

Ensembles simpliciaux et 2-groupoïdes

Michel Zisman

(Texte présenté au groupe de travail *Algèbre et Topologie Homotopiques* le 14 avril 2010)

1. Généralités sur les cat-groupes

Définition : Un pré-cat groupe $\mathcal{C}$ est la donnée d'un diagramme de groupes

$$\mathcal{C} : \quad A \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{b} \end{array} B$$

avec $s \circ i = b \circ i = \text{id}$, en abrégé *pcg*. Un pré-cat groupe qui vérifie de plus la condition $[\ker s, \ker b] = 1$ est appelé un cat-groupe, en abrégé *cg*.

On dira que A est le niveau 2 du pcg ou du cg, et que B en est le niveau 1. Un niveau 0 apparaîtra plus tard. À tout pcg $\mathcal{C}$ on associe canoniquement un cg $T\mathcal{C}$ obtenu en quotientant A , le niveau 2 de $\mathcal{C}$, par $[\ker s, \ker b]$, et en prenant pour nouveaux s, b et i , les homomorphismes obtenus par passage au quotient.

La colimite d'un diagramme $\{\mathcal{C}_\alpha\}$ dans la catégorie des pcg se calcule dans la catégorie des groupes séparément pour chaque niveau, les homomorphismes s, b, i provenant par passage à la limite de $s_\alpha, b_\alpha, i_\alpha$.

Pour obtenir la colimite d'un diagramme de cg, dans la catégorie des cg, on commence par prendre la colimite dans la catégorie des pcg, et on applique ensuite le foncteur T .

La terminologie provient de ce qu'un cat-groupe peut être considéré comme une *catégorie dans la catégorie des groupes*. Un tel objet est la donnée de deux groupes A , le groupe des morphismes, et B le groupe des objets, de deux homomorphismes $s : A \rightarrow B$, *source*, $b : A \rightarrow B$, *but*, d'un homomorphisme $i : B \rightarrow A$ vérifiant les relations $s \circ i = b \circ i = \text{id}$, et d'une loi de composition $\circ : A \times_{s,b} A \rightarrow A$ associative (que l'on notera souvent, si x et y sont composables, $\circ(x, y) = y \circ x$) vérifiant les égalités :

$$s(v \circ u) = s(u), b(v \circ u) = b(v), \text{ et, pour tout } x \in A, x \circ i(s(x)) = x, i(b(x)) \circ x = x.$$

Si (x, y) et (x', y') sont deux couples composables, l'égalité

$$\circ((x, y)(x', y')) = (y \circ x)(y' \circ x')$$

exprime que la composition est un homomorphisme de groupes. En particulier, prenons $x \in \ker b$ et $y \in \ker s$.

Alors les deux couples $(x, 1)$ et $(1, y)$ sont composables et il vient

$$xy = \circ((x, 1)(1, y)) = \circ((1, y)(x, 1)) = yx.$$

Ainsi $[\ker s, \ker b]$ est réduit à l'élément neutre, et donc une catégorie dans la catégorie des groupes est un cat-groupe. Réciproquement, partant d'un cat-groupe, on définit la composition de deux éléments x et y composables en posant

$$y \circ x = xi(b(x))^{-1}y$$

et l'on vérifie facilement que l'on obtient ainsi une catégorie dans la catégorie des groupes.

1.1 Analyse des 1-cat groupes. Soit $\mathcal{C} : A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{b} \end{smallmatrix} B$ un cg. La suite exacte

$$\ker s \twoheadrightarrow A \xrightarrow{s} B$$

admet i comme section, ce qui définit A comme produit semi-direct $A \simeq \ker s \rtimes B$, l'isomorphisme $A \rightarrow \ker s \rtimes B$ étant donné par $a \mapsto (a(i(s(a)^{-1})), s(a))$, et dans l'autre sens par $(x, g) \mapsto xi(g)$. L'action de B sur $\ker s$ est donnée par

$$\theta_g(x) = i(g)xi(g)^{-1}.$$

L'homomorphisme b fournit une deuxième suite exacte

$$\ker s \cap \ker b \twoheadrightarrow \ker s \xrightarrow{b} b(\ker s).$$

La condition $[\ker s, \ker b] = (1)$ implique que $\ker s \cap \ker b$ est abélien et que l'extension est centrale. De plus on a

$$b(\ker s) = s(\ker b).$$

En effet, soit $x \in \ker b$. On a $i(s(x))x^{-1} \in \ker s$, et donc il vient $s(x) = b(i(s(x))x^{-1}) \in b(\ker s)$, soit $s(\ker b) \subset b(\ker s)$. L'inclusion dans l'autre sens se démontre de même. Notons $H = s(\ker b) = b(\ker s)$. C'est un sous groupe distingué de B car $\ker b$ est un sous-groupe distingué de B et, pour tout $x \in \ker b, z \in B$, on a $zs(x)z^{-1} = s(i(z)xi(z)^{-1}) \in s(\ker b)$. Soit $h \in H$ et soit $y \in \ker s$ tel que $b(y) = h$. On a $yi(h)^{-1} \in \ker b$, qui commute à tout élément de l de $\ker s \cap \ker b$; on peut donc écrire

$$yi(h)^{-1}l = lyi(h)^{-1},$$

et de cette égalité on déduit, parce que l et y commutent, que l'on a $i(h)li(h)^{-1} = l$, et ainsi l'on voit que l'action de H via θ est triviale sur $\ker s \cap \ker b$.

Notons $M = \ker s$. Dans M on a

$$(*) \quad mm'm^{-1} = \theta_{b(m)}(m')$$

En effet, par définition, $\theta_{b(m)}(m') = ib(m)m'ib(m)^{-1}$, et donc l'égalité $(*)$ est équivalente à la suivante : $m^{-1}ib(m)m' = m'm^{-1}ib(m)$. Or on a $m' \in \ker s$ et $m^{-1}ib(m) \in \ker b$, et par conséquent, ces deux termes commutent, ce qui achève la démonstration.

Remarquons que si B est un groupe libre, alors aussi H . La deuxième suite exacte est alors scindée, et donc $\ker s \simeq (\ker s \cap \ker b) \times H$.

Remarque : Il résulte de ce qui précède que $b : \ker s \rightarrow B$ muni de l'action θ est un module croisé. Réciproquement la donnée d'un module croisé permet de reconstruire un cg, et ces deux catégories sont naturellement équivalentes. Dans la suite on ne retient que l'aspect cg.

1.1.1. Définition : Soit $\mathcal{C} : A \xrightleftharpoons[b]{s,i} B$ un cg. Dans B , on introduit une relation d'équivalence par la condition $g \sim g'$ si et seulement si il existe un $x \in A$ tel que $s(x) = g$ et $b(x) = g'$. On pose alors $\pi_2(\mathcal{C}) = \ker s \cap \ker b$ et $\pi_1(\mathcal{C}) = B / \sim$. Ce sont les *groupes d'homotopie* de $\mathcal{C}$. Avec les notations de 1.1. on voit que $\pi_1(\mathcal{C}) = B/H$.

Ces notations sont justifiées par le fait que l'on définira ultérieurement un foncteur $\frac{2}{\pi}$ de la catégorie des ensembles simpliciaux réduits vers celle des cg tel que les deux premiers groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial X soient égaux à ceux de $\frac{2}{\pi}(X)$.

1.2. Exemples.

1.2.1. Soit G un groupe, et soit $\tilde{G}$ le pcg $G \xrightleftharpoons[b]{s,i} G$ avec $s = b = i = \text{id}$. C'est évidemment un cg.

1.2.2. Soit G un groupe. Le pcg $\text{Sc}(G) : G \times G \xrightleftharpoons[b]{s,i} G$ dont les homomorphismes s, b , et i sont respectivement la projection sur le premier facteur, sur le second facteur, et la diagonale, est aussi un cg.

1.2.3. Soit G un groupe. On fait opérer G sur lui même par automorphismes intérieurs. Le pcg $\mathcal{D}(G) : G \rtimes G \xrightleftharpoons[b]{s,i} G$ dont les homomorphismes s, b , et i sont donnés par $s(g, g') = g'$, $b(g, g') = gg'$ et $i(g) = (1, g)$ est un cg, d'ailleurs naturellement isomorphe au précédent. On le notera simplement $\mathcal{D}$ lorsque l'on prend $G = \mathbb{Z}$.

1.2.4. Introduisons les deux foncteurs $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_i$ avec $i = 1, 2$ de la catégorie des cg vers celle des groupes qui à un cg font correspondre respectivement le groupe de niveau 1 et celui de niveau 2. Soit $\Phi : \text{Sc}(G) \rightarrow \mathcal{C}$ un morphisme dans la catégorie cg. C'est donc la donnée de deux homomorphismes $\varphi_2 : G \times G \rightarrow \mathcal{C}_2$ et $\varphi_1 : G \rightarrow \mathcal{C}_1$ qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\quad} & G \\ (\Phi): \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}_1 \end{array}$$

où les flèches horizontales désignent simultanément les homomorphismes de structure s, b ou i . Posons $\alpha(u) = \varphi_2(u, 1), \beta(v) = \varphi_2(1, v)$ Pour tout $(u, v) = (u, 1)(1, v) = (1, v)(u, 1) \in G \times G$, on a donc

$$\varphi_2(u, v) = \alpha(u)\beta(v) = \beta(v)\alpha(u)$$

$\alpha(u)$ et $\beta(v)$ commutent, ce qui provient aussi du fait que $b(\alpha(u)) = \varphi_1(pr_2((u, 1))) = 1$, et de même $s\beta(v) = 1$.

Par ailleurs $s(\alpha(u)) = s(\varphi_2(u, 1)) = \varphi_1(u)$ et $i\varphi_1 = \varphi_2(u, u) = \alpha(u)\beta(u)$.

Réciproquement la donnée d'un homomorphisme $\alpha : G \rightarrow \ker b$ détermine de façon unique un morphisme $\Phi : \text{Sc}(G) \rightarrow \mathcal{C}$. En effet on pose

$$\varphi_1 = s \circ \alpha, \quad \beta(v) = \alpha(v)^{-1}i(s(\alpha(v))), \quad \varphi_2(u, v) = \alpha(u)\beta(v).$$

Cette dernière formule définit bien un homomorphisme car β est à valeur dans $\ker s$ et donc α et β commutent. La correspondance $\Phi \longleftrightarrow \alpha$ est donc bijective. Autrement dit, le foncteur Sc de la catégorie des groupes vers celle des cat-groupes est adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{C} \mapsto \ker(b : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1)$. Par ailleurs, Sc possède aussi un adjoint à gauche, le foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_1$.

1.2.5. Puisque Sc possède un adjoint à droite, ce foncteur commute aux colimites. Ainsi, par exemple, la somme directe de k exemplaires de $\mathcal{D}$ est le cg $\text{Sc}(\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z})$ où $\mathbb{Z}$ figure k fois.

1.2.6. Soit H un sous-groupe distingué du groupe G , sur lequel G opère par automorphismes intérieurs. On définit comme en 1.2.3. un cg $\mathcal{D}(H, G)$ par $H \rtimes G \xrightleftharpoons[b]{s} G$, avec $s(h, g) = g, b(h, g) = hg, i(g) = (1, g)$.

Dans les exemples 1.2.1. à 1.2.5., le π_2 est nul, $\pi_1(\text{Sc}(G))$ est aussi nul, d'où la notation Sc (pour simplement connexe), et dans le dernier exemple, on a $\pi_1 = G/H$ et $\pi_2 = 0$.

2. Le cat-groupe $\mathcal{P}_n$. Notons $j : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ l'homomorphisme somme des coordonnées $j(z_1, \dots, z_n) = z_1 + \dots + z_n$. Soit $M \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ le sous groupe formé des couples (ζ, z) tels que $j(\zeta) = 0$. Soit enfin $\theta : M \rightarrow M$ l'opération définie par

$$\theta(z_1, \dots, z_n, z) = (z_2 + z, z_3, \dots, z_n, z_1 - z, z).$$

Alors on a $\theta^n(\zeta, 0) = (\zeta, 0)$ car, lorsque $z = 0$, l'effet de θ est une permutation circulaire des autres coordonnées. On a aussi $\theta^n(0, z) = (0, z)$. En effet soit $(e_i), i = 1, 2, \dots, n+1$, la base canonique de $\mathbb{Z}^{n+1}$. Il vient facilement

$$\theta^i(e_{n+1}) = e_1 - e_{n-i+1} + e_{n+1}$$

d'où le résultat. Finalement, il vient, $\theta^n = \text{id}$.

θ définit une action de $\mathbb{Z}$ sur M , et permet donc de construire le produit semi-direct $M \rtimes \mathbb{Z}$. On lui associe le pcg

$$\mathcal{P}_n : M \rtimes \mathbb{Z} \xrightleftharpoons[b]{s} \mathbb{Z}$$

défini par $s(\zeta, z, u) = u, b(\zeta, z, u) = nz + u, i(u) = (0, 0, u)$. C'est un cg car $\ker s = M \times 0$ et $\ker b$ est l'ensemble des triplets $(\zeta, z, -nz)$, et par ailleurs, on a

$$(\zeta, z, 0)(\zeta', z', -nz') = (\zeta', z', -nz')(\zeta, z, 0)$$

puisque $\theta^n = \text{id}$.

Soient $\text{in} : \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{D}$ et $\lambda : \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{P}_n$ les morphismes qui sont l'identité au niveau 1 et qui au niveau 2 sont donnés par $\text{in}_2(z) = (0, z)$ $\lambda_2(z) = (0, 0, z)$. Ces morphismes s'insèrent dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{n} & \tilde{\mathbb{Z}} \\ \text{(*) in} \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{P}_n \end{array}$$

où n et μ_1 désignent la multiplication par n et $\mu_2(p, q) = (0, p, nq)$.

2.1. Proposition Le carré (*) est cocartésien.

Démonstration :

Donnons nous un diagramme en traits pleins, et cherchons à le prolonger par un homomorphisme $\varphi : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{C}$

(1)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{n} & \tilde{\mathbb{Z}} \\ \text{in} \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{P}_n \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow f \\ \downarrow \\ \mathcal{C} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow g \\ \downarrow \\ \mathcal{C} \end{array}$$

Explicitons , comme précédemment, $\mathcal{C}$ en $A \xrightleftharpoons[b]{s} B$. Puisque φ_2 doit être un homomorphisme, on doit avoir, pour $(m, z) \in M \rtimes \mathbb{Z}$, $\varphi_2(m, z) = \varphi_2((m, 0)(0, z)) = \varphi_2(m, 0)\varphi_2(0, z) = \varphi_2(m, 0)\varphi_2(\lambda(z)) = \varphi_2(m, 0)f_2(z)$. Il suffit donc de connaître la restriction de φ_2 à $M \times 0$, et l'on désignera par $\psi : M \rightarrow N = \ker s$ cette restriction pour simplifier l'écriture. Écrivons que ψ est compatible avec les opérations provenant du niveau 1 : on a

$$(2) \quad \psi(\theta(z)m) = \theta_{\varphi_1(z)}(\psi(m)) = \theta_{f_1(z)}(\psi(m))$$

pour tout $m \in M$ et $z \in \mathbb{Z}$. On en déduit les valeurs possibles de ψ sur la base $\{e_1 - e_n, e_1 - e_{n-1}, \dots, e_1 - e_2, e_{n+1}\}$ de M . En effet on doit avoir d'abord

$$\psi(e_{n+1}) = \varphi_2(e_{n+1}, 0) = \varphi_2 \circ \mu(1, 0) = g_2(1, 0),$$

et ensuite, grâce aux relations (2),

$$\psi(e_1 - e_{n-i+1} + e_{n+1}) = \psi(\theta^i(e_{n+1})) = \theta_{f_1(1)}^i(\psi(e_{n+1})).$$

Ainsi, nous sommes conduits à définir ψ par les égalités

$$\begin{cases} \psi(e_{n+1}) &= g_2(1, 0) \\ \psi(e_1 - e_{n-i+1}) &= g_2(1, 0)^{-1} \theta_{f_1(1)}^i(g_2(1, 0)) \quad (i = 1, \dots, n-1). \end{cases}$$

Puisque $e_1 - e_{n-i+1}$ et e_{n+1} commutent, il faut vérifier, pour que cette définition ait un sens, que $g_2(1, 0)$ et $\theta_{f_1(1)}(g_2(1, 0))$ commutent. La commutativité du diagramme (1) implique que $g_2(1, 0)^{-1} \theta_{f_1(1)}(g_2(1, 0))$ appartient à $\ker s \cap \ker b$, d'où le résultat car $g_2(1, 0) \in \ker s$. Puisque les valeurs données de ψ sur la base de M commutent, on étend ψ par linéarité en un homomorphisme encore appelé $\psi : M \rightarrow N$ et il reste à vérifier que cet homomorphisme est compatible aux actions. Par linéarité, il suffit de le vérifier sur la base de M .

Écrivons $\beta = f_1(1)$, $m = g_2(1, 0)$ et $\alpha_i = \psi(e_1 - e_{n-i+1}) = m^{-1} \theta_{\beta^i}(m)$. Alors il vient :

- $\psi \circ \theta(e_{n+1}) = \psi(e_{n+1} + e_1 - e_n) = \psi(e_{n+1} \alpha_1) = \theta_\beta(m) = \theta_\beta \circ \psi(e_{n+1})$

Pour $i < n-1$ on a

- $\psi \circ \theta(e_1 - e_{n-i+1}) = \psi(e_n - e_{n-i}) = \psi(e_1 - e_{n-i}) \psi(e_1 - e_n)^{-1} = \alpha_{i+1} \alpha_1^{-1}$

et par ailleurs

- $\theta_\beta \circ \psi(e_1 - e_{n-i+1}) = \theta_\beta(m^{-1} \theta_{\beta^i}(m)) = \theta_\beta(m^{-1}) \theta_{\beta^{i+1}}(m) = \alpha_1^{-1} \alpha_{i+1}$

Enfin pour $i = n-1$ il vient

- $\psi \circ \theta(e_1 - e_2) = \psi(e_n - e_1) = \alpha_1^{-1}$
- $\theta_\beta \circ \psi(e_1 - e_2) = \theta_\beta(m^{-1} \theta_{\beta^{n-1}}(m)) = \theta_\beta(m^{-1}) \theta_{\beta^n}(m) = \theta_\beta(m^{-1}) m = \alpha_1^{-1}$.

l'avant dernière égalité provenant de ce que l'on a $\beta^n = f_1(n) = g_1(1)$, mais alors

$$\theta_{\beta^n}(m) = i \circ g_1(1) m (i \circ g_1(1))^{-1} = g_2 \circ i(1) g_2(0, 1) (g_2 \circ i(1))^{-1} = g_2((0, 1)(1, 0)(0, -1)) = m,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque . Soit P_n le CW-complexe de dimension 2 obtenu en attachant une 2-cellule au cercle S^1 par une application de degré n . Lorsque nous disposerons du foncteur $\overset{2}{\pi}$, la proposition précédente exprimera que l'on a $\mathcal{P}_n = \overset{2}{\pi}(P_n)$.

2.2. Soit u un mot du groupe libre G , et notons encore u l'homomorphisme $\mathbb{Z} \rightarrow G$ qui applique 1 sur u .

Soit $\mathcal{C}$ la somme amalgamée du diagramme $\mathcal{P}_n \xleftarrow{\lambda} \tilde{\mathbb{Z}} \xrightarrow{u} \tilde{G}$.

Proposition : On a $\pi_2(\mathcal{C}) \neq 0$.

Démonstration : Soit H le sous groupe distingué de G engendré par u^n , et notons $\bar{G} = G/H$. Faisons opérer $\bar{G}$ sur $\mathbb{Z}[\bar{G}]$, le groupe abélien libre engendré par $\bar{G}$, par multiplication à gauche, ce qui permet de définir le produit semi-direct $\mathbb{Z}[\bar{G}] \rtimes \bar{G}$, et en ensuite le cg

$$\bar{\mathcal{C}} : \mathbb{Z}[\bar{G}] \rtimes \bar{G} \overset{s}{\underset{b}{\rightleftarrows}} \bar{G}$$

avec $s(x, \bar{g}) = b(x, \bar{g}) = \bar{g}, i(\bar{g}) = (0, \bar{g})$ où $\bar{g}$ désigne la classe de g mod H (c'est bien un cg car $\ker s = \ker b$ est commutatif). On définit un morphisme de cg $f : \mathcal{P}_n \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ de la façon suivante. Au niveau 1, on pose $f_1(z) = \bar{u}^z$. On doit alors avoir $f_2(0, 0, z) = \bar{u}^z$, et il reste à définir la restriction de f_2 à $M \times 1$, que l'on notera $\phi : M \rightarrow \mathbb{Z}[\bar{G}]$, sur la base de M . Notons e l'élément neutre de $\bar{G}$, et posons

$$\phi(e_{n+1}) = e \quad \phi(e_1 - e_{n-i+1}) = \bar{u}^i - e.$$

Vérifions que l'homomorphisme étendu par linéarité à M tout entier est compatible avec les actions.

