C}at, \mathcal{W})$.*

DÉMONSTRATION. L'implication $(a)\Rightarrow(b)$ est évidente. Pour montrer l'implication $(b)\Rightarrow(a)$, il suffit de montrer que la condition (b) implique que A est asphérique, autrement dit que le foncteur canonique $A \to e$, où e désigne la catégorie ponctuelle, est une équivalence faible. Considérons le diagramme commutatif :
$$\begin{tikzcd} \widehat{A} \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "\gamma_A"'] & \mathcal{C}at \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathsf{Hot}_A \arrow[r, "\bar{\imath}_A"] & \mathsf{Hot} \end{tikzcd} \quad .$$
Le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ étant fortement saturé, il suffit de montrer que $\gamma(A) \to \gamma(e)$ est un isomorphisme. Or, $A \simeq A/e_{\widehat{A}} = i_A(e_{\widehat{A}})$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de $\widehat{A}$, et $\gamma(A) \simeq \gamma i_A(e_{\widehat{A}}) = \bar{\imath}_A\gamma_A(e_{\widehat{A}})$, et comme par hypothèse, $\bar{\imath}_A$ est une équivalence de catégories, l'assertion résulte du fait que l'image d'un objet final par une équivalence de catégories est un objet final et du lemme suivant.

Lemme 4.6. *Soient M une catégorie, W une partie de $\mathsf{Fl}(M)$, et $\gamma_M : M \to W^{-1}M$ le foncteur de localisation. Si e_M est un objet final de M, alors $\gamma_M(e_M)$ est un objet final de $W^{-1}M$.*

La démonstration est laissée au lecteur.

4.7. Dans la définition d'une pseudo-catégorie test, on a privilégié le foncteur i_A par rapport à son adjoint à droite i_A^* (cf. 3.2). De façon plus symétrique, on appelle $\mathcal{W}$*-catégorie test faible*, ou plus simplement *catégorie test faible*, une petite catégorie A telle qu'il existe une partie faiblement saturée W de $\mathsf{Fl}(\widehat{A})$ telle que :

a) $(\widehat{A}, W)$ soit un modélisateur ;

b) i_A et i_A^* soient des morphismes de modélisateurs

$$i_A : (\widehat{A}, W) \longrightarrow (\mathcal{C}at, \mathcal{W}) \quad , \qquad i_A^* : (\mathcal{C}at, \mathcal{W}) \longrightarrow (\widehat{A}, W) \quad ;$$

c) pour toute petite catégorie $C \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}at)$, on ait $\varepsilon_C \in \mathcal{W}$, et pour tout préfaisceau $F \in \mathsf{Ob}(\widehat{A})$, on ait $\eta_F \in W$, où

$$\varepsilon : i_A i_A^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at} \quad , \qquad \eta : 1_{\widehat{A}} \longrightarrow i_A^* i_A$$

désignent les morphismes d'adjonction (3.2.1).

On remarque que la condition (*b*) implique en particulier que $W = i_A^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_{\widehat{A}}$ et que $\mathcal{W} = {i_A^*}^{-1}(W) = {i_A^*}^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$. En fait, les conditions (*a*), (*b*), (*c*) ci-dessus sont largement redondantes.

Lemme 4.8. *Soient* (i, j) *un couple de foncteurs adjoints,* $i : M \to M'$, $j : M' \to M$,

$$\varepsilon : ij \longrightarrow 1_{M'} \quad , \qquad \eta : 1_M \longrightarrow ji$$

les morphismes d'adjonction et W (resp. W') *une partie faiblement saturée de* $\mathsf{Fl}(M)$ (resp. $\mathsf{Fl}(M')$). *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $W = i^{-1}(W')$ *et pour tout* $a' \in \mathsf{Ob}(M')$ *le morphisme* $\varepsilon_{a'} : ij(a') \longrightarrow a'$ *est dans* W' ;

a$'$) $W' = j^{-1}(W)$ *et pour tout* $a \in \mathsf{Ob}(M)$ *le morphisme* $\eta_a : a \longrightarrow ji(a)$ *est dans* W ;

ces deux conditions impliquant la condition :

b) $i(W) \subset W'$, $j(W') \subset W$ *et les foncteurs :*

$$\bar{\imath} : W^{-1}M \longrightarrow {W'}^{-1}M' \quad , \qquad \bar{\jmath} : {W'}^{-1}M' \longrightarrow W^{-1}M$$

induits par i *et* j *sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, les isomorphismes d'adjonction étant déduits de* ε *et* η.

De plus, si les parties W *et* W' *sont fortement saturées les conditions* (a), (a$'$) *et* (b) *sont équivalentes.*

Démonstration. Montrons que $(a) \Rightarrow (a')$. Pour tout $a \in \mathsf{Ob}(M)$, on a :

$$\varepsilon_{i(a)} \circ i(\eta_a) = 1_{i(a)}$$

$$i(a) \xrightarrow{i(\eta_a)} iji(a) \xrightarrow{\varepsilon_{i(a)}} i(a)$$

et comme $\varepsilon_{i(a)} \in W'$, on en déduit par saturation faible que $i(\eta_a) \in W'$, d'où $\eta_a \in W$. Montrons que $W' = j^{-1}(W)$. Soit $f' : a' \to b'$ une flèche de M'. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} ij(a') \arrow[r, "\varepsilon_{a'}"] \arrow[d, "ij(f')"'] & a' \arrow[d, "f'"] \\ ij(b') \arrow[r, "\varepsilon_{b'}"] & b' \end{tikzcd}$$

et comme $\varepsilon_{a'}, \varepsilon_{b'} \in W'$, la saturation faible implique que $f' \in W'$ si et seulement si $ij(f') \in W'$. Or, par hypothèse, $ij(f') \in W'$ si et seulement si $j(f') \in W$, ce qui prouve (a').

L'implication $(a') \Rightarrow (a)$ résulte de l'implication précédente appliquée aux catégories opposées.

Les autres assertions sont évidentes.

Proposition 4.9. *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *A est une catégorie test faible ;*

ii) *A satisfait aux conditions suivantes :*

a) *A est asphérique ;*

b) *$i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$ (autrement dit $i_A i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$) ;*

iii) *pour toute petite catégorie C, le foncteur $\varepsilon_C : i_A i_A^*(C) \longrightarrow C$ est une équivalence faible ;*

iii$'$) *pour toute petite catégorie C, le foncteur $\varepsilon_C : i_A i_A^*(C) \longrightarrow C$ est asphérique ;*

iii$''$) *pour toute petite catégorie C ayant un objet final, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique.*

iii$'''$) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique.*

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$, (b) est immédiate. Pour démontrer que $(i) \Rightarrow (ii)$, (a), on remarque que la condition (i) implique que le morphisme $\varepsilon_e : i_A i_A^*(e) \to e$ est une équivalence faible. Or, i_A^* étant un adjoint à droite, il transforme un objet final en objet final. On a donc $i_A^*(e) \simeq e_{\widehat{A}}$ et $i_A i_A^*(e) \simeq i_A(e_{\widehat{A}}) \simeq A$, ce qui montre que A est asphérique et prouve l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$. Montrons l'implication $(ii) \Rightarrow (iii''')$. Soit C une petite catégorie asphérique. Le morphisme $C \to e$ est une équivalence faible, et en vertu de (ii), (b), il en est de même pour $i_A i_A^*(C) \to i_A i_A^*(e) \simeq A$. Il résulte donc de (ii), (a) et (La), (2.2) que $i_A^*(C)$ est un préfaisceau asphérique. L'implication $(iii''') \Rightarrow (iii'')$ résulte de (Lb), (2.2), l'implication $(iii'') \Rightarrow (iii')$ de l'observation que pour toute petite catégorie C et tout $c \in \mathsf{Ob}(C)$, $i_A i_A^*(C)/c \simeq i_A i_A^*(C/c)$, l'implication $(iii') \Rightarrow (iii)$ de (Lc), (2.2), et l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ du lemme 4.8, ce qui prouve la proposition.

Remarque 4.10. Il résulte, en particulier, de la proposition précédente qu'une catégorie test faible est une pseudo-catégorie test.

Segments et homotopie dans une catégorie.

5.1. Soit M une catégorie admettant un objet final e_M. On appelle *segment* de M un triplet $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$, où I est un objet de M, et $\partial_0, \partial_1 : e_M \rightrightarrows I$ des morphismes de M. Si M admet un objet initial $\emptyset_M$, on dit qu'un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ est *séparant* si le morphisme canonique $\emptyset_M \to e_M$ est un noyau de la double flèche $(\partial_0, \partial_1) : e_M \rightrightarrows I$. Soient $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ et $\mathbb{I}' = (I', \partial'_0, \partial'_1)$ deux segments de M. On appelle *morphisme de segments* de $\mathbb{I}$ dans $\mathbb{I}'$ un morphisme $\varphi : I \to I'$ de M tel que $\partial'_0 = \varphi\partial_0$ et $\partial'_1 = \varphi\partial_1$.

5.2. On suppose dans la suite que M admet des produits finis. Soient $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ un segment de M, et $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes de M. On dit que f est $\mathbb{I}$*-homotope de façon élémentaire* à g s'il existe un morphisme $h : X \times I \to Y$ tel que $f = h(1_X \times \partial_0)$ et $g = h(1_X \times \partial_1)$

$$\begin{tikzcd}
& X \times I \arrow[dd, "h"] & \\
X \arrow[ur, "1_X \times \partial_0"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[ul, "1_X \times \partial_1"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Y &
\end{tikzcd},$$

et on dit que h est une $\mathbb{I}$*-homotopie* de f à g. On remarque que 1_I est une $\mathbb{I}$-homotopie de ∂_0 à ∂_1 (en identifiant $e_M \times I$ à I). Plus généralement, un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1) \to \mathbb{I}' = (I', \partial'_0, \partial'_1)$ est une $\mathbb{I}$-homotopie de ∂'_0 à ∂'_1.

Soit $\mathcal{I}$ un ensemble de segments de M. On appelle relation de $\mathcal{I}$*-homotopie* la relation d'équivalence engendrée par la relation : "il existe un segment $\mathbb{I}$ appartenant à $\mathcal{I}$ tel que f soit $\mathbb{I}$-homotope à g de façon élémentaire". On dit que deux morphismes sont $\mathcal{I}$*-homotopes* (ou $\mathbb{I}$*-homotopes* si $\mathcal{I} = \{\mathbb{I}\}$) s'ils sont en relation par la relation de $\mathcal{I}$-homotopie.

5.3. On vérifie immédiatement que la relation de $\mathcal{I}$-homotopie est compatible à la composition et au produit de morphismes :

a) Si $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$, $g_0, g_1 : Y \rightrightarrows Z$ sont des morphismes de M, et si f_0 est $\mathcal{I}$-homotope à f_1 et g_0 $\mathcal{I}$-homotope à g_1, alors $g_0 f_0$ est $\mathcal{I}$-homotope à $g_1 f_1$.

b) Si $f_0, f_1 : X \rightrightarrows Y$, $f'_0, f'_1 : X' \rightrightarrows Y'$ sont des morphismes de M, et si f_0 est $\mathcal{I}$-homotope à f_1 et f'_0 $\mathcal{I}$-homotope à f'_1, alors $f_0 \times f'_0$ est $\mathcal{I}$-homotope à $f_1 \times f'_1$.

En vertu de la condition (a), il existe une catégorie $M_{\mathcal{I}}$ ayant mêmes objets que M, et telle que pour tous objets X et Y, $\mathsf{Hom}_{M_{\mathcal{I}}}(X, Y)$ soit le quotient de l'ensemble $\mathsf{Hom}_M(X, Y)$ par la relation de $\mathcal{I}$-homotopie, la composition dans $M_{\mathcal{I}}$ étant déduite de celle de M par passage au quotient, et un foncteur $Q_{\mathcal{I}}$ induisant l'identité sur les ensembles des objets, associant à une flèche de M sa classe de $\mathcal{I}$-homotopie, et jouissant de la propriété universelle suivante. Pour toute catégorie M' et tout foncteur $F : M \to M'$, tel que pour tout couple de morphismes $\mathcal{I}$-homotopes de M, on ait $F(f) = F(g)$, il existe un foncteur unique $\overline{F} : M_{\mathcal{I}} \to M'$ rendant commutatif le triangle :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "Q_{\mathcal{I}}"'] \arrow[dr, "F"] & \\ M_{\mathcal{I}} \arrow[r, "\overline{F}"'] & M' \end{tikzcd} \quad .$$

La condition (b) implique que $M_{\mathcal{I}}$ admet des produits finis, et que le foncteur $Q_{\mathcal{I}}$ commute à ces produits.

On dit qu'un morphisme f de M est un *$\mathcal{I}$-homotopisme* (ou un *$\mathbb{I}$-homotopisme* si $\mathcal{I} = \{\mathbb{I}\}$) si $Q_{\mathcal{I}}(f)$ est un isomorphisme de $M_{\mathcal{I}}$. On dit qu'un objet X de M est *$\mathcal{I}$-contractile* (ou *$\mathbb{I}$-contractile* si $\mathcal{I} = \{\mathbb{I}\}$) si $Q_{\mathcal{I}}(X)$ est un objet final de $M_{\mathcal{I}}$, ou de façon équivalente, si le morphisme canonique $X \to e_M$ est un $\mathcal{I}$-homotopisme. Pour cela, il faut et il suffit que l'identité de X soit $\mathcal{I}$-homotope à un endomorphisme *constant* de X (se factorisant par l'objet final e_M de M).

5.4. On note $\widetilde{\mathcal{I}}$ la classe des segments $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M tels que ∂_0 et ∂_1 soient $\mathcal{I}$-homotopes. On a $\mathcal{I} \subset \widetilde{\mathcal{I}}$ (cf. 5.2), et il résulte de la condition (a) ci-dessus que la relation de $\widetilde{\mathcal{I}}$-homotopie coïncide à la relation de $\mathcal{I}$-homotopie, et $\widetilde{\mathcal{I}}$ est la plus grande classe de segments ayant cette propriété. On a $M_{\widetilde{\mathcal{I}}} = M_{\mathcal{I}}$, $Q_{\widetilde{\mathcal{I}}} = Q_{\mathcal{I}}$, et en particulier, pour qu'un morphisme de M soit un $\widetilde{\mathcal{I}}$-homotopisme, il faut et il suffit qu'il soit un $\mathcal{I}$-homotopisme, et pour qu'un objet de M soit $\widetilde{\mathcal{I}}$-contractile, il faut et il suffit qu'il soit $\mathcal{I}$-contractile.

Si M admet des sommes amalgamées (il suffit des sommes amalgamées sous e_M), et si les foncteurs produit par un objet respectent les carrés cocartésiens, alors deux flèches $f, g : X \rightrightarrows Y$ de M sont $\mathcal{I}$-homotopes si et seulement s'il existe un segment $\mathbb{I}$ appartenant à $\widetilde{\mathcal{I}}$ et une $\mathbb{I}$-homotopie de f à g.

Si $\mathcal{I}'$ est une deuxième classe de segments de M, la relation de $\mathcal{I}$-homotopie est plus fine que celle de $\mathcal{I}'$-homotopie si et seulement si pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à $\mathcal{I}$, ∂_0 et ∂_1 sont $\mathcal{I}'$-homotopes, autrement dit, si $\mathcal{I} \subset \widetilde{\mathcal{I}'}$, et alors un $\mathcal{I}$-homotopisme est aussi un $\mathcal{I}'$-homotopisme, et un objet $\mathcal{I}$-contractile est aussi $\mathcal{I}'$-contractile.

5.5. Soient M et M' des catégories admettant des objets finaux e_M et $e_{M'}$ respectivement, et $F : M \to M'$ un foncteur tel que $F(e_M) = e_{M'}$. Pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M, $(F(I), F(\partial_0), F(\partial_1))$ est un segment de M', noté $F(\mathbb{I})$. Supposons que M et M' admettent des produits finis et que le foncteur F y commute. Alors si $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont deux morphisme de M, et $h : X \times I \to Y$ une $\mathbb{I}$-homotopie de f à g,

$$F(h) : F(X) \times F(I) = F(X \times I) \longrightarrow F(Y)$$

est une $F(\mathbb{I})$-homotopie de $F(f)$ à $F(g)$. On en déduit que si $\mathcal{I}$ est une classe de segments de M, et $\mathcal{I}'$ la classe des segments de M' formée des segments $F(\mathbb{I})$, pour $\mathbb{I}$ segment appartenant à $\mathcal{I}$, et si $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont deux morphismes $\mathcal{I}$-homotopes de M, alors $F(f)$

et $F(g)$ sont $\mathcal{I}'$-homotopes. Ainsi, en vertu de la propriété universelle de la catégorie $M_{\mathcal{I}}$, le foncteur F induit un foncteur $\overline{F} : M_{\mathcal{I}} \to M'_{\mathcal{I}'}$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{I}}"'] & M' \arrow[d, "Q_{\mathcal{I}'}"] \\ M_{\mathcal{I}} \arrow[r, "\overline{F}"] & M'_{\mathcal{I}'} \end{tikzcd} \quad .$$

En particulier, si f est un $\mathcal{I}$-homotopisme de M, alors $F(f)$ est un $\mathcal{I}'$-homotopisme de M', et si X est un objet $\mathcal{I}$-contractile de M, $F(X)$ est un objet $\mathcal{I}'$-contractile de M'.

Lemme 5.6 (d'homotopie). *Soient M une catégorie admettant des produits finis, W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$, $\mathcal{I}$ un ensemble de segments de M tel que, pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à $\mathcal{I}$, le morphisme canonique $p_I : I \to e_M$, où e_M désigne l'objet final de M, soit universellement dans W, et $f, g : X \rightrightarrows Y$ deux morphismes $\mathcal{I}$-homotopes de M. Alors :*

a) $\gamma(f) = \gamma(g)$, *où $\gamma : M \to W^{-1}M$ désigne le foncteur canonique de localisation ;*

b) *f est dans W si et seulement si g l'est ;*

c) *si f est un isomorphisme et g constant (se factorisant par l'objet final e_M), alors le morphisme canonique $X \to e_M$ (et $Y \to e_M$) est universellement dans W.*

Démonstration. Pour démontrer (a) et (b), on peut supposer qu'il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à $\mathcal{I}$ et une $\mathbb{I}$-homotopie $h : X \times I \to Y$ de f à g, de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X \times I \arrow[dd, "h"] & \\ X \arrow[ur, "1_X \times \partial_0"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[ul, "1_X \times \partial_1"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme le morphisme canonique $p_I : I \to e_M$ est universellement dans W, $pr_1 = 1_X \times p_I : X \times I \to X$ est dans W, et comme

$$pr_1 \circ (1_X \times \partial_0) = 1_X = pr_1 \circ (1_X \times \partial_1) \ , \tag{5.6.1}$$

on a

$$\gamma(pr_1)\gamma(1_X \times \partial_0) = 1_{\gamma(X)} = \gamma(pr_1)\gamma(1_X \times \partial_1) \ ,$$

d'où

$$\gamma(1_X \times \partial_0) = \gamma(1_X \times \partial_1) \ ,$$

ce qui implique que

$$\gamma(f) = \gamma(h)\gamma(1_X \times \partial_0) = \gamma(h)\gamma(1_X \times \partial_1) = \gamma(g) \ ,$$

et prouve l'assertion (a).

De même, l'égalité 5.6.1 implique, en vertu des conditions (a) et (b) de la saturation, que $1_X \times \partial_0$ et $1_X \times \partial_1$ sont dans W. On en déduit que f (resp. g) est dans W si et seulement si h l'est (condition (b) de la saturation), ce qui prouve l'assertion (b).

Montrons l'assertion (c). Par hypothèse, $g = sp$, où $p : X \to e_M$ désigne le morphisme canonique et $s : e_M \to Y$ un morphisme de M. Il s'agit de montrer que pour tout objet T de M, la première projection $pr_1 = 1_T \times p : T \times X \to T$ est dans W. Or, en vertu de 5.3, $1_T \times f$ est homotope à $1_T \times g = (1_T \times s)(1_T \times p)$, et comme f est un isomorphisme, il en est de même pour $1_T \times f$ qui est donc dans W (conditions (a) et (c) de la saturation). Il résulte donc de (b) que $(1_T \times s)(1_T \times p)$ est dans W, et comme $(1_T \times p)(1_T \times s) = 1_T$, $1_T \times p$ est dans W (condition (c) de la saturation), ce qui termine la démonstration.

Remarque 5.7. Dans la démonstration de 5.6, (c), on utilise pour la première fois de façon essentielle la condition (c) de la saturation. Jusqu'à présent, la seule conséquence utilisée de cette condition (combinée avec la condition (a)) était que les isomorphismes sont dans W.

Proposition 5.8. *Soient M une catégorie admettant des produits finis, W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$, et $\mathcal{I}$ un ensemble de segments de M tel que, pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ appartenant à $\mathcal{I}$, le morphisme canonique $p_I : I \to e_M$, où e_M désigne l'objet final de M, soit universellement dans W. Si X est un objet $\mathcal{I}$-contractile de M, alors le morphisme canonique $X \to e_M$ est universellement dans W.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 5.6 (c).

5.9. On appelle *segment multiplicatif* d'une catégorie M admettant des produits finis, un segment $\mathbb{L} = (L, \lambda_0, \lambda_1)$ de M, muni d'une loi de composition

$$\Lambda : L \times L \longrightarrow L$$

admettant λ_0 comme unité à droite et λ_1 comme zéro à droite, autrement dit, telle que les diagrammes suivants soient commutatifs

$$\begin{tikzcd} L \times e_M \arrow[r, "1_L \times \lambda_0"] \arrow[dr, "1_L"'] & L \times L \arrow[d, "\Lambda"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \times e_M \arrow[r, "1_L \times \lambda_1"] \arrow[d] & L \times L \arrow[d, "\Lambda"] \\ e_M \arrow[r, "\lambda_1"] & L \end{tikzcd} .$$

En particulier, Λ est une $\mathbb{L}$-homotopie de l'identité de L à un endomorphisme constant, et L est un objet $\mathbb{L}$-contractile de M.

Lemme 5.10. *Soient M une catégorie admettant des produits finis, d'objet final e_M, W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$, $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ un segment de M, tel que le morphisme canonique $I \to e_M$ soit universellement dans W, et $(\mathbb{L}, \Lambda)$, $\mathbb{L} = (L, \lambda_0, \lambda_1)$, un segment multiplicatif. S'il existe un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} \to \mathbb{L}$, alors le morphisme canonique $p_L : L \to e_M$ est universellement dans W.*

Démonstration. Posons $h = \Lambda(1_L \times \varphi) : L \times I \to L$

$$L \times I \xrightarrow{1_L \times \varphi} L \times L \xrightarrow{\Lambda} L \quad .$$

On a

$$h(1_L \times \partial_0) = \Lambda(1_L \times \varphi)(1_L \times \partial_0) = \Lambda(1_L \times \lambda_0) = 1_L$$

et

$$h(1_L \times \partial_1) = \Lambda(1_L \times \varphi)(1_L \times \partial_1) = \Lambda(1_L \times \lambda_1) = \lambda_1 p_L \ ,$$

autrement dit, 1_L et $\lambda_1 p_L$ sont $\mathbb{I}$-homotopes. Il résulte donc du lemme 5.6, (c) que $p_L : L \to e_M$ est universellement dans W.

Remarque 5.11. Voici une démonstration plus conceptuelle de ce lemme. Le morphisme de segments φ définit une $\mathbb{I}$-homotopie de λ_0 à λ_1 (cf. 5.2), et le segment $\mathbb{L}$ appartient donc à $\widetilde{\{\mathbb{I}\}}$ (cf. 5.4). Comme L est $\mathbb{L}$-contactile (cf. 5.9), on en déduit qu'il est aussi $\mathbb{I}$-contractile (5.4), et on conclut par la proposition 5.8.

Exemple 5.12. Soit M une catégorie admettant des limites projectives finies, un objet initial *strict* $\emptyset_M$ (on dit qu'un objet initial est strict si tout morphisme de but cet objet est un isomorphisme), et un *objet de Lawvere* L (un objet de M représentant le préfaisceau $X \mapsto \{\text{sous-objets de } X\}$). Comme $\emptyset_M$ est un objet initial strict, pour tout objet X de M, le morphisme canonique $\emptyset_M \to X$ est un monomorphisme. Si e_M désigne l'objet final de M, les monomorphismes $1_{e_M} : e_M \to e_M$ et $\emptyset_M \to e_M$ définissent deux morphismes $\lambda_0 : e_M \to L$ et $\lambda_1 : e_M \to L$, d'où un segment $\mathbb{L} = (L, \lambda_0, \lambda_1)$, appelé *segment de Lawvere* de M, et qui est unique à isomorphisme unique de segments près. On remarque que l'intersection des sous-objets

$$(X' \hookrightarrow X\ ,\ X'' \hookrightarrow X) \longmapsto (X' \times_X X'' \hookrightarrow X)$$

définit une loi de composition sur L

$$\Lambda : L \times L \longrightarrow L \quad .$$

Lemme 5.13. *Le segment $\mathbb{L}$ est séparant, $(\mathbb{L}, \Lambda)$ est un segment multiplicatif, et pour tout segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M, il existe un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} \to \mathbb{L}$ (non nécessairement unique).*

Démonstration. Montrons que $\mathbb{L}$ est séparant. En effet, supposons que le carré

(5.13.1)
$$\begin{tikzcd}
 & e_M \arrow[dr, "\lambda_0"] & \\
X \arrow[ur] \arrow[dr] & & L \\
 & e_M \arrow[ur, "\lambda_1"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme les carrés

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"'] & e_M \arrow[d] \\
X \arrow[r] & e_M
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\emptyset_M \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset_M \arrow[d] \\
X \arrow[r] & e_M
\end{tikzcd}
\tag{5.13.2}
$$

sont cartésiens (le second parce que $\emptyset_M$ est un objet initial strict), la commutativité de 5.13.1 implique que $1_X : X \to X$ et $\emptyset_M \to X$ représentent le même sous-objet de X, autrement dit, que $\emptyset_M \to X$ est un isomorphisme, ce qui prouve l'assertion.

Pour montrer que λ_0 (resp. λ_1) est une unité (resp. un zéro) à droite pour Λ, comme les carrés 5.13.2 sont cartésiens, il suffit de remarquer que, pour tout objet X de M, l'intersection d'un sous-objet X' de X avec le sous-objet "plein" (resp. "vide") est le sous-objet X' (resp. vide).

Montrons que pour tout segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$, il existe un morphisme de segments $\varphi : \mathbb{I} \to \mathbb{L}$. Il s'agit de montrer qu'il existe un morphisme $\varphi : I \to L$ de M tel que

$$
\lambda_0 = \varphi\partial_0 \ , \quad \lambda_1 = \varphi\partial_1 \quad . \tag{5.13.3}
$$

Soit $\varphi : I \to L$ le morphisme correspondant au sous-objet $\partial_0 : e_M \to I$ de I. Les égalités 5.13.3 résultent alors du fait que les carrés suivants sont cartésiens :

$$
\begin{tikzcd}
e_M \arrow[r] \arrow[d] & e_M \arrow[d, "\partial_0"] \\
e_M \arrow[r, "\partial_0"'] & I
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\emptyset_M \arrow[r] \arrow[d] & e_M \arrow[d, "\partial_0"] \\
e_M \arrow[r, "\partial_1"'] & I
\end{tikzcd}
$$

(le deuxième puisque $\mathbb{I}$ est séparant).

Proposition 5.14. *Soit M une catégorie admettant des limites projectives finies, un objet initial strict, et un objet de Lawvere L, et soit W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(M)$. Notons e_M un objet final de M. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le morphisme canonique $L \to e_M$ est universellement dans W;*

b) *il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de M, tel que le morphisme canonique $I \to e_M$ soit universellement dans W.*

DÉMONSTRATION. La proposition résulte immédiatement des lemmes 5.13 et 5.10.

EXEMPLE 5.15. Supposons que $M = \mathcal{C}at$, notons Δ_1 la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$, et $e_0, e_1 : e \rightrightarrows \Delta_1$ les foncteurs définis par 0 et 1 (correspondant aux cribles "plein" et "vide" de e (cf. 2.23)). On vérifie immédiatement que $\mathbf{\Delta}_1 := (\Delta_1, e_0, e_1)$ est un segment séparant de $\mathcal{C}at$, et on remarque que si $u_0, u_1 : A \rightrightarrows B$ sont deux flèches de $\mathcal{C}at$, les $\mathbf{\Delta}_1$-homotopies de u_0 à u_1 correspondent biunivoquement aux morphismes de foncteurs de u_0 vers u_1. On en déduit facilement que les segments appartenant à $\widetilde{\{\mathbf{\Delta}_1\}}$ (cf. 5.4) sont exactement les segments $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ tels que les images de ∂_0 et ∂_1 appartiennent à une même composante connexe de I, et que deux flèches $u_0, u_1 : A \rightrightarrows B$ de $\mathcal{C}at$ sont $\mathbf{\Delta}_1$-homotopes si et seulement s'il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\mathcal{C}at$, avec I connexe, et une $\mathbb{I}$-homotopie $h : A \times I \to B$ de u_0 à u_1. On dira plus simplement que u_0 et u_1 sont *homotopes.* De même, on dira qu'une flèche de $\mathcal{C}at$ est un *homotopisme*, pour $\mathbf{\Delta}_1$-homotopisme, et qu'une catégorie est *contractile*, pour $\mathbf{\Delta}_1$-contractile.

Proposition 5.16. *Si C est une petite catégorie admettant un objet final (ou initial), alors C est contractile.*

DÉMONSTRATION. Soient e_C un objet final de C, $s : e \to C$ le foncteur défini par cet objet, et $p : C \to e$ le foncteur canonique. On a $ps = 1_e$ et si, pour tout objet c de C, $\alpha_c : c \to e_C$ désigne la flèche canonique, $\alpha : 1_C \to sp$ est un morphisme de foncteurs, qui correspond à une $\mathbf{\Delta}_1$-homotopie de 1_C à sp, ce qui prouve la proposition.

5.17. Le segment $\mathbf{\Delta}_1$ admet une structure de segment multiplicatif. En effet, Δ_1 représente le préfaisceau
$$C \longmapsto \{\text{cribles de } C\}$$
sur $\mathcal{C}at$ (2.23), et le morphisme de C vers Δ_1 se factorisant par e_0 (resp. e_1) correspond au crible plein (resp. vide) de C. On en déduit que la loi de composition sur Δ_1 représentant l'intersection de deux cribles définit une structure de segment multiplicatif sur $\mathbf{\Delta}_1$. Explicitement, cette loi de composition est définie par
$$\begin{aligned} &\Delta_1 \times \Delta_1 \longrightarrow \Delta_1 \\ &\quad (a,b) \longmapsto a + b - ab \ , \quad a, b \in \mathsf{Ob}(\Delta_1) = \{0, 1\} \ . \end{aligned}$$
C'est le morphisme qui correspond au crible $\{(0,0)\}$ de $\Delta_1 \times \Delta_1$.

Proposition 5.18. *Pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$, une catégorie contractile est $\mathcal{W}$-asphérique.*

DÉMONSTRATION. En vertu de Lb (2.2), et de la proposition 2.4, $\Delta_1 \to e$ est universellement dans $\mathcal{W}$. Comme en vertu de La (2.2), $\mathcal{W}$ est faiblement saturé, la proposition 5.18 résulte de la proposition 5.8.

Les catégories test.

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

6.1. La propriété d'être une catégorie test faible n'est pas une propriété locale : si A est une catégorie test faible, la catégorie A/a, pour a objet de A, n'est pas nécessairement une catégorie test faible, et si A est une petite catégorie telle que, pour tout objet a de A, A/a soit une catégorie test faible, A n'est pas nécessairement une catégorie test faible. On est ainsi conduit à poser la définition suivante.

Définition 6.2. On dit qu'une petite catégorie A est une *$\mathcal{W}$-catégorie test locale*, ou plus simplement une *catégorie test locale*, si pour tout objet a de A, A/a est une catégorie test faible. On dit que A est une *$\mathcal{W}$-catégorie test*, ou plus simplement une *catégorie test*, si elle est à la fois une $\mathcal{W}$-catégorie test locale et une $\mathcal{W}$-catégorie test faible.

Proposition 6.3. *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *A est une catégorie test locale ;*

b) *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, $i_A^*(C)$ est un préfaisceau localement asphérique* (cf. 3.6) ;

c) *pour toute petite catégorie asphérique C, $i_A^*(C)$ est un préfaisceau localement asphérique.*

Démonstration. Soit C une petite catégorie. Le préfaisceau $i_A^*(C)$ est localement asphérique si et seulement si le foncteur $A/i_A^*(C) \to A$ est asphérique, autrement dit, si pour tout objet a de A, la catégorie $(A/i_A^*(C))/a$ est asphérique. Or, on vérifie facilement que $(A/i_A^*(C))/a \simeq (A/a)/i_{A/a}^*(C)$, et la proposition résulte de l'équivalence des conditions (i), (iii'') et (iii''') de la proposition 4.9.

Remarques 6.4. *a*) Une petite catégorie A est une catégorie test si et seulement si elle est une catégorie test locale, asphérique. En effet, en vertu de la proposition 4.9, pour démontrer que sous ces hypothèses A est une catégorie test faible, il suffit de montrer que pour toute petite catégorie C ayant un objet final, $A/i_A^*(C) \to A$ est asphérique, ce qui résulte de la proposition 6.3. Pour caractériser donc les catégories test, il suffit de caractériser les catégories test locales.

b) Si A est une catégorie test locale, alors pour tout préfaisceau F de $\widehat{A}$, la catégorie A/F est une catégorie test locale. En effet, pour tout objet $(a, p : a \to F)$ de A/F, on a un isomorphisme canonique $(A/F)/(a,p) \simeq A/a$. Si, de plus, F est asphérique, il résulte de (a) que A/F est une catégorie test.

6.5. Soit A une petite catégorie. On pose $L_A = i_A^*(\Delta_1)$, où Δ_1 désigne la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$. On remarque que si F désigne un préfaisceau sur A, on a

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(F, L_A) = \mathsf{Hom}_{\widehat{A}}(F, i_A^*(\Delta_1)) &\simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i_A(F), \Delta_1)\\ = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(A/F, \Delta_1) &\simeq \{\text{cribles de } A/F\} \simeq \{\text{sous-objets de } F\}\ .\end{aligned}$$

On en déduit que L_A représente le foncteur

$$F \longmapsto \{\text{sous-objets de } F\}\ ,$$

autrement dit, que L_A est un objet de Lawvere de $\widehat{A}$.