- $\phi \circ \theta(e_{n+1}) = \phi(e_1 - e_n - e_{n+1}) = \bar{u} - e + e = \bar{u} = \bar{u}e = \theta_{\bar{u}} \circ \phi(e_{n+1})$

Pour $i < n - 1$ on a

- $\phi \circ \theta(e_1 - e_{n-i+1}) = \phi(e_n - e_{n-i}) = \phi(e_1 - e_{n-i}) - \phi(e_1 - e_n) = \bar{u}^{i+1} - \bar{u}$

et par ailleurs

- $\theta_{\bar{u}} \circ \phi(e_1 - e_{n-i+1}) = \theta_{\bar{u}}(\bar{u}^i - e) = \bar{u}^{i+1} - \bar{u}.$

Enfin pour $i = n - 1$ il vient

- $\phi \circ \theta(e_1 - e_2) = \phi(e_n - e_1) = e - \bar{u} = \theta_{\bar{u}}(\bar{u}^{n-1} - e) = \theta_{\bar{u}} \circ \phi(e_1 - e_2).$

Le morphisme f s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{u} & \tilde{G} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow v \\ \mathcal{P}_n & \xrightarrow{f} & \bar{\mathcal{C}} \end{array}$$

où $v_1 : G \rightarrow \bar{G}$ (resp. $v_2 : G \rightarrow \mathbb{Z}[\bar{G}] \rtimes \bar{G}$) est donné par $g \mapsto \bar{g}$, (resp. $v_2(g) = (0, \bar{g})$). Par définition de la somme amalgamée f se factorise à travers $\mathcal{C}$. Pour montrer que $\pi_2(\mathcal{C})$ est non nul, il suffit donc de montrer que $\pi_2(f) : \pi_2(\mathcal{P}_n) = \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}[\bar{G}] = \pi_2(\bar{\mathcal{C}})$ a une image non nulle. Or par construction, cette image est le sous-groupe de $\mathbb{Z}[\bar{G}]$ engendré par les $n - 1$ éléments $\bar{u}^i - e$, et ces éléments sont linéairement indépendants d'après le résultat suivant :

2.3. Théorème : $\bar{u}$ est d'ordre n .

Démonstration : Il faut montrer que pour $i = 1, \dots, n - 1$, u^i n'appartient pas au sous groupe distingué de G engendré par u^n , i.e. qu'on ne peut avoir une relation de la forme

$$(A) \quad g_1 u^{n\varepsilon_1} g_1^{-1} \dots g_k u^{n\varepsilon_k} g_k^{-1} = u^i,$$

avec les $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ égaux à ± 1 . Si u n'est pas un commutateur, en passant dans G^{ab} , cette égalité devient $n(\sum_j \varepsilon_j)u = iu$ avec $u \neq 0$ dans G^{ab} , et cette égalité est impossible.

Si u est un commutateur, écrivons $gu^{n\varepsilon}g^{-1} = [g, u^{n\varepsilon}]u^{n\varepsilon}$, si bien que (A) s'écrit

$$(B) \quad \gamma_1 u^{n\varepsilon_1} \dots \gamma_k u^{n\varepsilon_k} = u^i.$$

où l'on a posé $\gamma_i = [g_i, u^{n\varepsilon_i}]$. Par ailleurs on sait que la suite centrale descendante

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_l \supset \cdots$$

(avec $G_l = [G_{l-1}, G]$) d'un groupe libre a la propriété que $\bigcap_l G_l = 1$. Il existe donc un plus grand entier fini l tel que $u \in G_l$, i.e. u n'est pas nul dans G_l/G_{l+1} . Mais si $u \in G_l$ alors les γ_j sont dans G_{l+1} . en réduisant l'égalité (B) modulo G_{l+1} on trouve de nouveau $n(\sum_j \varepsilon_j)u = iu$ avec $u \neq 0$ qui est impossible dans G_l/G_{l+1} puisque ce groupe est abélien libre.

3. Calcul d'une somme amalgamée. Soit $\lambda : H \rightarrow G$ un homomorphisme de groupes. On se propose de déterminer la somme amalgamée $\mathcal{D}(\lambda)$ du diagramme

$$\mathcal{D}(H) \leftarrow^i \tilde{H} \xrightarrow{\lambda} \tilde{G}.$$

Soit d'abord P , à cet effet, la somme amalgamée, dans la catégorie des groupes, du diagramme précédent pris au niveau 2 si bien que le carré

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\lambda} & G \\ i \downarrow & & \downarrow \text{in}^1 \\ H \rtimes H & \xrightarrow{\text{in}^2} & P \end{array}$$

est cocartésien. Soit $\varphi : H * G \rightarrow P$ l'homomorphisme défini par les égalités $\varphi(h) = \text{in}^2(h, 1)$ et $\varphi(g) = \text{in}^1(g)$ pour $h \in H$ et $g \in G$. Il est surjectif. En effet tout élément de P s'écrit comme un produit de termes de la forme $z = \text{in}^1(g)\text{in}^2(h, h')$. Mais dans P on a "l'égalité" $\lambda(h) = (1, h)$ i.e.

$$(*) \quad \text{in}^2(h, h') = \text{in}^2((h, 1)(1, h')) = \varphi(h)\varphi(\lambda(h'))$$

et donc $z \in \text{Im}\varphi$.

Dans $H \rtimes H$ on a $(h, h')(u, u') = (hh'uh'^{-1}, h'u')$. Parce que in^2 et φ sont des homomorphismes, il en résulte, en appliquant d'abord in^2 puis la définition de φ , puis la relation $*$, l'égalité $\varphi(\lambda(h') * u * \lambda(h)^{-1}) = \varphi(h'uh'^{-1})$.

3.1. Lemme : P est le quotient de $H * G$ par la relation

$$(**) \quad \lambda(h) * u * \lambda(h)^{-1} = huh^{-1}$$

Démonstration : Notons encore $\varphi : H * G \rightarrow P$ l'application quotient. Partant du diagramme commutatif en trait plein suivant, nous devons montrer qu'il existe un unique ω qui le complète de façon à rester commutatif.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\lambda} & G \\ i \downarrow & & \downarrow \text{in}^1 \\ H \rtimes H & \xrightarrow{\text{in}^2} & P \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow f \\ \downarrow \omega \\ \searrow g \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ X \end{array}$$

(ici in^1 et in^2 sont défini par $\text{in}^1(g) = \varphi(g)$ et $\text{in}^2(h, h') = \varphi(h * \lambda(h'))$). Soit $\psi : H * G \rightarrow X$ l'homomorphisme défini par $\psi(h) = g(h, 1)$ et $\psi(\gamma) = f(\gamma)$ ($h \in H, \gamma \in G$). Un calcul simple montre que ψ passe au quotient par les relations **, et se factorise de manière unique en $\psi = \varphi \circ \omega$, et l'on vérifie sans peine que toutes les conditions annoncées sont vérifiées.

Notons que si l'on fait $u = h$ dans la relation ** on trouve la relation P suivante

$$(* **). \quad \lambda(u)u = u\lambda(u)$$

Il reste maintenant, pour obtenir la somme amalgamée cherchée dans la catégorie des cg, à faire le quotient de P par les relations exprimant que $\ker s$ et $\ker b$ commutent. Notons qu'au niveau $H * G$, les homomorphismes s et b sont définis par les égalités $s(h) = 1, s(g) = g$ et $b(h) = \lambda(h), b(g) = g$ ($h \in H, g \in G$).

3.2. Lemme : Dans P , tout élément de $\ker s$ est produit d'éléments de la forme gug^{-1} et tout élément de $\ker b$ est produit d'éléments de la forme $g\lambda(u)u^{-1}g^{-1}$ ($u \in H, g \in G$).

Démonstration : Un élément de P s'écrit $z = g_1 h_1 \cdots g_k h_k$. Si $k = 1$, alors $z \in \ker s$ implique $z = h$, et si $z \in \ker b$, alors $z = \lambda(h)^{-1}h$, et donc le lemme est vrai pour $k = 1$. Dans le cas général, on écrit $z = g_1 h_1 g_1^{-1} z'$ avec $z' = (g_1 g_2) h_2 \cdots g_k h_k$ avec $z' \in \ker s$ si $z \in \ker s$, et $z = g_1 h_1 \lambda(h_1)^{-1} g_1^{-1} z'$ avec $z' = (g_1 \lambda(h_1) g_2) h_2 \cdots g_k h_k$ et $z' \in \ker b$ si $z \in \ker b$; dans les deux cas on a ramené k à $k - 1$.

Pour imposer la condition $[\ker s, \ker b] = 1$ il suffit donc de poser que, quels que soient u et h dans H et g et γ dans G , alors gug^{-1} et $\gamma h \lambda(h)^{-1} \gamma^{-1}$ commutent. Ces conditions peuvent s'écrire

$$(\gamma h^{-1} \gamma^{-1})(gug^{-1})(\gamma h \gamma^{-1}) = (\gamma \lambda(h^{-1}) \gamma^{-1}) u (\gamma \lambda(h^{-1}) \gamma^{-1})^{-1}.$$

Introduisons, pour rendre ces relations plus lisibles, le groupe $\Gamma(\lambda)$ ayant $H \times G$ pour ensemble de générateurs et pour relations

$$\begin{cases} (h, g)(h', g) &= (hh', g) & (a) \\ (h^{-1}, \gamma)(u, g)(h, \gamma) &= (u, \gamma \lambda(h^{-1}) \gamma^{-1} g) & (b) \end{cases}$$

pour tous les $h, h', u \in H$ et $g, \gamma \in G$, et notons $\mathcal{D}(\lambda)$ la somme amalgamée du diagramme

$$\mathcal{D}(H) \xleftarrow{i} \tilde{H} \xrightarrow{\lambda} \tilde{G}.$$

Alors l'application $\Gamma(\lambda) \rightarrow \mathcal{D}(\lambda)_2$ définie par le composé

$$(h, g) \mapsto ghg^{-1} \mapsto ghg^{-1} \text{ mod } [\ker s, \ker b]$$

est un isomorphisme sur son image $\ker(s : \mathcal{D}(\lambda)_2 \rightarrow \mathcal{D}(\lambda)_1 = G)$. Résumons les résultats obtenus dans le

3.3. Théorème : La somme amalgamée $\mathcal{D}(\lambda)$ du diagramme $\mathcal{D}(H) \xleftarrow{i} \tilde{H} \xrightarrow{\lambda} \tilde{G}$ est le cg

$$\mathcal{D}(\lambda) : \Gamma(\lambda) \rtimes G \xrightleftharpoons[b]{s} G.$$

Plus précisément, l'application $(h, g) \mapsto g\lambda(h)g^{-1}$ passe au quotient par les relations (et sera encore notée λ) et il vient $i(g) = 1 \rtimes g, s(m \rtimes g) = g, b(m \rtimes g) = \lambda(m)g$ et $\theta_g(u, \gamma) = (u, g\gamma)$ ($h, u \in H, g, \gamma \in G, m \in \Gamma(\lambda)$).

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter les relations correspondant aux relations $(**)$ du lemme (3.1.) car c'est précisément ce que donne la relation (b) ci-dessus pour $\gamma = g = 1$. Dans la suite, on écrira Γ au lieu de $\Gamma(\lambda)$ lorsqu'il n'y aura pas de confusions possibles.

3.3.1. Remarque : La définition de $\Gamma(\lambda)$ par générateurs et relations donnée ci-dessus montre que $b : \Gamma \rightarrow G$ est le module croisé libre (G opérant sur Γ par l'intermédiaire de θ) associé à l'homomorphisme λ . On reviendra sur ce point en 11.5.

3.4. Proposition : $\Gamma^{\text{ab}} = H^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[\text{coker } \lambda]$.

Démonstration : De la relation (a), il résulte que l'image de $(1, g)$ dans Γ est l'élément unité. Soient H_g des exemplaires de H indicés par G . On définit des applications de H_g dans Γ par $h \mapsto (h, g)$. Ce sont des homomorphismes grâce à (a). Ces homomorphismes réunis donnent un homomorphisme surjectif $\coprod_{g \in G} H_g \rightarrow \Gamma$. Passant aux abélianisés, il vient un homomorphisme surjectif

$$p : H^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{g \in G} H_g^{\text{ab}} \rightarrow \Gamma^{\text{ab}}.$$

Mais nous avons une suite exacte (où on a posé $K = \text{coker } \lambda$ et où G' est le sous groupe distingué de G engendré par l'image de λ):

$$H^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[G] \otimes \mathbb{Z}[G'] \xrightarrow{j} H^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{k} H^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[K] \longrightarrow 0$$

avec $j(h \otimes g \otimes g') = h \otimes (gg' - g)$, k induit par le passage au quotient $G \rightarrow K$. Montrons que $p \circ j = 0$, c'est-à-dire que l'on a, modulo des commutateurs, $p(h \otimes gg') = p(h \otimes g)$ pour tout $h \in H, g \in G, g' \in G'$. Tout élément $g' \in G'$ s'écrit comme un produit d'éléments de la forme $\gamma\lambda(u)\gamma^{-1}$, ($\gamma \in G, u \in H$). Or

$$(h, g\gamma\lambda(u)\gamma^{-1}) = (h, (g\gamma)\lambda(u)(g\gamma)^{-1}g) = (u, g\gamma)(h, g)(u, g\gamma)^{-1} = (h, g)$$

la deuxième égalité provenant des relations (b) et la dernière n'étant vérifiée que modulo les commutateurs de Γ . Écrivons $g' = g''\gamma\lambda(u)\gamma^{-1}$ où g'' contient un produit de moins que g' , ce qui permet de montrer le résultat annoncé par récurrence sur la longueur de g' :

$$p(h \otimes gg''\gamma\lambda(u)\gamma^{-1}) = p(h \otimes gg'') = p(h \otimes g).$$

Donc p se factorise à travers k , et définit un homomorphisme $\pi : H^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[K] \rightarrow \Gamma^{\text{ab}}$ tel que $\pi \circ k = p$.

Par ailleurs, on définit un homomorphisme $\omega : \Gamma^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[K]$ par l'égalité $\omega(h, g) = \bar{h} \otimes \bar{g}$, $\bar{h}$ désignant la classe de $h \in H$ dans l'abélianisé, et $\bar{g}$ la classe de $g \in G$ dans le quotient $G/G' = K$. Pour montrer que ω est bien défini, il suffit de montrer que les relations (a) et (b) sont compatibles avec cette définition. Or on a

- $\omega((h, g)(h', g)) = \bar{h} \otimes \bar{g} + \bar{h}' \otimes \bar{g} = (\bar{h} + \bar{h}') \otimes \bar{g} = \bar{h}\bar{h}' \otimes g = \omega(hh', g)$

et

- $\omega((h, \gamma)(u, g)(h, \gamma)^{-1}) = \bar{h} \otimes \bar{\gamma} + \bar{u} \otimes \bar{g} - \bar{h} \otimes \bar{\gamma} = \bar{u} \otimes \bar{g}$
- $\omega(u, \gamma\lambda(h)\gamma^{-1}g) = \bar{u} \otimes \overline{\gamma\lambda(h)\gamma^{-1}g} = \bar{u} \otimes \bar{g}$

la dernière égalité provenant du fait que $\gamma\lambda(h)\gamma^{-1}$ est dans G' .

Il est clair que l'on a $\omega \circ p = k$. Comme on déjà montré que $\pi \circ k = p$ et que k et p sont surjectifs, il en résulte que π et ω sont des isomorphismes réciproques.

Notons pour terminer ce point que $b^{\text{ab}} : H^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[K] = \Gamma^{\text{ab}} \rightarrow G'^{\text{ab}}$ s'explique en $\bar{h} \otimes \bar{g} \mapsto \overline{g\lambda(h)g^{-1}}$. La suite exacte

$$1 \rightarrow \ker s \cap \ker b \rightarrow \ker s \rightarrow b(\ker s) \rightarrow 1$$

prise pour le cg $\mathcal{D}(\lambda)$ s'écrit

$$1 \rightarrow \pi_2(\mathcal{D}(\lambda)) \rightarrow \Gamma(\lambda) \rightarrow G' \rightarrow 1$$

(qui est scindée si G est libre) devient après abéliénisation la suite exacte

$$\pi_2(\mathcal{D}(\lambda)) \longrightarrow \Gamma^{\text{ab}} \xrightarrow{b^{\text{ab}}} G'^{\text{ab}} \rightarrow 0$$

à laquelle on peut ajouter un 0 à gauche lorsque G est libre.

3.5. Un exemple : Prenons $H = \mathbb{Z}, G$ un groupe libre, $\lambda : H \rightarrow G$ étant défini par la donnée $\lambda(1) = u^n$, où u est un mot de G et $n > 1$ un entier. Alors $\mathcal{D}(\lambda)$ est le cg appelé $\mathcal{C}$ dans 2.2. Dans ce cas il vient $\Gamma^{\text{ab}} = \mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[K]$ et, pour tout $g \in G$, on a $b^{\text{ab}}(\bar{g}) = b^{\text{ab}}(1 \otimes \bar{g}) = \overline{gu^n g^{-1}}$. En particulier, prenons $g = u^i$. Nous avons vu que dans ce cas $\bar{g} \neq \bar{1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$, mais

$$b^{\text{ab}}(\bar{g} - \bar{1}) = 0,$$

et l'on retrouve le fait que $\pi_2(\mathcal{C}) \neq 0$. De même, pour tout $g \in G$ et tout $0 \leq i < n$, $g_i = \overline{gu^i} - \bar{g}$ appartient au noyau de b^{ab} et donc b^{ab} se factorise à travers le quotient par le sous groupe qu'ils engendrent, i.e. le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des classes à droite de K mod le sous-groupe cyclique engendré par $\bar{u}$. Appelons $\bar{\bar{b}} : \mathbb{Z}[K / \langle u \rangle] \rightarrow G'^{\text{ab}}$ l'application ainsi obtenue. Maintenant supposons que u ne soit pas lui-même une vraie puissance i.e. qu'il n'existe pas de mot v tel que $u = v^s$ avec $s > 1$, et soit $n \geq 1$. Un célèbre théorème de Lyndon (Lyndon Identity Theorem) affirme précisément que $\bar{\bar{b}}$ est un isomorphisme. Donc dans ce cas $\pi_2(\mathcal{C})$ est égal au au sous-groupe abélien libre de $\mathbb{Z}[K]$ de base les g_i lorsque g parcourt un ensemble de représentants des classes à droite de K modulo $\langle u \rangle$.

3.5.1. Voici un exemple plus simple. On cherche à déterminer $\mathcal{D}(\lambda)$ lorsque $\lambda : H \rightarrow G$ est l'application constante. Dans ce cas la relation (b) de (3.2.) exprime simplement que le groupe Γ est commutatif. On peut

donc utiliser la proposition (3.4.). Il vient : $\Gamma = H^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[G]$. Dans (3.3.) on a aussi explicité $b : \Gamma \rtimes G \rightarrow G$.

On trouve $b(m, g) = g$

3.5.2. Exercice. Soient H, G, F des groupes, $\lambda : H \rightarrow G$ un homomorphisme, et $\mu : H \rightarrow G * F$ le composé de λ et de l'injection naturelle de G dans le produit libre $G * F$. On suppose que les deux groupes F et G sont libres. Montrer que l'on a

$$\begin{aligned} \pi_2(\mathcal{D}(\mu)) &= \mathbb{Z}[(\text{coker } \lambda) * F] \otimes_{\mathbb{Z}[\text{coker } \lambda]} \pi_2(\mathcal{D}(\lambda)) \\ &= \bigoplus_{d \in A} \pi_2(\mathcal{D}(\lambda))_d \end{aligned}$$

où d parcourt l'ensemble A des mots réduits de $(\text{coker } \lambda) * F$ qui se terminent par un élément de F , et où $\pi_2(\mathcal{D}(\lambda))_d = \pi_2(\mathcal{D}(\lambda))$ pour tout d . (Prendre une base convenable du plus petit sous-groupe distingué de G contenant l'image de λ et trouver une base adaptée à la précédente du plus petit sous-groupe distingué de $G * F$ contenant l'image de μ , confer Magnus, Karrass et Solitar)

4. Une autre somme amalgamée. Soient G un groupe, H , et K deux sous groupes distingués de G . On se propose de déterminer la somme amalgamée $\mathcal{D}(H, K, G)$ du diagramme $\mathcal{D}(H, G) \longleftarrow \tilde{G} \longrightarrow \mathcal{D}(K, G)$ où les deux flèches désignent l'unique morphisme qui est l'identité au niveau 1 (confer 1.2.6 pour les notations).