Théorème 6.6. *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *A est une catégorie test locale ;*

b) *L_A est localement asphérique ;*

c) *il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit localement asphérique.*

Démonstration. Comme Δ_1 admet un objet final, l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 6.3. Pour montrer l'implication $(b) \Rightarrow (a)$, supposons que L_A soit localement asphérique, autrement dit, que le morphisme canonique $L_A \to e_{\widehat{A}}$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de $\widehat{A}$, soit universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Soit C une petite catégorie admettant un objet final. En vertu de la proposition 5.16, la catégorie C est $\boldsymbol{\Delta}_1$-contractile, où $\boldsymbol{\Delta}_1$ désigne le segment (Δ_1, e_0, e_1) (cf. 5.15). Comme le foncteur i_A^*, étant un adjoint à droite, commute aux limites projectives, on en déduit que $\mathbb{L}_A := (L_A, i_A^*(e_0), i_A^*(e_1))$ est un segment de $\widehat{A}$, et que $i_A^*(C)$ est $\mathbb{L}_A$-contractile (cf. 5.5). Il résulte donc de la proposition 5.8 que le morphisme canonique $i_A^*(C) \to e_{\widehat{A}}$ est universellement dans $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$, autrement dit que $i_A^*(C)$ est localement asphérique, ce qui prouve, en vertu de la proposition 6.3, que A est une catégorie test locale. L'équivalence de (b) et (c) résulte de la proposition 5.14.

Corollaire 6.7. *Soit A une petite catégorie admettant des produits finis. S'il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit représentable, alors A est une catégorie test.*

Démonstration. Comme A admet des produits finis, elle admet, en particulier, un objet final e_A, et elle est donc asphérique. Comme le préfaisceau I est représentable, pour tout objet a de A, le préfaisceau $a \times I$ est aussi représentable, donc asphérique (3.5), ce qui implique que le morphisme $I \to e_A$ de $\widehat{A}$ est asphérique (3.5), autrement dit, que le préfaisceau I est localement asphérique (3.6). Il résulte donc du théorème 6.6 que A est une catégorie test locale, et comme elle est asphérique, elle est une catégorie test (6.4, (a)).

Remarque 6.8. Si A est une petite catégorie admettant un objet final e_A, un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit représentable n'est rien d'autre qu'une double flèche $\partial_0, \partial_1 : e_A \rightrightarrows I$ de A, telle que il n'y ait aucun diagramme commutatif dans A, de la forme

$$\begin{tikzcd} & e_A \arrow[dr, "\partial_0"] & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & & I \\ & e_A \arrow[ur, "\partial_1"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

En particulier, cela exclut l'existence d'un objet initial dans A.

Exemples 6.9. Le corollaire 6.7 fournit un grand nombre d'exemples de catégories test :

a) La catégorie dont les objets sont les ensembles

$$\{0, 1, \dots, n\} \ , \quad n \geq 0 \ ,$$

et dont les morphismes sont toutes les applications entre ces ensembles (catégorie équivalente à celle des ensembles finis non vides) est une catégorie test.

b) Une petite catégorie équivalente à la catégorie des ensembles ordonnés (ou préordonnés) finis non vides est une catégorie test.

c) Une petite catégorie équivalente à celle des catégories finies non vides est une catégorie test.

d) Plus générallement, soit A une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ stable par produits finis. On suppose :

i) la catégorie vide n'est pas un objet de A ;

ii) il existe une catégorie ayant au moins deux objets (qui peuvent eventuellement être isomorphes) et qui est un objet de A.

Alors A est une catégorie test. En effet, soit I un objet de A ayant au moins deux objets distincts e_0, e_1. Alors les flèches $\partial_0, \partial_1 : e \rightrightarrows I$ définies par e_0, e_1 définissent, en vertu de la remarque 6.8, un segment séparant de $\widehat{A}$, et l'assertion résulte du corollaire 6.7. On remarque que les exemples précédents peuvent être considérés comme des cas particuliers.

e) La sous-catégorie (non pleine) de la catégorie des ensembles dont les objets sont les puissances $\{0, 1\}^n$, $n \geq 0$, de l'ensemble $\{0, 1\}$, et les morphismes les applications

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \{0, 1\}^m \longrightarrow \{0, 1\}^n \ , \quad \varphi_i : \{0, 1\}^m \longrightarrow \{0, 1\} \ ,$$

où pour tout i, $0 \leq i \leq n$, φ_i est une projection ou une application constante, est une catégorie test.

Corollaire 6.10. *Soient A une catégorie test locale* (resp. *une catégorie test*) *et B une petite catégorie arbitraire* (resp. *asphérique*)*. Alors la catégorie $A \times B$ est une catégorie test locale* (resp. *une catégorie test*).

Démonstration. Soient A une catégorie test locale, B une catégorie arbitraire, et notons $pr_1 : A \times B \to A$ la première projection. En vertu du théorème 6.6, il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit localement asphérique. Comme le foncteur $pr_1^* : \widehat{A} \to \widehat{A \times B}$ est exact, $(pr_1^*(I), pr_1^*(\partial_0), pr_1^*(\partial_1))$ est un segment séparant de $\widehat{A \times B}$ et il résulte de la proposition 3.11 que $pr_1^*(I) = I \boxtimes e_{\widehat{B}}$ (où $e_{\widehat{B}}$ désigne l'objet final de $\widehat{B}$) est localement asphérique. Le théorème 6.6 implique donc que $A \times B$ est une catégorie test locale, ce qui prouve l'assertion non respé. L'assertion respé en résulte, en vertu de 6.4, (*a*) et 2.5.

Exemple 6.11. Notons $\mathbf{\Delta}$ la *catégorie des simplexes*, sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ordonnés dont les objets sont les ensembles

$$\Delta_n = \{0, 1, \dots, n\} \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

ordonnés par l'ordre naturel, de sorte que $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ soit la catégorie des *ensembles simpliciaux.*

Lemme 6.12. *L'objet* Δ_1 *de* $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ *est localement asphérique.*

DÉMONSTRATION. Pour montrer que Δ_1 est localement asphérique, autrement dit (3.6), que le morphisme $\Delta_1 \to e_{\widehat{\mathbf{\Delta}}} = \Delta_0$ de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ est asphérique, il suffit, en vertu de 3.5, de montrer que pour tout m, $m \geq 0$, le préfaisceau $\Delta_m \times \Delta_1$ est asphérique.

Notons
$$\varphi_k : \Delta_{m+1} \longrightarrow \Delta_m \times \Delta_1 \ , \quad 0 \leq k \leq m \ ,$$
le morphisme de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ défini par les morphismes
$$\varphi'_k : \Delta_{m+1} \longrightarrow \Delta_m \quad , \qquad \varphi''_k : \Delta_{m+1} \longrightarrow \Delta_1$$
de $\mathbf{\Delta}$, définis par
$$\varphi'_k(l) = \begin{cases} l \quad , & 0 \leq l \leq k \ , \\ l-1 \ , & k < l \leq m+1 \ , \end{cases} \qquad \varphi''_k(l) = \begin{cases} 0 \ , & 0 \leq l \leq k \ , \\ 1 \ , & k < l \leq m+1 \ . \end{cases}$$
Notons F_k le préfaisceau image de φ_k. Comme le morphisme φ_k est un monomorphisme de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, on en déduit que F_k est isomorphe à Δ_{m+1}, et en particulier, F_k est représentable, donc asphérique (3.5).

On pose
$$G_k = \bigcup_{0 \leq l \leq k} F_l \quad , \qquad 0 \leq k \leq m \quad .$$
On va montrer

a) $\Delta_m \times \Delta_1 = G_m$;

b) $G_k \cap F_{k+1} \simeq \Delta_m$, $0 \leq k < m$.

La condition (*b*) impliquera, par récurrence, que pour tout k, $0 \leq k \leq m$, G_k est asphérique (car $G_0 = F_0$ est asphérique, et si G_k est asphérique (pour un entier k, $0 \leq k < m$), $G_{k+1} = G_k \cup F_{k+1}$ est asphérique, en vertu de (*b*) et de la proposition 3.7), et la condition (*a*) impliquera alors que $\Delta_m \times \Delta_1$ est asphérique.

Or, la condition (*a*) est immédiate. Pour montrer la condition (*b*), considérons le morphisme
$$\psi_k : \Delta_m \longrightarrow \Delta_m \times \Delta_1 \ , \quad 0 \leq k < m \ ,$$
de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, défini par les morphismes
$$\psi'_k : \Delta_m \longrightarrow \Delta_m \quad , \qquad \psi''_k : \Delta_m \longrightarrow \Delta_1$$
de $\mathbf{\Delta}$, définis par
$$\psi'_k = 1_{\Delta_m} \quad , \qquad \psi''_k(l) = \begin{cases} 0 \ , & 0 \leq l \leq k \ , \\ 1 \ , & k < l \leq m \ . \end{cases}$$
Notons F'_k le préfaisceau image de ψ_k. Comme le morphisme ψ_k est un monomorphisme de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, on en déduit que F'_k est isomorphe à Δ_m. D'autre part, on vérifie aussitôt que
$$F'_k = G_k \cap F_{k+1} \quad , \qquad 0 \leq k < m \ ,$$
ce qui prouve la condition (*b*), et termine la démonstration.

Proposition 6.13. *La catégorie* $\mathbf{\Delta}$ *est une catégorie test.*

DÉMONSTRATION. Comme la catégorie $\mathbf{\Delta}$ admet un objet final Δ_0, elle est asphérique. Pour montrer donc que $\mathbf{\Delta}$ est une catégorie test, il suffit, en vertu de 6.4, (a), de montrer qu'elle est une catégorie test locale. Notons

$$e_0,\, e_1 : \Delta_0 \rightrightarrows \Delta_1$$

les morphismes définis par

$$e_0(0) = 0\ , \quad e_1(0) = 1 \quad .$$

En vertu du théorème 6.6, pour montrer que $\mathbf{\Delta}$ est une catégorie test locale, il suffit de montrer que (Δ_1, e_0, e_1) est un segment séparant de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, et que Δ_1 est un objet localement asphérique de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$. La première assertion résulte immédiatement de la remarque 6.8, et la deuxième du lemme 6.12.

Les catégories test strictes.

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

Proposition 7.1. *Soit A une petite catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *pour tous objets a et b de A le produit $a \times b$ dans $\widehat{A}$ est un préfaisceau asphérique ;*

a$'$) *le produit de deux préfaisceaux asphériques de $\widehat{A}$ est asphérique ;*

b) *le foncteur $i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at$ commute aux produits binaires, à équivalence faible près, autrement dit, pour tous préfaisceaux F et G de $\widehat{A}$, le morphisme canonique*

$$A/(F \times G) \longrightarrow A/F \times A/G$$

est une équivalence faible ;

b$'$) *pour tous préfaisceaux F et G de $\widehat{A}$, le morphisme canonique*

$$A/(F \times G) \longrightarrow A/F \times A/G$$

est asphérique ;

c) *tout préfaisceau représentable de $\widehat{A}$ est localement asphérique ;*

c$'$) *tout préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$ est localement asphérique ;*

d) *le foncteur diagonal $A \to A \times A$ est asphérique.*

De plus, si A est non vide, chacune de ces conditions implique que la catégorie A est asphérique.

Démonstration. L'implication $(a) \Rightarrow (b')$ résulte de l'observation que pour tous objets $(a,\, p : a \to F)$ et $(b,\, q : b \to G)$ de A/F et A/G respectivement, on a un isomorphisme canonique

$$(A/(F \times G))/((a,p),(b,q)) \simeq A/a \times b \quad .$$

L'implication $(b') \Rightarrow (b)$ est évidente, et l'implication $(b) \Rightarrow (a')$ résulte du corollaire 2.5. Dire qu'un préfaisceau F de $\widehat{A}$ est localement asphérique, c'est dire que pour tout objet a de A, le préfaisceau $a \times F$ est asphérique, ce qui montre l'implication $(a') \Rightarrow (c')$. Les implications $(c') \Rightarrow (c)$ et $(c) \Rightarrow (a)$ sont immédiates, ce qui prouve l'équivalence des six premières conditions. L'équivalence de (a) et (d) résulte de l'observation que pour tout objet (a,b) de $A \times A$, on a un isomorphisme canonique $A/(a,b) \simeq A/a \times b$.

Montrons que si A est non vide, ces conditions impliquent que A est asphérique. Soit a un objet de A. En vertu de la condition (c), le morphisme canonique $a \to e_{\widehat{A}}$ de $\widehat{A}$, où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de $\widehat{A}$, est asphérique, ce qui implique que le préfaisceau $e_{\widehat{A}}$ est asphérique, autrement dit que la catégorie A est asphérique.

Définition 7.2. Soit A une petite catégorie. On dit que A est *totalement $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement *totalement asphérique*, si elle est asphérique, et si pour tous objets a et b de A le préfaisceau $a \times b$ de $\widehat{A}$ est asphérique.

Remarque 7.3. Une catégorie totalement asphérique est donc une petite catégorie satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition 7.1 et qui est asphérique, et pour cela il suffit qu'elle soit non vide. En vertu de la proposition 2.27, si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est non trivial, les catégories totalement asphériques sont exactement les petites catégories non vides satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition 7.1. Si A est une catégorie totalement asphérique, il résulte de l'équivalence des conditions (a) et (c') de la proposition 7.1 et de l'asphéricité de A qu'un préfaisceau de $\widehat{A}$ est asphérique si et seulement si il est localement asphérique.

Exemple 7.4. Une petite catégorie admettant des produits finis est totalement asphérique.

Proposition 7.5. a) *Un produit fini de petites catégories totalement asphériques est une catégorie totalement asphérique.*

b) *Soit $u : A \to B$ un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Si A est totalement asphérique, il en est de même pour B.*

Démonstration. $a)$ Comme la catégorie ponctuelle e est totalement asphérique, il suffit de montrer que le produit de deux catégories totalement asphériques A et B est totalement asphérique. Comme $A \times B$ est asphérique (2.5), il suffit, en vertu de la proposition 7.1, de montrer que le foncteur diagonal

$$\Delta_{A\times B} \longrightarrow A \times B \times A \times B$$

est asphérique. Or, ce foncteur est le composé de $\Delta_A \times \Delta_B$ (où $\Delta_A : A \to A \times A$ et $\Delta_B : B \to B \times B$ désignent les foncteurs diagonaux) et de l'isomorphisme

$$A \times A \times B \times B \longrightarrow A \times B \times A \times B$$

permutant les deux facteurs du milieu. Comme A et B sont totalement asphériques, les foncteurs Δ_A et Δ_B sont asphériques (7.1), donc aussi $\Delta_A \times \Delta_B$ (2.6), ce qui prouve l'assertion.

$b)$ Comme u est une équivalence faible et A asphérique, B est aussi asphérique. Pour montrer qu'elle est totalement asphérique, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Delta_A"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ A \times A \arrow[r, "u \times u"'] & B \times B \end{tikzcd} \quad ,$$

où Δ_A et Δ_B désignent les foncteurs diagonaux. Les foncteurs Δ_A et $u \times u$ sont asphériques, en vertu de 7.1 et 2.6 respectivement. Comme u est aussi asphérique, il en est de même pour Δ_B (2.8), ce qui achève la démonstration (7.1).

Proposition 7.6. *Soit A une petite catégorie. On suppose qu'il existe une classe $\mathcal{I}$ de segments de $\widehat{A}$ telle que pour tout segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ appartenant à $\mathcal{I}$, le préfaisceau I soit localement asphérique, et telle que tout préfaisceau représentable soit $\mathcal{I}$-contractile.*

Alors A satisfait aux conditions équivalentes de la proposition 7.1. En particulier, si de plus A est non vide ou asphérique, alors A est totalement asphérique.

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 5.8, pour tout objet a de A, le préfaisceau représenté par a est localement asphérique, autrement dit, A satisfait à la condition (c) de la proposition 7.1. En vertu de cette même proposition, si A est de plus non vide, A est asphérique, donc totalement asphérique, ce qui achève la démonstration.

Définition 7.7. On appelle *$\mathcal{W}$-catégorie test stricte*, ou plus simplement *catégorie test stricte*, une catégorie test totalement asphérique.

Proposition 7.8. *Soit A une petite catégorie totalement asphérique. Les condition suivantes sont équivalentes :*

a) *A est une catégorie test faible ;*

b) *A est une catégorie test locale ;*

c) *A est une catégorie test;*

d) *A est une catégorie test stricte ;*

e) *il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit asphérique ;*

f) *l'objet de Lawvere $L_A = i_A^*(\Delta_1)$ de $\widehat{A}$ est asphérique.*

DÉMONSTRATION. Comme A est totalement asphérique, l'équivalence $(c) \Leftrightarrow (d)$ est tautologique. L'équivalence des conditions (b), (e) et (f) résulte du théorème 6.6 et de la remarque 7.3. La catégorie A étant asphérique, l'équivalence $(b) \Leftrightarrow (c)$ résulte de la remarque 6.4, (a). L'implication $(c) \Rightarrow (a)$ est évidente. Il reste à prouver l'implication $(a) \Rightarrow (b)$. Soit C une petite catégorie admettant un objet final. En vertu de la proposition 4.9, le préfaisceau $i_A^*(C)$ est asphérique. Comme A est totalement asphérique, il résulte de la proposition 7.1 que $i_A^*(C)$ est localement asphérique. En vertu de la proposition 6.3, la catégorie A est donc une catégorie test locale.

Corollaire 7.9. *Soit A une petite catégorie totalement asphérique. S'il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit représentable, alors A est une catégorie test stricte.*

Ce corollaire, qui est conséquence immédiate de la proposition 7.8, généralise et précise le corollaire 6.7.

Corollaire 7.10. a) *Soient A une catégorie test stricte, et B une catégorie totalement asphérique. Alors la catégorie $A \times B$ est une catégorie test stricte.*

b) *Soit $u : A \to B$ un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Si A est totalement asphérique et B une catégorie test locale, alors A et B sont des catégories test strictes.*

DÉMONSTRATION. L'assertion (a) résulte de la proposition 7.5, (a), et du corollaire 6.10. Montrons l'assertion (b). En vertu de la proposition 7.5, (b), B est totalement asphérique. Elle est donc une catégorie test stricte (7.8). On en déduit qu'il existe un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{B}$, tel que I soit un préfaisceau asphérique (7.8). Comme u est asphérique, $u^*(I)$ est un préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$ (3.9), et comme u^* est un foncteur exact, $(u^*(I), u^*(\partial_0), u^*(\partial_1))$ est un segment séparant de $\widehat{A}$. Donc A est aussi une catégorie test stricte (7.8), ce qui prouve le corollaire.

Exemples 7.11. Les catégories test des exemples 6.9, (a) - (e) sont des catégories test strictes, car elles admettent des produits finis (7.4).

Lemme 7.12. *Tout objet Δ_m de $\mathbf{\Delta}$ est un objet $\mathbb{I}$-contractile de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, où $\mathbb{I}$ désigne le segment (Δ_1, e_0, e_1) de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ (e_0 et e_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement).*

Démonstration. Le morphisme

$$h : \Delta_m \times \Delta_1 \to \Delta_m$$

correspondant à l'application croissante

$$(k,i) \longmapsto \begin{cases} k & i = 0 \\ m & i = 1 \end{cases} \qquad 0 \le k \le m$$

est une $\mathbb{I}$-homotopie de l'identité de Δ_m à l'endomorphisme constant de Δ_m défini par l'application croissante constante

$$k \longmapsto m \quad , \qquad 0 \le k \le m \quad ,$$

ce qui prouve le lemme.

Proposition 7.13. *La catégorie $\mathbf{\Delta}$ est une catégorie test stricte.*

Démonstration. Comme $\mathbf{\Delta}$ est une catégorie test (proposition 6.13), il suffit de montrer que $\mathbf{\Delta}$ est totalement asphérique. Comme le préfaisceau de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ représenté par Δ_1 est localement asphérique (lemme 6.12), cela résulte de la proposition 7.6 et du lemme 7.12.

Exemple 7.14. La catégorie $\mathbf{\Delta}$ étant une catégorie test, elle est, en particulier, une catégorie test locale, autrement dit, pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, la catégorie $\mathbf{\Delta}/\Delta_m$ est aussi une catégorie test. Néanmoins, si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est non trivial, et si $m \neq 0$, la catégorie $\mathbf{\Delta}/\Delta_m$ n'est pas une catégorie test stricte. En effet, soit $a_i = (\Delta_0,\, p_i : \Delta_0 \to \Delta_m)$ l'objet de $\mathbf{\Delta}/\Delta_m$ défini par $p_i(0) = i$, $0 \le i \le m$. Comme $m \ge 1$, le produit $a_0 \times a_m$ dans $\widehat{\mathbf{\Delta}/\Delta_m}$ est le préfaisceau vide, objet initial de $\widehat{\mathbf{\Delta}/\Delta_m}$, la catégorie $\mathbf{\Delta}/a_0 \times a_m$ est donc la catégorie vide, et comme le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est non trivial, cette catégorie n'est pas asphérique (proposition 2.27).

Exemple 7.15. Plus généralement, si A est une catégorie test arbitraire, en vertu du théorème 6.6, il existe un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tel que I soit localement asphérique, donc asphérique (puisque A est asphérique). On en déduit que A/I est une catégorie test (6.4, (b)). Néanmoins, si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ n'est pas trivial, A/I n'est pas une catégorie test stricte. En effet, les objets $(e_{\widehat{A}}, \partial_0)$ et $(e_{\widehat{A}}, \partial_1)$ de $\widehat{A}/I \simeq \widehat{A/I}$ sont des préfaisceaux asphériques de $\widehat{A/I}$, car $(A/I)/(e_{\widehat{A}}, \partial_i) \simeq A/e_{\widehat{A}} \simeq A$, $i = 0, 1$, mais leur produit dans $\widehat{A/I}$ est le préfaisceau vide, qui n'est pas asphérique (proposition 2.27), ce qui contredit la condition (a') de la proposition 7.1.

Définition 7.16. Soit A une petite catégorie non vide, et notons $\mathcal{I}_A$ l'ensemble des segments

$$\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1) \quad , \qquad \partial_0, \partial_1 : e_{\widehat{A}} \rightrightarrows I \quad ,$$

de $\widehat{A}$, tels que I soit un objet de A. On dit que A est un *$\mathcal{W}$-précontracteur*, ou plus simplement un *précontracteur*, si tout préfaisceau représentable de $\widehat{A}$ est $\mathcal{I}_A$-contractile. On dit que A est un *$\mathcal{W}$-contracteur*, ou plus simplement un *contracteur*, si A est un précontracteur et une catégorie totalement asphérique.

Proposition 7.17. *Soit A un précontracteur, non trivial (non équivalent à la catégorie finale). Alors il existe un segment séparant $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$, avec I objet de A. Si de plus A est un contracteur, alors A est une catégorie test stricte.*

Démonstration. Notons $\mathcal{I}_A$ l'ensemble des segments $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$ tels que I soit un objet de A. Soit F un préfaisceau de $\widehat{A}$. Si F est non vide, il existe une flèche $a \to F$ de $\widehat{A}$, avec a objet de A. Comme a est $\mathcal{I}_A$-contractile, il existe, en particulier, un morphisme $e_{\widehat{A}} \to a$, d'où un morphisme $e_{\widehat{A}} \to F$. On en déduit que si $F \hookrightarrow e_{\widehat{A}}$ est un sous-objet de $e_{\widehat{A}}$, alors F est vide, ou égal à $e_{\widehat{A}}$. En effet, en vertu de ce qui précède, si F est non vide, il existe une flèche $e_{\widehat{A}} \to F$, ce qui implique que $F \hookrightarrow e_{\widehat{A}}$ est un isomorphisme. Soit donc $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ un segment appartenant à $\mathcal{I}_A$. Alors $\mathsf{Ker}(\partial_0, \partial_1)$ est vide ou égal à $e_{\widehat{A}}$, autrement dit, ou bien le segment $\mathbb{I}$ est séparant, ou bien $\partial_0 = \partial_1$. Si aucun segment de $\mathcal{I}_A$ n'était séparant, la relation de $\mathcal{I}_A$-homotopie serait donc l'égalité, et les $\mathcal{I}_A$-homotopismes les isomorphismes. Comme les objets de A sont $\mathcal{I}_A$-contractiles, les objets de A seraient isomorphes à l'objet final, ce qui est contraire à l'hypothèse de non-trivialité de A, et prouve la première assertion. La deuxième en résulte, grâce à la proposition 7.8.

Exemple 7.18. La catégorie $\mathbf{\Delta}$ est un contracteur. En effet, en vertu du lemme 7.12, la catégorie $\mathbf{\Delta}$ est un précontracteur, et en vertu de la proposition 7.13, elle est totalement asphérique.

Les foncteurs test.

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

Définition 8.1. Soient A une petite catégorie, $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur, et

$$i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \qquad C \longmapsto (a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(a), C))$$

le foncteur correspondant. On dit que i est un *foncteur $\mathcal{W}$-asphérique*, ou plus simplement un *foncteur asphérique*, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est asphérique ;

b) pour qu'une petite catégorie C soit asphérique, il faut et il suffit que le préfaisceau $i^*(C)$ soit asphérique.

Remarque 8.2. Cette notion de foncteur asphérique d'une petite catégorie, à valeurs dans $\mathcal{C}at$, ne doit pas être confondue avec la notion de morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Le lien entre ces deux notions vient de la proposition 3.9, qui affirme (entre autres) qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est asphérique si et seulement si les préfaisceaux asphériques de $\widehat{B}$ sont exactement ceux dont l'image réciproque par u est un préfaisceau asphérique de $\widehat{A}$.

Exemple 8.3. Soit A une catégorie test faible. Alors le foncteur $i_A : A \to \mathcal{C}at$, $a \mapsto A/a$, est un foncteur asphérique. En effet, pour tout objet a de A, $i_A(a) = A/a$ admet un objet final et est donc une catégorie asphérique. D'autre part, en vertu de la proposition 4.9, pour toute petite catégorie C, le morphisme d'adjonction $i_A i_A^*(C) \to C$ est une équivalence faible. On en déduit que la catégorie C est asphérique si et seulement si le préfaisceau $i_A^*(C)$ l'est, ce qui prouve que le foncteur i_A est asphérique. On remarque que réciproquement, si A est une petite catégorie telle que le foncteur i_A soit asphérique, la proposition 4.9 implique que A est une catégorie test faible.

Lemme 8.4. *Soient $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, $j : B \to \mathcal{C}at$ un foncteur, et posons $i = ju : A \to \mathcal{C}at$. On suppose que pour tout objet b de B, la catégorie $j(b)$ est asphérique.*

a) *Si u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$, le foncteur $j : B \to \mathcal{C}at$ est asphérique si et seulement si le foncteur $i : A \to \mathcal{C}at$ l'est.*

b) *Si le foncteur j est pleinement fidèle et i asphérique, alors u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ et j un foncteur asphérique.*

Démonstration. On vérifie immédiatement qu'on a un triangle commutatif

(8.4.1)
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}at \arrow[dl, "j^*"'] \arrow[dr, "i^*"] & \\ \widehat{B} \arrow[rr, "u^*"'] & & \widehat{A} \end{tikzcd}$$

(où "l'étoile en haut" de i et j a un sens légèrement différent de celle de u).

a) Si u est asphérique, il résulte de la proposition 3.9 qu'un préfaisceau F de $\widehat{B}$ est asphérique si et seulement si le préfaisceau u^*F de A l'est. L'équivalence de l'asphéricité des foncteurs i et j résulte alors immédiatement de la commutativité du triangle 8.4.1.

b) Supposons le foncteur j pleinement fidèle et i asphérique. Pour tout objet b de B, la pleine fidélité de j implique que $j^*j(b)$ est isomorphe à b, d'où $u^*(b) \simeq u^*j^*j(b) = i^*j(b)$. Comme $j(b)$ est une catégorie asphérique et i un foncteur asphérique, $u^*(b) \simeq i^*j(b)$ est un préfaisceau asphérique, ce qui prouve que le morphisme u est asphérique (3.9). Il résulte alors de (a) que j est un foncteur asphérique, ce qui achève la démonstration.

8.5. Soient A une petite catégorie, $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit asphérique, A_0 une catégorie test faible, et B une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ contenant $i(A)$ et $i_{A_0}(A_0)$, et formée de catégories asphériques. Les foncteurs i et i_A se factorisent par B, et on obtient ainsi un diagramme commutatif

(8.5.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "i"'] & B \arrow[d, hook, "j"] & A_0 \arrow[l, "u_0"'] \arrow[dl, "i_{A_0}"] \\ & \mathcal{C}at & \end{tikzcd} .$$

Comme A_0 est une catégorie test faible, i_{A_0} est un foncteur asphérique (8.3), et il résulte du lemme 8.4, (b) que u_0 est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$, et j un foncteur asphérique. En vertu du lemme 8.4, (a) et (b), on en déduit que le foncteur i est asphérique si et seulement si u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$. Le diagramme commutatif 8.5.1 permet de former un "2-diagramme"

(8.5.2)
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}at \arrow[dl, "i^*"'] \arrow[d, "j^*"] \arrow[dr, "i^*_{A_0}"] & \\ \widehat{A} \arrow[dr, "i_A"'] & \widehat{B} \arrow[l, "u^*"'] \arrow[r, "u_0^*"] \arrow[d, "i_B"] & \widehat{A}_0 \arrow[dl, "i_{A_0}"] \\ & \mathcal{C}at & \arrow[from=2-1, to=3-2, phantom, shift left=6, "\overset{\lambda_u}{\Longrightarrow}"] \arrow[from=2-3, to=3-2, phantom, shift right=6, "\overset{\lambda_{u_0}}{\Longleftarrow}"] \end{tikzcd}$$

dont les deux triangles supérieures sont commutatifs, et les deux triangles inférieures indiquent simplement les morphismes de foncteurs

$$\lambda_u : i_A u^* \longrightarrow i_B \quad , \qquad \lambda_{u_0} : i_{A_0} u_0^* \longrightarrow i_B \quad ,$$

définis dans 3.8. On en déduit une chaîne de morphismes d'endofoncteurs de $\mathcal{C}at$

(8.5.3)
$$i_A i^* \xrightarrow{\lambda_u \star j^*} i_B j^* \xleftarrow{\lambda_{u_0} \star j^*} i_{A_0} i^*_{A_0} \xrightarrow{\varepsilon_{A_0}} 1_{\mathcal{C}at} \quad ,$$

ε_{A_0} étant le morphisme d'adjonction (cf. 3.1), et pour toute petite catégorie C des foncteurs

$$(8.5.4) \qquad i_A i^*(C) \xrightarrow{\lambda_u(j^*(C))} i_B j^*(C) \xleftarrow{\lambda_{u_0}(j^*(C))} i_{A_0} i^*_{A_0}(C) \xrightarrow{\varepsilon_{A_0}(C)} C \quad ,$$

les deux derniers étant des équivalences faibles ($\lambda_{u_0}(j^*(C))$ en vertu de la proposition 3.9, puisque le morphisme u_0 est asphérique, et ε_{A_0} en vertu de la proposition 4.9, puisque A_0 est une catégorie test faible). Si i est un foncteur asphérique, $\lambda_u(j^*(C))$ est aussi une équivalence faible, car u est alors un morphisme asphérique.

Proposition 8.6. *Soient A une petite catégorie, et $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique.*

a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *i est asphérique ;*

ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*

iii) *A est asphérique, et un morphisme w de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible si et seulement si $i^*(w)$ est une équivalence faible de préfaisceaux ;*

iv) *A est asphérique, et pour toute équivalence faible w de $\mathcal{C}at$, $i^*(w)$ est une équivalence faible de préfaisceaux.*

b) *Ces conditions équivalentes impliquent la condition :*

v) *$i^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, et le foncteur $\overline{i^*} : \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at \to \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A}$ induit par i^* est un quasi-inverse à droite du foncteur $\overline{i}_A : \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \to \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$ induit par i_A ;*

et cette dernière condition est équivalente aux précédentes si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est fortement saturé (cf. 4.1).

c) *Si pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est, non seulement asphérique, mais même contractile, alors les conditions équivalentes* (i) - (iv) *sont aussi équivalentes à la condition :*

ii′) *pour toute petite catégorie contractile C, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique.*

d) *Si pour tout objet a de A la catégorie $i(a)$ admet même un objet final e_a, alors les conditions équivalentes* (i) - (iv) *sont aussi équivalentes à la condition :*

ii″) *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique ;*

et si l'on note

$$\alpha : i_A i^* \longrightarrow 1_{\mathcal{C}at}$$

le morphisme de foncteurs défini par

$$\alpha_C : i_A i^*(C) \longrightarrow C \quad , \qquad (a, v : i(a) \to C) \longmapsto v(e_a) \ , \quad C \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}at) \, , \ a \in \mathsf{Ob}(A) \quad ,$$

les deux conditions suivantes sont équivalentes aux précédentes :

α) *pour toute petite catégorie C le foncteur $\alpha_C : i_A i^*(C) \to C$ est une équivalence faible ;*

α') *pour toute petite catégorie C le foncteur $\alpha_C : i_A i^*(C) \to C$ est asphérique.*

DÉMONSTRATION. On choisit une catégorie test faible A_0 (par exemple une des catégories test de l'exemple 6.9, ou la catégorie des simplexes $\mathbf{\Delta}$ (cf. 6.13)). On note B la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ dont l'ensemble des objets est la réunion de l'ensemble des images par i des objets de A, et de l'ensemble des images par i_{A_0} des objets de A_0, et on désigne par $j : B \hookrightarrow \mathcal{C}at$ l'inclusion. On en déduit ainsi un diagramme 8.5.1, et on peut appliquer les considérations de 8.5, puisque B est formée de catégories asphériques. De plus, on remarque que si pour tout objet a de A, $i(a)$ est une catégorie contractile (resp. admettant un objet final), alors B est formée de catégories contractiles (resp. admettant un objet final), puisque pour tout objet a de A_0, la catégorie $i_{A_0}(a)$ possède un objet final, et est en particulier contractile (5.16).

Les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (ii') \Rightarrow (ii'')$ sont évidentes (5.18, 5.16). Montrons l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$. En gardant les notations du diagramme 8.5.1, comme j est pleinement fidèle, pour tout objet b de B, on a un isomorphisme $u^*(b) \simeq u^*j^*j(b) = i^*(j(b))$. Comme $j(b)$ est une catégorie asphérique, il en est de même, en vertu de l'hypothèse (ii), pour $u^*(b) \simeq i^*(j(b))$. On en déduit que u est un morphisme asphérique de $\mathcal{C}at$ (3.9), et par suite, que i est un foncteur asphérique (cf. 8.5). En vertu de la remarque précédente, le même argument prouve que si pour tout objet a de A, $i(a)$ est une catégorie contractile (resp. admettant un objet final), alors la condition (ii') (resp. (ii'')) implique la condition (i).

Montrons l'implication $(i) \Rightarrow (iii)$. Supposons donc que le foncteur i soit asphérique. En vertu de 8.5, pour toute flèche $w : C \to C'$ de $\mathcal{C}at$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} i_A i^*(C) \arrow[r, "\lambda_u(j^*(C))"] \arrow[d, "i_A i^*(w)"'] & i_B j^*(C) \arrow[d, "i_B j^*(w)"] & i_{A_0} i^*_{A_0}(C) \arrow[l, "\lambda_{u_0}(j^*(C))"'] \arrow[r, "\varepsilon_{A_0}(C)"] \arrow[d, "i_{A_0} i^*_{A_0}(w)"] & C \arrow[d, "w"] \\ i_A i^*(C') \arrow[r, "\lambda_u(j^*(C'))"'] & i_B j^*(C') & i_{A_0} i^*_{A_0}(C') \arrow[l, "\lambda_{u_0}(j^*(C'))"] \arrow[r, "\varepsilon_{A_0}(C')"'] & C' \end{tikzcd} \qquad , \tag{8.6.1}$$

dont les flèches horizontales sont des équivalences faibles. On en déduit que w est une équivalence faible si et seulement si $i_A i^*(w)$ l'est, autrement dit si $i^*(w)$ est une équivalence faible de préfaisceaux. Il reste à prouver que A est une catégorie asphérique, et cela résulte de l'isomorphisme $A \simeq i_A i^*(e)$.

L'implication $(iii) \Rightarrow (iv)$ est évidente. Montrons l'implication $(iv) \Rightarrow (ii)$. Soit C une catégorie asphérique. Alors le morphisme $C \to e$ de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible, et par (iv), $i^*_A(C) \to i^*_A(e) \simeq e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible de préfaisceaux. Comme A est asphérique, $e_{\widehat{A}}$ est un préfaisceau asphérique, donc $i^*_A(C)$ aussi. Ceci achève la démonstration des assertions (a) et (c).

Démontrons que les conditions équivalentes (i) - (iv) impliquent la condition (v). Supposons donc ces conditions satisfaites. La condition (iv) implique que $i^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$. Si l'on note $\gamma : \mathcal{C}at \to \mathsf{Hot} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$ le foncteur de localisation, le diagramme commutatif 8.6.1, dont les flèches horizontales sont des équivalences faibles, montre que

$$C \longmapsto \gamma(\varepsilon_{A_0}(C))\gamma(\lambda_{u_0}(j^*(C)))^{-1}\gamma(\lambda_u(j^*(C)))$$

définit un isomorphisme du foncteur $\overline{i}_A\,\overline{i^*}$ et du foncteur identique 1_{Hot}. Réciproquement, pour montrer que si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est fortement saturé, la condition (v)

implique la condition (iv), il suffit de montrer que la condition (v) implique alors que A est asphérique. Or, $A \simeq i_A i^*(e)$, et par hypothèse, $\gamma(i_A i^*(e)) = \overline{i}_A \overline{i^*}(\gamma(e))$ est isomorphe à $\gamma(e)$, qui est un objet final de Hot (4.6). On en déduit que $\gamma(A)$ est aussi un objet final de Hot, et que l'image par γ du morphisme canonique $A \to e$ est un isomorphisme. L'hypothèse que le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est fortement saturé implique alors que $A \to e$ est une équivalence faible, ce qui achève la démonstration de l'assertion (b).

Il reste à prouver que, sous les hypothèses de (d), les conditions (ii''), (α) et (α') sont équivalentes (puisque l'équivalence, sous ces hypothèses, de (i) et (ii'') a déjà été établie). Les implications $(\alpha') \Rightarrow (\alpha) \Rightarrow (ii'')$ sont évidentes. L'implication $(ii'') \Rightarrow (\alpha')$ résulte de l'observation que pour toute petite catégorie C, et tout objet c de C, on a un isomorphisme canonique $(i_A i^*(C))/c \simeq i_A i^*(C/c)$. Ceci achève la démonstration de la proposition.

Corollaire 8.7. *Soient A une petite catégorie, et $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur asphérique tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ admette un objet final. Si M est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ telle que le foncteur $i_A i^* : \mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$ se factorise par M, alors $(M, \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}(M))$ est un modélisateur, et l'inclusion de M dans $\mathcal{C}at$ un morphisme de modélisateurs de $(M, \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}(M))$ vers le modélisateur fondamental $(\mathcal{C}at, \mathcal{W})$.*

Démonstration. Comme, en vertu de la proposition 8.6, (d), il existe un morphisme de foncteurs $\alpha : i_A i^* \to 1_{\mathcal{C}at}$ tel que pour toute petite catégorie C, le foncteur $\alpha_C : i_A i^*(C) \to C$ soit une équivalence faible, le corollaire résulte aussitôt du lemme suivant.

Lemme 8.8. *Soient N une catégorie, W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}(N)$, $f : N \to N$ un foncteur, $\alpha : f \to 1_N$ un morphisme de foncteurs, tel que pour tout objet a de N, $\alpha_a \in W$, M une sous-catégorie pleine de N, et $i : M \to N$ le foncteur d'inclusion. On suppose que le foncteur f se factorise par M, de sorte qu'on ait un triangle commutatif*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & M \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} .$$

Alors les foncteurs g et i induisent des équivalences de catégories

$$\overline{g} : W^{-1}N \longrightarrow (W \cap \mathsf{Fl}(M))^{-1}M \quad \textit{et} \quad \overline{\imath} : (W \cap \mathsf{Fl}(M))^{-1}M \longrightarrow W^{-1}N$$

quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. Pour toute flèche $u : a \to a'$ de N, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} g(a) = f(a) \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "g(u) = f(u)"'] & a \arrow[d, "u"] \\ g(a') = f(a') \arrow[r, "\alpha_{a'}"'] & a' \end{tikzcd} .$$

Si $u \in W$, comme $\alpha_a, \alpha_{a'} \in W$, on a par saturation $g(u) \in W \cap \mathsf{Fl}(M)$, et g induit un foncteur $\overline{g} : W^{-1}N \longrightarrow (W \cap \mathsf{Fl}(M))^{-1}M$. De même, comme $i(W \cap \mathsf{Fl}(M)) \subset W$, le foncteur i induit un foncteur $\overline{\imath} : (W \cap \mathsf{Fl}(M))^{-1}M \longrightarrow W^{-1}N$. Le morphisme de foncteurs α définit un isomorphisme de foncteurs $\overline{\alpha} : \overline{\imath}\,\overline{g} \to 1_{W^{-1}N}$, et la restriction de α à M induit un morphisme de foncteurs $\beta : gi \to 1_M$, qui définit un isomorphisme de foncteurs $\overline{\beta} : \overline{g}\,\overline{\imath} \to 1_{(W \cap \mathsf{Fl}(M))^{-1}M}$.

Corollaire 8.9. *Soient A une catégorie test faible, et M la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ dont les objets sont les petites catégories C localement isomorphes à A, autrement dit, telles que pour tout objet c de C, il existe un objet a de A tel que les catégories C/c et A/a soient isomorphes. Alors $(M, \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}(M))$ est un modélisateur, et l'inclusion de M dans $\mathcal{C}at$ un morphisme de modélisateurs.*

DÉMONSTRATION. On applique le corollaire 8.7 au foncteur asphérique $i = i_A : A \to \mathcal{C}at$, défini par $a \mapsto A/a$ (8.3), en remarquant que pour tout préfaisceau F de $\widehat{A}$, la catégorie A/F est localement isomorphe à A.

Corollaire 8.10. *Soient A une pseudo-catégorie test, et $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ soit asphérique. Alors le foncteur i est asphérique si et seulement si $i^* : \mathcal{C}at \to \widehat{A}$ est un morphisme de modélisateurs, du modélisateur fondamental $(\mathcal{C}at, \mathcal{W})$ vers le modélisateur $(\widehat{A}, \mathcal{W}_{\widehat{A}})$, autrement dit, si*

a) $\mathcal{W} = {i^*}^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$;

b) *le foncteur i^* induit une équivalence de catégories :*

$$\overline{i^*} : \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}\widehat{A} \quad .$$

DÉMONSTRATION. Si le foncteur i est asphérique, en vertu de la proposition 8.6, (iii), on a $\mathcal{W} = {i^*}^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$, et en vertu de 8.6 (v), le foncteur $\overline{i^*}$, induit par i^*, est un quasi-inverse à droite du foncteur $\overline{\imath}_A$, induit par i_A. La catégorie A étant une pseudo-catégorie test, le foncteur $\overline{\imath}_A$ est une équivalence de catégorie, et il en est donc de même pour $\overline{i^*}$. La réciproque résulte du fait que la condition $\mathcal{W} = {i^*}^{-1}(\mathcal{W}_{\widehat{A}})$ implique la condition (iii) de la proposition 8.6, puisque une pseudo-catégorie test est, par définition, asphérique.

Ce corollaire justifie la terminologie suivante.

Définition 8.11. On appelle *$\mathcal{W}$-pseudo-foncteur test* (resp. *$\mathcal{W}$-foncteur test faible*), ou plus simplement *pseudo-foncteur test* (resp. *foncteur test faible*), un foncteur asphérique dont la catégorie source est une pseudo-catégorie test (resp. une catégorie test faible). On appelle *$\mathcal{W}$-foncteur test local*, ou plus simplement *foncteur test local*, un foncteur $i : A \to \mathcal{C}at$ tel que pour tout objet a de A, le foncteur $A/a \to \mathcal{C}at$, induit par i, soit un foncteur test faible, autrement dit, si A est une catégorie test locale, et pour tout objet a de A, $A/a \to \mathcal{C}at$ un foncteur asphérique. On dit que le foncteur $i : A \to \mathcal{C}at$ est un *$\mathcal{W}$-foncteur test*, ou plus simplement un *foncteur test*, s'il est à la fois un foncteur test local et un foncteur test faible, autrement dit, si A est une catégorie test et les foncteurs $A \to \mathcal{C}at$ et $A/a \to \mathcal{C}at$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, asphériques.

Théorème 8.12. *Soient A une petite catégorie, $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit une catégorie asphérique, et*

$$i^* : \mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{A} \quad , \qquad C \longmapsto (a \mapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(i(a), C))$$

le foncteur correspondant.

a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *A est une catégorie test locale*[3] *et i est un foncteur test local ;*

ii) *pour toute petite catégorie asphérique C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique.*

De plus, si ces conditions sont satisfaites, et si A est une catégorie test (pour cela il suffit que A soit asphérique), alors i est un foncteur test.

b) *Si pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est, non seulement asphérique, mais même contractile, alors les conditions équivalentes* (i), (ii) *sont aussi équivalentes aux conditions équivalentes suivantes :*

ii′) *pour toute petite catégorie contractile C, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique ;*

ii″) *pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique ;*

iii) *$i^*(\Delta_1)$ est un préfaisceau localement asphérique.*

Démonstration. En vertu de l'équivalence des conditions (i) et (ii) de la proposition 8.6, le foncteur $A/a \to \mathcal{C}at$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, est asphérique si et seulement si pour toute petite catégorie asphérique C, $i^*(C)|A/a$ est un préfaisceau asphérique. Autrement dit, si A est une catégorie test locale, i est un foncteur test local si et seulement si pour toute petite catégorie asphérique C, $i^*(C)$ est un préfaisceau localement asphérique (cf. 3.6). Pour montrer l'équivalence des conditions (i) et (ii) du théorème, il suffit donc de montrer que la condition (ii) implique que A est une catégorie test locale. Pour cela, on peut supposer que le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ n'est pas trivial, ce qui implique que pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est non vide (2.27). Notons $e_0, e_1 : e \rightrightarrows \Delta_1$ les morphismes définis par 0 et 1 respectivement. On remarque que $\mathbf{\Delta}_1 = (\Delta_1, e_0, e_1)$ est un segment séparant de $\mathcal{C}at$ (cf. 5.15). D'autre part, le foncteur i^* commute aux limites projectives, et comme pour tout objet a de A, $i(a)$ est une catégorie non vide, i^* commute aux objets initiaux. On en déduit que $i^*(\mathbf{\Delta}_1) = (i^*(\Delta_1), i^*(e_0), i^*(e_1))$ est un segment séparant de $\widehat{A}$. Comme la condition (ii) implique que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ est localement asphérique, il résulte du théorème 6.6 que A est une catégorie test locale, ce qui démontre l'équivalence des conditions (i) et (ii).

Supposons que ces deux conditions équivalentes sont satisfaites. La condition (ii) implique en particulier que pour toute petite catégorie asphérique C, $i^*(C) \to e_{\widehat{A}}$ est une équivalence faible de préfaisceaux. Si A est une catégorie test, en particulier donc une catégorie asphérique, cela implique que le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique. En vertu de la proposition 8.6, le foncteur i est donc asphérique, et comme il est déjà un foncteur test local, on en déduit qu'il est un foncteur test, ce qui achève la démonstration de l'assertion (a).

[3] pléonasme volontaire

Pour montrer l'assertion (b), on remarque que, sous les hypothèses de (b), l'équivalence de (ii) et (ii') résulte de la proposition 8.6 (c), appliquée aux foncteurs $A/a \to \mathcal{C}at$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$. L'implication $(ii') \Rightarrow (ii'')$ résulte de la proposition 5.16, et l'implication $(ii'') \Rightarrow (iii)$ est évidente. Pour montrer l'implication $(iii) \Rightarrow (ii')$, on remarque que si C est une catégorie contractile, elle est par définition $\mathbf{\Delta}_1$-contractile, où $\mathbf{\Delta}_1$ désigne le segment (Δ_1, e_0, e_1). Comme le foncteur i^* commute aux limites projectives, on en déduit que le préfaisceau $i^*(C)$ est $i^*(\mathbf{\Delta}_1)$-contractile, où $i^*(\mathbf{\Delta}_1) = (i^*(\Delta_1), i^*(e_0), i^*(e_1))$ (5.5). Comme en vertu de la condition (iii), le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ est localement asphérique, il en est de même pour $i^*(C)$ (5.8). Ceci achève la démonstration du théorème.

Corollaire 8.13. *Soient A une petite catégorie, $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur tel que pour tout objet a de A, $i(a)$ soit une catégorie contractile, et*

$$i_! : \widehat{A} \to \mathcal{C}at \quad , \qquad i^* : \mathcal{C}at \to \widehat{A}$$

le couple de foncteurs adjoints correspondant à i, $i_!$ étant l'unique foncteur prolongeant i et commutant aux limites inductives. On suppose que A admet un objet final e_A, que $i(e_A) = \Delta_0 = e$, objet final de $\mathcal{C}at$, et qu'il existe un segment $\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$, tel que I soit localement asphérique, et un morphisme de segments de $\mathcal{C}at$

$$\varphi : i_!(\mathbb{I}) = (i_!(I), i_!(\partial_0), i_!(\partial_1)) \longrightarrow \mathbf{\Delta}_1 = (\Delta_1, e_0, e_1)$$

(e_0 et e_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement). Alors A est une catégorie test[4] *et i un foncteur test.*

Démonstration. Comme A admet un objet final elle est asphérique. En vertu du théorème 8.12, (a) et (b), il suffit donc de montrer que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ est localement asphérique. Le morphisme φ définit par adjonction un morphisme de segments $\psi : \mathbb{I} \to i^*(\mathbf{\Delta}_1) = (i^*(\Delta_1), i^*(e_0), i^*(e_1))$ de $\widehat{A}$. En vertu du lemme 5.10, il suffit donc de montrer que $i^*(\mathbf{\Delta}_1)$ admet une structure de segment multiplicatif. Comme le foncteur i^* commute aux limites projectives, cela résulte de 5.17.

Exemple 8.14. Soient A la catégorie test de l'exemple 6.9, (a), sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ayant pour objets les ensembles

$$\{0, 1, \dots, n\} \quad , \qquad n \in \mathbb{N} \, ,$$

et $i : A \to \mathcal{C}at$ le foncteur associant à un objet a de A la catégorie associée à l'ensemble ordonné formé des parties non vides de a, ordonnées par inclusion. Le corollaire 8.13 montre que i est un foncteur test. Considérons, en effet, le segment $(\{0, 1\}, \partial_0, \partial_1)$ de $\widehat{A}$, ∂_0 et ∂_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement. Comme A est une catégorie test stricte (7.11), les préfaisceaux représentables, et en particulier celui représenté par $\{0, 1\}$, sont localement asphériques (7.1). Pour pouvoir appliquer le corollaire, il suffit donc de définir

[4] pléonasme volontaire

un foncteur $\varphi : i_!(\{0,1\}) = i(\{0,1\}) \to \Delta_1$ induisant un morphisme de segments. Or,

$$i(\{0,1\}) = \begin{tikzcd}[row sep=small] \{0\} \arrow[dr] & \\ & \{0,1\} \\ \{1\} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad .$$

Il suffit donc de définir φ par

$$\varphi(\{0\}) = 0, \quad , \qquad \varphi(\{1\}) = \varphi(\{0,1\}) = 1 \quad .$$

Exemple 8.15. Soit $i : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{C}at$ l'inclusion canonique de la carégorie des simplexes (6.11) dans la catégorie des petites catégories. Alors $i^* : \mathcal{C}at \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$ est le foncteur *nerf*, et i est un foncteur test. En effet, pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, $i(\Delta_m) = \Delta_m$ admet un objet final, et est donc contractile (5.16), et en particulier asphérique (5.18). D'autre part, $i^*(\Delta_1)$ n'est autre que le préfaisceau représenté par Δ_1, et en vertu du lemme 6.12, ce préfaisceau est localement asphérique, et l'assertion résulte du théorème 8.12, (a) et (b). De plus, le théorème 8.12 implique alors que pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, $i^*(\Delta_m)$, qui n'est autre que le préfaisceau représenté par Δ_m, est localement asphérique, ce qui, en vertu de la propostion 7.1, fournit une deuxième démonstration du fait que $\mathbf{\Delta}$ est une catégorie test stricte (7.13).

Exemple 8.16. Soit A une petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$, formée de catégories contractiles, stable par produits finis, et telle que Δ_1 soit un objet de A. Alors le foncteur d'inclusion $i : A \to \mathcal{C}at$ est un foncteur test. En effet, comme une catégorie contractile est non vide, la catégorie vide n'est pas un objet de A. La catégorie A est donc une catégorie test stricte (cf. 6.9, (d) et 7.11). On en déduit que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$, qui est représentable (puisque Δ_1 est un objet de A), est localement asphérique (7.1), ce qui prouve que i est un foncteur test local (8.12, (b)), donc un foncteur test (8.12, (a)).

Exemple 8.17. Dans l'exemple précédent, l'hypothèse que Δ_1 soit un objet de A est essentielle. Soit par exemple A la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}at$ dont les objets sont les catégories I^m, $m \geq 0$, où $I = \{0 \leftrightarrows 1\}$ désigne la catégorie ayant comme objets 0 et 1 et équivalente à la catégorie e, objet final de $\mathcal{C}at$ (autrement dit les seules morphismes non identiques de I sont deux isomorphismes inverses l'un de l'autre $0 \to 1$ et $1 \to 0$). On vérifie facilement que cette catégorie est formée de catégories contractiles. D'autre part, elle satisfait aux conditions de 6.9, (d) et est donc une catégorie test stricte (7.11). Montrons que si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ n'est pas grossier (2.28), le foncteur d'inclusion $i : A \hookrightarrow \mathcal{C}at$ n'est pas un foncteur test (ni même un foncteur test faible). Il suffit de montrer que le préfaisceau $i^*(\Delta_1)$ n'est pas asphérique. Or, $i^*(\Delta_1)$ est le préfaisceau

$$I^m \longmapsto \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}at}(I^m, \Delta_1) \simeq \{\text{cribles de } I^m\}$$

(2.23), et on a donc $i^*(\Delta_1) \simeq e_{\widehat{A}} \amalg e_{\widehat{A}}$ (où $e_{\widehat{A}}$ désigne l'objet final de $\widehat{A}$), car les seules cribles de I^m sont le crible plein et le crible vide. On en déduit que $i_A i^*(\Delta_1) \simeq A \amalg A$, et il résulte du lemme suivant que $i^*(\Delta_1)$ n'est pas asphérique.

Lemme 8.18. *Si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ n'est pas grossier, alors toute catégorie asphérique est 0-connexe (connexe non vide).*

DÉMONSTRATION. Soit C une catégorie asphérique. Le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ n'étant pas grossier, il est à fortiori non trivial, et il résulte de la proposition 2.27 que la catégorie C est non vide. Montrons qu'elle est connexe. Supposons que $C = C_0 \amalg C_1$, avec $C_0, C_1 \neq \emptyset$, choisissons des objets c_0 et c_1 de C_0 et C_1 respectivement, et notons $\partial_0 : e \to C$ et $\partial_1 : e \to C$ les morphismes définis par c_0 et c_1 respectivement, où e désigne l'objet final de $\mathcal{C}at$. On définit ainsi un segment $\mathbb{I} = (C, \partial_0, \partial_1)$. Soit A une catégorie non vide, $p : A \to e$ le foncteur canonique, a un objet de A, $s : e \to A$ le morphisme défini par l'objet a et $c = sp$ l'endomorphisme constant correspondant de A. Notons

$$p_0 : A \times C_0 \longrightarrow A \qquad \text{et} \qquad p_1 : A \times C_1 \longrightarrow A$$

les premières projections. On définit un foncteur

$$h : A \times C = (A \times C_0) \amalg (A \times C_1) \longrightarrow A$$

par

$$h \mid A \times C_0 = p_0 \qquad \text{et} \qquad h \mid A \times C_1 = cp_1 \quad .$$

On constate immédiatement que h est une $\mathbb{I}$-homotopie de 1_A vers c, autrement dit, la catégorie A est $\mathbb{I}$-contractile. Comme la catégorie C est asphérique, il résulte des propositions 2.4 et 5.8 que A est asphérique. Ainsi, on a montré que toute catégorie non vide est asphérique, ce qui implique que tout foncteur entre catégories non vides est une équivalence faible, et contredit l'hypothèse que le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ n'est pas grossier.

EXEMPLE 8.19. Notons $\mathbf{\Delta}'$ la sous-catégorie (non pleine) de $\mathbf{\Delta}$ ayant mêmes objets que $\mathbf{\Delta}$, et dont les morphismes sont les applications strictement croissantes.

Lemme 8.20. *La catégorie $\mathbf{\Delta}'$ est asphérique.*

DÉMONSTRATION. On définit un foncteur $D : \mathbf{\Delta}' \to \mathbf{\Delta}'$, en posant pour tout m, $m \in \mathbb{N}$,

$$D\Delta_m = \Delta_{m+1} \quad ,$$

et en définissant, pour toute application strictement croissante $\varphi : \Delta_m \to \Delta_n$, $D(\varphi)$ par

$$D(\varphi)(k) = \begin{cases} \varphi(k) \ , & 0 \leq k \leq m \ , \\ n+1 \ , & k = m+1 \ . \end{cases}$$

L'inclusion $\Delta_m \hookrightarrow \Delta_{m+1}$ définit un morphisme fonctoriel $1_{\mathbf{\Delta}'} \to D$, et l'application

$$\Delta_0 \longrightarrow \Delta_{m+1} \quad , \qquad 0 \longmapsto m+1 \quad ,$$

un morphisme fonctoriel de l'endofoncteur constant de $\mathbf{\Delta}'$, de valeur Δ_0, vers D. La catégorie $\mathbf{\Delta}'$ est donc contractile, et le lemme résulte de la proposition 5.18.

Proposition 8.21. *La catégorie $\mathbf{\Delta}'$ est une catégorie test faible.*

DÉMONSTRATION. Considérons les foncteurs

$$\mathbf{\Delta}' \xrightarrow{\quad u \quad} \mathbf{\Delta} \xrightarrow{\quad v \quad} \widetilde{\mathbf{\Delta}} \xrightarrow{\quad i \quad} \mathcal{C}at \quad ,$$

où $\widetilde{\mathbf{\Delta}}$ désigne la catégorie test de l'exemple 6.9, (a), sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles, ayant mêmes objets que $\mathbf{\Delta}$ (mais comme morphismes toutes les applications, au lieu de seulement les applications croissantes), et où u et v désignent les foncteurs d'inclusion et i le foncteur test de l'exemple 8.14, associant à un objet E de $\widetilde{\mathbf{\Delta}}$ l'ensemble ordonné formé des parties non vides de E. On remarque que le foncteur

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{\Delta}'} : \mathbf{\Delta}' &\longrightarrow \mathcal{C}at \\ \Delta_m &\longmapsto \mathbf{\Delta}'/\Delta_m \end{aligned}$$

est canoniquement isomorphe à ivu. Pour montrer que A est une catégorie test faible, il suffit de montrer que le foncteur $i_{\mathbf{\Delta}'}$ est asphérique (cf. 8.3). Le fonteur i étant un foncteur test, et en particulier un foncteur asphérique, il suffit donc de montrer que v et u sont des morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$ (2.8 et 8.4, (a)).

a) Le morphisme v de $\mathcal{C}at$ est asphérique. En vertu de la proposition 3.9, il suffit de montrer que pour tout objet E de $\widetilde{\mathbf{\Delta}}$, le préfaisceau

$$F = v^*(E) \quad , \qquad \Delta_m \longmapsto \mathsf{Hom}_{\widetilde{\mathbf{\Delta}}}(\Delta_m, E) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{E}ns}(\Delta_m, E)$$

de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ est asphérique. Comme E est non vide, on choisit $a \in E$, et on définit un morphisme de préfaisceaux

$$h : F \times \Delta_1 \longrightarrow F$$

comme suit. Pour tout m-simplexe $\varphi : \Delta_m \to E$ de F, et tout m-simplexe $\psi : \Delta_m \to \Delta_1$ de Δ_1, le m-simplexe $h(\varphi, \psi) : \Delta_m \to E$ de F est défini par

$$h(\varphi,\psi)(k) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } \psi(k) = 0 \\ a & \text{si } \psi(k) = 1 \end{cases} \qquad 0 \leq k \leq m \ .$$

Notons $\mathbb{I}$ le segment (Δ_1, e_0, e_1) de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ (e_0 et e_1 étant définis par $0 \mapsto 0$ et $0 \mapsto 1$ respectivement). On remarque que h est une $\mathbb{I}$-homotopie de l'identité de F vers un endomorphisme constant de F, ce qui implique que F est $\mathbb{I}$-contractile. Comme Δ_1 est localement asphérique (6.12), il résulte de la proposition 5.8 que F est un préfaisceau localement asphérique, donc asphérique de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, ce qui prouve l'assertion.

b) Le morphisme u de $\mathcal{C}at$ est asphérique. Il s'agit de montrer que pour tout m, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{\Delta}'/\Delta_m$ est une catégorie asphérique. Notons $\overline{\mathbf{\Delta}'}$ la catégorie obtenue en adjoignant un objet initial $\emptyset$ à $\mathbf{\Delta}'$. Ainsi $\mathbf{\Delta}'$ s'identifie au cocrible $\overline{\mathbf{\Delta}'} - \emptyset$ de $\overline{\mathbf{\Delta}'}$. Notons

$$\emptyset_n = (\underbrace{\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset}_{n \text{ fois}})$$

l'objet initial de $\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,n}$, $n \geq 1$. On définit un isomorphisme de catégories

$$\mathbf{\Delta}'/\Delta_m \longrightarrow \overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m+1} - \emptyset_{m+1}$$

de $\mathbf{\Delta}'/\Delta_m$ sur le cocrible $\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m+1} - \emptyset_{m+1}$ de $\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m+1}$, en associant à tout objet $\varphi : \Delta_n \to \Delta_m$ de $\mathbf{\Delta}'/\Delta_m$, l'objet $(a_0, a_1, \dots, a_m)$ de $\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m+1} - \emptyset_{m+1}$, où

$$a_i = \begin{cases} \Delta_{\mathsf{card}(\varphi^{-1}\{i\})} & \text{si } \varphi^{-1}\{i\} \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \qquad 0 \leq i \leq m\ .$$

Il suffit donc de prouver que la catégorie $\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m+1} - \emptyset_{m+1}$ est asphérique. On raisonne par récurrence sur m. Pour $m = 0$, $\overline{\mathbf{\Delta}'} - \emptyset$ s'identifie à $\mathbf{\Delta}'$ qui est asphérique (lemme 8.20). Supposons donc que $\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m} - \emptyset_m$ soit asphérique, et montrons que $\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m+1} - \emptyset_{m+1}$ l'est aussi. La catégorie $\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m+1} - \emptyset_{m+1}$ est réunion des cocribles $\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m} \times (\overline{\mathbf{\Delta}'} - \emptyset)$ et $(\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m} - \emptyset_m) \times \overline{\mathbf{\Delta}'}$, et l'intersection de ces deux cocribles est $(\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m} - \emptyset_m) \times (\overline{\mathbf{\Delta}'} - \emptyset)$. Ces trois cocribles sont asphériques, en vertu de l'hypothèse de récurrence, du lemme 8.20, et des corollaires 2.5 et 2.11. Il résulte alors du corollaire 2.25 que $\overline{\mathbf{\Delta}'}^{\,m+1} - \emptyset_{m+1}$ est asphérique, ce qui prouve l'assertion, et achève la démonstration.

Remarque 8.22. Si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ n'est pas grossier, alors $\mathbf{\Delta}'$ n'est pas une catégorie test. En effet, si $\mathbf{\Delta}'$ était une catégorie test, il en serait de même pour $\mathbf{\Delta}'/\Delta_0 \simeq e$. Or, pour toute petite catégorie C, $i_e i_e^*(C)$ est la catégorie discrète ayant même ensemble d'objets que C. Si e était une catégorie test, et en particulier une catégorie test faible, la catégorie discrète $\{0, 1\} = i_e i_e^*(\Delta_1)$ serait asphérique (4.9), et le localisateur fondamental serait grossier (8.18).

Les localisateurs fondamentaux forts.

9.1. On appelle *localisateur fondamental fort* une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

LA) La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LB) Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors $A \to e$, où e désigne l'objet final de $\mathcal{C}at$, est dans $\mathcal{W}$.

LC) Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, et si pour tout objet c de C, le foncteur $u/c : A/c \to B/c$ induit par u est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

On remarque qu'un localisateur fondamental fort est en particulier un localisateur fondamental. En effet, les conditions La (2.2) et Lb (2.2) coïncident aux conditions LA et LB respectivement, et la condition Lc (2.2) est le cas particulier de la condition LC correspondant à $B = C$ et $w = 1_B$ (et $v = u$).

Ainsi, on dispose, en particulier, des notions d'équivalence faible, de foncteur asphérique et de catégorie asphérique, introduites en 2.2. Si C est une petite catégorie, $v : A \to C$, $w : B \to C$ deux objets de $\mathcal{C}at/C$ et $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at/C$, de sorte que $v = wu$, on dit que u est *$\mathcal{W}$-asphérique au dessus de C*, ou plus simplement *asphérique au dessus de C*, si pour tout objet c de C le foncteur $u/c : A/c \to B/c$, induit par u, est une équivalence faible. La condition LC affirme donc que pour toute petite catégorie C, un foncteur asphérique au dessus de C est une équivalence faible. Dualement, on dit que le foncteur u est *$\mathcal{W}$-coasphérique au dessus de C*, ou plus simplement *coasphérique au dessus de C*, si u° est asphérique au dessus de C° (A° et B° étant considérées comme catégories au dessus de C° par v° et w° respectivement). Il résulte de la proposition 2.19 et de LC qu'un foncteur coasphérique au dessus de C est une équivalence faible. Le foncteur u est coasphérique au dessus de C si et seulement si pour tout objet c de C le foncteur $c\backslash u : c\backslash A \to c\backslash B$, induit par u, est une équivalence faible (cf. 2.22).

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental fort.

Proposition 9.2. *Un produit fini d'équivalences faibles de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que le produit de deux équivalences faibles $u_1 : A_1 \to B_1$, $u_2 : A_2 \to B_2$ de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible. Comme

$$u_1 \times u_2 = (1_{B_1} \times u_2)(u_1 \times 1_{A_2}) \quad ,$$

il suffit de montrer que pour toute équivalence faible $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ et toute petite catégorie C, le morphisme $u \times 1_C$ est une équivalence faible. On a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \times C \arrow[rr, "u \times 1_C"] \arrow[dr, "p"'] & & B \times C \arrow[dl, "q"] \\ & C & \end{tikzcd} ,$$

où p et q désignent les deuxièmes projections. En vertu de LC, il suffit donc de montrer que pour tout objet c de C, le morphisme

$$(A \times C)/c \simeq A \times C/c \xrightarrow{(u \times 1_C)/c = u \times 1_{C/c}} B \times C/c = (B \times C)/c$$

est une équivalence faible. Or, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \times C/c \arrow[r, "u \times 1_{C/c}"] \arrow[d] & B \times C/c \arrow[d] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd} ,$$

où les flèches verticales désignent les premières projections qui sont des équivalences faibles, en vertu de LB et de 2.4. Comme u est une équivalence faible, on en déduit qu'il en est de même pour $u \times 1_{C/c}$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 9.3. *Une somme arbitraire d'équivalences faibles de $\mathcal{C}at$ est une équivalence faible.*

Démonstration. Soit $u_i : A_i \to B_i$, $i \in I$, une famille d'équivalences faibles de $\mathcal{C}at$. Notons aussi I la catégorie discrète correspondant à l'ensemble I. On a un triangle commutatif évident

$$\begin{tikzcd} A = \coprod_{i \in I} A_i \arrow[rr, "u = \amalg_{i \in I} u_i"] \arrow[dr] & & \coprod_{i \in I} B_i = B \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd} ,$$

et on remarque que pour tout objet i de I, le morphisme $u/i : A/i \to B/i$ s'identifie à $u_i : A_i \to B_i$. En vertu de LC, u est donc une équivalence faible, ce qui démontre la proposition.