4.1. Lemme : Faisons opérer G sur le produit libre $H * K$ par l'action diagonale sur chaque cofacteur. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \rtimes G \\ \downarrow & & \downarrow \\ K \rtimes G & \longrightarrow & (H * K) \rtimes G \end{array}$$

est cocartésien dans la catégorie des groupes.

Démonstration : Soient $u : H \rtimes G \rightarrow U$ et $v : K \rtimes G \rightarrow U$ deux homomorphismes dont les restrictions à G sont égales, disons à μ . Il faut montrer qu'il existe un unique homomorphisme w qui complète commutativement le diagramme. Pour les trois produits semi-directs on a $(a, g) = (a, 1)(1, g)$ ($a \in H$ ou K ou $H \rtimes K$ et $g \in G$), et donc, avec les mêmes notations, on doit avoir $u(a, g) = u(a, 1)\mu(g)$, $v(a, g) = v(a, 1)\mu(g)$, $w(a, g) = w(a, 1)\mu(g)$. Mais alors, si $\bar{w}$ est l'homomorphisme (unique) dont la restriction à H (resp. K) vaut $u(-, 1)$ (resp. $v(-, 1)$), on a nécessairement $w(z, g) = \bar{w}(z)\mu(g)$, ($z \in H * K$). Il reste à vérifier que w ainsi défini est un homomorphisme. On a

- $w((z, g)(z', g')) = w(z\theta_g(z'), gg') = \bar{w}(z\theta_g(z'))\mu(gg') = \bar{w}(z)(\bar{w}(\theta_g(z'))\mu(g)\mu(g'))$

et par ailleurs,

- $w(z, g)w(z', g') = \bar{w}(z)\mu(g)\bar{w}(z')\mu(g')$.

Il faut donc vérifier l'égalité

$$\bar{w}(\theta_g(z')) = \mu(g)\bar{w}(z')\mu(g)^{-1},$$

pour tout $z' \in H * K$, c'est à dire, vu la définition de $\bar{w}$, de vérifier l'égalité analogue pour u ou v au lieu de $\bar{w}$ et a au lieu de z' , $a \in H$ ou K . Mais on a $(1, g)(a, 1) = (\theta_g(a), g)$, et donc en prenant u des deux membres, $\mu(g)u(a, 1) = u(\theta_g(a), 1)\mu(g)$, et de même pour v .

4.2. Nous pouvons maintenant aborder la recherche du cg $\mathcal{D}(H, K, G)$. D'après le lemme c'est le cg associé au pcg $(H * K) \rtimes G \xrightleftharpoons[b]{s} G$, avec $s(z, g) = g, b(z, g) = m(z)g$, m étant défini sur chaque cofacteur de $H * K$ comme étant l'inclusion. L'image de m est donc le sous-groupe HK de G . On a

$$\ker s = \{(z, 1)\} | z \in H * K$$

$$\ker b = \{(z, m(z)^{-1})\} | z \in H * K$$

Un calcul simple montre que la condition $[\ker s, \ker b] = 1$ s'écrit

$$(*) \quad z * \zeta * z^{-1} = \theta_{m(z)}(\zeta)$$

pour tous $z, \zeta \in H * K$. Notons U le sous groupe distingué de $H * K$ engendré par ces relations.

On fait opérer K sur H par $\theta_k(h) = khk^{-1}$, ce qui permet de définir deux homomorphismes de groupes

$$\omega : H * K \rightarrow H \rtimes K \quad \alpha : H \rtimes K \rightarrow H * K / U$$

de la manière suivante : $\omega(h) = (h, 1), \omega(k) = (1, k)$ pour $h \in H$ et $k \in K$; avec les mêmes notations on pose $\alpha(h, k) =$ classe de $h * k$ mod U , et les relations $(*)$ ci-dessus montrent que c'est effectivement un homomorphisme. Il est clair que ω est surjectif, et il en va de même de α . En effet tout élément de $z \in H * K$ s'écrit comme un produit de la forme $h_1 * k_1 * h_2 * k_2 \dots$ et d'après la relation $(*)$, on a $k_1 * h_2 = \theta_{k_1}(h_2) * k_1$, mais alors z est égal, modulo U , à un terme de la forme $h * k$.

Détermination de $\omega(U)$. Par récurrence sur la longueur des mots z et ζ , on montre facilement que les relations $(*)$ sont toutes conséquentes des seules

$$(**) \quad h * k * h^{-1} = \theta_h(k) \quad \text{et} \quad k * h * k^{-1} = \theta_k(h)$$

où h parcourt H et k, K . Un calcul simple montre que l'on a

$$\omega(h * k * h^{-1} * \theta_h(k)^{-1}) = ([h, k], [h, k]^{-1})$$

et puisque, ω est surjectif, $\omega(U)$ est le sous groupe distingué de $H \rtimes K$ engendré par tous les éléments (γ, γ^{-1}) où γ parcourt tous les commutateurs $[h, k] = hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$. Attention, le premier γ est dans H et le second dans K !

Détermination de $\alpha \circ \omega(U)$. Par définition, $\alpha(\gamma, \gamma^{-1})$ est la classe de $\gamma_H * \gamma_K^{-1}$ mod U , où l'on a indiqué en indice le groupe dans lequel on considère le même commutateur $\gamma = hkh^{-1}k^{-1}$. Or, d'après la première des relations (**), on a

$$h * k * h^{-1} * k^{-1} = (h * k * h^{-1}) * k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} \in K$$

et d'après la seconde on a

$$h * k * h^{-1} * k^{-1} = h * (k * h * k^{-1}) = h(khk^{-1}) \in H$$

mais alors on a $\gamma_H = \gamma_K$ mod U et donc $\alpha(\gamma, \gamma^{-1}) = 1$ mod U . Ainsi on a démontré que $\alpha \circ \omega(U) = 1$, i.e. que α se factorise à travers la projection $p : H \rtimes K \rightarrow (H \rtimes K)/\omega(U)$ suivie d'un homomorphisme $\bar{\alpha} : (H \rtimes K)/\omega(U) \rightarrow (H * K)/U$. Notons aussi $\bar{\omega} : H * K/U \rightarrow (H \rtimes K)/\omega(U)$ l'application induite par ω . Il résulte des définitions que l'on a $\bar{\omega} \circ \bar{\alpha} \circ p = p$ et par conséquent $\bar{\omega} \circ \bar{\alpha} = \text{id}$ donc que $\bar{\alpha}$ est injectif; comme il est aussi surjectif, c'est un isomorphisme, et $\bar{\omega}$ est son inverse. Ainsi le cg cherché est

$$\mathcal{D}(H, K, G) : (H \rtimes K)/\omega(U) \rtimes G \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{b} \end{matrix} G$$

avec $s(h, k, g) = g, b(h, k, g) = hkg$.

Posons $L = \ker m/\omega(U)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \omega(U) & \twoheadrightarrow & \ker m & \twoheadrightarrow & L \\ \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\ \omega(U) & \longrightarrow & H \rtimes K & \twoheadrightarrow & (H \rtimes K)/\omega(U) \\ & & \downarrow m & & \downarrow \bar{m}=b \\ & & HK & \xrightarrow{=} & HK \end{array}$$

à lignes et colonnes exactes. On en déduit que l'on a $L = \ker s \cap \ker b$. Notons $f : H \cap K \rightarrow (H \rtimes K)/\omega(U)$ l'application $\gamma \mapsto (\gamma^{-1}, \gamma)$. C'est un homomorphisme injectif dont l'image est $\ker m$. Notons $[H, K]$ le sous-groupe de $H \cap K$ engendré par les commutateurs $[h, k] = hkh^{-1}k^{-1}$ avec $h \in H$ et $k \in K$. Il est distingué dans G , donc dans $H \cap K$. Il résulte de la détermination de $\omega(U)$ que l'on a $f([H, K]) \subset \omega(U)$. Mais, soient $\gamma \in [H, K]$ et $(h, k) \in H \rtimes K$. Un calcul simple montre que l'on a

$$(h, k)(\gamma, \gamma^{-1})(h, k)^{-1} = (k\gamma^{-1}k^{-1}, k\gamma k^{-1}) = f(k\gamma k^{-1})$$

si bien que l'image de $[H, K]$ par f est distinguée dans $\ker m$, et est donc égale à $\omega(U)$. Il vient :

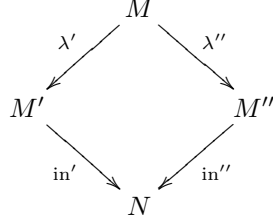
4.3. Théorème : On a $\pi_2(\mathcal{D}(H, K, G)) = H \cap K/[H, K]$.

4.4 Généralisation. On cherche maintenant la somme amalgamée $\mathcal{Y}$ d'un diagramme de cat-groupes

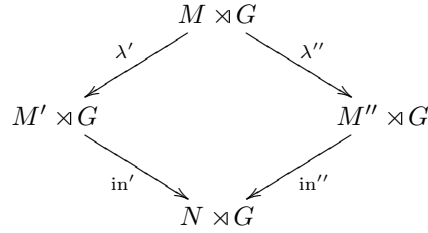
$$\mathcal{X}' \xleftarrow{f'} \mathcal{X} \xrightarrow{f''} \mathcal{X}''$$

ayant même niveau 1, disons un groupe G , avec $f'_1 = f''_1 = \text{id}$.

4.4.1. Soit



un carré cocartésien de groupes. Soit G un groupe opérant sur M, M' et M'' , de façon compatible avec les homomorphismes λ' et λ'' . Il existe une unique opération de G sur N telle que in' et in'' soient compatibles avec les opérations. Elle est caractérisée par le fait que $\theta_g \circ \text{in}' = \text{in}' \circ \theta_g$, et la relation analogue avec in'' au lieu de in' . On voit alors facilement que le diagramme précédent, lorsque N est ainsi muni de sa structure de groupe avec opérateurs, devient cocartésien dans la catégorie des groupes sur lesquels G opère. Considérons alors le carré commutatif de groupes



où l'on a écrit λ' au lieu de $\lambda' \rtimes \text{id}$, etc. On a l'analogue du lemme 4.1. :

4.4.2. Lemme : Ce carré est cocartésien.

Démonstration : Soit $f : M \rtimes G \rightarrow H$ un homomorphisme. Posons $\lambda(m) = f(m, 1)$ et $\mu(g) = f(1, g)$ pour $m \in M$ et $g \in G$. Alors on a $f(m, g) = \lambda(m)\mu(g)$, λ et μ sont des homomorphismes, et si l'on exprime que f est un homomorphisme, on trouve que pour tous m et g on a

$$(*) \quad \lambda(\theta_g(m)) = \mu(g)\lambda(m)\mu(g^{-1}).$$

Réciproquement la donnée de deux homomorphismes $\lambda : M \rightarrow H$ et $\mu : G \rightarrow H$ liés par la relation $(*)$ permet de retrouver un homomorphisme $f : M \rtimes G \rightarrow H$ en posant $f(m, g) = \lambda(m)\mu(g)$. Donnons nous donc deux homomorphismes $M' \rtimes G \rightarrow H$ et $M'' \rtimes G \rightarrow H$ qui complètent le diagramme en le laissant commutatif. On voit sans peine que le premier est défini par un couple d'homomorphismes $\phi' : M' \rightarrow H$, $\mu : G \rightarrow H$ et le second par $\phi'' : M'' \rightarrow H$ et le même μ et que l'on a

$$\text{in}' \circ \lambda' = \text{in}'' \circ \lambda''.$$

Mais alors, il existe un unique $\phi : N \rightarrow H$ tel que $\phi \circ \text{in}' = \phi'$ et $\phi \circ \text{in}'' = \phi''$. Pour terminer la démonstration, il suffit de vérifier que l'on a $\phi(\theta_g(n)) = \mu(g)\phi(n)\mu(g^{-1})$, et pour cela de vérifier que cette formule est vraie quand on remplace n par $\text{in}'(m')$ ou $\text{in}''(m'')$, ce qui ne présente aucune difficulté.

4.4.3. Revenons à la somme amalgamée de $\mathcal{X}' \xleftarrow{f'} \mathcal{X} \xrightarrow{f''} \mathcal{X}''$. On écrit $\mathcal{X} : M \rtimes G \xrightleftharpoons[b]{s} G$, et de même pour $\mathcal{X}'$ et $\mathcal{X}''$ en introduisant les groupes M', M'' . Alors f' et f'' au niveau 2 sont définis, comme en 4.4.1., par des homomorphismes $\lambda' : M \rightarrow M'$ et $\lambda'' : M \rightarrow M''$. La première étape de la construction de la somme amalgamée cherchée consiste en la recherche de la somme amalgamée du diagramme $M' \rtimes G \xleftarrow{f'} M \rtimes G \xrightarrow{f''} M'' \rtimes G$, qui est, d'après le lemme précédent, égale à $N \rtimes G$. Les propriétés universelles des colimites montrent qu'il existe une unique structure de pré-cat groupe $N \rtimes G \xrightleftharpoons[b]{s} G$ telle que in' et in'' soient des morphismes de pré-cat groupes au niveau 2, le niveau 1 étant l'identité de G .

L'étape suivante consiste en la détermination de $\ker s$ et $\ker b$. Par définition, $b : N \rightarrow G$ est l'unique homomorphisme tel que $b \circ \text{in}' = b : M' \rightarrow G$ et $b \circ \text{in}'' = b : M'' \rightarrow G$, et alors on a $b(n, g) = b(n)g$. Par ailleurs on a $s(n, g) = g$. Ainsi on a

$$\ker s = N \rtimes (1) \quad \ker b = \{(n, g) | g = b(n)^{-1}\}.$$

Finalement, $\mathcal{Y}_2$ est le quotient de N par les relations exprimant que $\ker s$ et $\ker b$ commutent. Écrivons que $(n, 1) \in \ker s$ et $(\nu, b(\nu)^{-1}) \in \ker b$ commutent. Il vient $(n, 1)(\nu, b(\nu)^{-1}) = (n\nu, b(\nu)^{-1})$ et $(\nu, b(\nu)^{-1})(n, 1) = (\nu\theta_{b(\nu)^{-1}}(n), b(\nu)^{-1})$, ce qui donne pour tous $n, \nu \in N$,

$$** \quad \nu n \nu^{-1} = \theta_{b(\nu)}(n).$$

Notons U le sous groupe distingué de N engendré par ces relations et $\rho : N \rightarrow N/U$ l'application quotient. Par ailleurs N est le quotient de $M' * M''$ par le sous groupe distingué engendré par les relations $f'(m) = f''(m)$, et soit r l'application quotient. Tout élément $z \in N/U$ se relève en un élément $A = m'_1 * m''_1 * m'_2 * m''_2 \cdots \in M' * M''$ avec les $m'_i \in M'$ et $m''_i \in M''$ et donc $z = \rho \circ r(A)$. Mais la relation $**$ et les définitions montrent que l'on a $\rho \circ r(m''_1 * m'_2) = \rho \circ r(\theta_{b(m'_1)}(m'_2) * m''_1)$. On peut donc, sans changer z , remplacer A par $B = m'_1 * \theta_{b(m'_1)}(m'_2) * m''_1 * m''_2 \cdots = (m'_1 \theta_{b(m'_1)}(m'_2)) * (m''_1 m''_2) \cdots$ dont la longueur est strictement plus courte que celle de A . Par récurrence sur la longueur, on voit donc que tout z a un antécédent de la forme $m' * m''$. Prenons donc deux éléments $z = \rho \circ r(m' * m'')$ et $\zeta = \rho \circ r(\nu' * \nu'')$ de N/U et multiplions les :

$$z\zeta = \rho \circ r(m' * m'' * \nu' * \nu'') = \rho \circ r((m' \theta_{b(m'')}(\nu')) * m'' \nu'').$$

Pour tenir compte de ce résultat, on introduit le groupe $M' \rtimes M''$ dont l'ensemble sous jacent est $M' \times M''$, mais dont la multiplication est donnée par la formule

$$(m', m'')(\nu', \nu'') = (m' \theta_{b(m'')}(\nu'), m'' \nu''),$$

et soit $M' \bar{\times} M''$ le quotient de ce groupe par le sous-groupe distingué engendré par tous les $(f'(m), f''(m)^{-1})$ lorsque m parcourt M . La classe de (m', m'') dans $M' \bar{\times} M''$ se notera $\overline{m', m''}$. L'homomorphisme $M' * M'' \rightarrow M' \bar{\times} M''$ défini par $m' \mapsto \overline{m', 1}$ et $m'' \mapsto \overline{1, m''}$ prend la même valeur sur $f'(m)$ et $f''(m)$ pour tout $m \in M$, ce qui signifie qu'il définit un unique homomorphisme, évidemment surjectif,

$$\omega : N \rightarrow M' \bar{\times} M''.$$

Soit par ailleurs

$$\alpha : M' \bar{\times} M'' \rightarrow N/U$$

l'application $\overline{m', m''} \mapsto \rho \circ r(m' * m'')$. Elle est bien définie car $(f'(m), f''(m)^{-1}) \mapsto \rho(r(f(m) * f''(m)^{-1})) = \rho(1) = 1$, et c'est un homomorphisme *surjectif* d'après des calculs précédents.

Image de U par ω . On vérifie, par récurrence sur la longueur des mots, que les relations $**$ sont toutes conséquence des seules relations (où l'on écrit pour simplifier m', m'' au lieu de $\text{in}'(m'), \text{in}''(m'')$,

$$*** \quad m' m'' m'^{-1} \theta_{b(m')} (m'')^{-1} \quad m'' m' m''^{-1} \theta_{b(m'')} (m')^{-1}.$$

Pour trouver des générateurs de $\omega(U)$, il suffit donc de calculer les valeurs prises par ω sur ces relations, ce qui donne

$$\begin{aligned} \omega(m' m'' m'^{-1} \theta_{b(m')} (m'')^{-1}) &= \overline{m' \theta_{b(m'')} (m')^{-1}, m'' \theta_{b(m')} (m'')^{-1}} \\ \omega(m'' m' m''^{-1} \theta_{b(m'')} (m')^{-1}) &= 1. \end{aligned}$$

Détermination de $\alpha \circ \omega(U)$. On a d'abord

$$\alpha \circ \omega(m' m'' m'^{-1} \theta_{b(m')} (m'')^{-1}) = \rho \circ r(m' \theta_{b(m'')} (m')^{-1} * m'' \theta_{b(m')} (m'')^{-1})$$

Mais par ailleurs, $\rho \circ r(m' \theta_{b(m'')} (m')^{-1}) = \rho \circ r(m' * m'' * m'^{-1} * m''^{-1})$ et $\rho \circ r(m'' \theta_{b(m')} (m'')^{-1}) = \rho \circ r(m'' * m' * m''^{-1} * m'^{-1})$. Donc $\alpha \circ \omega(m' m'' m'^{-1} \theta_{b(m')} (m'')^{-1}) = 1$. Les homomorphismes α et ω passent au quotient et induisent le diagramme

$$N/U \xrightarrow{\bar{\omega}} (M' \bar{\times} M'')/\omega(U) \xrightarrow{\bar{\alpha}} N/U$$

Soit $z \in N/U$. Il existe un couple (m', m'') tel que $z = \rho \circ r(m' * m'')$. On a donc $\bar{\alpha} \circ \bar{\omega}(z) = \alpha \circ \omega(r(m' * m'')) = \alpha(\overline{m', 1.1, m''}) = \alpha(\overline{m', m''}) = \rho \circ r(m' * m'')$. Ainsi on a $\bar{\alpha} \circ \bar{\omega} = \text{id}$. Comme ω est surjectif, $\bar{\alpha}$ et $\bar{\omega}$ sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre, et on a démontré l'assertion :

$\mathcal{Y}_2$ est canoniquement isomorphe à $(M' \bar{\times} M'')/\omega(U)$. Pour terminer la description de $\mathcal{Y}$ il reste à exhiber $b : (M' \bar{\times} M'')/\omega(U) \rightarrow G$. On définit d'abord $b : M' \bar{\times} M'' \rightarrow G$ par $b(\overline{m', m''}) = b(m')b(m'')$, dont l'image

est le sous groupe distingué $b(M')b(M'') = b(N)$ de G . Cet homomorphisme passe au quotient par $\omega(U)$ et définit le $b : (M' \bar{\times} M'')/\omega(U) \rightarrow b(N)$ cherché, que l'on désignera par β pour le distinguer des précédents. Alors il vient par définition, $\pi_2(\mathcal{Y}) = \ker \beta$, et comme en 4.3. on montre que l'on a une suite exacte

$$\omega(U) \twoheadrightarrow \ker b \twoheadrightarrow \ker \beta.$$

Remarquons que la formule donnant le produit dans $M' \bar{\times} M''$ se simplifie pour les éléments de $\ker b$. En effet, si on a $\overline{m', m''} \in \ker b$ et $\overline{\nu', \nu''} \in M' \bar{\times} M''$, il vient $\overline{m', m''} \cdot \overline{\nu', \nu''} = \overline{m' \theta_{b(m'')}(\nu'), m'' \nu''}$, mais par hypothèse on a $b(m'') = b(m')^{-1}$, et donc il vient $\theta_{b(m'')}(\nu') = \theta_{b(m'^{-1})}(\nu') = m'^{-1} \nu' m'$. Finalement, on obtient

$$\overline{m', m''} \cdot \overline{\nu', \nu''} = \overline{\nu' m', m'' \nu''}.$$

4.4.4. Le cas $M' = M''$. Alors les générateurs de $\omega(U)$ se simplifient, car dans ce cas, $m' \theta_{b(m'')}(m'^{-1}) = m' m'' m'^{-1} m''^{-1} = [m', m'']$ et par conséquent les générateurs cherchés sont tous les $\overline{[m', m'']}, \overline{[m'', m']}$. Il est commode d'introduire les homomorphismes $\varphi : M' \rightarrow M' \rtimes M'$, $\gamma \mapsto (\gamma^{-1}, \gamma)$, et $\bar{\varphi}$ qui est le composé du précédent et de l'application canonique $\bar{\varphi} : M' \rtimes M'' \rightarrow M' \bar{\times} M''$ et qui est à valeurs dans $\ker b$.