9.4. Soient M une catégorie, W une partie de $\mathsf{Fl}(M)$, et $\gamma : M \to W^{-1}M$ le foncteur de localisation (cf. 4.1). On rappelle que la propriété universelle du foncteur de localisation γ (cf. 4.1) se précise par la propriété “2-universelle” suivante : Pour toute catégorie N, le foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}(W^{-1}M, N) \xrightarrow{\gamma^*} \underline{\mathsf{Hom}}(M, N)$$

de la catégorie des foncteurs de $W^{-1}M$ vers N dans celle des foncteurs de M vers N, associant à un foncteur F le foncteur $F\gamma$, et à un morphisme de foncteurs α le morphisme de foncteurs $\alpha * \gamma$, établit un *isomorphisme* de la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(W^{-1}M, N)$ sur la sous-catégorie pleine $\underline{\mathsf{Hom}}_W(M, N)$ de $\underline{\mathsf{Hom}}(M, N)$ formée des foncteurs $G : M \to N$ tels que, pour tout $w \in W$, $G(w)$ soit un isomorphisme de N. On pose $\mathsf{Hom}_W(M, N) = \mathsf{Ob}(\underline{\mathsf{Hom}}_W(M, N))$.

Lemme 9.5. *Soient (i, j) un couple de foncteurs adjoints, $i : M \to M'$, $j : M' \to M$,*

$$\varepsilon : ij \longrightarrow 1_{M'} \quad , \qquad \eta : 1_M \longrightarrow ji$$

les morphismes d'adjonction, et W, W' des parties de $\mathsf{Fl}(M)$ et $\mathsf{Fl}(M')$ respectivement telles que

$$i(W) \subset W' \qquad \text{et} \qquad j(W') \subset W \quad .$$

Notons $\gamma : M \longrightarrow W^{-1}M$ et $\gamma' : M' \longrightarrow W'^{-1}M'$ les foncteurs de localisation, et $\bar{\imath} : W^{-1}M \longrightarrow W'^{-1}M'$ et $\bar{\jmath} : W'^{-1}M' \longrightarrow W^{-1}M$ les foncteurs induits par i et j respectivement, de sorte qu'on ait des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\gamma"'] & M' \arrow[d, "\gamma'"] \\ W^{-1}M \arrow[r, "\bar{\imath}"'] & W'^{-1}M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\gamma'"'] & M \arrow[d, "\gamma"] \\ W'^{-1}M' \arrow[r, "\bar{\jmath}"'] & W^{-1}M \end{tikzcd} \quad .$$

Alors $(\bar{\imath}, \bar{\jmath})$ est un couple de foncteurs adjoints, les morphismes d'adjonction étant déduits de ε et η.

Démonstration. Le lemme est une conséquence formelle de la "2-fonctorialité" de la localisation, elle même conséquence de la propriété "2-universelle". Les détails sont laissés au lecteur.

Lemme 9.6. *Soient I un ensemble fini, $(M_i)_{i\in I}$ une famille de catégories, et pour tout i, $i \in I$, W_i une partie de $\mathsf{Fl}(M_i)$ contenant les identités. Alors le foncteur canonique*

$$\Big(\prod_{i\in I} W_i\Big)^{-1} \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} W_i^{-1} M_i$$

est un isomorphisme de catégories.

Démonstration. Le lemme étant évident pour un ensemble I vide, ou ayant un seul élément, il suffit, par récurrence, de l'établir pour $I = \{1, 2\}$. Or, pour toute catégorie N, on a des bijections fonctorielles :

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}(W_1^{-1}M_1 \times W_2^{-1}M_2, N) &\simeq \mathsf{Hom}(W_1^{-1}M_1, \underline{\mathsf{Hom}}(W_2^{-1}M_2, N)) \\ &\simeq \mathsf{Hom}(W_1^{-1}M_1, \underline{\mathsf{Hom}}_{W_2}(M_2, N)) \simeq \mathsf{Hom}_{W_1}(M_1, \underline{\mathsf{Hom}}_{W_2}(M_2, N)) \\ &\simeq \mathsf{Hom}_{W_1\times W_2}(M_1 \times M_2, N) \simeq \mathsf{Hom}((W_1 \times W_2)^{-1}(M_1 \times M_2), N) \quad , \end{aligned}$$

l'avant dernière résultant de l'hypothèse que W_1 et W_2 contiennent les identités, ce qui prouve le lemme.

Proposition 9.7. *Soient M une catégorie admettant des produits* (resp. *des sommes*) *binaires, et W une partie de $\mathsf{Fl}(M)$ contenant les identités et stable par produit* (resp. *somme*) *de deux flèches. Alors $W^{-1}M$ admet des produits* (resp. *des sommes*) *binaires, et le foncteur de localisation $\gamma : M \to W^{-1}M$ commute à ces produits* (resp. *sommes*).

DÉMONSTRATION. Si M admet des produits binaires, le foncteur diagonal $\Delta : M \to M \times M$ admet un adjoint à droite $\Pi : M \times M \to M$ (foncteur produit). On a $\Delta(W) \subset W \times W$, et comme W est stable par produit de deux flèches, $\Pi(W \times W) \subset W$. En vertu du lemme 9.5, les foncteurs

$$\overline{\Delta} : W^{-1}M \longrightarrow (W \times W)^{-1}(M \times M) \quad , \qquad \overline{\Pi} : (W \times W)^{-1}(M \times M) \longrightarrow W^{-1}M \ ,$$

induits par Δ et Π respectivement, forment un couple de foncteurs adjoints. Or, en vertu du lemme 9.6, $(W \times W)^{-1}(M \times M)$ est canoniquement isomorphe à $W^{-1}M \times W^{-1}M$, et on vérifie facilement que $\overline{\Delta}$ s'identifie par cet isomorphisme au foncteur diagonal. On en déduit que $W^{-1}M$ admet des produits binaires, $\overline{\Pi}$ étant un foncteur produit, ce qui achève la démonstration, la partie respé se déduisant par passage aux catégories opposées.

Proposition 9.8. *La catégorie $\mathsf{Hot} = \mathsf{Hot}_{\mathcal{W}} = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at$ admet des produits finis et des sommes finies et le foncteur de localisation canonique $\gamma : \mathcal{C}at \to \mathsf{Hot}$ y commute.*

DÉMONSTRATION. La proposition résulte des propositions 9.7, 9.2, 9.3, du lemme 4.6, et de son dual.

Proposition 9.9. *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$. On suppose que pour tout objet c de C le morphisme $u_c : A_c \to B_c$, induit par u dans les fibres, est une équivalence faible.

a) *Si v et w sont des précofibrations, alors le foncteur u est asphérique au dessus de C.*

b) *Si v et w sont des préfibrations, alors le foncteur u est coasphérique au dessus de C.*

En particulier, dans les deux cas (a) *ou* (b), *le foncteur u est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION. Pour tout objet c de C, on a un carré commutatif dans $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} A_c \arrow[r, "u_c"] \arrow[d, "i_c"'] & B_c \arrow[d, "j_c"] \\ A/c \arrow[r, "u/c"'] & B/c \end{tikzcd} \quad ,$$

où i_c et j_c désignent les foncteurs canoniques. Si v et w sont des précofibrations, en vertu du lemme 2.13, les foncteurs i_c et j_c admettent des adjoints à gauche, et sont donc coasphériques, et en particulier des équivalences faibles (2.22). Comme par hypothèse u_c est une équivalence faible, il en est de même pour u/c, ce qui prouve l'assertion (a). L'assertion (b) en résulte par passage aux catégories opposées, en vertu de la proposition 2.19.

Théorème 9.10. *Soit $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental fort.*

b) *$\mathcal{W}$ satisfait aux conditions suivantes :*

LA°) *La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.*

LB°) *Si A est une petite catégorie admettant un objet initial, alors $A \to e$ est dans $\mathcal{W}$.*

LC°) *Si*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, et si pour tout objet c de C, le foncteur $c\backslash u : c\backslash A \to c\backslash B$, induit par u, est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

c) *$\mathcal{W}$ satisfait aux conditions suivantes :*

Lα) *La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.*

Lβ) *Le morphisme canonique $\Delta_1 \to e$ est dans $\mathcal{W}$.*

Lγ) *Si*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, p et q des cofibrations, u un foncteur cocartésien *(transformant morphismes cocartésiens en morphismes cocartésiens), et si pour tout objet c de C, le foncteur $u_c : A_c \to B_c$, induit par u dans les fibres, est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.*

d) *$\mathcal{W}$ satisfait aux conditions suivantes :*

Lα°) *La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.*

Lβ°) *Le morphisme canonique $\Delta_1 \to e$ est dans $\mathcal{W}$.*

Lγ°) *Si*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, p et q des fibrations, u un foncteur cartésien *(transformant morphismes cartésiens en morphismes cartésiens), et si pour tout objet c de C, le foncteur $u_c : A_c \to B_c$, induit par u dans les fibres, est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.*

Démonstration. L'implication $(a) \Rightarrow (c)$ résulte de la proposition 9.9. Pour montrer l'implication $(c) \Rightarrow (b)$, soit $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions Lα, Lβ, Lγ. La condition LA° coïncide avec la condition Lα, et est donc satisfaite. Pour montrer les conditions LB° et LC°, on procède par plusieurs étapes.

i) Montrons que le morphisme canonique $\Delta_1 \to e$ est universellement dans $\mathcal{W}$, autrement dit, que pour toute petite catégorie A, la première projection $pr_1 : A \times \Delta_1 \to A$ est dans $\mathcal{W}$. On a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \times \Delta_1 \arrow[rr, "pr_1"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & A \arrow[dl, "1_A"] \\ & A & \end{tikzcd} \quad ,$$

les flèches obliques étant des cofibrations, et la flèche horizontale un foncteur cocartésien, induisant dans les fibres au dessus d'un objet a de A un foncteur s'identifiant au foncteur canonique $\Delta_1 \to e$, qui est dans $\mathcal{W}$ en vertu de Lβ. Il résulte donc de Lγ que pr_1 est dans $\mathcal{W}$.

ii) Montrons que $\mathcal{W}$ satisfait à la condition LB°, autrement dit, que pour toute petite catégorie A admettant un objet initial, le morphisme canonique $A \to e$ est dans $\mathcal{W}$. En effet, en vertu de la proposition 5.16, la catégorie A est contractile, et comme $\mathcal{W}$ est faiblement saturé, l'assertion résulte de (i) et de la proposition 5.8.

iii) Introduisons une version relative de la catégorie $S(A)$ introduite dans 2.15. Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. On définit une catégorie $S(u)$ comme suit :

$$\mathsf{Ob}(S(u)) = \{(a, b, f) \mid a \in \mathsf{Ob}(A),\ b \in \mathsf{Ob}(B),\ f : b \to u(a) \in \mathsf{Fl}(B)\} \quad ,$$

et si (a, b, f) et (a', b', f') sont deux objets de $S(u)$, l'ensemble $\mathsf{Hom}_{S(u)}((a, b, f), (a', b', f'))$ est formé des couples (g, h), $g : a \to a' \in \mathsf{Fl}(A)$, $h : b' \to b \in \mathsf{Fl}(B)$ tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "f"] & u(a) \arrow[d, "u(g)"] \\ b' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f'"] & u(a') \end{tikzcd} \qquad f' = u(g)fh$$

soit commutatif. L'identité de (a, b, f) est définie par $1_{(a,b,f)} = (1_a, 1_b)$, et si

$$(g, h) : (a, b, f) \longrightarrow (a', b', f') \qquad \text{et} \qquad (g', h') : (a', b', f') \longrightarrow (a'', b'', f'')$$

sont des morphismes de $S(u)$,

$$(g', h') \circ (g, h) = (g'g, hh') \quad .$$

On définit deux foncteurs :

$$B^\circ \xleftarrow{\ s_u\ } S(u) \xrightarrow{\ t_u\ } A$$

en posant pour tout objet (a, b, f) de $S(u)$:

$$s_u(a, b, f) = b \quad , \qquad t_u(a, b, f) = a \quad ,$$

et pour tout morphisme (g,h) de $S(u)$,

$$s_u(g,h) = h \quad , \qquad t_u(g,h) = g \quad .$$

(On remarque que la catégorie $S(A)$ et les foncteurs s_A et t_A introduits dans 2.15 s'identifient à $S(u)$, s_u et t_u respectivement, pour $A = B$ et $u = 1_A$.) On vérifie facilement que les foncteurs s_u et t_u sont des cofibrations, en remarquant qu'un morphisme (g,h) de $S(u)$ est cocartésien relativement à s_u (resp. t_u) si et seulement si g (resp. h) est un isomorphisme, et que si $h : b' \to b$ (resp. $g : a \to a'$) est un morphisme de B (resp. A) et (a,b,f) un objet de $S(u)$ au dessus de b (resp. a), alors

$$(1_a, h) : (a,b,f) \longrightarrow (a,b',fh)$$

$$(\text{resp.} \qquad (g,1_b) : (a,b,f) \longrightarrow (a',b,u(g)f)\ )$$

est un morphisme cocartésien relativement à s_u (resp. t_u) au dessus de h (resp. g). On remarque que la fibre $S(u)_b$ (resp. $S(u)_a$) de s_u (resp. t_u), au dessus d'un objet b (resp. a) de B° (resp. A), est la catégorie $b\backslash A$ (resp. $(B/u(a))^\circ \simeq u(a)\backslash B^\circ$). En particulier, les fibres de t_u possèdent un objet initial, ce qui implique, en vertu de (ii) et de Lγ, que t_u est dans $\mathcal{W}$.

Soit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \arrow[d, "w"] \\ A' \arrow[r, "u'"'] & B' \end{tikzcd}$$

un carré commutatif de $\mathcal{C}at$. On définit un foncteur $S(v,w) : S(u) \to S(u')$ comme suit :

$$S(v,w)(a,b,f) = (v(a), w(b), w(f)) \quad , \qquad (a,b,f) \in \mathsf{Ob}(S(u)) \quad ,$$

$$f : b \longrightarrow u(a) \quad , \qquad w(f) : w(b) \longrightarrow wu(a) = u'v(a) \quad ,$$

$$S(v,w)(g,h) = (v(g), w(h) \quad , \qquad\qquad (g,h) \in \mathsf{Fl}(S(u)) \quad .$$

On vérifie aussitôt qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B^\circ \arrow[d, "w^\circ"'] & S(u) \arrow[l, "s_u"'] \arrow[r, "t_u"] \arrow[d, "S(v,w)"] & A \arrow[d, "v"] \\ B'^\circ & S(u') \arrow[l, "s_{u'}"] \arrow[r, "t_{u'}"'] & A' \end{tikzcd} \quad .$$

$iv)$ Montrons que $\mathcal{W}$ satisfait à la condition LC°. Soit donc

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, et supposons que pour tout objet c de C, le foncteur $c\backslash u : c\backslash A \to c\backslash B$, induit par u, est dans $\mathcal{W}$. En vertu de ce qui précède, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C^\circ \arrow[d, "1_{C^\circ}"'] & S(v) \arrow[l, "s_v"'] \arrow[r, "t_v"] \arrow[d, "S(u, 1_C)"] & A \arrow[d, "u"] \\ C^\circ & S(w) \arrow[l, "s_w"] \arrow[r, "t_w"'] & B \end{tikzcd} \quad .$$

En particulier, on a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} S(v) \arrow[rr, "S(u, 1_C)"] \arrow[dr, "s_v"'] & & S(w) \arrow[dl, "s_w"] \\ & C^\circ & \end{tikzcd} \quad ,$$

où s_v et s_w sont des cofibrations, et on vérifie immédiatement que $S(u, 1_C)$ est un foncteur cocartésien. Comme pour tout objet c de C, $S(u, 1_C)$ induit un foncteur dans les fibres au dessus de c s'identifiant à $c\backslash u : c\backslash A \to c\backslash B$, qui est par hypothèse dans $\mathcal{W}$, il résulte de la condition Lγ que $S(u, 1_C)$ est dans $\mathcal{W}$. Comme t_v et t_w sont dans $\mathcal{W}$, il en est de même pour u. Ceci achève la démonstration de l'implication $(c) \Rightarrow (b)$.

Montrons l'implication $(b) \Rightarrow (a)$. Soit donc $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux conditions LA°, LB° et LC°. Notons $\mathcal{W}^\circ$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$ définie par

$$\mathcal{W}^\circ := \{u \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C}at) \mid u^\circ \in \mathcal{W}\} \quad .$$

Il est immédiat que $\mathcal{W}^\circ$ est un localisateur fondamental fort. En vertu de 2.11, une petite catégorie admettant un objet initial est $\mathcal{W}^\circ$-asphérique, ce qui implique la condition LB pour $\mathcal{W}$. De même, pour toute petite catégorie C, un morphisme de $\mathcal{C}at/C$ $\mathcal{W}^\circ$-coasphérique au dessus de C est dans $\mathcal{W}^\circ$ (cf. 9.1), ce qui implique la condition LC pour $\mathcal{W}$, et achève la démonstration de l'équivalence des conditions (a), (b) et (c).

En appliquant cette équivalence à $\mathcal{W}^\circ$, pour une partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at)$, on déduit l'équivalence des conditions (a), (b) et (d) pour $\mathcal{W}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Images directes et composés transfinis d'équivalences faibles.

10.1. Soient I une petite catégorie et $F : I \to \mathcal{C}at$ un foncteur. On rappelle une construction de Grothendieck d'une catégorie $\int F$ et d'une cofibration $\widetilde{F} : \int F \to I$ associées au foncteur F. Les objets de $C = \int F$ sont les couples (i, a), où i est un objet de I et a un objet de $F(i)$. Un morphisme de (i, a) vers (i', a') est un couple (k, f), où $k : i \to i'$ est un morphisme de I et $f : F(k)(a) \to a'$ un morphisme de $F(i')$. Le composé d'un morphisme $(k, f) : (i, a) \to (i', a')$ et d'un morphisme $(k', f') : (i', a') \to (i'', a'')$ est défini par

$$(k', f') \circ (k, f) = (k'k, f' \circ F(k')(f))$$

$$F(k'k)(a) = F(k')F(k)(a) \xrightarrow{F(k')(f)} F(k')(a') \xrightarrow{f'} a'' \quad .$$

Le foncteur $\widetilde{F}$ est défini par

$$\widetilde{F}(i, a) = i \ , \quad (i, a) \in \mathsf{Ob}(C) \ , \qquad \widetilde{F}(k, f) = k \ , \quad (k, f) \in \mathsf{Fl}(C) \ .$$

On vérifie facilement que les morphisme cocartésiens de C relativement à $\widetilde{F}$ sont les flèches (k, f) de C telles que f soit un isomorphisme, et que $\widetilde{F} : C \to I$ est une cofibration, dont les fibres C_i s'identifient aux catégories $F(i)$.

Exemple 10.2. Soient A une petite catégorie et H_A le foncteur

$$H_A : A^\circ \times A \longrightarrow \mathcal{C}at \qquad\qquad (b, a) \longmapsto \mathsf{Hom}_A(b, a) \quad ,$$

où l'ensemble $\mathsf{Hom}_A(b, a)$ est considéré comme une catégorie discrète. Alors $\int H_A$ s'identifie à la catégorie $S(A)$ introduite dans 2.15, et la cofibration $\widetilde{H_A} : \int H_A \to A^\circ \times A$ au foncteur $(s_A, t_A) : S(A) \to A^\circ \times A$ (cf. 2.15). Cela explique et redémontre le lemme 2.16, affirmant que s_A et t_A sont des cofibrations (puisque les projections sont des cofibrations, et les cofibrations sont stables par composition). Plus généralement, si $u : A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{C}at$ et H_u le foncteur

$$H_u : B^\circ \times A \longrightarrow \mathcal{C}at \qquad\qquad (b, a) \longmapsto \mathsf{Hom}(b, u(a)) \quad ,$$

alors $\int H_u$ s'identifie à la catégorie $S(u)$ considérée dans la démonstration du théorème 9.10.

10.3 Soient I une petite catégorie, $F : I \to \mathcal{C}at$ un foncteur, et $C = \int F$. Pour tout objet i de I, on définit un foncteur

$$l_i : F(i) \to C$$

par

$$l_i(a) = (i, a) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(F(i)) \ ,$$

$$l_i(f) = (1_i, f) \ , \quad f \in \mathsf{Fl}(F(i)) \ ,$$

qui identifie $F(i)$ à la fibre C_i de $\widetilde{F}$ au dessus de i. De plus, pour tout morphisme $k : i \to i'$ de I, on définit un morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F(k)"] \arrow[dr, "l_i"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\beta_k}{\Longrightarrow}"] & F(i') \arrow[dl, "l_{i'}"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \beta_k : l_i \longrightarrow l_{i'}F(k)$$

par

$$\beta_{k,a} = (k, 1_{F(k)(a)}) : (i,a) \longrightarrow (i', F(k)(a)) \quad ,$$

pour a objet de $F(i)$. On remarque que si $k : i \to i'$, $k' : i' \to i''$ sont deux morphismes composables de I, on a la condition de cocycle :

(10.3.1) $$\beta_{k'k} = (\beta_{k'} \star F(k))\beta_k \quad , \qquad \beta_{1_i} = 1_{l_i} \quad ,$$

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "F(k)"] \arrow[dr, "l_i"'] & F(i') \arrow[r, "F(k')"] \arrow[d, "l_{i'}"] & F(i'') \arrow[dl, "l_{i''}"] \\ & C & \end{tikzcd} \quad .$$

Ces données satisfont à la propriété universelle suivante, analogue à celle des limites inductives. Pour toute catégorie D, toute famille de foncteurs $m_i : F(i) \to D$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, et toute famille de morphismes de foncteurs $\gamma_k : m_i \to m_{i'}F(k)$, $k : i \to i' \in \mathsf{Fl}(I)$ satisfaisant à la condition de cocycle

$$\gamma_{k'k} = (\gamma_{k'} \star F(k))\gamma_k \quad , \qquad \gamma_{1_i} = 1_{m_i} \quad ,$$

pour $k : i \to i'$, $k' : i' \to i''$ morphismes composables de I, il existe un foncteur unique $H : C \to D$ tel que

(10.3.2) $$m_i = Hl_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \text{et} \qquad \gamma_k = H \star \beta_k \ , \quad k \in \mathsf{Fl}(I) \ .$$

Explicitement, on a

(10.3.3) $$\begin{aligned} H(i,a) &= m_i(a) \ , & (i,a) &\in \mathsf{Ob}(C) \ , \\ H(k,f) &= m_{i'}(f)\gamma_{k,a} \ , & (k,f) : (i,a) &\to (i',a') \in \mathsf{Fl}(C) \ . \end{aligned}$$

En particulier, il existe un foncteur unique

$$K_F : \int F \longrightarrow \varinjlim F \quad ,$$

tel que si $\varepsilon_i : F(i) \to \varinjlim F$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, désigne le morphisme canonique,

$$\varepsilon_i = K_F \circ l_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \text{et} \qquad K_F \star \beta_k = 1_{\varepsilon_i} \ , \quad k : i \to i' \in \mathsf{Fl}(I) \ . \tag{10.3.4}$$

Explicitement :

$$\begin{aligned} K_F(i,a) &= \varepsilon_i(a) \ , && (i,a) \in \mathsf{Ob}(C) \ , \\ K_F(k,f) &= \varepsilon_{i'}(f) \ , && (k,f) : (i,a) \to (i',a') \in \mathsf{Fl}(C) \ . \end{aligned} \tag{10.3.5}$$

10.4. La propriété universelle décrite dans 10.3 se précise par une propriété "2-universelle" faisant de $C = \int F$ une "2-limite inductive": Pour tout couple de foncteurs $H, H' : C \rightrightarrows C'$ définissant

$$m_i = Hl_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \gamma_k = H \star \beta_k \ , \quad k \in \mathsf{Fl}(I) \ ,$$

$$m'_i = H'l_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \gamma'_k = H' \star \beta_k \ , \quad k \in \mathsf{Fl}(I) \ ,$$

et toute famille de morphismes de foncteurs

$$\alpha'_i : m_i \longrightarrow m'_i \quad , \qquad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad ,$$

satisfaisant aux relations

$$\gamma'_k \alpha'_i = (\alpha'_{i'} \star F(k))\gamma_k \quad , \qquad k : i \to i' \in \mathsf{Fl}(I) \quad , \tag{10.4.1}$$

$$\begin{tikzcd} m_i \arrow[r, "\gamma_k"] \arrow[d, "\alpha'_i"'] & m_{i'}F(k) \arrow[d, "\alpha'_{i'} \star F(k)"] \\ m'_i \arrow[r, "\gamma'_k"'] & m'_{i'}F(k) \end{tikzcd}$$

il existe un unique morphisme de foncteurs $\alpha : H \to H'$, tel que

$$\alpha'_i = \alpha \star l_i \quad , \qquad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad . \tag{10.4.2}$$

10.5. Soient maintenant $F' : I \to \mathcal{C}at$ un deuxième foncteur, $\widetilde{F'} : C' = \int F' \to I$ la cofibration correspondante, et $\alpha : F \to F'$ un morphisme de foncteurs, de sorte que pour tout objet i de I,

$$\alpha_i : F(i) \longrightarrow F'(i)$$

soit un foncteur. On définit un foncteur $u = \int \alpha : C \to C'$, en posant

$$u(i,a) = (i, \alpha_i(a)) \quad , \qquad (i,a) \in \mathsf{Ob}(C) \quad ,$$

$$u(k,f) = (k, \alpha_{i'}(f)) \quad , \qquad (k,f) \in \mathsf{Hom}_C((i,a),(i',a')) \quad .$$

(Comme (k,f) est un morphisme de C de (i,a) vers (i',a'), $f : F(k)(a) \to a'$ est un morphisme de $F(i')$ et $\alpha_{i'}(f) : \alpha_{i'}F(k)(a) \to \alpha_{i'}(a')$ un morphisme de $F'(i')$. Comme

α est un morphisme de foncteurs, $\alpha_{i'}F(k)(a) = F'(k)\alpha_i(a)$, donc $(k, \alpha_{i'}(f))$ est bien un morphisme de C', de $(i, \alpha_i(a))$ vers $(i', \alpha_{i'}(a'))$.) On a un triangle commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd} C = \int F \arrow[rr, "u = \int \alpha"] \arrow[dr, "\widetilde{F}"'] & & \int F = C' \arrow[dl, "\widetilde{F'}"] \\ & I & \end{tikzcd} ,$$

et on vérifie facilement que u est un foncteur cocartésien (transformant morphismes cocartésiens en morphismes cocartésiens).

Le foncteur $u = \int \alpha$ peut être aussi défini par la propriété universelle de C. Notons

$$l'_i : F'(i) \longrightarrow C' \quad , \qquad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad ,$$

$$\beta'_k : l'_i \longrightarrow l'_{i'}F'(k) \quad , \qquad k : i \to i' \in \mathsf{Fl}(I) \quad ,$$

les foncteurs et morphismes de foncteurs canoniques correspondant au foncteur F', et définissons

$$m_i = l'_i\alpha_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \gamma_k = \beta'_k \star \alpha_i \ , \quad k : i \to i' \in \mathsf{Fl}(I) \ ,$$

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[dr, "m_i"'] & F'(i) \arrow[d, "l'_i"] \\ & C' \end{tikzcd} \qquad m_i = l'_i\alpha_i \xrightarrow{\gamma_k = \beta'_k \star \alpha_i} l'_{i'}F'(k)\alpha_i = l'_{i'}\alpha_{i'}F(k) = m_{i'}F(k) \ .$$

Soient $k : i \to i'$ et $k' : i' \to i''$ deux morphismes composables de I. On a

$$\begin{aligned} \gamma_{k'k} &= \beta'_{k'k} \star \alpha_i = \big((\beta'_{k'} \star F'(k))\beta'_k\big) \star \alpha_i = \big(\beta'_{k'} \star (F'(k)\alpha_i)\big)(\beta'_k \star \alpha_i) \\ &= \big(\beta'_{k'} \star (\alpha_{i'}F(k))\big)(\beta'_k \star \alpha_i) = \big((\beta'_{k'} \star \alpha_{i'}) \star F(k)\big)(\beta'_k \star \alpha_i) = (m_{k'} \star F(k))m_k \end{aligned}$$

et

$$\gamma_{1_i} = \beta'_{1_i} \star \alpha_i = 1_{l'_i} \star \alpha_i = 1_{l'_i\alpha_i} = 1_{m_i} \quad .$$

La propriété universelle de C implique donc qu'il existe un unique foncteur $u : C \to C'$ tel que

$$l'_i\alpha_i = ul_i \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad \text{et} \qquad \beta'_k \star \alpha_i = u \star \beta_k \ , \quad k : i \to i' \in \mathsf{Fl}(I) \quad ,$$

et on vérifie facilement que ce foncteur coïncide au foncteur $\int \alpha$ défini précédemment.

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toute, un localisateur fondamental fort $\mathcal{W}$.

Proposition 10.6. *Soient I une petite catégorie, $F, F' : I \rightrightarrows \mathcal{C}at$ deux foncteurs, et $\alpha : F \to F'$ un morphisme de foncteurs. Si α est une* équivalence faible naturelle, *autrement dit, si pour tout objet i de I, le foncteur $\alpha_i : F(i) \to F'(i)$ est une équivalence faible, alors $\int a : \int F \to \int F'$ est asphérique au dessus de I, et en particulier, une équivalence faible.*

Démonstration. La proposition est une conséquence immédiate de ce qui précède, et de la proposition 9.9.

10.7. Dans la suite, on va s'intéresser au cas où la catégorie I est la catégorie engendrée par le graphe

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \\ 1 & \end{tikzcd} \quad ,$$

de sorte que la donnée d'un foncteur $I \to \mathcal{C}at$ équivaut à la donnée d'un diagramme

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] & C_2 \\ C_1 & \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{C}at$, et si

$$C = \int \begin{tikzcd}[sep=small] C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] & C_2 \\ C_1 & \end{tikzcd} \quad ,$$

on a

$$\mathsf{Ob}(C) = \{(i,a) \mid i = 0,1,2,\ \ a \in \mathsf{Ob}(C_i)\}$$

$$\mathsf{Hom}_C((i,a),(i,a')) \simeq \mathsf{Hom}_{C_i}(a,a') \ , \quad i = 0,1,2, \quad a,a' \in \mathsf{Ob}(C_i) \ ,$$

$$\mathsf{Hom}_C((0,a),(i,b)) \simeq \mathsf{Hom}_{C_i}(u_i(a),b) \ , \quad i = 1,2, \quad a \in \mathsf{Ob}(C_0) \ , \quad b \in \mathsf{Ob}(C_i) \ ,$$

$$\mathsf{Hom}_C((i,a),(j,b)) = \emptyset \qquad \text{sinon.}$$

En vertu de ce qui précède, on a un “2-diagramme”

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large] C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr, "l_0"] & C_2 \arrow[d, "l_2"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\beta_2}{\Longrightarrow}"] \\ C_1 \arrow[r, "l_1"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\beta_1}{\Longleftarrow}"] & C \end{tikzcd} \quad .$$

Dans ce cas particulier, la propriété universelle affirme la chose suivante : pour tout "2-diagramme"

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr, "m_0"] & C_2 \arrow[d, "m_2"] \\ C_1 \arrow[r, "m_1"'] & D \end{tikzcd} \quad \begin{matrix} \overset{\gamma_2}{\Longrightarrow} \\ \overset{\gamma_1}{\Longleftarrow} \end{matrix} \quad ,$$

il existe un foncteur unique $g : C \to D$ tel que

$$m_i = gl_i \ , \quad i = 0, 1, 2, \qquad \gamma_i = g \star \beta_i \ , \quad i = 1, 2 \ .$$

La propriété "2-universelle" affirme de plus que si on a un deuxième "2-diagramme"

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr, "m'_0"] & C_2 \arrow[d, "m'_2"] \\ C_1 \arrow[r, "m'_1"'] & D \end{tikzcd} \quad \begin{matrix} \overset{\gamma'_2}{\Longrightarrow} \\ \overset{\gamma'_1}{\Longleftarrow} \end{matrix} \quad ,$$

définissant un foncteur $g' : C \to D$ tel que

(10.7.1) $$m'_i = g'l_i \ , \quad i = 0, 1, 2, \qquad \gamma'_i = g' \star \beta_i \ , \quad i = 1, 2 \ ,$$

et des morphismes de foncteurs

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[d, bend right, "m_0"'] \arrow[d, bend left, "m'_0"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha_0}{\Longrightarrow}"] \\ D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_1 \arrow[d, bend right, "m_1"'] \arrow[d, bend left, "m'_1"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha_1}{\Longrightarrow}"] \\ D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_2 \arrow[d, bend right, "m_2"'] \arrow[d, bend left, "m'_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha_2}{\Longrightarrow}"] \\ D \end{tikzcd}$$

tels que

(10.7.2) $$\gamma'_i \alpha_0 = (\alpha_i \star u_i)\gamma_i \quad , \qquad i = 1, 2 \quad ,$$

alors il existe un morphisme de foncteurs unique $\alpha : g \to g'$ tel que

(10.7.3) $$\alpha_i = \alpha \star l_i \quad , \qquad i = 0, 1, 2 \quad .$$

Proposition 10.8. *En gardant les notations ci dessus, si u_1 est une équivalence faible, il en est de même pour l_2.*

Démonstration. Le foncteur l_2 est le composé

$$C_2 \xrightarrow{\ l'_2\ } \int \begin{smallmatrix} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ {\scriptstyle 1_{C_0}}\downarrow & & \\ C_0 & & \end{smallmatrix} \xrightarrow{\ \int \alpha\ } \int \begin{smallmatrix} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ {\scriptstyle u_1}\downarrow & & \\ C_1 & & \end{smallmatrix} \qquad ,$$

où l'_2 est le morphisme canonique, et α est le morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "1_{C_0}"] & C_2 \arrow[dr, "1_{C_2}"] & \\
C_0 \arrow[dr, "u_1"'] & C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "u_1"] & C_2 \\
& C_1 &
\end{tikzcd} \qquad .$$

Comme u_1, 1_{C_0} et 1_{C_2} sont des équivalences faibles, il résulte de la proposition 10.6 que $\int \alpha$ est une équivalence faible.

Il suffit donc de montrer que l'_2 est une équivalence faible. Or, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "u_2"] & C_2 \arrow[d, "1_{C_2}"] \\
C_0 \arrow[r, "u_2"'] & C_2
\arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, shift left=6, "\overset{=}{\Longrightarrow}"]
\arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, shift right=6, "\overset{=}{\Longleftarrow}"]
\end{tikzcd}$$

définit, en vertu de la propriété universelle (cf. 10.7), un foncteur

$$\int \begin{smallmatrix} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ {\scriptstyle 1_{C_0}}\downarrow & & \\ C_0 & & \end{smallmatrix} \xrightarrow{\ \ r\ \ } C_2 \quad ,$$

tel que si

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "l'_0"] & C_2 \arrow[d, "l'_2"] \\
C_0 \arrow[r, "l'_1"'] & C'
\arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, shift left=6, "\overset{\beta'_2}{\Longrightarrow}"]
\arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, shift right=6, "\overset{\beta'_1}{\Longleftarrow}"]
\end{tikzcd}$$

désigne le "2-diagramme" canonique associé à

$$C' = \int \begin{smallmatrix} C_0 & \xrightarrow{u_2} & C_2 \\ {\scriptstyle 1_{C_0}}\downarrow & & \\ C_0 & & \end{smallmatrix} \qquad ,$$

on ait

$$rl'_0 = u_2 = rl'_1 \ , \quad rl'_2 = 1_{C_2} \ , \quad r \star \beta'_1 = 1_{u_2} = r \star \beta'_2 \quad .$$

En particulier, r est une retraction de l'_2. On va montrer que $l'_2 r$ est $\mathbb{I}$-homotope à $1_{C'}$, où $\mathbb{I} = (I, \partial_1, \partial_2)$, les foncteurs $\partial_1, \partial_2 : e \rightrightarrows I$ étant définis par les objets 1 et 2 de I. Pour définir une $\mathbb{I}$-homotopie

$$\int \begin{tikzcd}[sep=small] C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] & C_2 \\ C_0 \end{tikzcd} \times \begin{tikzcd}[sep=small] 0 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \\ 1 \end{tikzcd} \xrightarrow{\quad h \quad} \int \begin{tikzcd}[sep=small] C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] & C_2 \\ C_0 \end{tikzcd} \qquad ,$$

il suffit, en vertu de l'identification

$$\mathsf{Hom}(C' \times I, C') \simeq \mathsf{Hom}(I, \underline{\mathsf{Hom}}(C', C')) \quad ,$$

de définir des foncteurs

$$h_i : C' \longrightarrow C' \quad , \qquad i = 0, 1, 2 \quad ,$$

et des morphismes de foncteurs

$$\alpha_j : h_0 \longrightarrow h_j \quad , \qquad j = 1, 2 \quad .$$

En vertu de la propriété universelle (cf. 10.7), $h_1 = 1_{C'}$ est défini par le "2-diagramme"

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "l'_0"] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\overset{\beta'_2}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, shift right=4ex, "\overset{\beta'_1}{\Longleftarrow}"] & C_2 \arrow[d, "l'_2"] \\ C_0 \arrow[r, "l'_1"'] & C' \end{tikzcd} \quad ,$$

$h_2 = l'_2 r$ est défini par le "2-diagramme"

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "l'_2 u_2"] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\overset{=}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, shift right=4ex, "\overset{=}{\Longleftarrow}"] & C_2 \arrow[d, "l'_2"] \\ C_0 \arrow[r, "l'_2 u_2"'] & C' \end{tikzcd} \quad ,$$

et on définit h_0 par le "2-diagramme"

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "1_{C_0}"'] \arrow[dr, "l'_0"] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\overset{\beta'_2}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, phantom, shift right=4ex, "\overset{=}{\Longleftarrow}"] & C_2 \arrow[d, "l'_2"] \\ C_0 \arrow[r, "l'_0"'] & C' \end{tikzcd} \quad .$$

Les trois morphismes de foncteurs

$$
\begin{tikzcd} C_0 \arrow[d, shift right=4ex, "l'_0"'] \arrow[d, shift left=4ex, "l'_0"] \arrow[d, phantom, "\overset{=}{\Longrightarrow}"] \\ C' \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} C_0 \arrow[d, shift right=4ex, "l'_0"'] \arrow[d, shift left=4ex, "l'_1"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta'_1}{\Longrightarrow}"] \\ C' \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} C_2 \arrow[d, shift right=4ex, "l'_2"'] \arrow[d, shift left=4ex, "l'_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{=}{\Longrightarrow}"] \\ C' \end{tikzcd}
$$

vérifient les relations 10.7.2 de la propriété "2-universelle", et définissent ainsi un morphisme de foncteurs $\alpha_1 : h_0 \to h_1$. De même, les trois morphismes de foncteurs

$$
\begin{tikzcd} C_0 \arrow[d, shift right=4ex, "l'_0"'] \arrow[d, shift left=4ex, "l'_2u_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta'_2}{\Longrightarrow}"] \\ C' \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} C_0 \arrow[d, shift right=4ex, "l'_0"'] \arrow[d, shift left=4ex, "l'_2u_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta'_2}{\Longrightarrow}"] \\ C' \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} C_2 \arrow[d, shift right=4ex, "l'_2"'] \arrow[d, shift left=4ex, "l'_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{=}{\Longrightarrow}"] \\ C' \end{tikzcd}
$$

permettent de définir un morphisme de foncteurs $\alpha_2 : h_0 \to h_2$, par la propriété "2-universelle". On a donc prouvé que $1_{C'}$ est $\mathbb{I}$-homotope à $l'_2 r$. Or, I admet un objet initial, et est donc asphérique (2.11). On en déduit que $I \to e$ est universellement dans $\mathcal{W}$ (proposition 2.4), et il résulte donc du lemme d'homotopie 5.6, (b) que $l'_2 r$ est une équivalence faible. Comme $rl'_2 = 1_{C_2}$, cela prouve, en vertu de la propriété de saturation faible (c), que l'_2 est une équivalence faible, et achève la démonstration.

10.9. Revenons au cas où I est une petite catégorie arbitraire. Soient A une petite catégorie, et $F : I \to \widehat{A}$ un foncteur noté indiciellement :

$$F_i := F(i) \ , \quad i \in \mathsf{Ob}(I) \ , \qquad F_k := F(k) \ , \quad k \in \mathsf{Fl}(I) \quad .$$

On se propose d'étudier le foncteur canonique (cf. 10.3)

$$K = K_{i_A F} : C = \int i_A F \longrightarrow \varinjlim i_A F \simeq i_A(F') = A/F' \quad ,$$

où F' désigne la limite inductive $\varinjlim F$. Explicitons le foncteur K. Pour tout i, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, notons $\varepsilon_i : F_i \to F'$, le morphisme canonique, de sorte que pour tout morphisme $k : i \to i'$ de I, le triangle

$$
\begin{tikzcd} F_i \arrow[rr, "F_k"] \arrow[dr, "\varepsilon_i"'] & & F_{i'} \arrow[dl, "\varepsilon_{i'}"] \\ & F' & \end{tikzcd}
$$

soit commutatif. Un objet de C est un triplet $(i, a, x : a \to F_i)$, où $i \in \mathsf{Ob}(I)$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, $x \in \mathsf{Fl}(\widehat{A})$. On a

$$K(i, a, x : a \to F_i) = (a, \varepsilon_i x : a \to F')$$

$$a \xrightarrow{x} F_i \xrightarrow{\varepsilon_i} F' \quad .$$

Un morphisme

$$(i, a, x : a \to F_i) \xrightarrow{(k,f)} (i', a', x' : a' \to F_{i'})$$

de C est un couple (k, f), où $k : i \to i'$ est une flèche de I, et $f : a \to a'$ une flèche de A, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & a' \arrow[d, "x'"] \\ F_i \arrow[r, "F_k"] & F_{i'} \end{tikzcd} \quad .$$

On a

$$K(k, f) = f \quad , \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_i x"'] & & a' \arrow[dl, "\varepsilon_{i'} x'"] \\ & F' & \end{tikzcd} \qquad \varepsilon_{i'} x' f = \varepsilon_{i'} F_k x = \varepsilon_i x \quad .$$

Proposition 10.10. *Le foncteur $K : \int i_A F \to \varinjlim i_A F$ est une fibration.*

DÉMONSTRATION. On vérifie facilement qu'un morphisme (k, f) de $C = \int i_A F$ est cartésien, relativement à K, si et seulement si k est un isomorphisme. En particulier, la partie de $\mathsf{Fl}(C)$ formée des morphismes cartésiens est stable par composition. Soient maintenant $(i, a, x : a \to F_i)$ un objet de C et

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & a \arrow[dl, "\varepsilon_i x"] \\ & F' & \end{tikzcd}$$

un morphisme de A/F', $F' = \varinjlim F$, de but l'image de cet objet par K. Alors

$$(i, a', xf : a' \to F_i) \xrightarrow{(1_i, f)} (i, a, x : a \to F_i)$$

est un morphisme cartésien de C, dont le but est l'objet donné de C, et dont l'image par K est le morphisme donné de A/F', ce qui démontre la proposition.

10.11. Soit $(a, s : a \to F')$ un objet de A/F'. On se propose d'étudier la fibre

$$C_s = \left(\int i_A F \right)_s$$

du foncteur K au dessus de cet objet. Les objets de C_s sont les objets $(i, a, x : a \to F_i)$ de C tels que $\varepsilon_i x = s$, et les morphismes entre tels objets les morphismes

$$(i, a, x : a \to F_i) \xrightarrow{(k,1_a)} (i', a, x' : a \to F'_i)$$

de C (de sorte que le triangle

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "x'"] & \\ F_i \arrow[rr, "F_k"'] & & F_{i'} \end{tikzcd}$$

soit commutatif). Pour tout objet i de I, considéront la fibre $(A/F_i)_s$ du morphisme $i_A(\varepsilon_i) : A/F_i \to A/F'$ au dessus de $(a, s : a \to F')$. Les objets de $(A/F_i)_s$ sont les couples $(a, x : a \to F_i)$ tels que $\varepsilon_i x = s$, et les seuls morphismes sont les identités. Pour tout morphisme $k : i \to i'$ de I, on en déduit un foncteur

$$(A/F_i)_s \xrightarrow{(i_A(F_k))_s} (A/F_{i'})_s \quad ,$$

associant à un objet $(a, x : a \to F_i)$ de $(A/F_i)_s$ l'objet $(a, F_k x : a \to F_{i'})$ de $(A/F_{i'})_s$. On définit ainsi un foncteur $(i_A F)_s : I \to \mathcal{C}at$, et par suite, on peut former la catégorie

$$\int (i_A F)_s \quad ,$$

dont les objets sont les triplets $(i, a, x : a \to F_i)$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, tels que $(a, x : a \to F_i)$ soit un objet de $(A/F_i)_s$, autrement dit tels que $\varepsilon_i x = s$, et les morphismes les couples

$$(i, a, x : a \to F_i) \xrightarrow{(k,1_a)} (i', a, x' : a \to F_{i'}) \quad , \qquad k : i \to i' \in \mathsf{Fl}(i) \quad ,$$

(puisque les seuls morphismes de $(A/F_{i'})_s$ sont les identités) tels que le triangle

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "x'"] & \\ F_i \arrow[rr, "F_k"'] & & F_{i'} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On a donc démontré :

Lemme 10.12. *Soit $(a, s : a \to F')$ un objet de A/F'. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\left(\int i_A F \right)_s \simeq \int (i_A F)_s \quad .$$

10.13. Supposons maintenant que la catégorie I soit la catégorie engendrée par le graphe

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \\ 1 & \end{tikzcd} ,$$

de sorte que la donnée du foncteur $F : I \to \widehat{A}$ soit équivalente à la donnée d'un diagramme

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & F_2 \\ F_1 & \end{tikzcd}$$

de $\widehat{A}$, la limite inductive F' du foncteur F étant la somme amalgamée, de sorte qu'on ait un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & F_2 \arrow[d, "\varepsilon_2"] \\ F_1 \arrow[r, "\varepsilon_1"'] & F' \end{tikzcd} .$$

Proposition 10.14. *En gardant les notations ci-dessus, si φ_1 est un monomorphisme, alors le foncteur canonique*

$$K : C = \int \begin{smallmatrix} A/F_0 & \longrightarrow & A/F_2 \\ \downarrow & & \\ A/F_1 & & \end{smallmatrix} \longrightarrow A/F'$$

est un foncteur coasphérique, et en particulier une équivalence faible.

Démonstration. Comme, en vertu de la proposition 10.10, le foncteur K est un fibration, il suffit de montrer (cf. 2.22) que pour tout objet $(a, s : A \to F')$ de A/F' la fibre C_s de K, au dessus de cet objet, est asphérique. En vertu du lemme 10.12, on a

$$C_s = \int \begin{smallmatrix} (A/F_0)_s & \longrightarrow & (A/F_2)_s \\ \downarrow & & \\ (A/F_1)_s & & \end{smallmatrix} .$$

En considérant s comme un élément de $F'(a) = F_1(a) \amalg_{F_0(a)} F_2(a)$, on distingue deux cas.

$a)$ $s \notin \mathsf{Im}(\varepsilon_0(a))$. Alors on vérifie immédiatement que

$$C_s = \int \begin{smallmatrix} \emptyset & \longrightarrow & \emptyset \\ \downarrow & & \\ e & & \end{smallmatrix} \qquad \text{ou} \qquad C_s = \int \begin{smallmatrix} \emptyset & \longrightarrow & e \\ \downarrow & & \\ \emptyset & & \end{smallmatrix} ,$$

et C_s est réduite à la catégorie ayant un seul objet, et l'identité de cet objet comme seul morphisme.

b) $s \in \mathsf{Im}(\varepsilon_0(a))$. Alors on vérifie facilement que $(A/F_0)_s \to (A/F_1)_s$ est un isomorphisme (on utilise que $\varphi_1 : F_0 \to F_1$ est un monomorphisme), et en particulier une équivalence faible. En vertu de la proposition 10.8, le morphisme canonique

$$(A/F_2)_s \longrightarrow \int^{\begin{smallmatrix}(A/F_0)_s & \longrightarrow & (A/F_2)_s \\ \downarrow & & \\ (A/F_1)_s & & \end{smallmatrix}} \simeq C_s$$

est une équivalence faible. Or, le morphisme $\varepsilon_2 : F_2 \to F'$ est un monomorphisme (car φ_1 est un monomorphisme), et par suite $(A/F_2)_s$ est la catégorie ponctuelle. On en déduit que C_s est asphérique, ce qui prouve la proposition.

Corollaire 10.15. *Soient A une petite catégorie,*

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & F_2 \arrow[d, "\varepsilon_2"] \\ F_1 \arrow[r, "\varepsilon_1"'] & F' \end{tikzcd}$$

un carré cocartésien de $\widehat{A}$, et supposons que φ_1 soit un monomorphisme. Alors si φ_1 (resp. *φ_2*) *est une équivalence faible, il en est de même pour ε_2* (resp. ε_1).

Démonstration. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} A/F_0 \arrow[r, "u_2 = i_A(\varphi_2)"] \arrow[d, "u_1 = i_A(\varphi_1)"'] & A/F_2 \arrow[d, "l_2"] \arrow[ddr, "i_A(\varepsilon_2)"] & \\ A/F_1 \arrow[r, "l_1"] \arrow[drr, "i_A(\varepsilon_1)"'] & \displaystyle\int^{\begin{smallmatrix}A/F_0 & \to & A/F_2 \\ \downarrow & & \\ A/F_1 & & \end{smallmatrix}} \arrow[dr, "K"] & \\ & & A/F' \end{tikzcd} \quad ,$$

où l_1, l_2 et K désignent les foncteurs canoniques (cf. 10.7 et 10.9), et dont les deux triangles sont commutatifs (mais pas le carré). Si φ_1 (resp. φ_2) est une équivalence faible, alors u_1 (resp. u_2) est une équivalence faible, et en vertu de la proposition 10.8, il en est de même pour l_2 (resp. l_1). Or, comme φ_1 est un monomorphisme, en vertu de la proposition 10.14, K est une équivalence faible. On en déduit que $i_A(\varepsilon_2)$ (resp. $i_A(\varepsilon_1)$) est une équivalence faible de $\mathcal{C}at$, autrement dit, que ε_2 (resp. ε_1) est une équivalence faible de $\widehat{A}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 10.16. *Soient A une petite catégorie, et*

$$\begin{tikzcd}
F_0 \arrow[rr, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\varphi_1"] \arrow[dd, "\chi_0"'] & & F_2 \arrow[dr, "\varepsilon_2"] \arrow[dd, "\chi_2", near start] & \\
& F_1 \arrow[rr, "\varepsilon_1", near start] \arrow[dd, "\chi_1", near start] & & F' \arrow[dd, "\chi'"] \\
G_0 \arrow[rr, "\psi_2", near end] \arrow[dr, "\psi_1"'] & & G_2 \arrow[dr, "\eta_2"] & \\
& G_1 \arrow[rr, "\eta_1"'] & & G'
\end{tikzcd}$$

un cube commutatif de $\widehat{A}$, dont les faces horizontales sont cocartésiennes, et tel que φ_1, ψ_1 soient des monomorphismes, et χ_0, χ_1, χ_2 des équivalences faibles. Alors χ' est une équivalence faible.

DÉMONSTRATION. On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int \begin{smallmatrix} A/F_0 \to A/F_2 \\ \downarrow \\ A/F_1 \end{smallmatrix} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\int i_A \star \chi"'] & A/F' \arrow[d, "i_A(\chi')"] \\
\displaystyle\int \begin{smallmatrix} A/G_0 \to A/G_2 \\ \downarrow \\ A/G_1 \end{smallmatrix} \arrow[r, "K'"'] & A/G'
\end{tikzcd} \quad ,$$

où χ désigne le morphisme de foncteurs défini par χ_0, χ_1, χ_2, et K et K' les foncteurs canoniques (cf. 10.9). En vertu des propositions 10.6 et 10.14, les foncteurs $\int i_A \star \chi$, K et K' sont des équivalences faible, et il en est donc de même pour $i_A(\chi')$, ce qui prouve le corollaire.

Proposition 10.17. *Soient I un ensemble bien ordonné, A une petite catégorie, et $F : I \to \widehat{A}$ un foncteur (où I désigne aussi la catégorie associée à l'ensemble ordonné I) tel que pour tout $i \leq j$, le morphisme $F_i \to F_j$ soit un monomorphisme. Alors le foncteur canonique*

$$K : C = \int i_A F \longrightarrow A/F' \quad ,$$

où $F' = \varinjlim F$, est coasphérique, et en particulier une équivalence faible.

DÉMONSTRATION. Soit $(a, s : a \to F')$ un objet de A/F', et considéront s comme élément de $F'(a)$. Comme les morphismes de transition $F_i \to F_j$ sont des monomorphismes, $F'(a)$ s'identifie à la réunion croissante des $F_i(a)$. Comme I est bien ordonné, il existe un plus petit élément i_s de I tel que $s \in F_{i_s}(a)$. Alors on vérifie facilement que la fibre C_s de K, au dessus de l'objet $(a, s : a \to F')$, s'identifie à la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné formé des $i \in I$ tels que $i_s \leq i$. Cette catégorie, ayant un objet initial, est asphérique (2.11). Comme, en vertu de la proposition 10.10, K est une fibration, on en déduit que le foncteur K est coasphérique, et en particulier une équivalence faible (cf. 2.22).

Corollaire 10.18. *Soient I une catégorie correspondant à un ensemble bien ordonné, A une petite catégorie, $F, G : I \rightrightarrows \widehat{A}$ deux foncteurs, et $\varphi : F \to G$ un morphisme de foncteurs. On suppose :*

a) *pour tout i et j dans I, si $i \leq j$, les morphismes $F_i \to F_j$ et $G_i \to G_j$ sont des monomorphismes;*

b) *pour tout i dans I, le morphisme $\varphi_i : F_i \to G_i$ est une équivalence faible.*

Alors $\varinjlim \varphi : \varinjlim F \to \varinjlim G$ est une équivalence faible.

Démonstration. En effet, on a un carré commutatif de $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int i_A F \arrow[r] \arrow[d, "\int i_A \star \varphi"'] & A/\varinjlim F \arrow[d, "i_A(\varinjlim \varphi)"] \\
\displaystyle\int i_A G \arrow[r] & A/\varinjlim G
\end{tikzcd}$$

dont les flèches horizontales sont, en vertu de la proposition précédente, des équivalences faibles. Comme $\int i_A \star \varphi$ est une équivalence faible (proposition 10.6), il en est de même pour $i_A(\varinjlim \varphi)$, ce qui démontre le corollaire.

Corollaire 10.19. *Pour toute petite catégorie A, la partie de $\mathsf{Fl}(\widehat{A})$, formée des flèches qui sont à la fois des équivalences faibles et des monomorphismes, est stable par composition transfinie à droite. Autrement dit, pour tout ensemble bien ordonné I, et tout foncteur $F : I \to \widehat{A}$, tel que les morphismes $F_i \to F_j$, $i \leq j$, $i, j \in I$, soient des monomorphismes et des équivalences faibles, le morphisme canonique $F_0 \to \varinjlim F$, où 0 désigne le plus petit élément de I, est une équivalence faible (et un monomorphisme).*

Démonstration. Le corollaire est une conséquence immédiate du corollaire précédent, appliqué au morphisme du foncteur constant, de valeur F_0, vers le foncteur F, défini par les flèches $F_0 \to F_i$, $i \in I$.

Colimites et extensions de Kan homotopiques.

11.1 Pour tout objet I de $\mathcal{C}at$, on note $\mathcal{C}at/I$ la catégorie des petites catégories au dessus de I, dont les objets sont les couples formés d'un objet A de $\mathcal{C}at$ et d'un foncteur $A \to I$, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd} .$$

Pour toute flèche $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, on note

$$\mathcal{C}at/w : \mathcal{C}at/J \longrightarrow \mathcal{C}at/I$$

le foncteur définit par

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "v"'] & \longmapsto & A \arrow[d, "wv"'] \\ J & & I \end{tikzcd} .$$

Pour toute petite catégorie I, on définit des foncteurs

$$\mathcal{C}at/I \xrightarrow{\Theta_I} \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \quad , \qquad \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \xrightarrow{\Theta'_I} \mathcal{C}at/I$$

$$(A \longrightarrow I) \ \longmapsto \ (i \longmapsto A/i) \quad , \qquad F \ \longmapsto \ (\textstyle\int F \longrightarrow I) \quad .$$

Proposition 11.2. *Soit $w : J \to I$ un foncteur entre petites catégories. Alors*

$$\mathcal{C}at/J \xrightarrow{\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w} \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \quad , \qquad \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \xrightarrow{\Theta'_J \circ \underline{\mathsf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at})} \mathcal{C}at/J$$

est un couple de foncteurs adjoints. En particulier, pour $J = I$ et $w = 1_I$, on obtient que (Θ_I, Θ'_I) est un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. On va définir des morphismes d'adjonction

$$\varepsilon : \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \circ \Theta'_J \circ \underline{\mathsf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at}) \longrightarrow 1_{\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)} \quad ,$$

$$\eta : 1_{\mathcal{C}at/J} \longrightarrow \Theta'_J \circ \underline{\mathsf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at}) \circ \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \quad ,$$

et on va laisser le soin au lecteur de vérifier les relations d'adjonction.

a) Définition de ε. Soit $F : I \to \mathcal{C}at$ un foncteur. Définissons un morphisme fonctoriel ε_F, autrement dit, pour tout objet i de I, un foncteur

$$\varepsilon_{F,i} : \left(\int Fw\right) \Big/ \, i \longrightarrow F(i) \quad ,$$

fonctoriel en i. Les objets de la catégorie $(\int Fw)/i$ sont les triplets $(j,a,p:w(j)\to i)$, où j est un objet de J, a un objet de $Fw(j)$, et p une flèche de I. Un morphisme de $(\int Fw)/i$, de source $(j,a,p:w(j)\to i)$ et de but $(j',a',p':w(j')\to i)$, est un couple (l,f), où $l:j\to j'$ est une flèche de J, $f:Fw(l)(a)\to a'$ une flèche de $Fw(j')$, telles que

$$\begin{tikzcd} w(j) \arrow[rr, "w(l)"] \arrow[dr, "p"'] & & w(j') \arrow[dl, "p'"] \\ & i & \end{tikzcd} \qquad\qquad p = p'w(l) \quad .$$

On définit le foncteur $\varepsilon_{F,i}$ par

$$\varepsilon_{F,i}(j,a,p:w(j)\to i) = F(p)(a) \quad ,$$

$$\varepsilon_{F,i}(l,f) = F(p')(f) : F(p')Fw(l)(a) = F(p)(a) \longrightarrow F(p')(a') \quad .$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier la compatibilité à la composition et aux identités, ainsi que la fonctorialité en i et en F.

b) Définition de η. Soit $(A, v:A\to J)$ un objet de $\mathcal{C}at/J$. Définissons un foncteur, au dessus de J,

$$\eta_{A,v} : A \longrightarrow \int G \quad ,$$

où

$$G : J \longrightarrow \mathcal{C}at$$

désigne le foncteur

$$j \longmapsto A/w(j) \quad .$$

Les objets de $\int G$ sont les triplets $(j,a,p:wv(a)\to w(j))$, où j est un objet de J, a un objet de A, et p une flèche de I. Un morphisme de $(j,a,p:wv(a)\to w(j))$ vers $(j',a',p':wv(a')\to w(j'))$ est un couple (l,f), où $l:j\to j'$ est une flèche de J, $f:a\to a'$ une flèche de A, telles que le carré

$$\begin{tikzcd} wv(a) \arrow[r, "wv(f)"] \arrow[d, "p"'] & wv(a') \arrow[d, "p'"] \\ w(j) \arrow[r, "w(l)"'] & w(j') \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Pour tout objet a de A, on définit

$$\eta_{A,v}(a) = \big(v(a), a, 1_{wv(a)} : wv(a) \to wv(a)\big) \quad ,$$

et pour toute flèche $f:a\to a'$ de A,

$$\eta_{A,v}(f) = \big(v(f), f\big) : \big(v(a), a, 1_{wv(a)}\big) \longrightarrow \big(v(a'), a', 1_{wv(a')}\big).$$

On vérifie facilement la compatibilité à la composition et aux identités, ainsi que la fonctorialité en (A,v).

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

11.3. Soit I une petite catégorie. On note $\mathcal{W}_I$ la partie de $\mathsf{Fl}(\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at))$ formée des équivalences faibles naturelles, autrement dit, des morphismes de foncteurs $\alpha : F \to F'$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, bend right, "F"'] \arrow[d, bend left, "F'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] \\ \mathcal{C}at \end{tikzcd}$$

tels que pour tout i, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, α_i soit dans $\mathcal{W}$. On note $\mathcal{W}'_I$ la partie de $\mathsf{Fl}(\mathcal{C}at/I)$ formée des foncteurs asphériques au dessus de I, autrement dit, des morphismes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & A' \arrow[dl, "v'"] \\ & I & \end{tikzcd} \qquad\qquad v = v'u$$

de $\mathcal{C}at/I$ tels que pour tout i, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, le foncteur $u/i : A/i \to A'/i'$, induit par u, soit une équivalence faible.

Théorème 11.4. *Pour toute petite catégorie I, on a*

$$\mathcal{W}'_I = \Theta_I^{-1}(\mathcal{W}_I) \quad , \qquad \mathcal{W}_I = {\Theta'_I}^{-1}(\mathcal{W}'_I)$$

et les foncteurs

$$\overline{\Theta}_I : {\mathcal{W}'_I}^{-1}\mathcal{C}at/I \longrightarrow \mathcal{W}_I^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at)$$

et

$$\overline{\Theta'_I} : \mathcal{W}_I^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) \longrightarrow {\mathcal{W}'_I}^{-1}\mathcal{C}at/I \quad ,$$

induits par Θ_I et Θ'_I respectivement, sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. L'égalité $\mathcal{W}'_I = \Theta_I^{-1}(\mathcal{W}_I)$ est évidente. Comme (Θ_I, Θ'_I) est un couple de foncteurs adjoints (11.2), il suffit en vertu du lemme 4.8, de montrer que pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$, le morphisme d'adjonction

$$\varepsilon_F : \Theta_I\Theta'_I(F) \longrightarrow F$$

est une équivalence faible naturelle. En vertu de ce qui précède, pour tout objet i de I, le morphisme $\varepsilon_{F,i}$ est le foncteur

$$(\textstyle\int F)/i \longrightarrow F(i)$$

défini par

$$\varepsilon_{F,i}(i', a, p : i' \to i) = F(p)(a) \quad ,$$

$$\varepsilon_{F,i}\big((i', a, p : i' \to i) \xrightarrow{(k,f)} (i'', a', p' : i'' \to i)\big) = F(p')(f) \quad .$$

On définit un foncteur

$$\alpha_{F,i} : F(i) \longrightarrow (\textstyle\int F)/i$$

par

$$\alpha_{F,i}(a) = (i, a, 1_i : i \to i) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(F(i)) \ ,$$

$$\alpha_{F,i}(f) = (1_i, f) \ , \quad f \in \mathsf{Fl}(F(i)) \ .$$

On vérifie facilement que $(\varepsilon_{F,i}, \alpha_{F,i})$ forme un couple de foncteurs adjoints. On en déduit que $\varepsilon_{F,i}$ est asphérique (2.9), et en particulier une équivalence faible, ce qui achève la démonstration du théorème.

Dans la suite, on suppose que $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental fort.

Lemme 11.5. *Soit $w : J \to I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Alors*

$$\underline{\mathsf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at})(\mathcal{W}_I) \subset \mathcal{W}_J \qquad et \qquad \mathcal{C}at/w(\mathcal{W}'_J) \subset \mathcal{W}'_I \quad .$$

Démonstration. La première inclusion est évidente. Pour montrer la deuxième, considérons un morphisme u

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & A' \arrow[dl, "v'"] \\ & J \arrow[d, "w"] & \\ & I & \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{C}at/J$, asphérique au dessus de J. Il s'agit de montrer qu'il est asphérique au dessus de I, autrement dit, que pour tout objet i de I, le foncteur $u/i : A/i \to A'/i$ est une équivalence faible. On a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A/i \arrow[rr, "u/i"] \arrow[dr, "v/i"'] & & A'/i \arrow[dl, "v'/i"] \\ & J/i & \end{tikzcd}$$

et pour tout objet $(j, k : w(j) \to i)$ de J/i, on a des isomorphismes canoniques

$$(A/i)/(j,k) \simeq A/j \quad , \qquad (A'/i)/(j,k) \simeq A'/j \quad ,$$

et $(u/i)/(j,k)$ s'identifie à u/j, qui est par hypothèse une équivalence faible. Le foncteur u/i est donc asphérique au dessus de J/i, ce qui prouve qu'il est une équivalence faible.

11.6. En vertu du lemme précédent, pour toute flèche $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, le foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}(w, 1_{\mathcal{C}at}) : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at)$$

induit un foncteur

$$w^* : \mathcal{W}_I^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{W}_J^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \quad ,$$

et le foncteur

$$\mathcal{C}at/w : \mathcal{C}at/J \longrightarrow \mathcal{C}at/I$$

un foncteur

$$\overline{\mathcal{C}at/w} : {\mathcal{W}'_J}^{-1}\mathcal{C}at/J \longrightarrow {\mathcal{W}'_I}^{-1}\mathcal{C}at/I \quad .$$

Pour toute petite catégorie I, on pose

$$\mathbb{D}(I) = \mathbb{D}_{\mathcal{W}}(I) = \mathcal{W}_I^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$$

(de sorte que si $I = e$, $\mathbb{D}(e) = \mathcal{W}_e^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(e, \mathcal{C}at) \simeq \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at = \mathsf{Hot}$ (cf. 4.2)). Pour tout morphisme $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, on a donc défini un foncteur

$$w^* : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}(J) \quad .$$

On définit un foncteur

$$w_! : \mathbb{D}(J) \longrightarrow \mathbb{D}(I)$$

en posant

$$w_! = \overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{C}at/w} \circ \overline{\Theta'}_J \quad .$$

Théorème 11.7. *Pour tout morphisme $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, les foncteurs*

$$w_! : \mathbb{D}(J) \longrightarrow \mathbb{D}(I) \quad , \qquad w^* : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}(J)$$

forment un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. Il résulte de la proposition 11.2, du théorème 11.4, et des lemmes 11.5 et 9.5 que le couple de foncteurs $(\overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{C}at/w}\, ,\, \overline{\Theta'}_J \circ w^*)$

$${\mathcal{W}'_J}^{-1}\mathcal{C}at/J \xrightarrow{\overline{\mathcal{C}at/w}} {\mathcal{W}'_I}^{-1}\mathcal{C}at/I \xrightarrow{\overline{\Theta}_I} \mathcal{W}_I^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) = \mathbb{D}(I)$$

$$\mathcal{W}_I^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) = \mathbb{D}(I) \xrightarrow{w^*} \mathbb{D}(J) = \mathcal{W}_J^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \xrightarrow{\overline{\Theta'}_J} {\mathcal{W}'_J}^{-1}\mathcal{C}at/J$$

est un couple de foncteurs adjoints. Comme en vertu du théorème 11.4, $\overline{\Theta}_J$ et $\overline{\Theta'}_J$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, $w^* \simeq \overline{\Theta}_J(\overline{\Theta'}_J w^*)$ est un adjoint à droite de $(\overline{\Theta}_I\, \overline{\mathcal{C}at/w})\, \overline{\Theta'}_J = w_!$, ce qui prouve le théorème.

Corollaire 11.8. *Soit $J \xrightarrow{w} J' \xrightarrow{w'} J''$ dans $\mathcal{C}at$. Alors on a un isomorphisme de foncteurs $(w'w)_! \simeq w'_! w_!$.*

Démonstration. Le corollaire résulte immédiatement du théorème 11.7 et de l'isomorphisme évident $(w'w)^* \simeq w^* w'^*$.