Une formule dans $M' \rtimes M'$. Soient $(m', m'') \in M' \rtimes M''$ et $\gamma \in M'$. On a d'abord $(m', m'')^{-1} = (\theta_{b(m'')}^{-1}(m'^{-1}), m''^{-1})$, ce qui permet de calculer ensuite l'expression $(m', m'') \varphi(\gamma) (m', m'')^{-1}$. Il vient $(m', m'') \varphi(\gamma) (m', m'')^{-1} = (m', m'') (\gamma^{-1}, \gamma) (m', m'')^{-1} = (m' \theta_{b(m'')}(\gamma^{-1}, m'' \gamma) (m', m'')^{-1} = (m' m'' \gamma^{-1} m''^{-1}, m'' \gamma) (\theta_{b(m'')}^{-1}(m'^{-1}), m''^{-1}) = (m' m'' \gamma^{-1} m''^{-1}, m'' \gamma) (m''^{-1} m'^{-1} m'', m''^{-1}) = (m' m'' \gamma^{-1} m''^{-1} \theta_{b(m'' \gamma)}(m''^{-1} m'^{-1} m''), m'' \gamma m''^{-1}) = (m'' \gamma^{-1} m''^{-1}, m'' \gamma m''^{-1}) = \varphi(m'' \gamma m''^{-1})$.

On a démontré :

$$(1) \quad (m', m'') \varphi(\gamma) (m', m'')^{-1} = \varphi(m'' \gamma m''^{-1}).$$

Dans $M' \bar{\times} M''$ il vient donc

$$(2) \quad \overline{m', m''} \bar{\varphi}(\gamma) \overline{m', m''}^{-1} = \bar{\varphi}(m'' \gamma m''^{-1}).$$

Cette dernière formule montre que l'image de $\bar{\varphi}$ est un sous-groupe distingué de $M' \bar{\times} M'$ et de $\ker b$. De même, $\bar{\varphi}([M', M'])$ est distingué, et on a vu plus haut que $\omega(U)$ est le plus petit sous-groupe distingué de $M' \bar{\times} M''$ contenant $\bar{\varphi}([M', M'])$, on a donc l'égalité

$$\bar{\varphi}([M', M']) = \omega(U).$$

Détermination de $\ker \bar{\varphi}$. Soit $\tilde{M} \subset M'$ le sous-groupe distingué de M' engendré par $f'(M)$. La formule (1) montre que $\varphi(\tilde{M})$ est distingué dans $M' \rtimes M'$. Mais comme $\bar{\varphi}(f'(m)) = 1$ pour tout $m \in M$, il résulte de la

définition de $M' \bar{\times} M'$ que $\varphi(\tilde{M}) = \ker(M' \rtimes M' \rightarrow M' \bar{\times} M')$. On a donc $\tilde{M} = \ker \bar{\varphi}$. L'homomorphisme $\bar{\varphi} : M' \rightarrow \ker b$ se factorise donc à travers le quotient $M'/\tilde{M}$, et l'on notera $\psi : M'/\tilde{M} \rightarrow \ker b$ l'homomorphisme *injectif* induit.

Conclusion. Mais puisque $\bar{\varphi}$ applique *surjectivement* $[M', M']$ sur $\omega(U)$, la restriction de ψ à $[M'/\tilde{M}, M'/\tilde{M}]$ est un isomorphisme sur $\omega(U)$. Le diagramme en traits pleins à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} [M'/\tilde{M}, M'/\tilde{M}] & \longrightarrow & M'/\tilde{M} & \twoheadrightarrow & (M'/\tilde{M})^{\text{ab}} \\ \approx \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \\ \omega(U) & \longrightarrow & \ker b & \twoheadrightarrow & \ker \beta \end{array}$$

se laisse compléter par une flèche (en pointillé) qui est *injective*. Par ailleurs on a $M'/\tilde{M} = \text{coker}(f' : M \rightarrow M')$, et puisque le foncteur abélianisation commute aux colimites, $(\text{coker } f')^{\text{ab}} = \text{coker } f'^{\text{ab}}$

On a donc démontré

Proposition : Lorsque l'on a $M' = M''$, $\pi_2(\mathcal{Y})$ contient un sous groupe isomorphe à $\text{coker } f'^{\text{ab}}$.

4.4.5. On va considérer le cas particulier suivant. Soient $\mu : F_k \rightarrow G$ et $\nu : F_l \rightarrow G$ deux homomorphismes (où F_n désigne le groupe libre à n générateurs), et soit $\tau : F_{k+l} = F_k * F_l \rightarrow G$ l'homomorphisme dont les restrictions à F_k et F_l sont respectivement μ et ν . Posons $\mathcal{X} = \mathcal{D}(\nu)$ et $\mathcal{X}' = \mathcal{D}(\tau)$ (notations de 3.). Le morphisme $f' : \mathcal{X} = \mathcal{D}(\nu) \rightarrow \mathcal{X}' = \mathcal{D}(\tau)$, résulte des constructions universelles des cônes, et s'explique comme suit. Si l'on part d'un diagramme commutatif de groupes

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\lambda} & G \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ H' & \xrightarrow{\lambda'} & G' \end{array}$$

on obtient un homomorphisme $\rho : \Gamma(\lambda) \rightarrow \Gamma(\lambda')$ qui, sur les générateurs, applique $(h, g) \in H \times G$ sur $(u(h), v(g)) \in H' \times G'$, et qui est compatible avec les relations données en (3.2.). Soit $w : \text{coker } \lambda \rightarrow \text{coker } \lambda'$ l'homomorphisme défini par le carré commutatif ci-dessus. Alors, passant aux abélianisés, $\rho^{\text{ab}} : \Gamma(\lambda)^{\text{ab}} \rightarrow \Gamma(\lambda')^{\text{ab}}$, i.e.

$$\rho^{\text{ab}} : H^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[\text{coker } \lambda] \rightarrow H'^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[\text{coker } \lambda']$$

est simplement donné par $h \otimes x \mapsto u^{\text{ab}}(h) \otimes w(x)$ pour $h \in H^{\text{ab}}$ et $x \in \text{coker } \lambda$.

Dans le cas qui nous occupe, nous partons du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_l & \xrightarrow{\nu} & G \\ \text{in}_2 \downarrow & & \downarrow = \\ F_{k+l} & \xrightarrow{\tau} & G \end{array}$$

où in_2 est l'inclusion dans le deuxième cofacteur de $F_{k+l} = F_k * F_l$. Dans ces conditions on a une suite exacte

$$\mathbb{Z}^l \otimes \mathbb{Z}[\text{coker } \nu] \rightarrow \mathbb{Z}^{k+l} \otimes \mathbb{Z}[\text{coker } \tau] \rightarrow \text{coker } f'^{\text{ab}} \rightarrow 0$$

où la première flèche est

$$z \otimes x \mapsto (0, z) \otimes w(x)$$

pour $z \in \mathbb{Z}^l$ et $x \in \text{coker } \nu$. Par ailleurs w est surjective et donc il reste simplement $\text{coker } f'^{\text{ab}} = \mathbb{Z}^k \otimes \mathbb{Z}[\text{coker } \tau]$

La proposition 4.4.4. permet donc d'affirmer que

Proposition : Soit $\mathcal{Y}$ la somme amalgamée du diagramme

$$\mathcal{D}(\tau) \xleftarrow{f'} \mathcal{D}(\nu) \xrightarrow{f'} \mathcal{D}(\tau)$$

Alors on a $\pi_2(\mathcal{Y}) \neq 0$.

Il résulte des propriétés générales des sommes amalgamées que le cg $\mathcal{Y}$ précédent peut être aussi réalisé comme suit. Soit $\lambda : F_{2k} = F_k * F_k \rightarrow G$ l'homomorphisme dont les restrictions aux deux cofacteurs F_k sont toutes deux égales à μ . Alors $\mathcal{Y}$ est la somme amalgamée du diagramme

$$\mathcal{D}(\lambda) \xleftarrow{\tilde{G}} \mathcal{D}(\nu) \xrightarrow{\tilde{G}} \mathcal{D}(\lambda).$$

Mais par ailleurs, $\mathcal{D}(\lambda)$ est la somme amalgamée du diagramme

$$\mathcal{D}(\mu) \xleftarrow{\tilde{G}} \mathcal{D}(\mu) \xrightarrow{\tilde{G}} \mathcal{D}(\mu).$$

Il résulte donc de la proposition précédente que l'on a $\pi_2(\mathcal{D}(\lambda)) \neq 0$ et $\pi_2(\mathcal{Y}) \neq 0$. Nous verrons que lorsque $G = F_s$ est un groupe libre, et $f : F_r \rightarrow G$, un homomorphisme, alors $\pi_2(\mathcal{D}(f))$ est le π_2 du CW-complexe cône de l'application continue d'un bouquet de r cercles dans le bouquet de s cercles représentant f au niveau des groupes fondamentaux (confer 10.2.). Soit X le CW-complexe de dimension 2 correspondant à λ . Si on lui ajoute des 2-cellules attachées à son 1-squelette grâce à l'homomorphisme ν on obtient un CW-complexe Y dont le π_2 est égal à $\pi_2(\mathcal{Y})$. On a donc :

4.4.6. Théorème : Le CW-complexe X vérifie la conjecture de Whitehead.

Par exemple, on prend un mot m dans un groupe libre G , et on considère l'application $\lambda : F_2 \rightarrow G$ qui vaut m pour chaque générateur de F_2 . Le CW-complexe X correspondant vérifie la conjecture de Whitehead.

Question : est-ce un résultat nouveau ? Y-a-t-il une démonstration plus simple ?

4.5. Dans le même ordre d'idée, donnons rapidement la démonstration de Cockcroft, dans l'esprit de cet exposé, du

Théorème : Soient z un mot du groupe libre G , $n > 1$ un entier et $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow G$ l'homomorphisme défini par le mot z^n . Alors le CW-complexe défini par μ vérifie la conjecture de Whitehead.

Démonstration : Soit $\tau : F_{k+1} = \mathbb{Z} * F_k \rightarrow G$ un homomorphisme dont la restriction au cofacteur $\mathbb{Z}$ est égale à μ . Nous devons montrer que $\pi_2(\mathcal{D}(\tau))$ est non nul. Partons des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^{\text{ab}}(\mu) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[\text{coker } \mu] & \xrightarrow{b} & G'^{\text{ab}} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma^{\text{ab}}(\tau) = \mathbb{Z}^{k+1} \otimes \mathbb{Z}[\text{coker } \tau] & \xrightarrow{b'} & G''^{\text{ab}} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{p} & \text{coker } \mu \\ & \searrow p' & \downarrow w \\ & & \text{coker } \tau \end{array}$$

où G' et G'' désignent les sous groupes distingués de G engendrés respectivement par l'image de μ et l'image de τ . Notons $e_1 = (1, 0 \cdots 0)$ l'image de 1 par l'inclusion $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^{k+1}$ et $a \in \Gamma(\mu)$ un élément tel que $b(a) = z^n$ (par exemple le générateur $(1, 1) \in \mathbb{Z} \times G$ de $\Gamma(\mu)$). D'après 3.5., $1 \otimes (p(z) - 1)$ est un élément non nul de $\ker b = \pi_2(\mathcal{D}(\mu))$. Son image par ρ appartient à $\ker b'$. Si cette image est non nulle, c'est un élément non nul de $\pi_2(\mathcal{D}(\tau))$ et la démonstration est terminée. Si cette image est nulle, il vient

$$0 = \rho(1 \otimes (p(z) - 1)) = e_1 \otimes (w(p(z)) - 1) = e_1 \otimes (p'(z) - 1),$$

et cette égalité dans le groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{k+1} \otimes \mathbb{Z}[\text{coker } \tau]$ implique $p'(z) = 1$. Comme la suite

$\Gamma(\tau) \xrightarrow{b'} G \xrightarrow{p'} \text{coker } \tau$ est exacte, il existe un $y \in \Gamma(\tau)$ tel que $b'(y) = z$. Donc on a $b'(y^n) = z^n = b' \circ \rho(a)$, mais alors $\rho(a)^{-1}y^n \in \ker b'$.

Il reste à montrer que cet élément est non nul. Pour cela, on regarde son image dans l'abélianisé. Notons par une barre surlignée l'image dans l'abélianisé. Alors $\bar{a} = 1 \otimes 1$ et $\rho(\bar{a}) = e_1 \otimes 1$. Donc

$$\overline{\rho(a)^{-1}y^n} = n\bar{y} - e_1 \otimes 1.$$

Puisque n est supérieur à 1, cette expression ne peut s'annuler dans le groupe abélien libre $\Gamma^{\text{ab}}(\tau)$ dont $e_1 \otimes 1$ est un élément de base, et il en va de même de $\rho(a)^{-1}y^n$.

Le foncteur $\frac{2}{\pi}$

5. 2-groupoïdes Rappelons qu'un 2-groupoïde $\mathcal{X}$ est la donnée

- d'un ensemble $\mathcal{X}_0$ appelé ensemble des objets de $\mathcal{X}$,
- pour chaque couple d'objets (a, b) , d'une petite catégorie $\mathcal{X}(a, b)$ (dont la loi de composition $\circ$ est appelée la loi de composition interne de $\mathcal{X}$, et dont les applications source, but et identité seront notées s, b et i),
- pour chaque triplet (a, b, c) d'objets, d'un foncteur appelé foncteur de composition externe $\mathcal{X}(a, b) \times \mathcal{X}(b, c) \rightarrow \mathcal{X}(a, c)$ qui sera noté $*$,

- pour chaque objet a , d'un foncteur, appelé id_a , de la catégorie $*$ à un objet et un morphisme vers $\mathcal{X}(a, a)$,
- pour tout couple d'objets (a, b) , d'un foncteur, noté -1 en exposant, $\mathcal{X}(a, b) \rightarrow \mathcal{X}(b, a)$.

Ces données sont soumises aux axiomes suivants :

- 1) la loi de composition $*$ est associative
- 2) pour cette loi id est élément neutre à gauche et à droite,
- 3) pour cette loi, -1 est un inverse.

Les objets (resp. les flèches) de $\mathcal{X}(a, b)$ sont appelés les flèches ou 1-flèches (resp. 2-flèches) du 2-groupeïde.

Les résultats suivants sont bien connus.

- Soient α et β des deux-flèches de $\mathcal{X}(a, b)$, α' et β' des deux-flèches de $\mathcal{X}(b, c)$ tels que $b(\alpha) = s(\beta)$ et $b(\alpha') = s(\beta')$. Alors on a

$$(C) \quad (\beta' * \beta) \circ (\alpha' * \alpha) = (\beta' \circ \alpha') * (\beta \circ \alpha)$$

En particulier, soit $\alpha : u \Rightarrow v$ une 2-flèche de $\mathcal{X}(a, b)$ de source et but, respectivement u, v et de même soit $\beta : t \Rightarrow w$ une 2-flèche de $\mathcal{X}(b, c)$. On a

$$(D) \quad \beta * \alpha = (\beta * i(v)) \circ (i(t) * \alpha) = (i(w) * \alpha) \circ (\beta * i(u))$$

- Les catégories $\mathcal{X}(a, b)$ sont des groupeïdes, l'inverse de la 2-flèche $\alpha : u \Rightarrow v$ est la 2-flèche $\alpha^- = i(u) * \alpha^{-1} * i(v) : v \Rightarrow u$ et, étant données deux 2-flèches composables α et β de $\mathcal{X}(a, b)$ on a $\beta \circ \alpha = \beta * i(b(\alpha)^{-1}) * \alpha$.
- Soit $\mathcal{X}$ un 2-groupeïde. On note $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ les catégories ayant $\mathcal{X}_0$ pour objets, dont les morphismes sont les 1-flèches (resp. les 2-flèches) de $\mathcal{X}$ et la loi de composition, la composition externe $*$. Ce sont des groupeïdes. Les applications s, b, i induisent des foncteurs (qui sont l'identité sur les objets) notés du même symbole, et l'on écrira $\mathcal{X} : \mathcal{X}_2 \xrightleftharpoons[b]{s} \mathcal{X}_1$. Réciproquement étant donné un tel diagramme de groupeïdes, qu'on appellera un pré-2-groupeïde, on définit une loi de composition interne $\circ : \mathcal{X}_2 \times_{s,b} \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_2$ qui vérifie, pour tout couple α et β composables, et tout α les égalités

$$s(\beta \circ \alpha) = s(\alpha) \quad b(\beta \circ \alpha) = b(\beta) \quad \text{et} \quad \alpha \circ i(s(\alpha)) = \alpha = i(b(\alpha)) \circ \alpha.$$

en posant $\beta \circ \alpha = \beta * i(b(\alpha))^{-1} * \alpha$. On définit la catégorie $\mathcal{X}(a, b)$ associée à deux objets a et b de $\mathcal{X}_0$ comme étant la catégorie $\mathcal{X}_2(a, b) \xrightleftharpoons[b]{s} \mathcal{X}_1(a, b)$ avec composition $\circ$. Avec ces définitions, la composition externe est fonctorielle si et seulement si les conditions (C) sont vérifiées, auquel cas $\mathcal{X}$ est un 2-groupeïde. Sinon soit $T(\mathcal{X})(a, b)$ le quotient de $\mathcal{X}(a, b)$ par ces relations. On obtient ainsi un 2-groupeïde $T(\mathcal{X})$ possédant la propriété universelle suivante : tout morphisme d'un pré-2-groupeïde $\mathcal{X}$ vers un 2-groupeïde se factorise de manière unique à travers $T(\mathcal{X})$, ou si on préfère, le foncteur T est adjoint à gauche au foncteur oubli des 2-groupeïdes vers les pré-2-groupeïdes. Le passage au quotient précédent est simplifié par le résultat suivant:

5.1. Lemme (Loday) La condition (C) est vérifiée si et seulement si quels que soient les 2-flèches α, β pour lesquelles on a $b(\alpha) = s(\beta) = \text{id}(a)$, alors il vient

$$\beta \circ \alpha = \alpha * \beta = \beta * \alpha$$

Démonstration: Puisque l'on a $i(\text{id}(a)) * \alpha = \alpha * i(\text{id}(a)) = \alpha$, et les mêmes relations pour β , il est clair que (D) implique les égalités du lemme. Réciproquement, soient $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ comme dans (C). Par définition on a $\beta \circ \alpha = \beta * i(b(\alpha))^{-1} * \alpha$ et $\beta' \circ \alpha' = \beta' * i(b(\alpha'))^{-1} * \alpha'$ et donc aussi

$$(\beta' \circ \alpha') * (\beta \circ \alpha) = \beta' * \underline{i(b(\alpha'))^{-1} * \alpha'} * \underline{\beta * i(b(\alpha))^{-1} * \alpha}$$

Comme $\text{id}(b)$ est le but du premier terme souligné, et la source du second, ces deux termes commutent, et le résultat en résulte aussitôt.

Remarque 1 : on a montré qu'un 2-groupeïde est une catégorie dans la catégorie des groupeïdes.

Remarque 2 : La colimite d'un diagramme $\mathcal{X}_\alpha$ de 2-groupeïdes s'obtient en prenant, dans la catégorie des groupeïdes, la colimite $\mathcal{X}_i$ des $(\mathcal{X}_\alpha)_i$, $i = 1, 2$, puis en appliquant le foncteur T au pré-2-groupeïde $\mathcal{X}_2 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{b} \end{smallmatrix} \mathcal{X}_1$.

Remarque 3 : Lorsque l'ensemble des objets d'un 2-groupeïde se réduit à un seul élément, on retrouve un cat-groupe.

Remarque 4 : On notera, si nécessaire, $2Gr$, la catégorie des 2-groupeïdes.

5.1.1. Soit $\mathcal{X}$ un 2-groupeïde. Soit $\mathcal{X}^1$ la catégorie ayant mêmes objets que $\mathcal{X}$ et pour flèches les classes d'équivalence de 1-flèches de $\mathcal{X}_1$ pour la relation $f \sim g$ si et seulement si il existe une 2-flèche α telle que $s(\alpha) = f$ et $b(\alpha) = g$. Le foncteur $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^1$ est adjoint à gauche du foncteur $C \rightarrow \tilde{C}$ qui à un groupeïde C fait correspondre le 2-groupeïde $C \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{b} \end{smallmatrix} C$ avec $i = s = b = \text{id}_C$. Nous pouvons maintenant donner les définitions suivantes :

5.1.2. Définition : Soit a un objet d'un 2-groupeïde $\mathcal{X}$. On pose

$$\pi_0(\mathcal{X}) = \pi_0(\mathcal{X}_1) = \pi_0(\mathcal{X}^1), \quad \pi_1(\mathcal{X}, a) = \mathcal{X}^1(a, a), \quad \pi_2(\mathcal{X}, a) = \mathcal{X}(a, a)(\text{id}(a), \text{id}(a))$$

D'après le lemme (5.1.) on a, pour tout couple $\alpha, \beta \in \mathcal{X}(a, a)(\text{id}(a), \text{id}(a))$,

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = \alpha * \beta = \beta * \alpha$$

et par conséquent $\pi_2(\mathcal{X}, a)$ est bien un groupe commutatif. Par ailleurs ces groupes coïncident avec ceux introduits en (1.1.1) lorsque $\mathcal{X}$ n'a qu'un objet.

5.1.3. Un groupe abélien peut être considéré comme un 2-groupeïde avec un seul objet 0 et une seule 1-flèche $\text{id}(0)$, et même comme un cg. Avec cette convention, l'inclusion $\pi_2(\mathcal{X}, a) \subset \mathcal{X}_2$ devient un morphisme de

2Gr. Introduisons la notion de 2-groupeïde *pointé* : ce sont les couples $(\mathcal{X}, \bullet)$ formés d'un 2-groupeïde et d'un de ses objets, et la notion de catégorie de ces êtres. Notons alors simplement $\pi_2(\mathcal{X})$ au lieu de $\pi_2(\mathcal{X}, \bullet)$. Alors $\pi_2 \rightarrow \text{id}$ devient une transformation naturelle de foncteurs de la catégorie des 2-groupeïdes pointés en elle même.

On peut définir les mêmes notions dans la catégorie des groupeïdes et on voit que l'on a une transformation naturelle de foncteurs $\pi_1 \rightarrow \text{id}$ dans la catégorie des groupeïdes pointés.

5.2. 2-catégories. Si l'on supprime la donnée du foncteur "*inverse*" on a ce que l'on appelle une 2-catégorie, et soit 2-Cat leur catégorie. Les relations (C) sont encore valables, et l'on peut, comme précédemment introduire les catégories $\mathcal{X}_2$ et $\mathcal{X}_1$ associées à la 2-catégorie $\mathcal{X}$. Oubliant la composition interne $\circ$, on obtient une pré-2-catégorie $\mathcal{X}_2 \xrightleftharpoons[s]{i} \mathcal{X}_1$.

5.2.1 Réciproquement, partant d'une pré-2-catégorie $\mathcal{X}$ il existe une construction fonctorielle qui en fait une 2-catégorie $T(\mathcal{X})$, et le foncteur T est, comme précédemment, adjoint à gauche du foncteur oubli. Mais la construction est plus délicate que dans le cas des groupeïdes. Partant d'un diagramme entre petites catégories $\mathcal{X} : A \xrightleftharpoons[s]{i} B$ ayant mêmes objets, on ne dispose plus d'un moyen de définir la composition interne comme ci-dessus. On a donc recourt à la construction intermédiaire suivante.

On commence par appliquer au diagramme $\mathcal{X}$ le foncteur *Flèches* ce qui donne un diagramme d'ensembles $Fl(\mathcal{X}) = Fl(A) \xrightleftharpoons[s]{i} Fl(B)$, dont on prend la catégorie des chemins $\text{Ch}Fl(\mathcal{X})$ qui a pour objets $Fl(B)$ et pour flèches toutes les suites d'éléments de $Fl(A)$, $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ avec $s(\alpha_{i+1}) = b(\alpha_i)$. On pose $s(\alpha) = s(\alpha_1)$ et $b(\alpha) = b(\alpha_k)$. La composition est définie par concaténation des suites composables. Soit $\text{Ch}'Fl(\mathcal{X})$ la catégorie obtenue en quotientant par la relation d'équivalence engendrée par les relations $\alpha, i(u), \beta = \alpha, \beta$ chaque fois que l'on a $s(\beta) = b(\alpha) = u$. On note désormais $\circ$ la composition interne dans cette catégorie.

Pour tout couple d'objets $x, y \in \mathcal{X}_0$, notons $\text{Ch}'Fl(\mathcal{X})(x, y)$ la sous catégorie pleine de $\text{Ch}'Fl(\mathcal{X})$ ayant pour objets $B(x, y)$. On fait le quotient, dans chaque catégorie $\text{Ch}'Fl(\mathcal{X})(a, c)$, par les relations (D) dans lesquelles $\alpha : u \Rightarrow v$ est une 2-flèche de $A(a, b)$ de source et but, respectivement u, v et $\beta : t \Rightarrow w$ une 2-flèche de $A(b, c)$. Pour chaque couple x, y , d'objets on obtient une catégorie que l'on note $\text{Ch}(\mathcal{X})(x, y)$.

Nous pouvons maintenant définir la composition externe $*$. Soient x, y, z trois objets. On définit un foncteur

$$\text{Ch}(\mathcal{X})(x, y) \times \text{Ch}(\mathcal{X})(y, z) \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{X})(x, z)$$

d'abord au niveau de $\text{Ch}Fl(\mathcal{X})$, par les formules suivantes. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A(x, y)$ et $\beta_1, \dots, \beta_k \in A(y, z)$ des suites représentant des morphismes de la catégorie des chemins. alors on pose :

$$\varphi(\alpha_k \circ \dots \circ \alpha_1, \beta_k \circ \dots \circ \beta_1) = (\beta_k * \alpha_k) \circ \dots \circ (\beta_1 * \alpha_1).$$

Plus généralement, soient r et k deux entiers on pose

$$\varphi(\alpha_k \circ \cdots \circ \alpha_1, \beta_r \circ \cdots \circ \beta_1) = \varphi(i(b(\alpha_k))^r \circ \alpha_k \circ \cdots \circ \alpha_1, i(b(\beta_r))^k \circ \beta_r \circ \cdots \circ \beta_1).$$

Il reste à montrer que φ est compatible avec les diverses relations d'équivalence introduites au cours de la construction, ce qui ne présente aucune difficulté particulière. La composition ainsi définie sera notée $*$, et la 2-catégorie résultat de ces constructions notée $T(\mathcal{X})$. Puisque T possède un adjoint à gauche, ce foncteur commute aux colimites.

5.2.2. Les colimites dans $2Cat$. Soit D un type de diagramme et soit $d : D \rightarrow 2Cat$ un diagramme. La colimite de ce diagramme s'obtient de la façon suivante. Soit O le foncteur oubli des 2-catégories vers les pré-2-catégories. Alors $O \circ d$ est un diagramme de pré-2-catégories, dont la colimite se calcule niveau par niveau : pour chaque objet t de D , on a une pré-2-catégorie

$$O(d_t) : (d_t)_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{b} \end{array} (d_t)_1$$

et, par passage aux colimites, il vient la pré-2-catégorie

$$\text{colim } O \circ d : \text{colim } d_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{b} \end{array} \text{colim } d_1 .$$

Dans une deuxième étape, on applique le foncteur T à la pré-2-catégorie précédente, et, pour chaque objet t de D et chaque $i = 1, 2$, on a un foncteur $(\text{in}_t)_i : (d_t)_i \rightarrow T(\text{colim } (O \circ d))_i$ qui en général ne commute pas aux compositions internes $\circ$. Pour obtenir enfin $\text{colim } d$, on fait donc le quotient de $T(\text{colim } (O \circ d))_2$ par les relations $\text{in}_{t2}(\alpha \circ \beta) = \text{in}_{t2}(\alpha)\text{in}_{t2}(\beta)$ chaque fois que ces expressions ont un sens.

5.2.3. Décrivons maintenant un foncteur $2Cat \rightarrow 2Gr$. Soit Σ le foncteur qui va des catégories vers les groupoïdes et qui consiste à inverser toutes les flèches. Ce foncteur est muni d'une transformation naturelle $P_\Sigma(C) : C \rightarrow \Sigma C$. Partant d'une 2-catégorie $\mathcal{C}$, on applique Σ niveau par niveau à la pré-2-catégorie $O(\mathcal{C})$, et l'on obtient un pré-2-groupoïde $\Sigma(O(\mathcal{C})) : \Sigma(\mathcal{C}_2) \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{b} \end{array} \Sigma(\mathcal{C}_1)$ auquel on applique le foncteur T , obtenant un 2-groupoïde $T(\Sigma(O\mathcal{C}))$ et des transformations naturelles $(P_\Sigma)_i : \mathcal{C}_i \rightarrow T(\Sigma(O\mathcal{C}))_i$, $i = 1, 2$. Le 2-groupoïde $\Sigma(\mathcal{C})$ est alors obtenu en faisant le quotient de $T(\Sigma(O\mathcal{C}))_2$ par les relations $(P_\Sigma)_2(\alpha \circ \beta) = (P_\Sigma)_2(\alpha)(P_\Sigma)_2(\beta)$ chaque fois que ces expressions ont un sens.

Le foncteur Σ possède la propriété universelle suivante : tout foncteur de $\mathcal{C}$ vers un 2-groupoïde $\mathcal{X}$ se factorise de manière unique à travers P_Σ , et donc Σ est adjoint à gauche du foncteur oubli.

5.2.4. Le foncteur Sc . Soit E un ensemble. La catégorie $\text{Sc}(E)$ a pour objets E et pour morphismes $E \times E$, avec $s(a, b) = a, b(a, b) = b$ et $i(a) = (a, a)$ et la composition est $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$. Ce foncteur possède un adjoint à gauche, et commute donc aux produits. Soit maintenant $\mathcal{C}$ une petite catégorie. On définit

une 2-catégorie $\text{Sc}(C)$ en posant $\text{Sc}(C)(a, b) = \text{Sc}(C(a, b))$ pour tous les couples d'objets (a, b) de C . La composition externe provient de

$$\text{Sc}(C(a, b)) \times \text{Sc}(C(b, c)) = \text{Sc}(C(a, b) \times C(b, c)) \rightarrow \text{Sc}(C(a, c)).$$

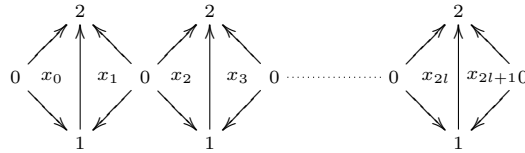
On constate que si C est un groupoïde, alors $\text{Sc}(C)$ est un 2-groupoïde. et si ce groupoïde est un groupe, on retrouve le foncteur décrit dans (1.2.2.)

Le foncteur Sc est adjoint à droite du foncteur $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}_1$. On a $(\text{Sc}(C))_1 = C$ et, si C est un groupoïde, $(\text{Sc}(C))^1 = \text{Sc}(\text{Ob}(C))$.

6. Les foncteurs $\mathcal{F}$ et $\overline{W}$.

6.1. Un groupoïde simplicial est un objet simplicial dans la catégorie des groupoïdes, i.e. un foncteur de Δ^{opp} dans la catégorie des groupoïdes. Soit F un tel foncteur. Pour chaque entier n , F_n est un groupoïde, les applications faces, $d_i : F_n \rightarrow F_{n-1}$ et dégénérescences $s_j : F_n \rightarrow F_{n+1}$ sont des morphismes de groupoïdes. Par ailleurs on peut aussi considérer F comme un diagramme d'ensembles simpliciaux $Fl(F) \xrightleftharpoons[b]{s} Ob(F)$ muni des compositions externes convenables. Dans toute la suite, *on ne considèrera que des groupoïdes simpliciaux F pour lesquels $Ob(F)$ est un ensemble simplicial discret*, c'est-à-dire concentré en degré 0, en abrégé "gs". On désignera par $\mathcal{S}$ la catégorie des ensembles simpliciaux, et par $\mathcal{S}_{\text{gr}}$ celle des gs.

6.1.1. On définit un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_{\text{gr}}$ de la façon suivante. Soit X un ensemble simplicial. Soit $pF(X)_n$ l'ensemble des suites $x = x_0 x_1 \dots x_{2l} x_{2l+1}$ d'éléments de X_{n+1} tels que $d_0 x_{2k} = d_0 x_{2k+1}$ et $d_1 d_2 \dots d_{n+1} x_{2k-1} = d_1 d_2 \dots d_{n+1} x_{2k}$ $k = 0, 1, \dots$. On notera dans la suite $0(z) = d_1 d_2 \dots d_n z$ l'origine de $z \in X_n$.



La collection des $pF_n(X)$ devient un ensemble simplicial lorsque l'on définit faces et dégénérescences par les formules $d_i x = d_{i+1} x_0 \dots d_{i+1} x_{2l+1}$ $s_i x = s_{i+1} x_0 \dots s_{i+1} x_{2l+1}$. On introduit aussi la *source* et le *but* de la suite x comme étant respectivement $o(x_0)$ et $o(x_{2l+1})$, ce qui permet de considérer la notion de suites composables, et on définit cette composition par la concaténation des suites composables. Finalement on définit $F_n(X)$ comme étant le quotient de $pF_n(X)$ par la relation d'équivalence engendrée par la suppression dans la suite x des couples $x_k x_{k+1}$ tels que $x_k = x_{k+1}$ et $l > 0$. En particulier, dans le quotient on a, quels que soient a et b , deux éléments de X_{n+1} de même origine $u \in X_0$, $aa = aabb = bb$. On note $i(u)$, ou plus précisément $i_n(u) \in F_n(X)$, cet élément commun. Maintenant $\mathcal{F}(X)$ est le gs, dont l'ensemble des objets est l'ensemble simplicial concentré en degré 0 et égal à X_0 en ce degré, et dont l'ensemble simplicial des

flèches est $F(X)$, de composition, source but, définis plus haut et l'application identique de l'objet u étant $i(u)$.

Lorsque X est réduit, on retrouve le foncteur G de Kan. À la suite $x = x_0x_1 \dots x_{2l}x_{2l+1}$ on associe $x_0x_1^{-1} \dots x_{2l}x_{2l+1}^{-1} \in G_n(X)$. Dans l'autre direction, à $y^\epsilon \in G_n(X)$ on associe la suite $y.s_0d_0y$ si $\epsilon = 1$ et la suite $s_0d_0y.y$ si $\epsilon = -1$.

Une démonstration analogue à celle de Kan pour le foncteur G montre que l'ensemble simplicial $F(X)(u, u)$ formé des suites x de source et but $u \in X_0$ a le type d'homotopie (faible si X n'est pas un complexe de Kan) de l'ensemble des lacets de X issus de u .

6.1.2. Rappelons que le foncteur $\mathcal{F}$ possède un adjoint à droite $\overline{W} : \mathcal{S}_{\text{gr}} \rightarrow \mathcal{S}$ que nous allons décrire maintenant. Soit $\mathcal{G}$ un gs. On lui associe d'abord l'ensemble bisimplicial $\mathcal{BG}$ “nerf en chaque dimension” qui en bidimension (p, q) consiste en toutes les suites $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'éléments de $\mathcal{G}_q$ telles que $b(x_i) = s(x_{i+1})$, avec les opérateurs face et dégénérescence usuels. On définit ensuite $\overline{W}(\mathcal{G})$ comme étant la diagonale d'Artin-Mazur de $\mathcal{BG}$. Rappelons que la diagonale d'Artin-Mazur d'un ensemble bisimplicial K est en dimension n la partie $D_n(K) \subset \prod_{p+q=n} K_{p,q}$ formée des suites $(k_{p,q})$ vérifiant les égalité

$$d'_{p+1}k_{p+1,q-1} = d''_0k_{p,q},$$

avec des formules compliquées pour les faces et dégénérescences. Ce foncteur s'explicite de la manière suivante. On pose

$$\overline{W}_0(\mathcal{G}) = \text{Ob}(\mathcal{G})$$

et, pour $n > 0$, $\overline{W}_n(\mathcal{G})$ est la partie de $Fl_{n-1}(\mathcal{G}) \times \dots \times Fl_0(\mathcal{G})$ formée des suites

$$(g_{n-1}, g_{n-2}, \dots, g_0), \quad g_i \in Fl_i(\mathcal{G})$$

telles que

$$b(g_{i+1}) = s(g_i).$$

$$\cdot \xrightarrow{g_{n-1}} \cdot \xrightarrow{g_{n-2}} \dots \xrightarrow{g_0} \cdot.$$

Les formules pour les faces et dégénérescences sont classiques. Rappelons les formules des faces. Pour $n > 1$ on a

- $d_0(g_{n-1}, \dots, g_0) = (g_{n-2}, \dots, g_0)$
- $d_n(g_{n-1}, \dots, g_0) = (d_{n-1}g_{n-1}, \dots, d_1g_1)$
- $d_i(g_{n-1}, \dots, g_0) = (d_{i-1}g_{n-1}, \dots, d_1g_{n-i+1}, g_{n-i-1} \circ d_0g_{n-i}, g_{n-i-2}, \dots, g_0)$ pour $0 < i < n$,

et pour $n = 1$,

- $d_i : Fl_0(\mathcal{G}) \rightarrow Ob(\mathcal{G})$, $i = 0, 1$

on a $d_0 = b$ et $d_1 = s$.

6.2. Soit $\mathcal{G}$ un gs. Notons G l'ensemble simplicial $Fl(\mathcal{G})$ et $B = Ob(\mathcal{G})$. Soit aussi X un ensemble simplicial.

La donnée d'un morphisme $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}$ est par définition la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{b} \end{array} & X_0 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow f \\ G & \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{b} \end{array} & B \end{array}$$

Il suffit de connaître φ sur les suites $(x_0 x_1)$ avec $d_0 x_0 = d_0 x_1$ et d'utiliser le produit pour connaître ce morphisme en général. Comme $(x_0 x_1 x_1 x_0) = i(0(x_0))$, il vient $\varphi(x_0 x_1) \varphi(x_1 x_0) = i(f(0(x_0)))$ et donc $\varphi(x_0 x_1) = \varphi(x_1 x_0)^{-1}$. Par ailleurs on a $(x_0.s_0 d_0 x_0.s_0 d_0 x_1.x_1) = (x_0 x_1)$ et par conséquent il vient $\varphi(x_1 x_0)^{-1} = \varphi(x_0.s_0 d_0 x_0) \varphi(x_1.s_0 d_0 x_1)^{-1}$

Posons $\tau(x) = \varphi(x.s_0 d_0 x)$. On définit ainsi une application $\tau : X_{n+1} \rightarrow G_n$, pour $n \geq 0$ ayant les propriétés suivantes :

$$s(\tau(x)) = f(0(x))$$

$$b(\tau(x)) = f(0(d_0 x))$$

$$d_i \tau(x) = \tau(d_{i+1} x) \quad \text{pour } i > 0$$

$$\tau(d_1 x) = d_0 \tau(x) \tau(d_0 x).$$

La donnée de τ avec ces propriétés permet de reconstituer φ : il suffit en effet de poser

$$\varphi(x_0 x_1 \cdots x_{2l} x_{2l+1}) = \tau(x_0) \tau(x_1)^{-1} \cdots \tau(x_{2l}) \tau(x_{2l+1})^{-1}.$$

La donnée de τ et f permet aussi de définir un morphisme $w : X \rightarrow \overline{W}(\mathcal{G})$. On pose à cet effet $w_0 = f$ et, pour $n > 0$, $x \in X_n$,

$$w(x) = (\tau(x), \tau(d_0 x), \dots, \tau(d_0^{n-1} x))$$

et l'on vérifie que l'on définit bien un morphisme simplicial par cette formule.