Exemple 11.9. Soit J une petite catégorie. On note

$$\gamma_J : \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{W}_J^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) = \mathbb{D}(J)$$

le foncteur de localisation (de sorte que si $J = e$,

$$\gamma_e : \mathcal{C}at \simeq \underline{\mathsf{Hom}}(e, \mathcal{C}at) \longrightarrow \mathcal{W}_e^{-1}\, \underline{\mathsf{Hom}}(e, \mathcal{C}at) \simeq \mathcal{W}^{-1}\mathcal{C}at = \mathsf{Hot}$$

s'identifie au foncteur de localisation canonique $\gamma : \mathcal{C}at \to \mathsf{Hot}$ (cf. 4.2)). On note $p_J : J \to e$ l'unique foncteur de J vers la catégorie ponctuelle. On vérifie immédiatement que pour tout foncteur $F : J \to \mathcal{C}at$, on a

$$(p_J)_! \gamma_J(F) \simeq \gamma(\textstyle\int F) \quad .$$

En particulier, si A est une petite catégorie, et F le foncteur constant de valeur A

$$F : j \longmapsto A \quad , \qquad j \in \mathsf{Ob}(J) \quad ,$$

alors

$$(p_J)_! \gamma_J(F) \simeq \gamma(J \times A) \quad ,$$

autrement dit,

$$(p_J)_! p_J^* \gamma(A) \simeq \gamma(J \times A) \quad .$$

Ainsi, en vertu de la proposition 9.8, le foncteur

$$(p_J)_! p_J^* : \mathsf{Hot} \longrightarrow \mathsf{Hot}$$

s'identifie au foncteur $\gamma(J) \times ?$, produit par $\gamma(J)$ dans Hot.

On suppose, dans la suite, que le localisateur fondamental fort $\mathcal{W}$ est fortement saturé.(5)

Proposition 11.10. *Soit $w : J \to I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$.*

a) *Pour que w soit une équivalence faible, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs*

$$(p_J)_! p_J^* \simeq (p_I)_! w_! w^* p_I^* \longrightarrow (p_I)_! p_I^* \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

b) *Pour que w soit asphérique, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs*

$$w_! p_J^* \simeq w_! w^* p_I^* \longrightarrow p_I^* \quad ,$$

[5] Dans sa thèse, Denis-Charles Cisinski démontre que, comme Grothendieck le conjecture dans “Pursuing Stacks”, *tout* localisateur fondamental fort est fortement saturé, mais ce résultat n'est pas élémentaire.

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. *a*) Pour toute petite catégorie A, le morphisme

$$\gamma(J \times A) \simeq (p_J)_!(p_J)^*\gamma(A) \longrightarrow (p_I)_!(p_I)^*\gamma(A) \simeq \gamma(I \times A)$$

n'est autre que $\gamma(w \times 1_A)$, qui est un isomorphisme si et seulement si $w \times 1_A$ est une équivalence faible (puisque $\mathcal{W}$ est fortement saturé). L'assertion (*a*) résulte donc de 9.2.

b) Pour toute petite catégorie A, $w_! p_J^* \gamma(A)$ (resp. $p_I^* \gamma(A)$) est l'image par γ_I du foncteur $i \mapsto (J \times A)/i \simeq J/i \times A$ (resp. du foncteur constant $i \mapsto A$), $i \in \mathsf{Ob}(I)$, et le morphisme $w_! p_J^* \gamma(A) \to p_I^* \gamma(A)$ est l'image par γ_I du morphisme de foncteurs défini par la deuxième projection $J/i \times A \to A$. L'assertion (*b*) résulte donc de 2.4.

REMARQUE 11.11. Les assertions (*a*) et (*b*) de la proposition 11.10 admettent la généralisation commune suivante : *Soit*

$$\begin{tikzcd} J \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & J' \arrow[dl, "w'"] \\ & I & \end{tikzcd} \qquad w = w'u$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$. Pour que le morphisme u soit asphérique au dessus de I, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs

$$w_! p_J^* \simeq w'_! u_! u^* p_{J'}^* \longrightarrow w'_! p_{J'}^* \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

En effet, pour toute petite catégorie A, le morphisme $w_! p_J^* \gamma(A) \longrightarrow w'_! p_{J'}^* \gamma(A)$ de $\mathbb{D}(I)$ s'identifie à l'image par γ_I du morphisme de foncteurs

$$i \longmapsto u/i \times 1_A : J/i \times A \longrightarrow J'/i \times A \quad , \qquad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad ,$$

et l'assertion résulte de 9.2.

Morphismes propres, lisses.

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

Définition 12.1. On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *$\mathcal{W}$-propre*, ou plus simplement *propre*, si pour tout objet b de B, le morphisme canonique

$$i_b : A_b \longrightarrow A/b \quad , \qquad a \mapsto (a, 1_b : u(a) \to b) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(A_b)$$

est *coasphérique*. On dit que u est *$\mathcal{W}$-lisse*, ou plus simplement *lisse*, si le morphisme $u^\circ : A^\circ \to B^\circ$ est propre, autrement dit, si pour tout objet b de B, le morphisme canonique

$$j_b : A_b \longrightarrow b\backslash A \quad , \qquad a \mapsto (a, 1_b : b \to u(a)) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(A_b)$$

est *asphérique*.

Exemple 12.2. Il résulte de 2.13 et 2.22 qu'une précofibration est un morphisme propre. Dualement, une préfibration est un morphisme lisse. En particulier, une *immersion ouverte* (morphisme de $\mathcal{C}at$ isomorphe à l'inclusion d'un crible) est un morphisme lisse, et une *immersion fermée* (morphisme isomorphe à l'inclusion d'un cocrible) est un morphisme propre.

Proposition 12.3. *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *u est propre ;*

b) *pour tout objet a de A les fibres du morphisme*

$$a\backslash A \longrightarrow b\backslash B \quad , \qquad b = u(a) \quad ,$$

induit par u, sont asphériques ;

c) *pour tout morphisme $B' = \Delta_1 \to B$ de $\mathcal{C}at$, si l'on forme le carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} A' = A \times_B B' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

l'inclusion $A'_1 \hookrightarrow A'$, de la fibre de A' au dessus de l'objet 1 de $B' = \Delta_1$, est un morphisme coasphérique ;

d) *pour toute flèche $f_0 : b_0 \to b_1$ de B, et tout objet a_0 de A_{b_0}, la catégorie $A(a_0, f_0)$, dont les objets sont les flèches $f : a_0 \to a$ de source a_0, qui relèvent f_0 $(u(f) = f_0)$, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs*

$$\begin{tikzcd} & a_0 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ b \arrow[rr, "g"'] & & b' \end{tikzcd} \quad ,$$

avec g morphisme de A_{b_1} $(u(g) = 1_{b_1})$, est asphérique.

Démonstration. L'équivalence de (a), (b) et (d) est un simple exercice de traduction laissé au lecteur. Montrons l'équivalence de (c) et (d). La donnée d'une flèche $f_0 : b_0 \to b_1$ de B équivaut à celle d'un foncteur $\Delta_1 \to B$, comme dans (c), et affirmer, avec les notations de (c), que $A'_1 \hookrightarrow A'$ est coasphérique, c'est affirmer que pour tout objet a' de A', la catégorie $a'\backslash A'_1$ est asphérique. Si $a' \in \mathsf{Ob}(A'_1)$, cela est vrai, sans hypothèse sur u, (puisqu'alors $a'\backslash A'_1$ admet un objet initial, et par suite est asphérique (2.11)). Il suffit donc de le vérifier pour a' dans $A' - A'_1 = A'_0 \simeq A_{b_0}$. Mais alors a' s'identifie à un objet a_0 de A_{b_0}, et on vérifie que $a'\backslash A'_1$ est isomorphe à la catégorie $A(a_0, f_0)$ de (d). Cela achève la démonstration.

Corollaire 12.4. *Les morphismes propres sont stables par changement de base, autrement dit, pour tout carré cartésien dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

si u est propre, il en est de même pour u'.

Démonstration. Le corollaire résulte de la proposition 12.3, puisque la condition (c) est stable par changement de base.

Proposition 12.5. *Un morphisme propre à fibres asphériques est universellement asphérique, autrement dit, est asphérique et le reste après tout changement de base, ou encore de façon équivalente, est universellement dans $\mathcal{W}$.*

Démonstration. Comme être propre à fibres asphériques est, en vertu du corollaire 12.4, une propriété stable par changement de base, il suffit de montrer qu'un morphisme $u : A \to B$ satisfaisant à cette propriété est asphérique. Le morphisme u étant propre, pour tout objet b de B, le morphisme canonique $A_b \to A/b$ est coasphérique, et en particulier une équivalence faible. Comme par hypothèse la catégorie A_b est asphérique, il en est de même pour A/b, ce qui prouve l'assertion.

Lemme 12.6. *Soient $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, a un objet de A, et $b = u(a)$. Si le morphisme u est propre, il en est de même du morphisme $a\backslash A \to b\backslash B$, induit par u.*

Démonstration. En vertu de la condition (b) de la proposition 12.3, il suffit de montrer que pour tout objet $(a', f : a \to a')$ de $a\backslash A$ le morphisme $(a', f)\backslash(a\backslash A) \to (b', g)\backslash(b\backslash B)$, où $(b', g) = (u(a'), u(f))$, est à fibres asphériques. Or ce morphisme s'identifie au morphisme $a'\backslash A \to b'\backslash B$, induit par u, qui est à fibres asphériques, en vertu de la condition (b) de la proposition 12.3, puisque le morphisme u est propre.

Proposition 12.7. *Soient $u : A \to B$ un morphisme propre de $\mathcal{C}at$, a un objet de A, et $b = u(a)$. Alors le morphisme $a\backslash A \to b\backslash B$, induit par u, est universellement asphérique.*

Démonstration. Il résulte de la condition (b) de la proposition 12.3 que le morphisme $a\backslash A \to b\backslash B$ est à fibres asphériques, et du lemme précédent qu'il est propre. L'assertion résulte donc de la proposition 12.5.

Proposition 12.8. *Les morphismes propres sont stables par composition.*

Démonstration. Soit $A \overset{u}{\to} B \overset{v}{\to} C$ dans $\mathcal{C}at$, avec u, v propres. Formons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d] & a\backslash A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\
B' \arrow[r] \arrow[d] & b\backslash B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "v"] \\
\{(c', f)\} \arrow[r, hook] & c\backslash C \arrow[r] & C
\end{tikzcd} ,$$

où a est un objet de A, $b = u(a)$, $c = v(b) = vu(a)$, $(c', f : c \to c')$ un objet de $c\backslash C$, les deux carrés de gauche étant cartésiens. Comme v est propre, il résulte de la condition (b) de la proposition 12.3 que B' est asphérique. Comme u est propre, il résulte de la proposition 12.7 que le morphisme $a\backslash A \to b\backslash B$ est universellement asphérique. On en déduit que le morphisme $A' \to B'$ est asphérique, donc une équivalence faible, et par suite, A' est asphérique. Cela prouve que vu est propre en vertu de la condition (b) de la proposition 12.3.

Lemme 12.9. *Soit*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\
B' \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$. Alors pour tout objet a de A, $b = u(a)$, le carré induit

$$\begin{tikzcd}
a\backslash A' \arrow[r] \arrow[d] & a\backslash A \arrow[d] \\
b\backslash B' \arrow[r] & b\backslash B
\end{tikzcd}$$

est cartésien.

Démonstration. Considérons le cube commutatif

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr] \arrow[dd] & & A \arrow[dd] & \\
& a\backslash A' \arrow[ul] \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd] & & a\backslash A \arrow[ul] \arrow[dd] \\
B' \arrow[rr] & & B & \\
& b\backslash B' \arrow[ul] \arrow[rr] & & b\backslash B \arrow[ul]
\end{tikzcd} .$$

La face arrière est cartésienne par hypothèse, et les faces horizontales sont cartésiennes par définition de $a\backslash A'$ et $b\backslash B'$. On en déduit que la face avant est cartésienne, ce qui prouve le lemme.

Proposition 12.10. *Soient C une petite catégorie,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un morphisme de $\mathcal{C}at/C$ coasphérique au dessus de C, $C' \to C$ un morphisme propre, et formons le diagramme de changement de base dont les trois carrés sont cartésiens

(12.10.1)
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr] \arrow[dr, "u'"] \arrow[dd] & & A \arrow[dr, "u"] \arrow[dd] & \\ & B' \arrow[rr] \arrow[dl] & & B \arrow[dl] \\ C' \arrow[rr] & & C & \end{tikzcd}$$

Alors u' est coasphérique au dessus de C'

Démonstration. Soient c' un objet de C', c son image dans C, et considérons le diagramme induit par le diagramme 12.10.1

$$\begin{tikzcd} c'\backslash A' \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & c\backslash A \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & c'\backslash B' \arrow[rr] \arrow[dl] & & c\backslash B \arrow[dl] \\ c'\backslash C' \arrow[rr] & & c\backslash C & \end{tikzcd} .$$

En vertu du lemme 12.9, les deux carrés contenant $c'\backslash C' \to c\backslash C$ sont cartésiens (le troisième carré l'est donc aussi). Comme $C' \to C$ est propre, il résulte de la proposition 12.7 que $c'\backslash C' \to c\backslash C$ est universellement asphérique, donc $c'\backslash A' \to c\backslash A$ et $c'\backslash B' \to c\backslash B$ sont asphériques, et en particulier, des équivalences faibles. Comme u est coasphérique au dessus de C, $c\backslash A \to c\backslash B$ est une équivalence faible, donc, par saturation faible, $c'\backslash A' \to c'\backslash B'$ aussi, ce qui prouve que u' est coasphérique au dessus de C'.

Corollaire 12.11. *L'image réciproque d'un morphisme coasphérique par un morphisme propre est coasphérique.*

Le corollaire est un cas particulier de la proposition 12.10.

Théorème 12.12. *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *u est propre ;*

b) *pour tout diagramme de carrés cartésiens dans* $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "w"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "v"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

si v est coasphérique, il en est de même pour w.

Démonstration. L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte des corollaires 12.4 et 12.11. Montrons que (b) implique (a). Pour tout objet b de B, on a un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A_b \arrow[r] \arrow[d] & A/b \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ \{b\} \arrow[r] & B/b \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

où l'image de $\{b\} \to B/b$ est l'objet final de B/b. Le morphisme $\{b\} \to B/b$ admet donc un adjoint à gauche, et par suite, est coasphérique (2.22). L'hypothèse (b) implique alors que $A_b \to A/B$ est coasphérique, ce qui prouve que u est propre

Proposition 12.13. *Soient C une petite catégorie,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un morphisme de $\mathcal{C}at/C$, avec v et w propres. Si u induit des équivalences faibles dans les fibres au dessus de C, alors u est asphérique au dessus de C, et en particulier, si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental fort, u est une équivalence faible.

Démonstration. Pour tout objet c de C, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A_c \arrow[r, "u_c"] \arrow[d, "i_A"'] & B_c \arrow[d, "i_B"] \\ A/c \arrow[r, "u/c"'] & B/c \end{tikzcd} \quad ,$$

où i_A et i_B désignent les morphismes canoniques. Comme v et w sont propres, i_A et i_B sont coasphériques, et en particulier des équivalences faibles. Par hypothèse u_c est une équivalence faible ; on en déduit donc que u/c est une équivalence faible, ce qui prouve la proposition.

Remarque 12.14. La proposition 12.13 généralise la partie (a) de la proposion 9.9.

Remarque 12.15. Toutes les assertions concernant les morphismes propres admettent une version duale relative aux morphismes lisses. En particulier, les morphismes lisses sont stables par changement de base et composition. Un morphisme lisse à fibres asphériques est universellement dans $\mathcal{W}$. Pour qu'un morphisme u de $\mathcal{C}at$ soit lisse, il faut et il suffit que l'image réciproque par u d'un morphisme asphérique soit asphérique, et que u conserve cette propriété après tout changement de base. On laisse le soin au lecteur de formuler les versions duales des autres assertions.

12.16. Soient $w : J \to I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, $F : I \to \mathcal{C}at$ un foncteur, et posons $G = Fw : J \to \mathcal{C}at$. Le morphisme w induit un foncteur

$$\widetilde{w} : \int G = \int Fw \longrightarrow \int F$$

défini par

$$\widetilde{w}(j,a) = (w(j),a) \quad , \qquad (j,a) \in \mathsf{Ob}(\textstyle\int G) \quad ,$$

$$\widetilde{w}(q,f) = (w(q),f) \quad , \qquad (q,f) : (j,a) \to (j',a') \in \mathsf{Fl}(\textstyle\int G) \quad .$$

Le foncteur $\widetilde{w} : \int G \to \int F$ peut être aussi défini par la propriété universelle de $\int G$. Notons

$$l_i : F(i) \longrightarrow \int F \quad , \qquad i \in \mathsf{Ob}(I) \quad ,$$

$$\beta_k : l_i \longrightarrow l_{i'}F(k) \quad , \qquad k : i \to i' \in \mathsf{Fl}(I) \quad ,$$

les foncteurs et morphismes de foncteurs canoniques correspondant au foncteur F (cf. 10.3), et définissons

$$l'_j = l_{w(j)} : G(j) = F(w(j)) \longrightarrow \int F \quad , \qquad j \in \mathsf{Ob}(J) \quad ,$$

$$\beta'_q = \beta_{w(q)} : l'_j = l_{w(j)} \longrightarrow l_{w(j')}F(w(q)) = l'_{j'}G(q) \ , \quad q : j \to j' \in \mathsf{Fl}(J) \ .$$

On vérifie aussitôt qu'on a la relation de cocycle

$$\beta'_{q'q} = (\beta'_{q'} \star G(q))\beta'_q \quad , \qquad \beta'_{1_j} = 1_{l'_j} \quad ,$$

pour $j \xrightarrow{q} j' \xrightarrow{q'} j''$, morphismes composables de J, et que $\widetilde{w} : \int G \to \int F$ est le foncteur défini, par la propriété universelle de $\int G$, par la famille de foncteurs l'_j, $j \in \mathsf{Ob}(J)$, et de morphismes de foncteurs β'_q, $q \in \mathsf{Fl}(J)$, (cf. 10.3).

Lemme 12.17. *Soient $w : J \to I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, $F : I \to \mathcal{C}at$ un foncteur, et posons $G = Fw : J \to \mathcal{C}at$. Alors on a un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} \int G \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "\widetilde{G}"'] & \int F \arrow[d, "\widetilde{F}"] \\ J \arrow[r, "w"'] & I \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\widetilde{G}$, $\widetilde{F}$ désignent les cofibrations associées aux foncteurs G et F respectivement (cf. 10.1), *et $\widetilde{w}$ le foncteur induit par w* (cf. 12.16).

DÉMONSTRATION. Le lemme résulte d'une vérification immédiate, laissée au lecteur.

Lemme 12.18. *Soient $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$ et $F : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur. Pour tout b, $b \in \mathsf{Ob}(B)$, on a un isomorphisme canonique*

$$\Big(\int F\Big)\Big/b \simeq \int F \,|\, A/b \quad ,$$

où $F \,|\, A/b$ désigne le composé de F avec le foncteur canonique $A/b \to A$.

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme 12.17, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\int F \,|\, A/b \arrow[r] \arrow[d] & \int F \arrow[d] \\
A/b \arrow[r] & A
\end{tikzcd} \quad ,$$

et comme le carré

$$\begin{tikzcd}
A/b \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
B/b \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

est aussi cartésien, il en est de même du carré composé

$$\begin{tikzcd}
\int F \,|\, A/b \arrow[r] \arrow[d] & \int F \arrow[d] \\
B/b \arrow[r] & B
\end{tikzcd} \quad .$$

Le carré

$$\begin{tikzcd}
\Big(\int F\Big)\Big/b \arrow[r] \arrow[d] & \int F \arrow[d] \\
B/b \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

étant aussi cartésien, le lemme en résulte.

Proposition 12.19. *Soit $w : J \to I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *le morphisme w est coasphérique ;*

b) *pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$, le morphisme*

$$\int Fw \longrightarrow \int F \quad ,$$

induit par w, est coasphérique ;

c) *pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$, le morphisme*

$$\int Fw \longrightarrow \int F \quad ,$$

induit par w, est une équivalence faible.

Démonstration. En vertu du lemme 12.17, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r] \arrow[d] & \int F \arrow[d, "\widetilde{F}"] \\ J \arrow[r, "w"'] & I \end{tikzcd} \quad ,$$

et $\widetilde{F}$ est une cofibration, et en particulier, un morphisme propre (12.2). L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte donc du corollaire 12.11. L'implication $(b) \Rightarrow (c)$ résulte de 2.22. Montrons l'implication $(c) \Rightarrow (a)$. Soit i un objet de I et considérons le foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$ associant à un objet i' de I la catégorie discrète correspondant à l'ensemble $\mathsf{Hom}_I(i, i')$. Alors, en vertu de (c), $\int Fw \to \int F$ est une équivalence faible, et on vérifie facilement que $\int F \simeq i\backslash I$, que $\int Fw \simeq i\backslash J$, et que la flèche $\int Fw \to \int F$ s'identifie au morphisme $i\backslash w : i\backslash J \to i\backslash I$, induit par w, ce qui prouve que w est coasphérique, et achève la démonstration.

Le corollaire suivant complète la proposition 11.10.

Corollaire 12.20. *Supposons que le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ soit un localisateur fondamental fort, fortement saturé,*[6] *et soit $w : J \to I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Pour que w soit coasphérique, il faut et il suffit que le morphisme de foncteurs*

$$(p_J)_! w^* \simeq (p_I)_! w_! w^* \longrightarrow (p_I)_! \quad ,$$

défini par le morphisme d'adjonction, soit un isomorphisme.

Démonstration. Pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$, le morphisme

$$\gamma\Big(\int Fw\Big) \simeq (p_J)_! w^* \gamma_I(F) \longrightarrow (p_I)_! \gamma_I(F) \simeq \gamma\Big(\int F\Big)$$

de $\mathbb{D}(e) \simeq \mathsf{Hot}$ (cf. 11.9) s'identifie à $\gamma(\widetilde{w})$, où $\widetilde{w} : \int Fw \to \int F$ désigne le morphisme induit par w. Le corollaire résulte donc de la proposition 12.19, et de la forte saturation de $\mathcal{W}$.

[6]Voir note de bas de page précédant la proposition 11.10.

Remarque 12.21. La proposition 12.19 et le corollaire 12.20 admettent une version relative analogue à celle de la proposition 11.10 (remarque 11.11). Soit

$$\begin{tikzcd} J \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & J' \arrow[dl, "w'"] \\ & I & \end{tikzcd} \qquad w = w'u$$

un triangle commutatif dans $\mathcal{C}at$. Pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$ le triangle

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[rr, "\widetilde{u}"] \arrow[dr, "\widetilde{w}"'] & & \int Fw' \arrow[dl, "\widetilde{w}'"] \\ & \int F & \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\widetilde{u}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{w}'$ désignent les foncteurs induits par u, w, et w' respectivement, est commutatif. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[rrr, "\widetilde{Fw}"] \arrow[dr, "\widetilde{u}"] \arrow[dd, "\widetilde{w}"'] & & & J \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "w" near start] & \\ & \int Fw' \arrow[rrr, "\widetilde{Fw'}"] \arrow[dl, "\widetilde{w}'"] & & & J' \arrow[dl, "w'"] \\ \int F \arrow[rrr, "\widetilde{F}"'] & & & I & \end{tikzcd} \quad ,$$

dont les faces carrées sont cartésiennes, en vertu du lemme 12.17. Il résulte donc de la proposition 12.10, que si le morphisme u est coasphérique au dessus de I, alors $\widetilde{u}$ est coasphérique au dessus de $\int F$. Réciproquement, si pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$, le morphisme $\widetilde{u} : \int Fw \to \int Fw'$ est coasphérique au dessus de $\int F$, alors u est coasphérique au dessus de I. En effet, soit i un objet de I, et considérons le foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$ associant à un objet i' de I la catégorie discrète correspondant à l'ensemble $\mathsf{Hom}_I(i, i')$. Alors le foncteur $\widetilde{u} : \int Fw \to \int Fw'$ s'dentifie au foncteur $i\backslash u : i\backslash J \to i\backslash J'$, induit par u, et la catégorie $\int F$ à la catégorie $i\backslash I$. Il résulte donc de l'hypothèse que le morphisme $i\backslash u$ est coasphérique au dessus de $i\backslash I$. En particulier, le morphisme

$$i\backslash u : i\backslash J \simeq (i, 1_i)\backslash(i\backslash J) \longrightarrow (i, 1_i)\backslash(i\backslash J) \simeq i\backslash J' \quad ,$$

où $(i, 1_i)$ désigne l'objet initial de $i\backslash I$, est une équivalence faible, ce qui prouve que le morphisme u est coasphérique au dessus de I. Si le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental fort, le raisonnement précédent montre aussi que le morphisme u est coasphérique au dessus de I si et seulement si pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$, le morphisme $\widetilde{u} : \int Fw \to \int Fw'$ est une équivalence faible. Si, de plus, $\mathcal{W}$ est fortement saturé,[(7)] cette dernière condition équivaut à affirmer que le morphisme de foncteurs

$$(p_J)_! w^* \simeq (p_{J'})_! u_! u^* w'^* \longrightarrow (p_{J'})_! w'^* \quad ,$$

[7]Voir note de bas de page précédant la proposition 11.10.

défini par le morphisme d'adjonction, est un isomorphisme (ce qui généralise le corollaire 12.20). En effet, on vérifie aussitôt que pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$, le morphisme

$$\gamma(\textstyle\int Fw) \simeq (p_J)_! w^* \gamma_I(F) \longrightarrow (p_{J'})_! w'^* \gamma_I(F) \simeq \gamma(\textstyle\int Fw)$$

de $\mathbb{D}(e) \simeq \mathsf{Hot}$ s'identifie au morphisme $\gamma(\widetilde{u})$.

12.22. Soit $u : A \to B$ un foncteur entre petites catégories. Dans la suite de ce paragraphe, on désigne aussi, par abus de notation, par $u_!$, u^* les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at) \xrightarrow{u_!} \underline{\mathsf{Hom}}(B, \mathcal{C}at) \quad , & & \underline{\mathsf{Hom}}(B, \mathcal{C}at) \xrightarrow{u^*} \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at) \quad , \\ F \longmapsto (b \mapsto (\textstyle\int F)/b) & & G \longmapsto Gu \end{array}$$

$u_! = \Theta_B \circ \mathcal{C}at/u \circ \Theta'_A$ (cf. 11.1), $u^* = \underline{\mathsf{Hom}}(u, 1_{\mathcal{C}at})$, de sorte qu'on ait des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at) \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\gamma_A"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(B, \mathcal{C}at) \arrow[d, "\gamma_B"] \\ \mathbb{D}(A) \arrow[r, "u_!"'] & \mathbb{D}(B) \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(B, \mathcal{C}at) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "\gamma_B"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at) \arrow[d, "\gamma_A"] \\ \mathbb{D}(B) \arrow[r, "u^*"'] & \mathbb{D}(A) \end{tikzcd}$$

(cf. 11.6, 11.9) (le premier uniquement dans le cas d'un localisateur fondamental fort).

12.23. Soit

$$\mathcal{D} \ = \ \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$. Pour tout foncteur $F : A \to \mathcal{C}at$, on déduit un carré cartésien composé

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "\widetilde{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "\widetilde{F}"] \\ A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

(cf. 12.17). Pour tout objet b' de B', le foncteur $\widetilde{w}$ induit un foncteur

$$(\textstyle\int Fw)/b' \longrightarrow (\textstyle\int F)/v(b') \quad ,$$

et on remarque que

$$(\textstyle\int Fw)/b' = (u'_! w^*(F))(b') \qquad \text{et} \qquad (\textstyle\int F)/v(b') = (v^* u_!(F))(b') \quad .$$

On en déduit un morphisme

$$\kappa_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \longrightarrow v^* u_!$$

de $\underline{\mathsf{Hom}}\big(\underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at), \underline{\mathsf{Hom}}(B', \mathcal{C}at)\big)$, appelé *morphisme de changement de base associé au carré* $\mathcal{D}$.

Proposition 12.24. *Soit*

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$, avec u morphisme propre (resp. *v morphisme lisse*). *Alors le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \to v^* u_!$ est coasphérique* (resp. *universellement asphérique*) *argument par argument, autrement dit, pour tout foncteur $F : A \to \mathcal{C}at$, et tout objet b' de B'*

$$\kappa_{\mathcal{D},F}(b') : (u'_! w^*(F))(b') \longrightarrow (v^* u_!(F))(b')$$

est coasphérique (resp. *universellement asphérique*), *et en particulier, une équivalence faible.*

Démonstration. **Cas u propre.** En vertu du corollaire 12.4, le morphisme u' est propre aussi, et pour tout objet b' de B', on a donc un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A'_{b'} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & A_{v(b')} \arrow[d] \\ A'/b' \arrow[r] & A/v(b') \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont coasphériques, et la flèche horizontale du haut un isomorphisme, puisque le carré $\mathcal{D}$ est cartésien. Pour tout foncteur $F : A \to \mathcal{C}at$, on en déduit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \int Fw|A'_{b'} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \int F|A_{v(b')} \arrow[d] \\ \int Fw|A'/b' \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr|"] & \int F|A/v(b') \arrow[d, phantom, "\wr|"] \\ (\int Fw)/b' \arrow[d, phantom, "||"] & (\int F)/v(b') \arrow[d, phantom, "||"] \\ (u'_! w^*(F))(b') & (v^* u_!(F))(b') \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont des morphismes coasphériques (proposition 12.19), et la flèche horizontale du haut un isomorphisme. Il résulte alors de la proposition 2.8 (forme duale) que la flèche horizontale du bas est coasphérique, ce qui achève la démonstration, par une double application du lemme 12.18.

Cas v lisse. Soient $F : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur, b' un objet de B', et considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "u'\widetilde{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "u\widetilde{F}"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

(cf. 12.23), et le cube commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (\int Fw)/b' \arrow[rr, "\kappa_{\mathcal{D},F}(b')"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & (\int F)/v(b') \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & \int Fw \arrow[rr] \arrow[dd] & & \int F \arrow[dd] \\ B'/b' \arrow[rr] \arrow[dr] & & B/v(b') \arrow[dr] & \\ & B' \arrow[rr] & & B \end{tikzcd} \quad ,$$

dont les faces latérales et la face avant sont cartésiennes, donc aussi la face arrière. Comme v est lisse, en vertu de la proposition 12.7 (forme duale), le morphisme $B/b' \to B/v(b')$, induit par v, est universellement asphérique. Il en est donc de même pour $\kappa_{\mathcal{D},F}(b')$, ce qui prouve la proposition.

12.25. Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Par abus de notation, on désigne par $\int_B A/b$ la catégorie $\int F$, où F est le foncteur $F : B \to \mathcal{C}at$ défini par $b \mapsto A/b$. La catégorie $\int_B A/b$ est la catégorie dont les objets sont les triplets $(b, a, f : u(a) \to b)$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, $b \in \mathsf{Ob}(B)$, $f \in \mathsf{Fl}(B)$, un morphisme de $(b, a, f : u(a) \to b)$ vers $(b', a', f' : u(a') \to b')$ étant un couple $(h : b \to b', g : a \to a')$, $g \in \mathsf{Fl}(A)$, $h \in \mathsf{Fl}(B)$, tel que le carré

$$\begin{tikzcd} u(a) \arrow[r, "u(g)"] \arrow[d, "f"'] & u(a') \arrow[d, "f'"] \\ b \arrow[r, "h"'] & b' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On définit des foncteurs

$$\begin{array}{ll} i_u : A \longrightarrow \int_B A/b \quad , & r_u : \int_B A/b \longrightarrow A \quad , \\ \quad a \longmapsto (u(a), a, 1_{u(a)}) & \quad (b, a, f) \longmapsto a \end{array}$$

et un morphisme de foncteurs

$$\alpha : i_u r_u \longrightarrow 1_{\int_B A/b} \quad , \qquad \alpha_{(b,a,f)} = (f, 1_a) : (u(a), a, 1_{u(a)}) \to (b, a, f) \quad ,$$

et on vérifie aussitôt que $r_u i_u = 1_A$. On en déduit que i_u et r_u sont des équivalences faibles.

De plus, pour tout carré commutatif de $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

on a des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "i_{u'}"'] & A \arrow[d, "i_u"] \\ \int_{B'} A'/b' \arrow[r, "s"'] & \int_B A/b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \int_{B'} A'/b' \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r_{u'}"'] & \int_B A/b \arrow[d, "r_u"] \\ A' \arrow[r, "w"'] & A \end{tikzcd} \quad ,$$

où $s : \int_{B'} A'/b' \to \int_B A/b$ est le foncteur défini par $(b', a', f') \mapsto (v(b'), w(a'), v(f'))$.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental fort.

Théorème 12.26. *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *u est propre ;*

b) *pour tout diagramme de carrés cartésiens dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme de changement de base, associé au carré de gauche, est une équivalence faible argument par argument.

Démonstration. L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte du corollaire 12.4 et de la proposition 12.24. Montrons l'implication $(b) \Rightarrow (a)$. En vertu du théorème 12.12, il suffit de montrer que si

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien dont le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}}$ est une équivalence faible argument par argument, et si v est coasphérique, alors w est coasphérique. Par hypothèse, pour tout foncteur $F : A \to \mathcal{C}at$, et tout objet b' de B',

$$\kappa_{\mathcal{D},F}(b') : (u'_! w^*(F))(b') \longrightarrow (v^* u_!(F))(b')$$

est une équivalence faible. Comme $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental fort, il résulte de la proposition 10.6 que

$$\textstyle\int \kappa_{\mathcal{D},F} : \int u'_! w^*(F) \longrightarrow \int v^* u_!(F)$$

est une équivalence faible. D'autre part, comme v est coasphérique, il résulte de la proposition 12.19 que le morphisme

$$\widetilde{v} : \textstyle\int v^* u_!(F) = \int u_!(F)v \longrightarrow \int u_!(F) \quad ,$$

induit par v, est une équivalence faible, et par suite aussi le composé

$$\widetilde{v} \textstyle\int \kappa_{\mathcal{D},F} : \int u'_! w^*(F) \longrightarrow \int u_!(F) \quad .$$

Or,

$$\int u'_! w^*(F) = \int_{B'} (\textstyle\int Fw)/b' \quad , \qquad \displaystyle\int u_!(F) = \int_B (\textstyle\int F)/b \quad ,$$

et on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "u'\widetilde{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "u\widetilde{F}"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

(cf. 12.23), d'où un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d] & \int F \arrow[d] \\ \int_{B'} (\int Fw)/b' \arrow[r, "s"'] & \int_B (\int F)/b \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences faibles (cf. 12.25). On vérifie facilement que $s = \widetilde{v} \int \kappa_{\mathcal{D},F}$, ce qui implique que $\widetilde{w}$ est une équivalence faible, et prouve, en vertu de la proposition 12.19, que le foncteur w est coasphérique, ce qui achève la démonstration.