Réciproquement, partant de $w : X \rightarrow \overline{W}(\mathcal{G})$, et étant donné un $x \in X_n$, $n > 0$, on appelle $\tau(x)$ la projection sur G_{n-1} de $w(x) \in G_{n-1} \times \cdots \times G_0$. On vérifie que cette fonction possède les propriétés indiquée ci-dessus pour une fonction τ . Par exemple vérifions la relation $s(\tau(x)) = f(0(x))$ (où de nouveau on a posé $f = w_0$).

Si $w(x) = (g_{n-1}, \dots, g_0)$, il vient

$$f(0(x)) = d_1 \cdots d_n w(x) = d_1 (d_1 \cdots d_{n-1} g_{n-1}) = s(d_1 \cdots d_{n-1} g_{n-1}) = s(g_{n-1}) = s(\tau(x))$$

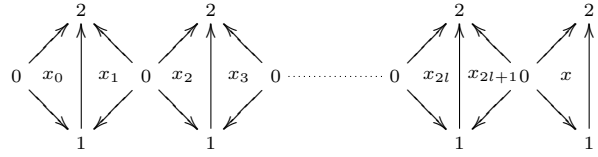
car $s \circ d_i = s$.

Ceci termine la vérification de l'adjonction des foncteurs $\mathcal{F}$ et $\overline{W}$.

6.3. Voici un complément sur le foncteur $\mathcal{F}$. Soit $*$ $\in X_0$ un élément choisi comme point base de X . Soit A un arbre maximal dans la composante connexe de X contenant $*$. Tout 0-simplexe u de cette composante connexe est joint à $*$ par un unique chemin dans A de la forme $\lambda(u) = a_0 a_1 \cdots a_{2l} a_{2l+1}$, avec $a_i \in A$, $d_1 a_0 = *$, $d_1 a_{2l+1} = u$ et $d_0 a_{2i} = d_0 a_{2i+1}$, $d_1 a_{2i-1} = d_1 a_{2i}$. Donc on a $\lambda(u) \in F_0(X)$, et plus précisément, $\lambda(u) \in F_0(X)(*, u)$. On notera encore $\lambda(u) \in F_n(X)$ l'élément $s_0^n \lambda(u)$. Pour simplifier l'écriture, on notera G le groupe simplicial $F(X)(*, *)$: c'est l'équivalent simplicial de l'espace des lacets de X issus de $*$. Il y a deux procédés pour construire l'espace des chemins d'origine $*$. Le premier, traditionnel, consiste à prendre $E(X) = X \times_\tau G$, où la fonction $\tau : X \rightarrow G$ de degré -1 est donnée par la suite (ou plutôt par la classe de cette suite)

$$\tau(x) = \lambda(0(x)).x.s_0 d_0 x. \lambda(0(d_0 x))^{-1}.$$

On vérifie facilement que cette fonction vérifie les relations usuelles des fonctions τ , et l'on définit ensuite la projection $p : E(X) \rightarrow X$ par $p(x, g) = x$. On obtient ainsi une construction au sens de Cartan, qui est d'ailleurs un fibré puisque G est un groupe. Dans l'autre procédé, on définit l'ensemble simplicial $\mathcal{E}(X)$ comme on a défini $\mathcal{F}(X)$ "en ajoutant un simplexe":



On considère donc toutes les suites $x_0 x_1 \dots x_{2l} x_{2l+1} x$ d'éléments de X_{n+1} tels que $d_0 x_{2k} = d_0 x_{2k+1}$, $0(x_{2k-1}) = 0(x_{2k})$ $k = 0, 1, \dots, l$ et $0(x_0) = *$, $0(x_{2l+1}) = 0(x)$. On fait ensuite le quotient de cet ensemble simplicial par la même relation d'équivalence que pour $\mathcal{F}$. On définit ensuite $p : \mathcal{E}(X) \rightarrow X$ en posant $p(x_0 x_1 \dots x_{2l} x_{2l+1} x) = d_0 x$. Ces deux espaces de chemins sont isomorphes. En effet, posons pour simplifier $z = x_0 x_1 \dots x_{2l} x_{2l+1} \in F(X)$. On définit un morphisme $\phi : \mathcal{E}(X) \rightarrow E(X)$ en posant

$$\phi(zx) = (d_0 x, zx.s_0 d_0 x. \lambda(0(d_0 x))^{-1}) \in X \times G$$

et un morphisme dans l'autre sens $\psi : E(X) \rightarrow \mathcal{E}(X)$ par

$$\psi(x, g) = g. \lambda(0(x)). s_0 x.$$

Il faut vérifier que les formules ci-dessus sont compatibles avec les relations d'équivalence définissant les quotients, qu'elles sont compatibles avec les opérateurs d_i et s_j , et que ϕ et ψ sont inverses l'un de l'autre:

cela ne présente aucune difficulté particulière. Il en résulte en particulier que $p : \mathcal{E}(X) \rightarrow X$ est un fibré. Pour montrer que $G(X)$ est l'espace des lacets de X de point base $*$, on montre comme dans le cas classique que $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ est connexe, simplement connexe et que son homologie est nulle en chaque dimension.

7. Première construction du foncteur π . Rappelons d'abord la définition du foncteur *groupoïde de Poincaré* π qui à un ensemble simplicial X associe un groupoïde $\pi(X)$. C'est le seul foncteur qui commute aux colimites et tel que $\pi(\Delta[n]) = \text{Sc}[n]$. Ici $\text{Sc}[n]$ désigne le groupoïde ayant pour objets les nombres $0, 1, \dots, n$ et pour morphisme $i \rightarrow j$ l'unique couple (i, j) de tels entiers. Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie possédant des colimites, la donnée d'un foncteur $\Phi : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ permet de définir deux foncteurs $G : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ adjoint à gauche de $D : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$. En effet, tout ensemble simplicial est la colimite dans $\mathcal{S}$ d'un diagramme T , dépendant fonctoriellement de X , dont les objets sont tous des $\Delta[n]$ et les flèches des morphismes de la forme $\Delta[\alpha]$ avec $\alpha \in \text{Fl}(\Delta)$. Alors on pose $G(X) = \text{colim}_{t \in T} \Phi(t)$ et $D(c)_n = \mathcal{C}(\Phi([n]), c)$. Résumons les propriétés du foncteur π dans la proposition suivante dans laquelle Sk^i désigne le i -squelette

7.1. Proposition. π commute aux colimites quelconques et aux produits finis. On a $\pi(X) = \pi(\text{Sk}^2 X)$; plus précisément $\text{Ob}(\pi(X)) = X_0$ et $\text{Fl}(\pi(X))$ est engendré par X_1 avec les relations $d_0 x \circ d_2 x = d_1 x$ pour tout $x \in X_2$. Enfin on a $\pi_1(X, x) = \pi(X)(x, x)$ pour tout $x \in X_0$.

7.2. Soit $F \in \text{Ob}(\mathcal{S}_{\text{gr}})$ un groupoïde simplicial d'objets discrets. Étant donnés deux objets u et v , on désigne par $F(u, v) \subset \text{Fl}(F)$ l'ensemble simplicial des $\alpha \in \text{Fl}(F)$ tels que $s(\alpha) = u$ et $b(\alpha) = v$. La composition dans le groupoïde fournit, pour tout triple d'objets (u, v, w) un morphisme simplicial

$$F(u, v) \times F(v, w) \rightarrow F(u, w).$$

Appliquons le foncteur π à cette situation. À tout couple (u, v) d'objets de F on associe le groupoïde $\pi(F(u, v))$, à tout triple d'objets (u, v, w) on associe un foncteur

$$\pi(F(u, v)) \times \pi(F(v, w)) \rightarrow \pi(F(u, v) \times F(v, w)) \rightarrow \pi(F(u, w)).$$

où la première flèche, un isomorphisme, provient du fait que π commute aux produits finis.

Pour tout objet u on définit un foncteur $\text{id} : * \rightarrow \pi(F(u, u))$ en posant $\text{id}(*) = u$ et $\text{id}(\text{id}*) = i(u)$.

Enfin, puisque F est un groupoïde simplicial, il existe un morphisme simplicial $^{-1} : F(u, v) \rightarrow F(v, u)$ auquel on applique π pour obtenir un foncteur $^{-1} : \pi(F(u, v)) \rightarrow \pi(F(v, u))$.

Il est clair que toutes ces données définissent un 2-groupoïde $\Pi(F)$, pour lequel on a :

- $\Pi(F)_0 = \text{Ob}(F)$
- $\Pi(F)(u, v) = \pi(F(u, v))$,
- $\text{Fl}(\Pi(F)_1) = \bigcup_{(u, v)} \text{Ob}(\pi(F(u, v))) = \bigcup_{(u, v)} F(u, v)_0 = \text{Fl}(F)_0 = \text{Ob}(\pi(\text{Fl}(F)))$,

- $Fl(\Pi(F)_2) = \bigcup_{(u,v)} Fl(\pi(F(u,v)) = Fl(\pi(Fl(F)))$

en effet $Fl(F) = \coprod F(u,v)$ et π commute aux sommes directes.

Il est maintenant possible de donner la définition de $\overset{2}{\pi}$.

7.3. Définition : on pose $\overset{2}{\pi} = \Pi \circ \mathcal{F}$. C'est un foncteur $\mathcal{S} \rightarrow 2Gr$.

7.4. En vertu de (7.), π possède un adjoint à droite ν . Si C est un groupoïde, alors en dimension n , $\nu(C)$ est égal à l'ensemble des morphismes de groupoïdes $Sc[n] \rightarrow C$. On étend ce foncteur en un foncteur $N : 2-Gr \rightarrow \mathcal{S}_{gr}$ de la façon suivante. Soit $\mathcal{X}$ un 2-groupoïde. Étant donnés deux objets $a, b \in \mathcal{X}_0$, on pose $N(\mathcal{X})(a, b) = \nu(\mathcal{X}(a, b))$, et si a, b, c sont trois objets de $\mathcal{X}_0$, alors le foncteur $*$: $\mathcal{X}(a, b) \times \mathcal{X}(b, c) \rightarrow \mathcal{X}(a, c)$ donne par application de ν qui commute aux produits (étant un adjoint à droite), un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$* : N(\mathcal{X})(a, b) \times N(\mathcal{X})(b, c) \rightarrow N(\mathcal{X})(a, c).$$

Enfin l'inverse $N(\mathcal{X}(a, b)) \rightarrow N(\mathcal{X}(b, a))$ provient de l'inverse $\mathcal{X}(a, b) \rightarrow \mathcal{X}(b, a)$ auquel on applique le foncteur ν .

Il est clair sur les définitions que Π est adjoint à gauche de N , et donc Π commute aux colimites, N aux limites. Par ailleurs nous avons vu en (6.2.) que le foncteur $\mathcal{F}$ possède un adjoint à droite. Il commute donc aussi aux colimites, et il en va donc aussi pour le composé $\overset{2}{\pi} = \Pi \circ \mathcal{F}$.

8. Deuxième construction du foncteur $\overset{2}{\pi}$. Pour définir un foncteur $\mathcal{S} \rightarrow 2Gr$ qui commute aux colimites, il suffit de le donner sur les $\Delta[n]$. C'est ce procédé que nous développons maintenant.

8.1. Notons o le foncteur qui à un ensemble ordonné E associe la catégorie admettant E pour objets et pour flèches $a \rightarrow b$ les couples de deux objets (a, b) tels que $a \leq b$. Disons qu'une petite catégorie C est *ordonnée* si, pour tout couple d'objets (a, b) , l'ensemble $C(a, b)$ est ordonné et si pour tous $h : a' \rightarrow a$, $k : b \rightarrow b'$, f et $g \in C(a, b)$ tels que $f \leq g$, on a $f \circ h \leq g \circ h$ et $k \circ f \leq k \circ g$. À une catégorie C ordonnée, on fait correspondre fonctoriellement une 2-catégorie $\mathcal{O}(C)$ qui a mêmes objets que C et définie par $\mathcal{O}(C)(a, b) = o(C(a, b))$ pour tous couples a, b d'objets de C . La loi de composition externe provient du fait que la composition dans C respecte les structures d'ordre, et du fait que o commute aux produits :

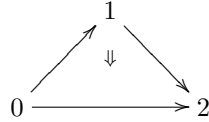
$$* : o(C(a, b)) \times o(C(b, c)) = o(C(a, b) \times C(b, c)) \rightarrow o(C(a, c)).$$

Partons d'un ensemble ordonné E . On note ici $Ch(E)$ la catégorie ayant pour objets les éléments de E et pour morphismes $a \rightarrow b$ non pas les suites croissantes $a = e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_k = b$, selon une définition précédente, mais le quotient de cet ensemble par la relation engendrée par les relations $a \leq a \sim id(a)$ pour tout $a \in E$. Il revient au même de prendre pour morphismes $a \rightarrow b$ les suites strictement croissantes $a = e_1 < \dots < e_k = b$ (on écrit donc aussi $a = ida$), en changeant de façon convenable la composition des flèches. On ordonne

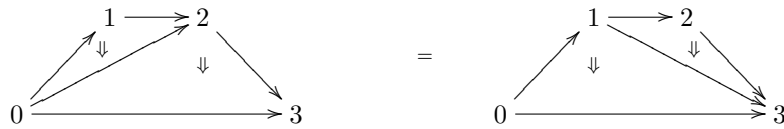
l'ensemble des suites croissantes commençant en a et finissant en b par l'ordre lexicographique, ce qui donne à $\text{Ch}(E)$ une structure de catégorie ordonnée. Ainsi, si on prend $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, on a $1237 < 127$.

8.2. Définition : On pose $\overset{2}{\pi}(\Delta[n]) = \Sigma\mathcal{OCh}[n]$.

Voici une représentation de $\mathcal{OCh}[2]$ où le triangle représente la double flèche $12 * 01 = 012 < 02$:



et de même voici une représentation de $\mathcal{OCh}[3]$:



qui illustre l'égalité entre 2-flèches

$$(023 < 03) \circ (\text{id}(23) * (012 < 02)) = (013 < 03) \circ ((123 < 13) * \text{id}(01)) = (0123 < 03)$$

8.3. Théorème : Les deux définitions de $\overset{2}{\pi}$ coïncident.

Démonstration : Comme les deux foncteurs commutent aux colimites, il suffit de vérifier qu'ils prennent la même valeur sur $\Delta[n]$, i.e. que l'on a

$$\Pi \circ \mathcal{F}\Delta[n] = \Sigma\mathcal{OCh}[n]$$

où, plus correctement que les deux membres de cette expression sont canoniquement isomorphes. Soit, dans ce but, $\mathcal{X}$ un gs quelconque. Les adjonctions recensées précédemment permettent d'écrire les isomorphismes suivants :

$$2Gr(\Pi \circ \mathcal{F}(\Delta[n], \mathcal{X})) \approx \mathcal{S}_{\text{gr}}(\mathcal{F}(\Delta[n]), N(\mathcal{X})) \approx \mathcal{S}(\Delta[n], \overline{W} \circ N(\mathcal{X})) = (\overline{W} \circ N(\mathcal{X}))_n,$$

et par ailleurs

$$2Gr(\Sigma\mathcal{OCh}[n], \mathcal{X}) = 2Cat(\mathcal{OCh}[n], O(\mathcal{X})).$$

Mais un élément de $(\overline{W} \circ N(\mathcal{X}))_n$ est une suite $x_0, x_1, \dots, x_n$ d'objets de $\mathcal{X}_0$ et une suite $g_{n-1}, \dots, g_1, g_0$ où chaque $g_i \in N(\mathcal{X})_i$ est, pour $i > 0$ une "pile" de i 2-flèches de $\mathcal{X}(x_{n-i-1}, x_{n-i})$

$$g_i = \alpha_i^0, \alpha_i^1, \dots, \alpha_i^{i-1}$$

telles que $b(\alpha_i^j) = s(\alpha_i^{j+1})$. Pour $i = 0$, g_0 est une 1-flèche $x_{n-1} \rightarrow x_n$ de $\mathcal{X}_1$. On notera aussi $\alpha_0^0 = i(g_0)$.

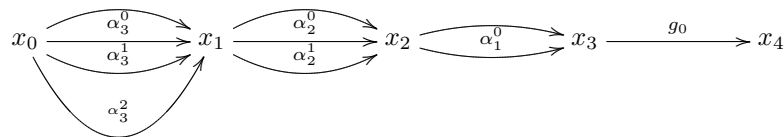


fig (1) : un élément de $(\overline{W} \circ N(\mathcal{X}))_4$

À un tel élément on associe canoniquement un morphisme $\phi : \mathcal{OCh}[n] \rightarrow O(\mathcal{X})$ de $2Cat$ de la manière suivante. Au niveau des objets, on a $\phi_0(i) = x_i$ pour $i = 0, \dots, n$. Les 1-flèches de la 2-catégorie de gauche sont les suites croissantes $a_1 a_2 \dots a_r$. Alors $\phi_1(i(i+1)) = s(\alpha_{n-i-1}^0)$, $\phi_1(i(i+2)) = s(\alpha_{n-i-2}^1) * s(\alpha_{n-i-1}^1)$, $\phi_1(i(i+3)) = s(\alpha_{n-i-3}^2) * s(\alpha_{n-i-2}^2) * s(\alpha_{n-i-1}^2) \dots$ avec la convention que $\alpha_k^j = i(b(\alpha_k^{k-1}))$ pour $j \geq k$. Les 1-flèches à plus de deux chiffres sont des composées (externes) des précédentes et par exemple, pour $n = 7$,

$$\phi_1(1457) = g_0 * s(\alpha_1^1) * s(\alpha_2^0) * s(\alpha_3^2) * s(\alpha_4^2) * s(\alpha_5^2).$$

L'effet de ϕ_2 s'explique simplement en utilisant la figure (1). Les images de la source et du but d'une 2-flèche se représentent sur la figure par une suite d'arêtes délimitant un nombre fini de α_j^i . Pour avoir l'image de la 2-flèche, on compose tous ces α . Par exemple, avec $n = 4$,

$$\phi_2(0124 < 04) = i(g_0) * i(b(\alpha_1^0)) * (\alpha_2^1 \circ \alpha_2^0) * (\alpha_3^2 \circ \alpha_3^1 \circ \alpha_3^0).$$

Réciproquement, à un morphisme $\phi : \mathcal{OCh}[n] \rightarrow O(\mathcal{X})$ de $2Cat$ on associe une suite $g_{n-1}, \dots, g_1, g_0$ comme suit. On pose

$$g_0 = \phi_1((n-1)n)$$

$$\alpha_1^0 = i(g_0)^{-1} * \phi_2((n-2)(n-1)n < (n-2)n)$$

$$\alpha_2^0 = (\alpha_1^0)^{-1} * \phi_2((n-3)(n-2)(n-1) < (n-3)(n-1))$$

$$\alpha_2^1 = (\phi_2((n-2)(n-1)n < (n-2)n)^{-1}) * (\phi_2((n-3)(n-2)(n-1)n < (n-3)n)) \circ (\alpha_1^0)^{-1})$$

etc. Ceci termine la démonstration du théorème.

9. Propriétés du foncteur $\overset{2}{\pi}$

9.1.0. Théorème : Soit X un ensemble simplicial. On a $(\overset{2}{\pi}(X))^1 = \pi(X)$ et $(\overset{2}{\pi}(X))_1 = \pi(\text{Sk}^1(X))$. ($\text{Sk}^1(X)$ désigne le 1-squelette de X). Si X est de dimension 1 on a $\overset{2}{\pi}(X) = \widetilde{\pi(X)}$.