Remarque 12.27. Il existe une caractérisation analogue pour les morphismes lisses, mais je ne connais pas de démonstration élémentaire.

12.28. En revenant aux notations de 11.6, soit

$$\mathcal{D} \; = \; \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$. On en déduit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(A') & \mathbb{D}(A) \arrow[l, "w^*"'] \\ \mathbb{D}(B') \arrow[u, "u'^*"] & \mathbb{D}(B) \arrow[l, "v^*"] \arrow[u, "u^*"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

les foncteurs u^* et u'^* admettant des adjoints à gauche

$$u_! : \mathbb{D}(A) \to \mathbb{D}(B) \qquad \text{et} \qquad u'_! : \mathbb{D}(A') \to \mathbb{D}(B')$$

respectivement (cf. 11.7). On appelle aussi *morphisme de changement de base associé au carré cartésien* $\mathcal{D}$ et on note $c_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \to v^* u_!$ le morphisme de $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{D}(A), \mathbb{D}(B'))$, composé des flèches

$$u'_! w^* \longrightarrow u'_! w^* u^* u_! = u'_! u'^* v^* u_! \longrightarrow v^* u_! \quad ,$$

définies par les morphismes d'adjonction $1_{\mathbb{D}(A)} \to u^* u_!$ et $u'_! u'^* \to 1_{\mathbb{D}(B')}$. On vérifie facilement que le morphisme $c_{\mathcal{D}}$ est induit, par localisation, par le morphisme $\kappa_{\mathcal{D}}$ (cf. 12.23), autrement dit, en gardant les notations de 11.9, pour tout foncteur $F : A \to \mathcal{C}at$, on a

$$c_{\mathcal{D}, \gamma_A(F)} = \gamma_{B'}(\kappa_{\mathcal{D},F}) \quad .$$

Ainsi, en vertu de la proposition 12.24, si u est propre ou v lisse, alors le morphisme $c_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme. Il résulte du théorème 12.26 que cette propriété caractérise les morphismes propres si l'on demande qu'elle reste vraie après tout changement de base (pourvu que le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ soit fortement saturé [8]). Il existe une caractérisation analogue pour les morphismes lisses, mais sa démonstration n'est pas élémentaire à ma connaissance.

[8] Voir note de bas de page précédant la proposition 11.10.

Appendice A : La catégorie cubique.

Denis-Charles CISINSKI

Dans cet appendice, on se fixe, une fois pour toutes, un localisateur fondamental $\mathcal{W}$.

A.1. Soient A une catégorie et U un crible de A. On note $A - U$ la sous-catégorie pleine de A définie par $\mathsf{Ob}(A - U) = \mathsf{Ob}\ A - \mathsf{Ob}\ U$, et on vérifie aussitôt que $A - U$ est un cocrible de A. Cette convention permet d'énoncer le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate.

Lemme A.2. *Soient A une catégorie, U un crible de A, $u : U \to C$ un foncteur dont le but est une catégorie admettant un objet final e_C. Alors il existe un unique foncteur $v : A \to C$ tel que $v\,|\,U = u$ et tel que $v\,|\,A - U$ soit le foncteur constant de valeur e_C.*

A.3. Soit A une petite catégorie. Un *précylindre fonctoriel* dans A est la donnée $(I, \partial^0, \partial^1)$ d'un foncteur $I : A \to A$ et de morphismes de foncteurs

$$1_A \overset{\partial^0}{\underset{\partial^1}{\rightrightarrows}} I \quad .$$

Un *précylindre fonctoriel augmenté* dans A est la donnée d'un précylindre fonctoriel $(I, \partial^0, \partial^1)$ dans A, et d'une famille $\sigma = (\sigma_a : I(a) \to a)_{a \in \mathsf{Ob}(A)}$ de morphismes de A, appelée *l'augmentation*, telle que pour tout objet a de A, on ait

$$\sigma_a \partial^0_a = 1_a = \sigma_a \partial^1_a \quad .$$

Un *cylindre fonctoriel* dans A est un précylindre fonctoriel augmenté $(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ dans A, dont l'augmentation σ est un morphisme de foncteurs $\sigma : I \to 1_{1_A}$, autrement dit, tel que pour toute flèche $f : a \to a'$ de A, on ait

$$\sigma_{a'} I(f) = f \sigma_a \quad .$$

Remarque A.4. Un précylindre fonctoriel augmenté $(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ dans A définit, pour tout objet a de A, un précylindre fonctoriel $(I|A/a,\ \partial^0|A/a,\ \partial^1|A/a)$ dans A/a, comme suit. Pour tout objet $(a',\ g : a' \to a)$ de A/a, on pose

$$(I|A/a)(a',\ g : a' \to a) = (I(a'),\ \sigma_a I(g) : I(a') \to a) \quad ,$$

et pour tout morphisme $f : (a',\ g : a' \to a) \longrightarrow (a'',\ g' : a'' \to a)$

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & a'' \arrow[dl, "g'"] \\ & a & \end{tikzcd} \qquad\qquad g = g'f$$

de A/a, on pose

$$(I|A/a)(f) = I(f) \quad ,$$

ce qui est bien un morphisme

$$(I(a'),\, \sigma_a I(g) : I(a') \to a) \xrightarrow{I(f)} (I(a''),\, \sigma_a I(g') : I(a'') \to a)$$

de A/a, car en vertu des égalités

$$\sigma_a I(g') I(f) = \sigma_a I(g'f) = \sigma_a I(g) \quad ,$$

le triangle

$$\begin{tikzcd} I(a') \arrow[rr, "I(f)"] \arrow[dr, "\sigma_a I(g)"'] & & I(a'') \arrow[dl, "\sigma_a I(g')"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

est commutatif. La fonctorialité de $I|A/a : A/a \to A/a$ est conséquence immédiate de celle de I. Pour $e = 0, 1$, on définit un morphisme de foncteurs $\partial^e|A/a : 1_{A/a} \to I|A/a$ en posant, pour tout objet $(a',\, g : a' \to a)$ de A/a, $(\partial^e|A/a)_{(a',g)} = \partial^e_{a'}$, ce qui est bien un morphisme

$$(a',\, g : a' \to a) \xrightarrow{\partial^e_{a'}} (I(a'),\, \sigma_a I(g) : I(a') \to a)$$

de A/a, car par les égalités

$$\sigma_a I(g) \partial^e_{a'} = \sigma_a \partial^e_a g = g \quad ,$$

le triangle

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[rr, "\partial^e_{a'}"] \arrow[dr, "g"'] & & I(a') \arrow[dl, "\sigma_a I(g)"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

est commutatif. La fonctorialité de $\partial^e|A/a$ résulte de celle de ∂^e. Si le précylindre fonctoriel augmenté $(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ est en outre un cylindre fonctoriel, on définit un morphisme de foncteurs $\sigma|A/a : I|A/a \to 1_{A/a}$, en posant, pour tout objet (a', g) de A/a, $(\sigma|A/a)_{(a',g)} = \sigma_{a'}$, ce qui est bien un morphisme

$$(I(a'),\, \sigma_a I(g) : I(a') \to a) \xrightarrow{\sigma_{a'}} (a',\, g : a' \to a)$$

de A/a, car le triangle

$$\begin{tikzcd} I(a') \arrow[rr, "\sigma_{a'}"] \arrow[dr, "\sigma_a I(g)"'] & & a' \arrow[dl, "g"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

est commutatif, par fonctorialité de σ. La fonctorialité de $\sigma|A/a$ résulte de celle de σ, et on remarque que

$$(\sigma|A/a)(\partial^0|A/a) = 1_{A/a} = (\sigma|A/a)(\partial^1|A/a) \quad .$$

Ainsi, $(I|A/a,\, \partial^0|A/a,\, \partial^1|A/a,\, \sigma|A/a)$ est un cylindre fonctoriel dans A/a.

Lemme A.5. *Soient A une petite catégorie, $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur, et*

$$1_A \overset{\partial^0}{\underset{\partial^1}{\rightrightarrows}} I$$

un précylindre fonctoriel dans A. On suppose les conditions suivantes vérifiées :

a) *pour tout objet a de A, le foncteur $i(\partial^0_a) : i(a) \to i(I(a))$ est une immersion ouverte, isomorphisme de $i(a)$ sur un crible U_a de $i(I(a))$, et $i(\partial^1_a) : i(a) \to i(I(a))$ se factorise par le cocrible complémentaire $F_a = i(I(a)) - U_a$;*

b) *pour tout morphisme $f : a \to a'$ de A, on a $i(I(f))(F_a) \subset F_{a'}$.*

Alors pour toute petite catégorie C, admettant un objet final e_C, le foncteur d'oubli

$$A/C = A/i^*(C) \xrightarrow{r} A \quad , \qquad (a,\, u : i(a) \to C) \longmapsto a \quad ,$$

est une équivalence faible.

Démonstration. On définit un endofoncteur $D : A/C \to A/C$ comme suit. Pour tout objet (a, u) de A/C, on pose

$$D(a,\, u : i(a) \to C) = (I(a),\, v_u : i(I(a)) \to C) \quad ,$$

où $v_u : i(I(a)) \to C$ est l'unique foncteur tel que $v_u|U_a = v_u|i(a) = v_u i(\partial^0_a) = u$ et tel que $v_u|F_a$ soit le foncteur constant de valeur e_C (cf. A.2). Pour tout morphisme

$$(a,\, u : i(a) \to C) \xrightarrow{f} (a',\, u' : i(a') \to C) \quad , \qquad u'i(f) = u \quad ,$$

de A/C, on pose $D(f) = I(f)$, ce qui est bien un morphisme

$$(I(a),\, i(I(a)) \xrightarrow{v_u} C) \xrightarrow{I(f)} (I(a'),\, i(I(a')) \xrightarrow{v_{u'}} C)$$

de A/C, car le triangle

$$\begin{tikzcd} i(I(a)) \arrow[rr, "i(I(f))"] \arrow[dr, "v_u"'] & & i(I(a')) \arrow[dl, "v_{u'}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet, il suffit de montrer que

$$v_{u'} i(I(f)) i(\partial^0_a) = u \qquad \text{et} \qquad v_{u'} i(I(f))|F_a = e_C \quad .$$

Or, on a

$$v_{u'} i(I(f)) i(\partial^0_a) = v_{u'} i(I(f)\partial^0_a) = v_{u'} i(\partial^0_{a'} f) = v_{u'} i(\partial^0_{a'}) i(f) = u' i(f) = u \quad ,$$

ce qui prouve la première égalité. La deuxième, résulte de l'inclusion $i(I(f))(F_a) \subset F_{a'}$. La fonctorialité de D est conséquence immédiate de celle de I.

On définit un morphisme de foncteurs $\delta^0 : 1_{A/C} \to D$ en posant $\delta^0_{(a,u)} = \partial^0_a$

$$(a,\, u : i(a) \to C) \xrightarrow{\partial^0_a} (I(a),\, v_u : i(I(a)) \to C) \quad ,$$

ce qui est bien un morphisme de A/C, car le triangle :

$$\begin{tikzcd}
i(a) \arrow[rr, "i(\partial^0_a)"] \arrow[dr, "u"'] & & i(I(a)) \arrow[dl, "v_u"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

est commutatif par définition de u_v. La fonctorialité de δ^0 résulte immédiatement de celle de ∂^0.

On définit un foncteur

$$j : A \longrightarrow A/C$$

$$a \longmapsto (a,\, e_C : i(a) \to C) \quad ,$$

où $e_C : i(a) \to C$ désigne aussi le foncteur constant de valeur e_C. En composant avec le foncteur d'oubli, $r : A/C \to A$ on obtient un foncteur

$$K = jr : A/C \longrightarrow A/C$$

$$(a,\, u : i(a) \to C) \longmapsto (a,\, e_C : i(a) \to C) \quad .$$

On définit un morphisme de foncteurs $\delta^1 : K \to D$ en posant $\delta^1_{(a,u)} = \partial^1_a$

$$(a,\, e_C : i(a) \to C) \xrightarrow{\partial^1_a} (I(a),\, v_u : i(I(a)) \to C) \quad ,$$

ce qui est bien un morphisme de A/C, car, vu que par hypothèse $i(\partial^1_a)$ se factorise par F_a, le triangle :

$$\begin{tikzcd}
i(a) \arrow[rr, "i(\partial^1_a)"] \arrow[dr, "e_C"'] & & i(I(a)) \arrow[dl, "v_u"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

est commutatif par définition de u_v. La fonctorialité de δ^1 résulte immédiatement de celle de ∂^1.

On a donc un diagramme de $\underline{\mathsf{End}}(A/C)$

$$\begin{tikzcd}
1_{A/C} \arrow[dr, "\delta^0"] & \\
& D \\
jr = K \arrow[ur, "\delta^1"'] &
\end{tikzcd} \quad ,$$

et par suite, $K = jr$ est une équivalence faible (5.6 (b), 5.15). Comme $rj = 1_A$, on en déduit, par saturation faible, que $r : A/C \to A$ est une équivalence faible, ce qui prouve le lemme.

Proposition A.6. *Soient A une petite catégorie asphérique, $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur, et*
$$1_A \overset{\partial^0}{\underset{\partial^1}{\rightrightarrows}} I$$
un précylindre fonctoriel dans A. On suppose les conditions suivantes vérifiées :

a) *pour tout objet a de A, le foncteur $i(\partial^0_a) : i(a) \to i(I(a))$ est une immersion ouverte, isomorphisme de $i(a)$ sur un crible U_a de $i(I(a))$, et $i(\partial^1_a) : i(a) \to i(I(a))$ se factorise par le cocrible complémentaire $F_a = i(I(a)) - U_a$;*

b) *pour tout morphisme $f : a \to a'$ de A, on a $i(I(f))(F_a) \subset F_{a'}$;*

c) *pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ admet un objet final.*

Alors le foncteur $i : A \to \mathcal{C}at$ est asphérique.

Démonstration. En vertu de la proposition 8.6, il suffit de montrer que pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est asphérique, autrement dit, que la catégorie $A/C = A/i^*(C)$ est asphérique. Or, en vertu du lemme A.5, le foncteur d'oubli $A/C \to A$ est une équivalence faible, et comme la catégorie A est asphérique, il en est de même pour A/C, ce qui prouve la proposition.

Proposition A.7. *Soient A une petite catégorie, $i : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur, et $(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ un précylindre fonctoriel augmenté dans A. On suppose les conditions suivantes vérifiées :*

a) *pour tout objet a de A, le foncteur $i(\partial^0_a) : i(a) \to i(I(a))$ est une immersion ouverte, isomorphisme de $i(a)$ sur un crible U_a de $i(I(a))$, et $i(\partial^1_a) : i(a) \to i(I(a))$ se factorise par le cocrible complémentaire $F_a = i(I(a)) - U_a$;*

b) *pour tout morphisme $f : a \to a'$ de A, on a $i(I(f))(F_a) \subset F_{a'}$;*

c) *pour tout objet a de A, la catégorie $i(a)$ est contractile.*

Alors A est un catégorie test locale et i un foncteur test local.

Démonstration. En vertu du théorème 8.12, il suffit de montrer que pour toute petite catégorie C admettant un objet final, le préfaisceau $i^*(C)$ est localement asphérique, autrement dit, que pour tout objet a de A, la catégorie
$$(A/a)/(i^*(C)|(A/a)) = (A/a)/i^*_a(C) = (A/a)/C \quad ,$$
où i_a désigne le composé du foncteur canonique $A/a \to A$ avec i, est asphérique. Or, on vérifie immédiatement que le foncteur i_a et le précylindre fonctoriel $(I|A/a,\ \partial^0|A/a,\ \partial^1|A/a)$ dans A/a, induit par le précylindre fonctoriel augmenté $(I, \partial^0, \partial^1, \sigma)$ (cf. A.4), satisfont aux hypothèses du lemme A.5. On en déduit que le foncteur d'oubli $(A/a)/C \to A/a$ est une équivalence faible. Comme la catégorie A/a admet un objet final, elle est asphérique, et par suite, il en est de même pour $(A/a)/C$, ce qui démontre la proposition.

Exemple A.8. On note, pour $n \geq 0$, $\square_n$ l'ensemble ordonné produit $\Delta_1^n = \{0,1\}^n$. Pour $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, et $\varepsilon = 0, 1$, on définit une application croissante
$$\delta_n^{i,\varepsilon} : \square_{n-1} \longrightarrow \square_n$$

par

$$\delta_n^{i,\varepsilon}(x_1,\dots,x_{n-1}) = (x_1,\dots,x_{i-1},\varepsilon,x_i,\dots,x_{n-1}) \quad ,$$

et pour $n \geq 0$, $1 \leq i \leq n+1$, une application croissante

$$\sigma_n^i : \Box_{n+1} \longrightarrow \Box_n$$

par

$$\sigma_n^i(x_1,\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{n+1}) \quad .$$

On définit la *catégorie des cubes* $\boldsymbol{\Box}$ comme la sous-catégorie de $\mathcal{C}at$ ayant comme objets les catégories correspondant aux ensembles ordonnés $\Box_n$, pour $n \geq 0$, engendrée par les flèches $\delta_n^{i,\varepsilon}$, pour $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon = 0,1$, et les flèches σ_n^i, pour $n \geq 0$, $1 \leq i \leq n+1$. On note $i : \boldsymbol{\Box} \to \mathcal{C}at$ le foncteur d'inclusion. On vérifie facilement que $\boldsymbol{\Box}$ s'identifie à la sous-catégorie de la catégorie des ensembles ordonnés, dont les objets sont les $\Box_n$, $n \geq 0$, et dont les flèches sont les applications croissantes

$$f : \Box_m \longrightarrow \Box_n \ , \quad f = (f_1,\dots,f_n) \ , \quad f_j : \Box_m \to \Box_1 = \{0,1\} \ , \quad 1 \leq j \leq n \ ,$$

satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a) pour tout j, $1 \leq j \leq n$, f_j est une application constante (de valeur 0 ou 1) ou une projection pr_i, $1 \leq i \leq m$;

b) pour tous j_1, j_2, $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$, si $f_{j_1} = pr_{i_1}$ et $f_{j_2} = pr_{i_2}$, alors $i_1 < i_2$.

On définit un endofoncteur $I : \boldsymbol{\Box} \to \boldsymbol{\Box}$ comme suit. On pose $I(\Box_n) = \Box_{n+1}$, et pour toute flèche $f : \Box_m \to \Box_n$ de $\boldsymbol{\Box}$, on définit $I(f) : \Box_{m+1} \to \Box_{n+1}$ par

$$I(f)(x_1,\dots,x_{m+1}) = (f(x_1,\dots,x_m),x_{m+1}) \quad .$$

Pour tout m, $m \leq 0$, on définit des morphismes

$$\begin{tikzcd} \Box_m \arrow[r, shift left, "\partial_m^0"] \arrow[r, shift right, "\partial_m^1"'] & \Box_{m+1} \arrow[r, "\sigma_m"] & \Box_m \end{tikzcd}$$

par

$$\partial_m^\varepsilon(x_1,\dots,x_m) = (x_1,\dots,x_m,\varepsilon) \ , \quad \varepsilon = 0,1 \ , \qquad \sigma_m(x_1,\dots,x_m,x_{m+1}) = (x_1,\dots,x_m) \ ,$$

et on vérifie aussitôt qu'on définit ainsi un cylindre fonctoriel

$$\begin{tikzcd} 1_{\boldsymbol{\Box}} \arrow[r, shift left, "\partial^0"] \arrow[r, shift right, "\partial^1"'] & I \arrow[r, "\sigma"] & 1_{\boldsymbol{\Box}} \end{tikzcd}$$

dans $\boldsymbol{\Box}$ satisfaisant aux conditions de la proposition A.7. Comme $\boldsymbol{\Box}$ est asphérique (puisque $\Box_0$ en est un objet final), on en déduit que $\boldsymbol{\Box}$ est une catégorie test, et i un foncteur test.

Appendice B : Le localisateur fondamental $\mathcal{W}_\infty$ et ses caractérisations.

Denis-Charles CISINSKI

B.1. On note (cf. 6.11) $\mathbf{\Delta}$ la catégorie des simplexes, catégorie dont les objets sont les ensembles $\Delta_n = \{0, 1, \dots, n\}$, $n \geq 0$, munis de l'ordre naturel, et dont les flèches sont les applications croissantes. La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ des préfaisceaux sur $\mathbf{\Delta}$.

Pour $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n$, on note $\delta_n^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ l'unique injection croissante qui ne prend pas la valeur i. Pour $n \geq 0$, on définit un sous-préfaisceau $\partial\Delta_n$ de Δ_n :

$$\partial\Delta_n = \bigcup_{0 \leq i \leq n} \operatorname{Im} \delta_n^i \ , \quad n \geq 1 \ , \qquad \text{et} \qquad \partial\Delta_0 = \emptyset \quad .$$

On note $i_n : \partial\Delta_n \to \Delta_n$ l'inclusion, et on définit $I = \{i_n \mid n \geq 0\}$.

Pour $n \geq 0$ et $e = 0,\ 1$, on a un carré cartésien dans $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, dont toutes les flèches sont des monomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\partial\Delta_n \arrow[r, "1_{\partial\Delta_n} \times \delta_1^{1-e}"] \arrow[d, "i_n"'] & \partial\Delta_n \times \Delta_1 \arrow[d, "i_n \times 1_{\Delta_1}"] \\
\Delta_n \arrow[r, "1_{\Delta_n} \times \delta_1^{1-e}"'] & \Delta_n \times \Delta_1
\end{tikzcd} \quad .$$

On écrit $\Delta_n \times \{e\} \cup \partial\Delta_n \times \Delta_1 = \Delta_n \amalg_{\partial\Delta_n} \partial\Delta_n \times \Delta_1$, et on note

$$j_{n,e} : \Delta_n \times \{e\} \cup \partial\Delta_n \times \Delta_1 \longrightarrow \Delta_n \times \Delta_1$$

la flèche induite par le carré commutatif ci-dessus. Les flèches $j_{n,e}$ sont des monomorphismes, et on définit $J = \{j_{n,e} \mid n \geq 0,\ e = 0,\ 1\}$.

On renvoie à [**Q1**] pour les notions de propriétés de relèvement à droite ou à gauche (chapitre I, paragraphe 5). On rappelle qu'une fibration de Kan est un morphisme de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ qui vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à J. On note $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$ la classe des flèches de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ formée des morphismes de la forme $f = pi$, où i vérifie la propriété de relèvement à gauche relativement à toute fibration de Kan, et où p vérifie la propriété de relèvement à droite relativement à I.

Théorème B.2. (Quillen). *La catégorie $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ admet une structure de catégorie de modèles fermée, propre, dont les équivalences faibles sont les éléments de $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$, les fibrations sont les fibrations de Kan, et les cofibrations sont les monomorphismes de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$.*

Démonstration. Voir [**Q1**], chapitre II, paragraphe 3, théorème 3, ou [**JT**] théorème 1.3.1.

Remarque B.3. Si $\mathcal{T}op$ désigne la catégorie des espaces topologiques, on peut définir un foncteur de *réalisation topologique* $\widehat{\mathbf{\Delta}} \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, admettant un adjoint à droite $S : \mathcal{T}op \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$ (foncteur *ensemble simplicial singulier*). On définit $W_{\mathcal{T}op} \subset \mathsf{Fl}\,\mathcal{T}op$ comme la classe des applications continues $f : X \to Y$ telles que l'application induite $\pi_0 X \to \pi_0 Y$ soit bijective, et telles que pour tout point x de X, les morphismes des groupes d'homotopie $\pi_i(X, x) \to \pi_i(Y, f(x))$, induits par f, soient des isomorphismes, pour $i \geq 1$. On peut montrer que $W_{\mathcal{T}op} = S^{-1}(W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}})$ et que $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}} = |\,.\,|^{-1}(W_{\mathcal{T}op})$. En outre, les foncteurs induits entre les catégories localisées

$$W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}^{-1}\widehat{\mathbf{\Delta}} \longrightarrow W_{\mathcal{T}op}^{-1}\mathcal{T}op \qquad \text{et} \qquad W_{\mathcal{T}op}^{-1}\mathcal{T}op \longrightarrow W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}^{-1}\widehat{\mathbf{\Delta}}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre (voir par exemple [**GZ**], chapitre VII, paragraphe 3).

B.4. On note $\mathbf{\Delta}_+$ (resp. $\mathbf{\Delta}_-$) la sous-catégorie de $\mathbf{\Delta}$ formée des monomorphismes (resp. des épimorphismes) de $\mathbf{\Delta}$. On remarque que $\mathbf{\Delta}_+ = \mathbf{\Delta}'$ (cf. exemple 8.19). On va exploiter la structure de catégorie de Reedy du triplet $(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathbf{\Delta}_-^\circ, \mathbf{\Delta}_+^\circ)$ (voir [**Ho**], définition 5.2.1) pour étudier la catégorie $\widehat{\mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}}$ des ensembles bisimpliciaux (voir aussi [**BF**]).

On se fixe un entier positif n, et on note $\mathsf{ev}_n : \widehat{\mathbf{\Delta}} \to \mathcal{E}ns$, $X \mapsto X_n$, le foncteur d'évaluation en Δ_n. On va définir deux foncteurs $L_n : \widehat{\mathbf{\Delta}} \to \mathcal{E}ns$ et $M_n : \widehat{\mathbf{\Delta}} \to \mathcal{E}ns$ comme suit. On considère Δ_n comme un objet de $\mathbf{\Delta}_-$ (resp. $\mathbf{\Delta}_+$), et on note $\partial_-\mathbf{\Delta}_n$ (resp. $\partial_+\mathbf{\Delta}_n$) la sous-catégorie pleine de $\Delta_n\backslash\mathbf{\Delta}_-$ (resp. de $\mathbf{\Delta}_+/\Delta_n$) définie par

$\mathsf{Ob}(\partial_-\mathbf{\Delta}_n) = \mathsf{Ob}(\Delta_n\backslash\mathbf{\Delta}_-) - \{(\Delta_n, 1_{\Delta_n})\}$ (resp. $\mathsf{Ob}(\partial_+\mathbf{\Delta}_n) = \mathsf{Ob}(\mathbf{\Delta}_+/\Delta_n) - \{(\Delta_n, 1_{\Delta_n})\}$).

On note $\lambda_n : \partial_-\mathbf{\Delta}_n \to \mathbf{\Delta}$ (resp. $\mu_n : \partial_+\mathbf{\Delta}_n \to \mathbf{\Delta}$) le foncteur composé

$$\partial_-\mathbf{\Delta}_n \to \Delta_n\backslash\mathbf{\Delta}_- \to \Delta_n\backslash\mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta} \qquad (\text{resp. } \partial_+\mathbf{\Delta}_n \to \mathbf{\Delta}_+/\Delta_n \to \mathbf{\Delta}/\Delta_n \to \mathbf{\Delta}\,).$$

Enfin, si X est un ensemble simplicial, on pose

$$L_n X = \varinjlim \lambda_n^* X \qquad \text{et} \qquad M_n X = \varprojlim \mu_n^* X \quad .$$

On remarque que les foncteurs L_n et M_n peuvent être définis beaucoup plus simplement, car $L_n X = \mathsf{ev}_n \mathsf{Sk}^{n-1} X = (\mathsf{Sk}^{n-1} X)_n$ (où $\mathsf{Sk}^{n-1} X$ désigne le $(n-1)$-ème squelette de X (voir [**GZ**], chapitre II, paragraphe 3)) et $M_n X = \mathsf{Hom}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}(\partial\Delta_n, X)$.

Les foncteurs $\partial_-\mathbf{\Delta}_n \to \Delta_n\backslash\mathbf{\Delta}$ et $\partial_+\mathbf{\Delta}_n \to \mathbf{\Delta}/\Delta_n$ induisent des morphismes de foncteurs $L_n \to \mathsf{ev}_n$ et $\mathsf{ev}_n \to M_n$, et on vérifie que le premier est l'image par ev_n de l'inclusion canonique $\mathsf{Sk}^{n-1} \to 1_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$, et que le second est induit par l'inclusion $\partial\Delta_n \to \Delta_n$.

Lemme B.5. *Soit $u : K \to K'$ un morphisme de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$. Pour chaque $n \geq 0$, on a un carré commutatif*

$$(C_n) \qquad \begin{array}{ccc} L_n K & \longrightarrow & K_n \\ {\scriptstyle L_n u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_n} \\ L_n K' & \longrightarrow & K'_n \end{array} \quad ,$$

qui induit une application $v_n : L_n K' \amalg_{L_n K} K_n \to K'_n$. Alors u est un monomorphisme si et seulement si pour tout $n \geq 0$, l'aplication v_n est injective.

Démonstration. Cela résulte des considérations du paragraphe 3.4, chapitre II de [**GZ**].

Théorème B.6. *La catégorie* $\widehat{\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta}}$ *admet une structure de catégorie de modèles fermée, dont les cofibrations sont les monomorphismes, et les équivalences faibles les morphismes* $X\to Y$ *tels que pour tout* $m\geq 0$*, le morphisme* $X_{m,\bullet}\to Y_{m,\bullet}$ *soit une équivalence faible de* $\widehat{\mathbf{\Delta}}$*. Si on note pour* $m\geq 0$*,* $M_m:\widehat{\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta}}\to\widehat{\mathbf{\Delta}}$ *le foncteur* $X\mapsto(\Delta_n\mapsto M_mX_{\bullet,n})$ *et* $\mathsf{ev}_m:\widehat{\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta}}\to\widehat{\mathbf{\Delta}}$ *le foncteur* $X\mapsto X_{m,\bullet}$*, on a un morphisme de foncteurs* $\mathsf{ev}_m\to M_m$*, induit par son analogue décrit au numéro* B.4*, et les fibrations de* $\widehat{\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta}}$ *sont les morphismes* $X\to Y$ *tels que pour tout* $m\geq 0$*, le morphisme d'ensembles simpliciaux*

$$X_{m,\bullet}\longrightarrow Y_{m,\bullet}\times_{M_mY}M_mX$$

soit une fibration de Kan.

Démonstration. Cela résulte du théorème 5.2.5 de [**Ho**], du lemme B.5, et des descriptions des foncteurs L_m et M_m du numéro B.4.

B.7. On note $\delta:\mathbf{\Delta}\to\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta}$ le foncteur diagonal. Il induit un foncteur

$$\delta^*:\widehat{\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta}}\longrightarrow\widehat{\mathbf{\Delta}}\quad,\qquad X\longmapsto(\Delta_n\mapsto X_{n,n})\quad,$$

lequel admet un adjoint à droite

$$\delta_*:\widehat{\mathbf{\Delta}}\longrightarrow\widehat{\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta}}\quad,\qquad X\longmapsto((\Delta_m,\Delta_n)\mapsto\mathsf{Hom}_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}(\Delta_m\times\Delta_n,X))\quad.$$

Proposition B.8. *Soit* $X\to Y$ *un morphisme d'ensembles bisimpliciaux tel que pour tout* $m\geq 0$*, le morphisme d'ensembles simpliciaux* $X_{m,\bullet}\to Y_{m,\bullet}$ *soit une équivalence faible. Alors* $\delta^*X\to\delta^*Y$ *est une équivalence faible.*

Démonstration. On veux montrer que le foncteur δ^* respecte les équivalences faibles du théorème B.6. Vu que tous les ensembles bisimpliciaux sont cofibrants pour cette structure de catégorie de modèles fermée, le lemme de Ken Brown (voir [**Ho**], lemme 1.1.12) montre qu'il suffit de vérifier que δ^* respecte les cofibrations triviales, ou encore, de manière équivalente, que δ_* respecte les fibrations. Soit $p:X\to Y$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Pour $m\geq 0$, la flèche $(\delta_*X)_{m,\bullet}\to(\delta_*Y)_{m,\bullet}\times_{M_m\delta_*Y}M_m\delta_*X$ s'identifie au morphisme suivant (voir B.4)

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_m,X)\longrightarrow\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_m,Y)\times_{\underline{\mathsf{Hom}}(\partial\Delta_m,Y)}\underline{\mathsf{Hom}}(\partial\Delta_m,X)$$

(où $\underline{\mathsf{Hom}}$ désigne le Hom interne de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$). Par conséquent, si p est une fibration de Kan, δ_*p est une fibration (en vertu de la proposition du paragraphe 4.3, chapitre VI, de [**GZ**], et de la description des fibrations du théorème B.6).

B.9. Soit C une petite catégorie. On rappelle la construction du foncteur de Bousfield-Kan $\amalg_*:\underline{\mathsf{Hom}}(C,\widehat{\mathbf{\Delta}})\to\widehat{\mathbf{\Delta}\times\mathbf{\Delta}}$. Le foncteur d'inclusion canonique $i:\mathbf{\Delta}\to\mathcal{C}at$ définit le foncteur nerf $N:\mathcal{C}at\to\widehat{\mathbf{\Delta}}$ par $N=i^*$ (cf. exemple 8.15). Pour toute petite catégorie A, on a un foncteur $\alpha_A:\mathbf{\Delta}/A\to A$ (où $\mathbf{\Delta}/A=\mathbf{\Delta}/NA=i_{\mathbf{\Delta}}NA$) défini par

$$\alpha_A(\Delta_n,u)=u(n)\quad,\qquad(\Delta_n,u:\Delta_n\to A)\in\mathsf{Ob}(\mathbf{\Delta}/A)$$

(cf. proposition 8.6 (d)), et donc en particulier, on a un foncteur $\alpha_{C^\circ} : \mathbf{\Delta}/C^\circ \to C^\circ$. On en déduit un foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\mathbf{\Delta}}) = \widehat{C^\circ \times \mathbf{\Delta}} \xrightarrow{(\alpha_{C^\circ} \times 1_{\mathbf{\Delta}})^*} \widehat{\mathbf{\Delta}/C^\circ \times \mathbf{\Delta}} \quad .$$

Si $p : \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta}$ désigne la première projection, on a un isomorphisme de catégories $\widehat{\mathbf{\Delta}/C^\circ \times \mathbf{\Delta}} \simeq \widehat{\mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}}/p^* NC^\circ$, et on obtient le foncteur $\amalg_*$ comme composé de $(\alpha_{C^\circ} \times 1_{\mathbf{\Delta}})^*$ et du foncteur d'oubli $\widehat{\mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}}/p^* NC^\circ \to \widehat{\mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta}}$. Plus explicitement, si F est un foncteur de C vers $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, et si $m \geq 0$, on a

$$(\amalg_* F)_{m,\bullet} = \coprod_{\Delta_m \xrightarrow{u} C^\circ} F(u(m)) = \coprod_{c_m \to \cdots \to c_0} F(c_m) \quad .$$

En composant le foncteur $\amalg_*$ avec le foncteur δ^*, on définit un foncteur

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}} = \underrightarrow{\mathrm{holim}}_C = \delta^* \amalg_* : \underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\mathbf{\Delta}}) \longrightarrow \widehat{\mathbf{\Delta}} \quad .$$

Soit $q : \mathbf{\Delta} \times \mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta}$ la seconde projection. Si F est un objet de $\underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\mathbf{\Delta}})$, les morphismes canoniques $F(c) \to \varinjlim F$, $c \in \mathsf{Ob}\ C$, induisent pour chaque $m \geq 0$ un morphisme

$$(\amalg_* F)_{m,\bullet} \longrightarrow \varinjlim F = (q^* \varinjlim F)_{m,\bullet} \quad ,$$

d'où un morphisme $\amalg_* F \to q^* \varinjlim F$. On vérifie qu'on définit ainsi un morphisme de foncteurs $\amalg_* \to q^* \varinjlim$, où $\varinjlim : \underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\mathbf{\Delta}}) \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$ désigne le foncteur limite inductive. Comme $\delta^* q^* = (q\delta)^* = 1_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$, on en déduit un morphisme de foncteurs $\underrightarrow{\mathrm{holim}} \to \varinjlim$ (cf. [**BK**]).

Proposition B.10. (Bousfield-Kan). *Soit $F \to G$ un morphisme de $\underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\mathbf{\Delta}})$, tel que pour tout objet c de C, $F(c) \to G(c)$ soit une équivalence faible. Alors $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, F \to \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, G$ est une équivalence faible.*

DÉMONSTRATION. Pour chaque $m \geq 0$,

$$\coprod_{c_m \to \cdots \to c_0} F(c_m) \longrightarrow \coprod_{c_m \to \cdots \to c_0} G(c_m)$$

est une somme d'équivalences faibles d'ensembles simpliciaux, et est donc une équivalence faible. Il s'en suit que $\amalg_* F \to \amalg_* G$ est une équivalence faible d'ensembles bisimpliciaux, et l'assertion résulte donc de la proposition B.8.

B.11. Si C est une petite catégorie, on a un foncteur

$$\Theta_C : \mathcal{C}at/C \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(C, \mathcal{C}at) \quad , \qquad (A \to C) \longmapsto (c \mapsto A/c)$$

(cf. 11.1). Le foncteur nerf $N : \mathcal{C}at \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$ induit un foncteur encore noté N

$$N : \underline{\mathsf{Hom}}(C, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\mathbf{\Delta}}) \quad .$$

On en déduit un foncteur composé $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, N\Theta_C : \mathcal{C}at/C \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$

$$\mathcal{C}at/C \xrightarrow{\Theta_C} \underline{\mathsf{Hom}}(C, \mathcal{C}at) \xrightarrow{N} \underline{\mathsf{Hom}}(C, \widehat{\mathbf{\Delta}}) \xrightarrow{\underrightarrow{\mathrm{holim}}} \widehat{\mathbf{\Delta}} \quad ,$$

et un morphisme de foncteurs $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, N\Theta_C \to \varinjlim N\Theta_C$. D'autre part, on a un morphisme de foncteurs $\varinjlim N\Theta_C \to N \varinjlim \Theta_C$. Or on vérifie facilement que si $U_C : \mathcal{C}at/C \to \mathcal{C}at$ est le foncteur d'oubli, on a un isomorphisme canonique $\varinjlim \Theta_C \xrightarrow{\sim} U_C$. On obtient donc un morphisme de foncteurs

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, N\Theta_C \longrightarrow NU_C \quad .$$

Lemme B.12. (Quillen). *Pour tout objet (A, α) de $\mathcal{C}at/C$ (où A est une petite catégorie et $\alpha : A \to C$ un foncteur), le morphisme*

$$\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, N\Theta_C(A, \alpha) \longrightarrow NU_C(A, \alpha) = NA$$

est une équivalence faible.

Démonstration. Le morphisme $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, N\Theta_C(A, \alpha) \to NA$ est l'image par δ^* du morphisme $\amalg_* N\Theta_C(A, \alpha) \to q^* NA$ défini pour $m \geq 0$:

$$(\amalg_* N\Theta_C(A, \alpha))_{m,\bullet} = \coprod_{c_m \to \cdots \to c_0} NA/c_m \longrightarrow NA = (q^* NA)_{m,\bullet}$$

par les morphismes canoniques $NA/c_m \to NA$ (voir B.9). Explicitement, pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}(\amalg_* N\Theta_C(A, \alpha))_{m,n} = \{(\underline{a}, u, \underline{c}) \mid\ & \underline{a} = a_0 \to \cdots \to a_n \in (NA)_n, \\ & \underline{c} = c_0 \to \cdots \to c_m \in (NC^\circ)_m,\ u : \alpha(a_n) \to c_m \in \mathsf{Fl}(C)\} \quad ,\end{aligned}$$

et l'application $(\amalg_* N\Theta_C(A, \alpha))_{m,n} \to (q^* NA)_{m,n} = (NA)_n$ n'est autre que $(\underline{a}, u, \underline{c}) \mapsto \underline{a}$. Le morphisme $(\amalg_* N\Theta_C(A, \alpha))_{\bullet,n} \to (q^* NA)_{\bullet,n}$ s'identifie donc à la flèche

$$\coprod_{a_0 \to \cdots \to a_n} N(C^\circ/\alpha(a_n)) \longrightarrow \coprod_{a_0 \to \cdots \to a_n} e_{\widehat{\mathbf{\Delta}}} \quad ,$$

somme des flèches $N(C^\circ/\alpha(a_n)) \to e_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$, lesquelles sont des équivalences faibles (prop. 5.8), car les catégories $C^0/\alpha(a_n)$ sont contractiles (prop. 5.16), $N\Delta_1 = \Delta_1$, et le foncteur nerf commute aux produits. Par conséquent $(\amalg_* N\Theta_C(A, \alpha))_{\bullet,n} \to (q^* NA)_{\bullet,n}$ est une équivalence faible, ce qui permet d'appliquer la proposition B.8, pour conclure.

Théorème B.13. *La partie $\mathcal{W}_\infty = N^{-1} W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$ est un localisateur fondamental fort, fortement saturé.*

Démonstration. On va vérifier les axiomes LA, LB et LC (9.1). On sait que $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$ est fortement saturée en vertu de la proposition 1, paragraphe 5, chapitre I de [**Q1**], et donc que $\mathcal{W}_\infty$ l'est aussi. On en déduit immédiatement LA. L'axiome LB résulte facilement des propositions 5.8 et 5.16. Soit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, tel que pour tout objet c de C, le foncteur $f/c : A/c \to B/c$, induit par f, soit dans $\mathcal{W}_\infty$. On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underrightarrow{\operatorname{holim}} N\Theta_C(A,\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\underrightarrow{\operatorname{holim}} N\Theta_C(f)"'] & NA \arrow[d, "Nf"] \\
\underrightarrow{\operatorname{holim}} N\Theta_C(B,\beta) \arrow[r] & NB
\end{tikzcd} \quad .$$

La flèche $\underrightarrow{\operatorname{holim}} N\Theta_C(f)$ est une équivalence faible en vertu de la proposition B.10, et donc le lemme B.12 implique que Nf est dans $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$, ce qui achève la démonstration.

Lemme B.14. *Soit W une partie faiblement saturée de $\mathsf{Fl}\ \widehat{\mathbf{\Delta}}$, telle que pour tout ensemble simplicial X, la projection $X \times \Delta_1 \to X$ soit dans W. Alors toute fibration triviale de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ au sens de la catégorie de modèles fermée du théorème* B.2 *est dans W.*
DÉMONSTRATION. Soit $p : X \to Y$ une fibration triviale. Comme $\emptyset \to Y$ est une cofibration, p admet une section $s : Y \to X$. Pour montrer que p est dans W, il suffit donc de montrer que sp est dans W. On a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \amalg X \arrow[rr, "(1_X, sp)"] \arrow[d, "(1_X \times \delta_1^0, 1_X \times \delta_1^1)"'] & & X \arrow[d, "p"] \\
X \times \Delta_1 \arrow[r, "pr_1"'] \arrow[urr, dashed, "h"] & X \arrow[r, "p"'] & Y
\end{tikzcd}$$

et comme $(1_X \times \delta_1^0, 1_X \times \delta_1^1)$ est un monomorphisme, ce carré admet un relèvement h. Par conséquent, 1_X et sp sont Δ_1-homotopes, et comme 1_X est dans W, le lemme 5.6 montre que sp est dans W.

Proposition B.15. *Pour tout localisateur fondamental fort $\mathcal{W}$, on a $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}} \subset i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$.*

DÉMONSTRATION. On sait que $\mathbf{\Delta}$ est une $\mathcal{W}$-catégorie test stricte (par la proposition 7.13), et donc que pour tout ensemble simplicial X, la projection $X \times \Delta_1 \to X$ est dans $i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$. On en déduit que pour $e = 0$, 1, $1_X \times \delta_1^e : X \to X \times \Delta_1$ est dans $i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$. Or pour $n \geq 0$ et $e = 0$, 1, on a un diagramme commutatif dans $\widehat{\mathbf{\Delta}}$:

$$\begin{tikzcd}
\partial\Delta_n \arrow[r, "1_{\partial\Delta_n} \times \delta_1^{1-e}"] \arrow[d, "i_n"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \partial\Delta_n \times \Delta_1 \arrow[d] \arrow[ddr, "i_n \times 1_{\Delta_1}"] & \\
\Delta_n \arrow[r] \arrow[drr, "1_{\Delta_n} \times \delta_1^{1-e}"'] & \Delta_n \times \{e\} \cup \partial\Delta_n \times \Delta_1 \arrow[dr, "j_{n,e}"] & \\
& & \Delta_n \times \Delta_1
\end{tikzcd} \quad .$$

Comme le carré (1) est cocartésien et comme i_n est un monomorphisme, le corollaire 10.15 implique que $\Delta_n \to \Delta_n \times \{e\} \cup \partial\Delta_n \times \Delta_1$ est dans $i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$. On en déduit que $j_{n,e}$

est dans $i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$. On dit qu'un morphisme de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ est une extension anodine cellulaire s'il s'obtient comme un composé transfini d'images directes de sommes d'éléments de J. On remarque que toute somme d'éléments de J est un composé transfini d'images directes d'éléments de J. Les corollaires 10.15 et 1.19 impliquent que toute extension anodine cellulaire est un élément de $i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$. D'autre part, toute extension anodine cellulaire est dans $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$. Considérons enfin un élément f de $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$. L'argument du petit objet appliqué à J permet de factoriser f en $f = pi$, où i est une extension anodine cellulaire et où p est une fibration de de Kan (voir la démonstration de la proposition 5.5.1, chapitre VI dans [**GZ**]). Comme f et i sont des équivalences faibles, il en est de même de p, et donc p est une fibration triviale. Le lemme B.14 implique que p est dans $i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$, et donc que f est dans $i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$.

B.16. La notion de localisateur fondamental fort est stable par intersection. On définit le localisateur fondamental fort minimal comme l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux forts.

Théorème B.17. *Le localisateur fondamental fort minimal est égal à $\mathcal{W}_\infty$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental fort. Par la proposition B.15, on a $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}} \subset i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$, d'où $\mathcal{W}_\infty \subset N^{-1}i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$. Comme $\mathbf{\Delta}$ est une $\mathcal{W}$-catégorie test et l'inclusion canonique $i : \mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathcal{C}at$ un $\mathcal{W}$-foncteur test (exemple 8.15), le corollaire 8.10 implique que $\mathcal{W} = {i^*}^{-1}i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W} = N^{-1}i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}$. Comme $\mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental fort (théorème B.13), ceci prouve le théorème.

Lemme B.18. *Le foncteur $Ni_{\mathbf{\Delta}} : \widehat{\mathbf{\Delta}} \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$, $X \mapsto N\mathbf{\Delta}/X$ commute aux limites inductives.*

DÉMONSTRATION. On rappelle qu'on a un foncteur $\alpha_{\mathbf{\Delta}} : \mathbf{\Delta}/\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}/N\mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta}$ (B.9), qui induit un foncteur image réciproque $\alpha_{\mathbf{\Delta}}^* : \widehat{\mathbf{\Delta}} \to \widehat{\mathbf{\Delta}}/N\mathbf{\Delta}$. Si $U : \widehat{\mathbf{\Delta}}/N\mathbf{\Delta} \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$ désigne le foncteur d'oubli, on vérifie que $Ni_{\mathbf{\Delta}} \simeq U\alpha_{\mathbf{\Delta}}^*$. Or il est immédiat que les foncteurs U et $\alpha_{\mathbf{\Delta}}^*$ commutent aux limites inductives.

B.19. Si X est un ensemble simplicial, on lui associe le foncteur suivant : $\mathbf{\Delta}/X \xrightarrow{\varphi_X} \widehat{\mathbf{\Delta}}$, $(\Delta_n, u : \Delta_n \to X) \mapsto \Delta_n$. Il est bien connu que le morphisme $\varinjlim \varphi_X \to X$ induit par les flèches $u : \Delta_n \to X$ est un isomorphisme. d'autre part, les foncteurs $\alpha_{\Delta_n} : \mathbf{\Delta}/\Delta_n \to \Delta_n$ définissent un morphisme de foncteurs sur $\mathbf{\Delta}$, et donc on obtient un morphisme

$$\varinjlim Ni_{\mathbf{\Delta}}\varphi_X \longrightarrow \varinjlim \varphi_X \quad .$$

En vertu du lemme B.18, cela définit un morphisme $\alpha_X : N\mathbf{\Delta}/X \to X$, et on vérifie qu'on a ainsi un morphisme de foncteurs $\alpha : Ni_{\mathbf{\Delta}} \to 1_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$. Explicitement, le morphisme α_X associe à un m-simplexe

$$\Delta_{n_0} \xrightarrow{u_1} \Delta_{n_1} \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_m} \Delta_{n_m} \xrightarrow{u} X$$

de $N\mathbf{\Delta}/X$ le m-simplexe $uv : \Delta_m \to X$ de X, où $v : \Delta_m \to \Delta_{n_m}$ est défini par

$$v(k) = u_m \cdots u_{k+1}(n_k) \quad , \qquad 0 \leq k \leq n \quad .$$

Lemme B.20. *Pour tout ensemble simplicial X, le morphisme $\alpha_X : N\mathbf{\Delta}/X \to X$ est une équivalence faible.*

Démonstration. En reprenant les notations de B.19 et de B.9, on a un carré commutatif induit par α_X

$$\begin{tikzcd} \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, Ni_{\mathbf{\Delta}}\varphi_X \arrow[r] \arrow[d] & \underrightarrow{\lim}\, Ni_{\mathbf{\Delta}}\varphi_X \simeq N\mathbf{\Delta}/X \arrow[d] \\ \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \varphi_X \arrow[r] & \underrightarrow{\lim}\, \varphi_X \simeq X \end{tikzcd} \quad .$$

Le morphisme $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, Ni_{\mathbf{\Delta}}\varphi_X \to \underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \varphi_X$ est une équivalence faible par la proposition B.10, car les flèches $N\mathbf{\Delta}/\Delta_n \to \Delta_n$ sont des équivalences faibles (les catégories $\mathbf{\Delta}/\Delta_n$ sont contractiles car elles admettent un objet final). On remarque qu'avec les notations de B.11, on a

$$Ni_{\mathbf{\Delta}}\varphi_X = N\Theta_{\mathbf{\Delta}/X}(\mathbf{\Delta}/X, 1_{\mathbf{\Delta}/X}) \quad ,$$

et donc par le lemme B.12, le morphisme $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, Ni_{\mathbf{\Delta}}\varphi_X \to N\mathbf{\Delta}/X$ est une équivalence faible. Il suffit donc de montrer que le morphisme $\underrightarrow{\mathrm{holim}}\, \varphi_X \to X$ est une équivalence faible. Or c'est l'image par δ^* du morphisme d'ensembles bisimpliciaux $\amalg_*\varphi_X \to q^*X$. Pour $n \geq 0$, la flèche $(\amalg_*\varphi_X)_{\bullet,n} \to (q^*X)_{\bullet,n}$ est une équivalence faible. En effet, elle s'écrit

$$\coprod_{\Delta_n \xrightarrow{u} X} N\big((\mathbf{\Delta}/X)^\circ/(\Delta_n, u)\big) \longrightarrow \coprod_{\Delta_n \xrightarrow{u} X} e_{\widehat{\mathbf{\Delta}}} \quad ,$$

et elle est donc la somme d'équivalences faibles du type

$$N\big((\mathbf{\Delta}/X)^\circ/(\Delta_n, u)\big) \longrightarrow e_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$$

(les catégories $(\mathbf{\Delta}/X)^\circ/(\Delta_n, u)$ admettant un objet final). La proposition B.8 achève cette démonstration.

Théorème B.21. *On a $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}} = i_{\mathbf{\Delta}}^{-1}\mathcal{W}_\infty$, et le foncteur $N : \mathcal{C}at \to \widehat{\mathbf{\Delta}}$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at \longrightarrow W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}^{-1}\widehat{\mathbf{\Delta}} \quad .$$

(Ainsi il n'y a pas lieu de distinguer entre équivalences faibles de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ et $\mathcal{W}_\infty$-équivalences).

Démonstration. La première assertion résulte immédiatement du lemme B.20, et la seconde du corollaire 8.10 et de 8.15.

B.22. Soit $W \subset \mathsf{Fl}\,\mathcal{C}at$. On dira qu'un foncteur entre petites catégories $A \to B$ est *W-localement constant* si pour toute flèche $b \to b'$ de B, le foncteur induit $A/b \to A/b'$ est dans W.

Théorème B.23. (Quillen). *Soit $u : A \to B$ un morphisme $\mathcal{W}_\infty$-localement constant de $\mathcal{C}at$. Alors pour tout objet b de B le carré suivant est homotopiquement cartésien dans $\widehat{\mathbf{\Delta}}$:*

$$\begin{tikzcd} NA/b \arrow[r] \arrow[d, "Nu/b"'] & NA \arrow[d, "Nu"] \\ NB/b \arrow[r] & NB \end{tikzcd} \quad .$$

Démonstration. Il s'agit d'une interprétation dans $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ du théorème B de [**Q2**].

Corollaire B.24. *Un foncteur $\mathcal{W}_\infty$-localement constant est une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence si et seulement s'il est $\mathcal{W}_\infty$-asphérique.*

DÉMONSTRATION. C'est une condition suffisante car $\mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental (B.13). C'est un condition nécessaire car si

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

est un carré homotopiquement cartésien de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, et si p est une équivalence faible, alors p' est une équivalence faible, ce qui permet de conclure par le théorème B.23.

Proposition B.25. *Si $A \to B$ est une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence, alors $\pi_0 A \to \pi_0 B$ est une bijection.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte de la propriété analogue pour les équivalences faibles de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, et du fait que le foncteur N commute aux sommes. Une autre manière de le montrer consiste à considérer la classe $\mathcal{W}_0$ des flèches $A \to B$ de $\mathcal{C}at$ telles que $\pi_0 A \to \pi_0 B$ soit une bijection. On remarque que le foncteur $\pi_0 : \mathcal{C}at \to \mathcal{E}ns$ commute aux limites inductives, car il est l'adjoint à gauche de l'inclusion $\mathcal{E}ns \hookrightarrow \mathcal{C}at$. Cela permet de vérifier que $\mathcal{W}_0$ est un localisateur fondamental fort. Mais alors par le théorème B.17, on a $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}_0$.

B.26. Le corollaire B.24 et la proposition B.25 caractérisent totalement $\mathcal{W}_\infty$:

Théorème B.27. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental fort tel que toute $\mathcal{W}$-équivalence $A \to B$ induise une bijection $\pi_0 A \to \pi_0 B$, et tel que toute $\mathcal{W}$-équivalence $\mathcal{W}$-localement constante soit $\mathcal{W}$-asphérique. Alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$.*

DÉMONSTRATION. En vertu du théorème B.17, on sait déjà que $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}$. La démonstration de l'inclusion inverse se fait en plusieurs étapes.

a) *Si $p : X \to Y$ est une fibration de Kan alors le foncteur $i_{\mathbf{\Delta}} p$ est $\mathcal{W}$-localement constant.*

Pour toute flèche $u : \Delta_m \to \Delta_n$ de $\mathbf{\Delta}$, et toute flèche $\Delta_n \to Y$ de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$, si on forme les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} \Delta_m \times_Y X \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \Delta_n \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta_m \arrow[r, "u"'] & \Delta_n \arrow[r] & Y \end{tikzcd} ,$$

la flèche v est alors dans $W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$ (propreté à droite de la catégorie de modèles $\widehat{\mathbf{\Delta}}$). Comme le foncteur $i_{\mathbf{\Delta}}$ commute aux produits fibrés, cela implique que $i_{\mathbf{\Delta}} p$ est $\mathcal{W}_\infty$-localement constant, donc aussi $\mathcal{W}$-localement constant (théorème B.17).

b) *Une fibration de Kan qui est une $\mathcal{W}$-équivalence est à fibres $\mathcal{W}$-asphériques.*

Cette assertion résulte de (a), de l'hypothèse qu'une $\mathcal{W}$-équivalence $\mathcal{W}$-localement constante est $\mathcal{W}$-asphérique, et de la proposition 3.4.

c) *Un complexe de Kan $\mathcal{W}$-asphérique est $\mathcal{W}_\infty$-asphérique.*

Soit X un complexe de Kan $\mathcal{W}$-asphérique et x un 0-simplexe de X. Montrons que l'espace des lacets $\Omega(X,x)$ est $\mathcal{W}$-asphérique. Comme $\mathbf{\Delta}$ est une $\mathcal{W}$-catégorie test stricte (7.13), les projections $X \times X \to X$ sont des $\mathcal{W}$-équivalences. Comme X est un complexe de Kan, les morphismes $\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1, X) \to X$ induits par δ_1^0 et δ_1^1 sont des fibrations triviales, et en particulier des $\mathcal{W}$-équivalences, et le morphisme $\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1, X) \to \underline{\mathsf{Hom}}(\partial\Delta_1, X) = X \times X$ est une fibration de Kan, d'où par la propriété de saturation une $\mathcal{W}$-équivalence. Or l'espace des lacets est obtenu par le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\Omega(X,x) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1, X) \arrow[d] \\
e_{\widehat{\mathbf{\Delta}}} = e_{\widehat{\mathbf{\Delta}}} \times e_{\widehat{\mathbf{\Delta}}} \arrow[r, "x \times x"'] & X \times X
\end{tikzcd} .$$

Il résulte donc de (b) que $\Omega(X,x)$ est $\mathcal{W}$-asphérique. On en déduit par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $\Omega^n(X,x)$ est $\mathcal{W}$-asphérique. L'hypothèse que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_0$ implique donc que X est $\mathcal{W}_\infty$-asphérique.

d) *Une fibration de Kan qui est une $\mathcal{W}$-équivalence est une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence.*

Soit $p : X \to Y$ une fibration de Kan et une $\mathcal{W}$-équivalence. Comme $\pi_0 X \to \pi_0 Y$ est bijective, pour montrer que p est une $\mathcal{W}$-équivalence, il suffit de montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout 0-simplexe x de X, $\pi_n(X,x) \to \pi_n(Y,y)$, $y = p(x)$, est un isomorphisme. Or si X_y désigne la fibre de p en y, X_y est un complexe de Kan, qui est en vertu de (b) $\mathcal{W}$-asphérique. Il résulte donc de (c) que X_y est $\mathcal{W}_\infty$-asphérique et l'assertion résulte de la longue suite exacte d'homotopie, associée à une fibration de Kan.

e) *Une $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{C}at$ est une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence.*

Soit $u : A \to B$ une $\mathcal{W}$-équivalence de $\mathcal{C}at$. Le morphisme Nu de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ se décompose en $Nu = pi$, avec p une fibration de Kan et i une cofibration triviale. En vertu du théorème B.17, i est une $\mathcal{W}$-équivalence, et par saturation p aussi. Il résulte donc de (d) que p est une $\mathcal{W}_\infty$-équivalence, ce qui prouve l'assertion et achève la démonstration.

Références

[BF] A. K. Bousfield, E. M. Friedlander, *Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets,* "Geometric Applications of Homotopy Theory" (Proc. Conf. Evanston, Ill., 1977), II (M. G. Barrat and M. E. Mahowald eds.), LNM 658, Springer-Verlag, 1978, pp. 80-130.

[BK] A. K. Bousfield, D. M. Kan, "Homotopy limits, completions, and localizations", LNM 304, Springer-Verlag, 1972.

[GZ] P. Gabriel, M. Zisman, "Calculus of fractions and homotopy theory", Ergebnisse der Mathematik, vol. 35, Springer-Verlag, 1967.

[Ho] M. Hovey, "Model Categories", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, AMS, 1999.

[JT] A. Joyal, M. Tierney, "An introduction to simplicial homotopy theory", Preprint, 1999.

[Q1] D. G. Quillen, "Homotopical Algebra", LNM 43, Springer-Verlag, 1967.

[Q2] D. G. Quillen, *Higher Algebraic K-Theory I,* LNM 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 85-147.

Index des notations.

$\mathcal{C}at$	2.2
e	2.2
$\mathcal{W}$	2.2
A/b	2.2
u/b	2.2
A_b	2.12
A°	2.12
u°	2.12
$S(A)$	2.15
s_A, t_A	2.15
$S(u)$	2.18
$b\backslash A$	2.22
$b\backslash u$	2.22
Δ_1	2.23
$\mathcal{W}_{gr}$	2.28
$\mathcal{W}_\infty$	2.29
$\widehat{A}$	3.1
i_A, i_A^*	3.1
ε, η	3.1
$\mathcal{W}_{\widehat{A}}$	3.3
$\varepsilon_{\widehat{A}}$	3.6
λ_F	3.8
$\boxtimes$	3.8
$W^{-1}M$	4.1
$\mathsf{Hot}_\mathcal{W}$, Hot	4.2
$\gamma_\mathcal{W}$, γ	4.2
$\mathsf{Hot}_{\mathcal{W},A}$, Hot_A, γ_A	4.4
$\mathbb{I} = (I, \partial_0, \partial_1)$	5.1
$M_\mathcal{I}$, $Q_\mathcal{I}$	5.3
$\widetilde{\mathcal{I}}$	5.4
$F(\mathbb{I})$	5.5
$\boldsymbol{\Delta}_1 = (\Delta_1, e_0, e_1)$	5.15
L_A	6.5

$\mathbb{L}_A$	6.6
$\boldsymbol{\Delta}$	6.11
Δ_n	6.11
$\mathcal{I}_A$	7.16
i^*	8.1
$i_!$	8.13
$\boldsymbol{\Delta}'$	8.19
$\widetilde{\boldsymbol{\Delta}}$	8.21
$\underline{\mathsf{Hom}}_W(M,N)$, $\mathsf{Hom}_W(M,N)$	9.4
$S(u)$, s_u, t_u, $S(v,w)$	9.10
$\int F$, $\widetilde{F}$	10.1
H_A, H_u	10.2
l_i, β_k	10.3
K_F	10.3
$\int \alpha$	10.5
$(i_A F)_s$	10.11
$\mathcal{C}at/I$, $\mathcal{C}at/w$	11.1
Θ_I, Θ'_I	11.1
$\mathcal{W}_I$, $\mathcal{W}'_I$	11.3
$\mathbb{D}(I)$, $\mathbb{D}_{\mathcal{W}}(I)$	11.6
w^*, $w_!$	11.6
γ_J	11.9
p_J	11.9
u^*, $u_!$	12.22
$\kappa_{\mathcal{D}}$	12.23
$c_{\mathcal{D}}$	12.28
$A-U$	A.1
$(I\|A/a,\ \partial^0\|A/a,\ \partial^1\|A/a)$	A.4
$(I\|A/a,\ \partial^0\|A/a,\ \partial^1\|A/a,\ \sigma\|A/a)$	A.4
$\square n$	A.8
$\delta_n^{i,\varepsilon}$, σ_n^i	A.8
$\boldsymbol{\square}$	A.8
δ_n^i	B.1
$\partial\Delta_n$	B.1
i_n, I	B.1
$\Delta_n \times \{e\} \cup \partial\Delta_n \times \Delta_1$	B.1

$j_{n,e}$, J B.1
$W_{\widehat{\mathbf{\Delta}}}$ B.1
$\mathcal{T}op$ B.3
$|\,.\,|$, S B.3
$W_{\mathcal{T}op}$ B.3
$\mathbf{\Delta}_+$, $\mathbf{\Delta}_-$ B.4
ev_n B.4
L_n, M_n B.4
$\partial_- \mathbf{\Delta}_n$, $\partial_+ \mathbf{\Delta}_n$ B.4
Sk^n B.4
δ B.7
$\amalg_*$ B.9
N B.9
$\underrightarrow{\mathrm{holim}}_C$, $\underrightarrow{\mathrm{holim}}$ B.9

Index terminologique.

asphérique au dessus d'une catégorie	9.1
asphérique (catégorie)	2.2
asphérique (foncteur d'une petite catégorie vers $\mathcal{C}at$)	8.1
asphérique (morphisme de $\mathcal{C}at$)	2.2
asphérique (morphisme de préfaisceaux)	3.3
asphérique (préfaisceau)	3.5
augmentation	A.3
cartésien (foncteur)	9.10
cartésien (morphisme)	2.12
catégorie de Reedy	B.4
catégorie des cubes	A.8
catégorie des fractions	4.1
catégorie des simplexes	6.11
catégorie homotopique	4.2
catégorie homotopique relative à un localisateur fondamental	4.2
catégorie test	6.2
catégorie test faible	4.7
catégorie test locale	6.2
catégorie test stricte	7.7
coasphérique au dessus d'une catégorie	9.1
coasphérique (morphisme de $\mathcal{C}at$)	2.22
cocartésien (foncteur)	9.10
cocartésien (morphisme)	2.12
cocrible	2.23
cofibration	2.12
contracteur	7.16
contractile (catégorie)	5.15
crible	2.23
cylindre fonctoriel	A.3
ensembles simpliciaux (catégorie des)	6.11
équivalence faible (dans $\mathcal{C}at$)	2.2
équivalence faible (de préfaisceaux)	3.3
équivalence faible naturelle	10.6

faiblement saturée (partie de flèches)	2.1
fibration	2.12
fibre d'un foncteur	2.12
foncteur de localisation	4.1
foncteur de localisation canonique	4.2
foncteur test	8.11
foncteur test faible	8.11
foncteur test local	8.11
fortement saturée (partie de flèches)	4.1
homotopes (morphismes de $\mathcal{C}at$)	5.15
homotopisme (dans $\mathcal{C}at$)	5.15
$\mathcal{I}$-contractile	5.3
$\mathbb{I}$-contractile	5.3
$\mathbb{I}$-homotope de façon élémentaire	5.2
$\mathcal{I}$-homotopes (morphismes)	5.2
$\mathbb{I}$-homotopes (morphismes)	5.2
$\mathbb{I}$-homotopie d'un morphisme vers un autre	5.2
$\mathcal{I}$-homotopie (relation de)	5.2
$\mathcal{I}$-homotopisme	5.3
$\mathbb{I}$-homotopisme	5.3
immersion fermée	12.2
immersion ouverte	12.2
lisse (morphisme de $\mathcal{C}at$)	12.1
localement asphérique (préfaisceau)	3.6
localement $\mathcal{W}$-asphérique (préfaisceau)	3.6
localisateur fondamental	2.2
localisateur fondamental fort	9.1
localisateur fondamental fortement saturé	4.1
localisateur fondamental grossier	2.28
localisateur fondamental trivial, non trivial	2.26
modélisateur	4.3
modélisateur fondamental	4.3
morphisme de changement de base associé à un carré cartésien	12.23
morphisme de changement de base associé à un carré cartésien	12.28
morphisme de modélisateurs	4.3
morphisme de segments	5.1

nerf (foncteur)	8.15
objet de Lawvere	5.12
objet initial strict	5.12
précofibration	2.12
précontracteur	7.16
précylindre fonctoriel	A.3
précylindre fonctoriel augmenté	A.3
préfibration	2.12
propre (morphisme de $\mathcal{C}at$)	12.1
pseudo-catégorie test	4.4
pseudo-foncteur test	8.11
segment	5.1
segment de Lawvere	5.12
segment multiplicatif	5.9
segment séparant	5.1
totalement asphérique (catégorie)	7.2
totalement $\mathcal{W}$-asphérique (catégorie)	7.2
universellement dans une partie de flèches	2.1
$\mathcal{W}$-asphérique au dessus d'une catégorie	9.1
$\mathcal{W}$-asphérique (catégorie)	2.2
$\mathcal{W}$-asphérique (foncteur d'une petite catégorie vers $\mathcal{C}at$)	8.1
$\mathcal{W}$-asphérique (morphisme de $\mathcal{C}at$)	2.2
$\mathcal{W}$-asphérique (morphisme de préfaisceaux)	3.3
$\mathcal{W}$-asphérique (préfaisceau)	3.5
$\mathcal{W}$-catégorie test	6.2
$\mathcal{W}$-catégorie test faible	4.7
$\mathcal{W}$-catégorie test locale	6.2
$\mathcal{W}$-catégorie test stricte	7.7
$\mathcal{W}$-coasphérique au dessus d'une catégorie	9.1
$\mathcal{W}$-coasphérique (morphisme de $\mathcal{C}at$)	2.22
$\mathcal{W}$-contracteur	7.16
$\mathcal{W}$-équivalence (dans $\mathcal{C}at$)	2.2
$\mathcal{W}$-équivalence (de préfaisceaux)	3.3
$\mathcal{W}$-foncteur test	8.11
$\mathcal{W}$-foncteur test faible	8.11
$\mathcal{W}$-foncteur test local	8.11

$\mathcal{W}$-lisse (morphisme de $\mathcal{C}at$) 12.1
$\mathcal{W}$-localement constant (morphisme de $\mathcal{C}at$) B.22
$\mathcal{W}$-modélisateur 4.3
$\mathcal{W}$-précontracteur 7.16
$\mathcal{W}$-propre (morphisme de $\mathcal{C}at$) 12.1
$\mathcal{W}$-pseudo-catégorie test 4.4
$\mathcal{W}$-pseudo-foncteur test 8.11