Démonstration : Comme le foncteur $(\overset{2}{\pi})^1$ et le foncteur π commutent aux colimites, il suffit de montrer qu'ils coïncident sur $\Delta[n]$ pour établir leur égalité. Or, si G est un groupoïde quelconque on a

$$Gr((\overset{2}{\pi}(\Delta[n]))^1, G) = 2Gr(\overset{2}{\pi}(\Delta[n]), \tilde{G}) = 2Gr(\Sigma \mathcal{OCh}([n]), \tilde{G}) = 2Cat(\mathcal{OCh}[n], \tilde{G}),$$

et il est facile de voir que ce dernier ensemble est égal à $Gr([\text{Sc}[n], G)$.

Pour démontrer la seconde égalité, on part de la première définition de $\overset{2}{\pi}$. Il est clair que l'égalité est vérifiée au niveau des objets. Au niveau des flèches on a

$$\text{Fl}(\overset{2}{\pi}(X)_1) = \text{Ob}(\pi(\mathcal{F}(X))) = \mathcal{F}(X)_0,$$

et cet ensemble ne fait intervenir que le 1-squelette de X . Donc il vient $(\overset{2}{\pi}(X))_1 = (\overset{2}{\pi}(\text{Sk}^1(X)))_1$. Pour terminer la démonstration de l'égalité il suffit maintenant de démontrer la troisième égalité. Cette dernière égalité provient du fait que $\overset{2}{\pi}(\Delta[1]) = \pi(\widetilde{\Delta[1]})$ et du fait que π et $\tilde{?}$ sont deux foncteurs commutant aux colimites.

9.1.1 Théorème : Soient X un ensemble simplicial, et $x \in X_0$. On a $\pi_0(X) = \pi_0(\overset{2}{\pi}(X))$ et, pour $i = 1, 2$, $\pi_i(X, x) = \pi_i(\overset{2}{\pi}(X), x)$. Plus précisément, il existe un isomorphisme naturel entre foncteurs définis sur la catégorie des ensembles simpliciaux pointés $\pi_i \rightarrow \pi_i \overset{2}{\pi}$ pour $i = 0, 1, 2$.

Démonstration : On remarque d'abord que la première définition implique immédiatement l'égalité $X_0 = \overset{2}{\pi}(X)_0$. Donc $\pi_0(\overset{2}{\pi}(X))$ est le quotient de X_0 par la relation d'équivalence $a \sim b$ ssi il existe une 1-flèche d'extrémités a et b , donc un élément dans $(\mathcal{F})(a, b)_0$. Mais un tel élément est une chaîne de 1-simplexes de X :

$$a \longleftrightarrow \leftarrow \cdots \rightarrow b$$

La relation d'équivalence est donc exactement celle qui définit $\pi_0(X)$.

L'égalité des π_1 résulte immédiatement de la première égalité du théorème précédent.

Passons maintenant à π_2 . Soit $\mathcal{K}$ la catégorie des couples formés d'un complexe de Kan et d'un de ses sommets. On sait qu'il existe un isomorphisme de foncteurs t de $\mathcal{K}$ dans la catégorie des groupes

$$t_{U,u} : \pi_1(U, u) \rightarrow \pi(U)(u, u),$$

défini ainsi : $\pi_1(X, u)$ est le quotient du sous l'ensemble de U_1 formé des simplexes x tels que par la relation $R : x \sim y$ ssi il existe un 2-simplexe z tel que $d_2 z = x$, $d_1 z = y$, $d_0 z = s_0 u$. Par ailleurs $\pi(U)$ est le quotient du groupoïde libre engendré par U_1 par une relation S . Alors pour tout $x \in X_1$ avec $d_1 x = d_0 x = u$, on pose $t_{U,u}(x) = x \bmod S$. Cette application passe au quotient par R et donne l'isomorphisme cherché.

Appliquons ce résultat au couple $(U, u) = (\mathcal{F}(X)(x, x), \text{id}_x)$, ce qui est loisible puisque $\mathcal{F}(X)(x, x)$, étant un groupe, est un complexe de Kan, et notons simplement t_{X, id_x} le morphisme correspondant. La suite exacte du fibré $\mathcal{F}(X)(x, x) \rightarrow \mathcal{E}(X) \rightarrow X$ fournit par ailleurs un isomorphisme $\partial_X : \pi_1(\mathcal{F}(X)(x, x), \text{id}_x) \rightarrow \pi_2(X, x)$ fonctoriel en X . Le composé

$$\begin{aligned} \partial_X \circ t_{(X, \text{id}_x)}^{-1}(X) : \pi_2(\overset{2}{\pi}(X), x) &= \overset{2}{\pi}(X)(x, x)(\text{id}_x, \text{id}_x) \\ &= \Pi \circ \mathcal{F}(x, x)(\text{id}_x, \text{id}_x) = \pi(\mathcal{F}(x, x))(\text{id}_x, \text{id}_x) \rightarrow \pi_2(X, x) \end{aligned}$$

est l'isomorphisme cherché, fonctoriel en X . Notons que l'on en déduit immédiatement le corollaire suivant

Corollaire : Si $f : X \rightarrow Y$ induit un isomorphisme $\pi_2(X, x) \rightarrow \pi_2(Y, f(x))$, alors $\pi_2(\overset{2}{\pi}(X), x) \rightarrow \pi_2(\overset{2}{\pi}(Y), f(x))$ est aussi un isomorphisme.

9.1.2. Proposition : $\Sigma\mathcal{OCh}[n] = \text{Sc}\Sigma\mathcal{Ch}[n]$

Démonstration : Comme $\Delta[n]$ est contractile, ses groupes d'homotopie sont nuls et donc $\pi_i(\Sigma\mathcal{OCh}[n]) = 0$ pour $i = 1, 2$ (ce qui peut se démontrer directement en n'utilisant que la deuxième définition, facilement pour π_1 et péniblement pour π_2). Mais les 2-groupoïdes des deux membres ont même niveau 1. En effet il est facile de voir que l'on a $(\Sigma\mathcal{OCh}([n]))_1 = \Sigma\mathcal{Ch}[n] = ((\text{Sc}\Sigma\mathcal{Ch}[n]))_1$.

On utilise alors le lemme

9.1.3. Lemme : Soit $\mathcal{X}$ un 2-groupoïde tel que $\pi_i(\mathcal{X}, x) = 0$ pour $i = 1, 2$ et quel que soit $x \in \mathcal{X}_0$. Alors $\mathcal{X} = \text{Sc}\mathcal{X}_1$.

Démonstration : L'application identique $\mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1$ fournit par adjonction un morphisme $\mathcal{X} \rightarrow \text{Sc}(\mathcal{X}_1)$. Or, quels que soient deux 1-flèches $u, v : x \rightarrow y$ de $\mathcal{X}_1$, il existe une 2-flèche $\alpha : u \Rightarrow v$ car $\pi_1(\mathcal{X}, x) = 0$ et cette 2-flèche est unique car $\pi_2(\mathcal{X}, x) = 0$.

Désignons par $\text{Sk}^n(X)$ le n -squelette de l'ensemble simplicial X , par $\Lambda^k[n] \subset \Delta[n]$ la réunion de toutes les $(n-1)$ -faces de $\Delta[n]$, sauf la k -ème et par $\dot{\Delta}[n]$ le $(n-1)$ -squelette de $\Delta[n]$. On a :

9.1.4. Proposition : $\frac{2}{\pi}(\Lambda^k[n]) = \frac{2}{\pi}(\Delta[n])$ pour $n \geq 3$, $\frac{2}{\pi}(X) = \frac{2}{\pi}(\text{Sk}^3(X))$ et $\frac{2}{\pi}(\dot{\Delta}[n]) = \frac{2}{\pi}(\Delta[n])$ pour $n \geq 4$.

Démonstration : La première égalité provient du lemme 9.1.3. car les deux membres ont même niveau 1 d'après 9.1.0. la seconde résulte du fait que π ne fait intervenir que le 2-squelette et donc $\pi \circ \mathcal{F}$ ne fait intervenir que le 3-squelette. Enfin la dernière égalité reflète le fait que $\dot{\Delta}[n]$ et $\Delta[n]$ ont même 3-squelette pour $n \geq 4$.

9.2. Homotopies. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des 2-groupoïdes, f, g , des morphismes $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Soit $\mathcal{A}$ un sous 2-groupoïde de $\mathcal{X}$ (i.e. $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{X}_i$ pour $i = 1, 2$, les compositions de $\mathcal{A}$ étant les restrictions de celles de $\mathcal{X}$).

9.2.1. Définitions : (1) Une homotopie $f \sim g$ est la donnée

- (i) pour tout objet $a \in \mathcal{X}_0$ d'une 1-flèche $\eta(a) : f(a) \rightarrow g(a)$ de $\mathcal{Y}_1$
- (ii) pour toute 1-flèche $u : a \rightarrow b$ de $\mathcal{X}_1$ d'une 2-flèche $\eta_{a,b}(u) : g_{a,b}(u) * \eta(a) \Rightarrow \eta(b) * f_{a,b}(u)$ de $\mathcal{Y}_2$

Ces données sont astreintes à vérifier les conditions suivantes

- (i) $\eta_{a,a}(\text{id}(a)) = i(\eta(a))$
- (ii) $\eta_{b,c}(v) * i(\eta(b))^{-1} * \eta_{a,b}(u) = \eta_{a,c}(v * u)$ lorsque u et v sont composables.
- (iii) Pour toute 2-flèche $\theta : u \Rightarrow u'$ de $\mathcal{X}_2$, on a

$$(g_{a,b}(\theta) * i(\eta(a))) \circ \eta_{a,b}(u) = \eta_{a,b}(u') \circ (i(\eta(b)) * f_{a,b}(\theta)).$$

La condition (ii) exprime que η est compatible avec les compositions externes $*$ et la condition (iii) que $\eta_{a,b}$ est une transformation naturelle de foncteurs $i(\eta(b)) * f_{a,b} \rightarrow g_{a,b} * i(\eta(a))$ entre les catégories $\mathcal{X}_{a,b}$ et $\mathcal{Y}_{f(a),g(b)}$.

(2) On dit que l'homotopie est rel $\mathcal{A}$ si on a $\eta(a) = \text{id}(f(a)) = \text{id}(g(a))$ pour tout objet $a \in \mathcal{A}_0$, et $\eta_{a,b}|_{\mathcal{A}(a,b)} = \text{id}$ pour tout couple a, b d'objets de $\mathcal{A}_0$.

Voici un exemple d'homotopie. Soit $\mathcal{C} : A \xrightleftharpoons[b]{s} B$ un cg dont le π_1 est nul. Donc l'homomorphisme $A \xrightarrow{s,b} B \times B$ est surjectif, et l'on a les suites exactes de groupes, où l'on a posé $\pi_2(\mathcal{C}) = L$,

$$L \twoheadrightarrow A \xrightarrow{s,b} B \times B \quad \text{et} \quad L \twoheadrightarrow \ker s \xrightarrow{b} B$$

(confer 1.1. pour la seconde). Supposons qu'il existe une section $j : B \rightarrow \ker s$ de b : elle permet de construire un isomorphisme $L \times B \rightarrow \ker s$ qui est défini par $(l, g) \mapsto lj(g)$. Comme on a aussi un isomorphisme $\ker s \rtimes B \rightarrow A$, on a finalement un isomorphisme $(L \times B) \rtimes B \rightarrow A$, donné par $(l, \gamma, g) \mapsto lj(\gamma)i(g)$ et de plus $s(l, \gamma, g) = g, b(l, \gamma, g) = \gamma g$.

Explicitons l'action de B sur $L \times B$ via θ . Nous avons vu en 1.1. que $\theta_{b(m)}(m') = mm'm^{-1}$ quels que soient $m, m' \in \ker s$. Donc il vient, pour $m = (l, \gamma)$ et $m' = (l', \gamma')$:

$$\theta_\gamma(l', \gamma') = \theta_{b(l, \gamma)}(l', \gamma') = (l, \gamma)(l', \gamma')(l, \gamma)^{-1} = (l', \gamma\gamma'\gamma^{-1}).$$

Le produit dans $(L \times B) \rtimes B$ est donc donné par $(l, \gamma, g)(l', \gamma', g') = (l + l', \gamma g \gamma' g^{-1}, gg')$, et en particulier il en résulte que la projection $(l, \gamma, g) \mapsto l$ est un homomorphisme de groupes $(L \times B) \rtimes B \rightarrow L$. Notons $\mathcal{L}$ le cg $L \xrightleftharpoons[b]{s} 0$ et $\lambda : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}, \lambda' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}$ les morphismes qui au niveau 2 sont respectivement $l \mapsto (l, 1, 1)$ $(l, \gamma, g) \mapsto l$, et au niveau 1 $0 \mapsto 1$ $g \mapsto 0$ (1 désigne l'élément unité de B). On a $\lambda' \circ \lambda = \text{Id}$. Montrons que $\phi = \lambda \circ \lambda' \sim \text{Id}$ rel $*$. On pose à cet effet $\eta_* = 1$ et $\eta_{*,*}(g) = (0, g^{-1}, g)$, si bien que $\eta_{*,*}(g)$ est une 2-flèche $\text{Id}(g) \Rightarrow \phi(g)$. La vérification des axiomes des homotopies est triviale, tout étant explicité.

La proposition suivante résulte immédiatement des définitions.

9.2.2. Proposition : Soient f et g deux morphismes homotopes. Notons $\eta^*(a) : \pi_i(\mathcal{Y}, f(a)) \rightarrow \pi_i(\mathcal{Y}, g(a))$ l'isomorphisme induit par la 1-flèche $\eta(a) : f(a) \rightarrow g(a)$. On a

$$\pi_i(g) = \eta^*(a) \circ \pi_i(f) : \pi_i(\mathcal{X}, a) \rightarrow \pi_i(\mathcal{Y}, g(a))$$

9.2.3. Proposition : Pour $n = 1, 2$, l'application naturelle $i : \overset{2}{\pi}(\Lambda^k[n]) \rightarrow \overset{2}{\pi}(\Delta[n])$ possède une rétraction naturelle r telle que $i \circ r$ est homotope à id par une homotopie η rel $\overset{2}{\pi}(\Lambda^k[n])$ telle que l'homotopie composée $r\eta$ soit l'homotopie identité. (On dira que $\overset{2}{\pi}(\Lambda^k[n])$ est un rétract par déformation de $\overset{2}{\pi}(\Delta[n])$)

Démonstration : Faisons-la pour $n = 2$ et $k = 0$. Puisque $\Lambda^0[2]$ est égal à son 1-squelette on a $\overset{2}{\pi}(\Lambda^0[2]) = \widetilde{\text{Sc}}[2]$. Pour définir la rétraction $r : \overset{2}{\pi}(\Delta[2]) \rightarrow \widetilde{\text{Sc}}[2]$, il suffit, d'après (5.1.1.), de se donner son adjointe $(\overset{2}{\pi}(\Delta[2]))^1 = \text{Sc}[2] \rightarrow \text{Sc}[2] : \text{on prend l'identité. La vérification de l'égalité } r \circ i = \text{id} \text{ est immédiate. L'homotopie } i \circ r \sim \text{id} \text{ est donnée sur les objets par } \eta(a) = \text{id} \text{ pour } a = 0, 1, 2. \text{ On a } i \circ r(01) = 01, i \circ r(02) = 02 \text{ et } i \circ (12) = 02 \circ 10.$

Donc $\eta_{12}(12)$ doit être une 2-flèche $02 \circ 10 \Rightarrow 12$. Comme $\overset{2}{\pi}(\Delta[2])$ a ses π_i nuls, une telle 2-flèche existe et est unique. Avec les notations de (8.2.) on peut l'écrire $(012 < 02) * i(01)^{-1}$.

9.2.4. Théorème : Soit $i : X \rightarrow Y$ une extension anodine. Alors le morphisme induit $\overset{2}{\pi}(i) : \overset{2}{\pi}(X) \rightarrow \overset{2}{\pi}(Y)$ possède une rétraction et $\overset{2}{\pi}(X)$ est un rétract par déformation de $\overset{2}{\pi}(Y)$.

Démonstration : D'après les propriétés des extensions anodines, il suffit de vérifier les cinq propriétés suivantes :

- (i) c'est vrai pour $\overset{2}{\pi}(i)$ si i est l'inclusion $\Lambda^k[n] \hookrightarrow \Delta[n]$
- (ii) Soit ${}_1\mathcal{X} \subset {}_2\mathcal{X} \cdots \subset {}_n\mathcal{X} \subset \cdots$ une suite dénombrable de 2-groupoïdes, de colimite ${}_\infty\mathcal{X}$, et tels que chaque ${}_n\mathcal{X}$ soit un rétract par déformation de ${}_{n+1}\mathcal{X}$. Alors ${}_1\mathcal{X}$ est rétract par déformation de ${}_\infty\mathcal{X}$.
- (iii) La propriété est stable par sommes directes quelconques.
- (iv) La propriété est stable par rétraction
- (v) La propriété est stable par cochage de cobase.

La propriété (i) a déjà été démontrée. Les autres ne présentent pas de difficultés.

Le théorème précédent nous permettra d'utiliser plus loin les résultats sur les cônes qui serviront à relier les constructions géométriques à leur équivalent algébrique.

9.3. Cônes. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ des 2-groupoïdes. Notons $(s, b) : \mathcal{X} \rightarrow \text{Sc}(\mathcal{X}_1)$ le morphisme canonique (cf. 9.1.3.). On appelle cône du morphisme $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ la somme amalgamée du diagramme

$$\text{Sc}(\mathcal{X}_1) \xleftarrow{(s,b)} \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$$

que l'on note C_f . On a donc un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\ (s,b) \downarrow & & \downarrow k_f \\ \text{Sc}(\mathcal{X}_1) & \xrightarrow{q_f} & C_f \end{array}$$

Soient $v : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$, $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ des morphismes et $\eta : v \circ f \sim g$ une homotopie. On cherche à comparer C_f et C_g . Nous le ferons lorsque les 2-groupoïdes n'ont qu'un seul objet, donc sont des cat-groupes, et que l'homotopie est relative au sous 2-groupoïde trivial de $\mathcal{X}$ réduit à son unique objet et aux identités.

9.3.2. Proposition : Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un diagramme commutatif

$$(\$) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{k_f} & C_f \\ v \downarrow & & \downarrow \varphi_\eta \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{k_g} & C_g \end{array}$$

Démonstration : Remarquons pour commencer qu'au niveau 1, k_f est l'identité, et que $q_f = f$, et des égalité analogues pour g . On a donc $\varphi_1 = v_1$. Passons au niveau 2 et convenons de supprimer les indices 2 des morphismes f, g, k_f etc lorsqu'ils s'appliquent à ce niveau. Un tel diagramme existe si et seulement si il existe un carré commutatif

$$(\S\S) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\ (s,b) \downarrow & & \downarrow k_g \circ v \\ \text{Sc}(\mathcal{X}_1) & \xrightarrow{j} & C_g. \end{array}$$

D'après (1.2.4.), la donnée de j est équivalente à la donnée d'un homomorphisme $\alpha : \mathcal{X}_1 \rightarrow \ker(b : (C_g)_2 \rightarrow (C_g)_1)$. Pour tout $u \in \mathcal{X}_1$, l'homotopie $\eta(u)$ est une 2-flèche i.e. un élément de $\mathcal{Z}_2$ de source $v \circ f(u)$ et de but $g(u)$. Appliquons $k_g : k_g(\eta(u)) \in (C_g)_2$ a même source et but que $\eta(u)$. Comme $q_g(u, 1)$, a pour source $g(u)$ et pour but 1, le composé $\alpha(u) = q_g(u, 1) \circ k_g(\eta(u))$ appartient à $\ker b$. Une fois vérifié que l'on définit bien ainsi un homomorphisme, on pose ensuite, conformément à (1.2.4.) $\beta(u) = \alpha(u)^{-1} \cdot i(s(\alpha(u))) = \alpha(u)^{-1} \cdot i(v \circ f(u))$, et finalement $j(u, u') = \alpha(u) \cdot \beta(u')$. Or la composition interne $\circ$ s'exprime en fonction du produit (confer 1.) il vient

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= k_g(\eta(u) \cdot i(g(u))^{-1}) \cdot q_g(u, 1) \\ \beta(u) &= q_g(1, u) \cdot k_g(\eta(u)^{-1} \cdot i(v \circ f(u))). \end{aligned}$$

Pour vérifier que α est un homomorphisme on remarque après explicitation et du fait que k_g, η, q_g sont des homomorphismes, qu'il suffit de montrer que $k_g(\eta(u')) \cdot i(g(u'))^{-1}$ et $i(g(u))^{-1} \cdot q_g(u, 1)$ commutent quels que soient $u, u' \in \mathcal{X}_1$: ceci est bien le cas car le premier terme est un élément de $\ker b$ et le second un élément de $\ker s$.

Il reste à montrer, pour tout $\theta \in \mathcal{X}_2$ avec $s(\theta) = u$ et $b(\theta) = u'$, que l'on a $j(u, u') = k_g \circ v \circ f(\theta)$. Cela résulte immédiatement des égalités $q_g(u, 1) \cdot q_g(1, u') = q_g(u, u') = k_g \circ g(\theta)$, de la condition (iii) de la définition des homotopies qui s'écrit ici $(v \circ f(\theta) \cdot i(v \circ f(u'))^{-1}) \cdot \eta(u') = \eta(u) \cdot i(g(u))^{-1} \cdot g(\theta)$ et du fait que k_g est un homomorphisme. Ceci termine la démonstration.

Donnons nous des morphismes $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$, $v : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ et une rétraction $r : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ de v , i.e. $r \circ v = \text{id}$. Supposons de plus que cette rétraction est telle que $\mathcal{Y}$ est un rétract par déformation de $\mathcal{Z}$. Posons enfin $f = r \circ g$. La proposition précédente fournit un morphisme $\varphi : C_f \rightarrow C_g$.

9.3.3. Proposition C'est une équivalence d'homotopie.

Démonstration : Puisque $f = r \circ g$, on a un diagramme dont les deux carrés sont cocartésiens

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{g} & \mathcal{Z} & \xrightarrow{r} & \mathcal{Y} \\ (s,b) \downarrow & & \downarrow k_g & & \downarrow k_f \\ \text{Sc}(\mathcal{X}_1) & \xrightarrow{q_g} & C_g & \xrightarrow{\bar{r}} & C_f \end{array}$$

avec $q_f = q_g \circ \bar{r}$, et puisque $v \circ f$ est homotope à g , on a aussi les diagrammes (\$) et (\$\$) (si l'on note η l'homotopie $v \circ r \sim \text{id}$, l'homotopie $v \circ f \sim g$ est $\eta \circ g$). Dans le premier de ces diagrammes, il faut donc lire si l'on veut conserver des notations homogènes, $\varphi_{\eta \circ g}$ au lieu de φ_η). Un peu de chasse aux diagrammes montre que l'on a

$$\bar{r} \circ \varphi_\eta \circ k_f = k_f$$

$$\bar{r} \circ \varphi_\eta \circ q_f = \bar{r} \circ j$$

Montrons que $\bar{r} \circ j = q_f$, ce qui impliquera compte tenu des égalités ci-dessus et des propriétés des sommes amalgamées que l'on a $\bar{r} \circ \varphi_\eta = \text{id}$. Comme il s'agit d'une égalité entre morphismes $\text{Sc}(\mathcal{X}_1) \rightarrow C_f$, il suffit de montrer qu'ils prennent la même valeur sur les couples $(u, 1)$, pour tout $u \in \mathcal{X}_1$. Or on a $\bar{r} \circ j(u, 1) = \bar{r}(k_g(\eta(u).i(g(u)^{-1}).q_g(u, 1))) = \bar{r}(k_g(\eta(u).i(g(u)^{-1}).\bar{r}(q_g(u, 1))) = k_f \circ r(\eta(u).i(g(u)^{-1})).q_f(u, 1) = q_f(u, 1)$ car $r \circ \eta(u) = i(f(u))$ puisque l'homotopie $r \circ \eta$ est triviale par hypothèse, et donc il vient finalement $k_f \circ r(\eta(u).i(g(u)^{-1})) = k_f(i(f(u))i(f(u))^{-1}) = 1$.

Montrons enfin que $\varphi_\eta \circ \bar{r}$ est homotope à id . Nous cherchons, pour tout $u \in (C_g)_1 = \mathcal{Z}_1$, un élément $\tilde{\eta}(u) \in (C_g)_2$ de source $v \circ r(u)$ et de but u et tel que pour tout $\theta : u \Rightarrow u'$ on ait $\theta \circ \tilde{\eta}(u) = \tilde{\eta}(u') \circ (\varphi \circ \bar{r}(\theta))$. Montrons que $\tilde{\eta} = k_g(\eta)$ convient. Il suffit donc de montrer que l'on a

$$\varphi \circ \bar{r}(\theta) = k_g(\eta(u'))^- \circ \theta \circ k_g(\eta(u))$$

pour tout $\theta : u \Rightarrow u'$. À cet effet, on commence par vérifier que le terme de droite est un homomorphisme, et pour cela on l'écrit en exprimant les composés internes $\circ$ en fonction des produits ; on trouve

$$k_g(\eta(u'))^- \circ \theta \circ k_g(\eta(u)) = k_g(\eta(u)).i(u)^{-1}.\theta.k_g(\eta(u'))^{-1}i(v \circ r(u')),$$

et on termine la vérification comme dans le calcul analogue (mais plus simple) rencontré dans la démonstration de la proposition précédente. Notons pour simplifier $\phi(\theta) = k_g(\eta(u'))^- \circ \theta \circ k_g(\eta(u))$. Pour assurer l'égalité $\varphi \circ \bar{r} = \phi$, il reste à vérifier que l'on a

$$\phi \circ k_g = \varphi \circ \bar{r} \circ k_g$$

$$\phi \circ q_g = \varphi \circ \bar{r} \circ q_g.$$

Cela résulte facilement des diverses formules établies plus haut.

9.4. Notons $\overset{2}{\nu}$ l'adjoint à droite de $\overset{2}{\pi}$, qui existe d'après (7).

9.4.1. Proposition : Pour tout 2-groupeïde $\mathcal{X}$, $\overset{2}{\nu}(\mathcal{X})$ est un complexe de Kan et on a $\pi_i(\overset{2}{\nu}(\mathcal{X}), *) = 0$ pour $i \geq 3$ et tout objet $*$ de $\mathcal{X}_0$.

Démonstration : résulte immédiatement de l'adjonction de $\overset{2}{\nu}$ et de $\overset{2}{\pi}$, et des propositions (9.1.4) et (9.2.3.).

9.4.2. Proposition: Le morphisme d'adjonction $\Phi : \overset{22}{\pi\overset{2}{\nu}} \rightarrow \text{id}2Gr$ induit un isomorphisme des π_i pour $i = 0, 1, 2$.

Démonstration: Remarquons que si $x : \Delta[n] \rightarrow \overset{2}{\nu}(\mathcal{X})$ est un n -simplexe de $\overset{2}{\nu}(\mathcal{X})$, son adjoint $\tilde{x} : \overset{2}{\pi}(\Delta[n]) \rightarrow \mathcal{X}$ rend commutatif le diagramme suivant :

$$(R) \quad \begin{array}{ccc} \overset{2}{\pi}(\Delta[n]) & \xrightarrow{\overset{2}{\pi}(x)} & \overset{22}{\pi\overset{2}{\nu}}(\mathcal{X}) \\ & \searrow \tilde{x} & \downarrow \Phi_{\mathcal{X}} \\ & & \mathcal{X}. \end{array}$$

Puisque $\overset{22}{\pi\overset{2}{\nu}}(\mathcal{X})$ et $\mathcal{X}$ ont mêmes objets il en résulte (en faisant $n = 0$ dans (R)) que $\Phi_{\mathcal{X}}$ est l'identité sur les objets. Les 1-simplexes de $\overset{2}{\nu}(\mathcal{X})$ sont les 1-flèches de $\mathcal{X}$. Maintenant, pour tout ensemble simplicial X , on a $(\overset{2}{\pi}(X))_1 = \pi(\text{Sk}^1(X))$ (confer 9.1.4.) Donc $(\overset{22}{\pi\overset{2}{\nu}}(\mathcal{X}))_1$ est le groupeïde libre engendré par les flèches (différentes des identités) de $\mathcal{X}_1$, et en utilisant (R) avec $n = 1$, on voit que $(\Phi_{\mathcal{X}})_1$ applique bijectivement ces générateurs sur les flèches (différentes des identités) de $\mathcal{X}_1$. Donc $\Phi_{\mathcal{X}}$ induit un isomorphisme des π_0 .

Passons aux π_1 . Soient $\tilde{x} : a \rightarrow b$ et $\tilde{y} : b \rightarrow c$ des 1-flèches de $\mathcal{X}$ et posons $\tilde{z} = \tilde{y} * \tilde{x}$. On définit une 2-flèche α de $\mathcal{X}$ qui applique 0 sur a , 1 sur b , 2 sur c , 01 sur $\tilde{x}$, 12 sur $\tilde{y}$, 02 sur $\tilde{z}$ et $(012 < 02)$ sur $i(\tilde{z})$. Alors $\alpha : y * x \Rightarrow z$ est une 2-flèche de $\overset{22}{\pi\overset{2}{\nu}}(\mathcal{X})$ qui fournit l'égalité $y * x = z$ dans le quotient $(\overset{22}{\pi\overset{2}{\nu}}(\mathcal{X}))^1$. Donc le foncteur canonique $\mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}^1$ se factorise en

$$\mathcal{X}_1 \longrightarrow ((\overset{22}{\pi\overset{2}{\nu}}(\mathcal{X}))^1 \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{X}}^1} \mathcal{X}^1$$

et la flèche de gauche est surjective. Soient $x, y : a \rightarrow b$ deux 1-flèches de $\overset{22}{\pi\overset{2}{\nu}}(\mathcal{X})$ et supposons que $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ soient équivalentes, i.e. qu'il existe une 2-flèche $\phi : \tilde{x} \Rightarrow \tilde{y}$. Il existe un (unique) morphisme $\tilde{\alpha} : \overset{2}{\pi}(\Delta[2]) \rightarrow \mathcal{X}$ qui applique 0 sur a , 1 et 2 sur b , 01 sur $\tilde{x}$, 02 sur $\tilde{y}$ et 12 sur $\text{id}b$ et $(012 < 02)$ sur ϕ . Alors $s(\alpha) = x$ et $b(\alpha) = y$. Donc x et y sont aussi équivalentes, et $(\Phi_{\mathcal{X}})^1$ est un isomorphisme.

Il reste à voir le cas du π_2 . Commençons par le cas particulier où $\mathcal{X}$ est le cg $A \xrightleftharpoons[b]{s} 0$ où A est un groupe abélien. Convenons dans ce cas de désigner par le même symbole A le groupe abélien et le cg précédent et remarquons que les colimites de cg ainsi réduits à un groupe abélien se calculent comme dans la catégorie des groupes abéliens. Les éléments de $\overset{2}{\nu}(A)_n$ sont en correspondance biunivoque avec les morphismes $\tilde{x} : \overset{2}{\pi}(\Delta[n]) \rightarrow A$. Puisque A est nul au niveau 0, $\tilde{x}_1$ s'annule sur $(\overset{2}{\pi}\Delta[n])_1 = \pi(\text{Sk}^1\Delta[n])$, et donc $\tilde{x}$ s'annule

sur $\overset{2}{\pi}(\mathrm{Sk}^1\Delta[n])$ et puisque $\overset{2}{\pi}$ commute aux colimites, $\tilde{x}$ définit un morphisme $\overset{2}{\pi}(\Delta[n]/\mathrm{Sk}^1\Delta[n]) \rightarrow A$ que l'on note encore $\tilde{x}$. Notons que $\overset{2}{\pi}(\Delta[n]/\mathrm{Sk}^1\Delta[n])$ est réduit à 0 en niveau 1, et qu'il est donc de la forme $A(n) \overset{s}{\underset{b}{\llcorner i \dashrightarrow}} 0$ pour un certain groupe abélien $A(n)$ que nous allons maintenant déterminer pour $n = 2$ et 3 . En utilisant le calcul des colimites dans $2Cat$ de (5.2.2.) et (5.1.) on trouve que $A(2) = \mathbb{Z}$ et que $A(3) \subset \mathbb{Z}^4$ est le sous groupe formé des (a, b, c, d) tels que $a + c = b + d$, cette égalité provenant de l'égalité dans $\mathcal{OCho}[3]$ explicitée dans (8.2.) Les faces $\partial_i : \Delta[2]/\mathrm{Sk}^1(\Delta[2]) \rightarrow \Delta[3]/\mathrm{Sk}^1(\Delta[3])$ induisent après application de $\overset{2}{\pi}$ les applications encore notées ∂_i de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}^4$ et qui sont les inclusions dans le i -ème facteur. On peut aussi prendre $A(3) = \mathbb{Z}^3$ et définir ∂_i comme ci-dessus pour $i = 0, 1, 2$ et $\partial_3 = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2$.

Par définition de $\overset{2}{\nu}$ on a

$$\overset{2}{\nu}(A) = \mathrm{colim}_{\tilde{x}: A(n) \rightarrow A} (\Delta[n]/\mathrm{Sk}^1\Delta[n])_x,$$

qui donne après application de $\overset{2}{\pi}$

$$\overset{2}{\pi}\overset{2}{\nu}(A) = \mathrm{colim}_{\tilde{x}: A(n) \rightarrow A} A(n)_x$$

et l'on peut d'ailleurs se restreindre à prendre $n = 2$ ou 3 car $\overset{2}{\pi}$ ne fait intervenir que le 3-squelette. Dans cette présentation, Φ_A est obtenu par passage à la colimite à partir des morphismes $\tilde{x} : A(n) \rightarrow A$.

9.4.3. Lemme : Φ_A est un isomorphisme.

Démonstration : Soit B un groupe abélien et supposons donnés pour chaque $\tilde{x}$ un homomorphisme $j_x : A(n) \rightarrow B$ tel que pour tout morphisme $\alpha : \Delta[p] \rightarrow \Delta[n]$ on ait $j_x \circ A(\alpha) = j_{\tilde{x} \circ A(\alpha)}$ (on a noté $A(\alpha)$ le morphisme $A(p) = \overset{2}{\pi}(\Delta[p]/\mathrm{Sk}^1\Delta[p]) \rightarrow \overset{2}{\pi}(\Delta[n]/\mathrm{Sk}^1\Delta[n] = A(n)$ induit par α). Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer qu'il existe un unique homomorphisme $f : A \rightarrow B$ tel que pour tout x on ait $f \circ \tilde{x} = j_x$. Donnons nous un élément $a \in A$ et soit $\tilde{x} : \mathbb{Z} = A(2) \rightarrow A$ l'homomorphisme qui applique 1 sur a . On pose alors $f(a) = j_x(1)$. Étant donnés trois éléments a, b, c de A soit $\tilde{x} : \mathbb{Z}^3 = A(3) \rightarrow A$ défini par $\tilde{x}(1, 0, 0) = a$, $\tilde{x}(0, 1, 0) = b$, $\tilde{x}(0, 0, 1) = c$. On a

$$j_x \circ A(\partial_0)(1) = f(a)$$

$$j_x \circ A(\partial_1)(1) = f(b)$$

$$j_x \circ A(\partial_2)(1) = f(c)$$

$$j_x \circ A(\partial_3)(1) = f(a - b + c)$$

car $j_x \circ A(\partial_i) = j_{\tilde{x} \circ A(\partial_i)}$ et par ailleurs $j_x \circ A(\partial_3)(1) = f(a) - f(b) + f(c)$. Ainsi f est un homomorphisme. De plus les formules précédentes montrent que $j_x(u, v, w) = uf(a) + vf(b) + wf(c) = f(ua + vb + wc) = f \circ \tilde{x}(u, v, w)$.

9.4.4. Fin de la démonstration. Choisissons un objet $*$ de $\mathcal{X}$. Soit $Y \subset \overset{2}{\nu}(\mathcal{X})$ le sous ensemble simplicial des simplexes ayant tous leurs sommets en $*$ et tous leurs 1-simplexes dégénérés. Puisque $\overset{2}{\nu}(\mathcal{X})$ est un complexe

de Kan, Y aussi et dans ces conditions l'inclusion précédente induit un isomorphisme des π_2 avec point de base $*$. Les éléments de Y_n sont en correspondance biunivoque avec les applications simpliciales $y : \Delta[n] \rightarrow \overset{2}{\nu}(\mathcal{X})$ qui appliquent $\text{Sk}^1(\Delta[n])$ sur $*$, donc avec les applications simpliciales $\Delta[n]/\text{Sk}^1(\Delta[n]) \rightarrow \overset{2}{\nu}(\mathcal{X})$ et finalement avec les morphismes $\tilde{y} : A(n) \rightarrow \mathcal{X}$, c'est à dire les morphismes qui se factorisent à travers $\pi_2(\mathcal{X}, *)$. Ainsi on a démontré que l'on a $Y = \overset{2}{\nu}(\pi_2(\mathcal{X}, *))$, et l'inclusion $Y \subset \overset{2}{\nu}(\mathcal{X})$ provient de l'inclusion $\pi_2(\mathcal{X}, *) \rightarrow \mathcal{X}$ à laquelle on applique $\overset{2}{\nu}$. Or on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overset{2}{\pi}(Y) = \overset{2}{\pi}\overset{2}{\nu}(\pi_2(\mathcal{X}, *)) & \longrightarrow & \overset{2}{\pi}\overset{2}{\nu}(\mathcal{X}) \\ \Phi_{\pi_2(\mathcal{X}, *)} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{X}} \\ \pi_2(\mathcal{X}, *) & \longrightarrow & \mathcal{X} \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales induisent un isomorphisme des π_2 (d'après le corollaire 9.1.1. pour celle du haut) et la flèche verticale de gauche est un isomorphisme d'après le lemme 9.4.3. Cela termine la démonstration.

9.4.5 Corollaire : Le morphisme d'adjonction $\Psi : \text{id}\mathcal{S} \rightarrow \overset{2}{\nu}\overset{2}{\pi}$ induit un isomorphisme des groupes π_i pour $i = 1, 2$.

Démonstration : c'est une conséquence immédiate de la proposition précédente et du fait que le composé des deux flèches

$$\overset{2}{\pi} \xrightarrow{\overset{2}{\pi}\Psi} \overset{2}{\pi}\overset{2}{\nu}\overset{2}{\pi} \xrightarrow{\Phi_{\overset{2}{\pi}}} \overset{2}{\pi}$$

est l'identité.

10. CW-complexes de dimension 2. Soit $f : S_k^1 \rightarrow S_n^1$ une application continue (pointée) d'un bouquet de k cercles dans un bouquet de n cercles, et soit X le cône de f . C'est un CW-complexe de dimension 2 et tout CW-complexe fini connexe de dimension 2 a le type d'homotopie d'un tel cône. De plus le type d'homotopie de X est fixé par le type d'homotopie de f , c'est à dire par l'homomorphisme $\pi_1(f) : F_k \rightarrow F_n$ (confer 3.7 : F_r désigne le groupe libre à r générateurs). Donnons une représentation simpliciale à cette construction. Notons encore S^1 le "cercle simplicial" $\Delta[1]/\text{Sk}^0\Delta[1]$, et S_r^1 un bouquet de r tels cercles. Il n'existe pas d'application simpliciale $f : S_k^1 \rightarrow S_n^1$ comme dans le cas topologique : il faut remplacer cette unique application par un couple

$$\begin{array}{ccc} S_k^1 & & S_n^1 \\ & \searrow g & \downarrow v \\ & & U \end{array}$$

où v est une extension anodine. Dans la catégorie homotopique, v est inversible et on a $f = v^{-1} \circ g$. Si l'on applique π_1 , v devient aussi inversible, et tout homomorphisme de groupes $F_k \rightarrow F_n$ peut s'écrire

$\pi_1(v)^{-1} \circ \pi_1(g)$ pour des g et v convenables. Si on applique le foncteur réalisation géométrique, $|v| : |S_n^1| = S_n^1 \rightarrow |U|$ possède une rétraction r et S_n^1 est rétract par déformation de $|U|$. Posons $f = r \circ |g|$. On a bien sûr $\pi_1(f) = \pi_1(v)^{-1} \circ \pi_1(g)$. Par ailleurs, les propriétés des cônes topologiques font que r induit une application $\bar{r} : C_{|g|} \rightarrow C_f$ qui est une équivalence d'homotopie. Puisque la réalisation géométrique commute aux colimites, on a $|C_g| = C_{|g|}$ et par conséquent l'ensemble simplicial C_g peut jouer le rôle du CW-complexe X cherché. Notons $B = \Delta[2]/\Lambda^1[2]$ la boule simpliciale de dimension 2 de bord S^1 , et B_k le bouquet de k de ces boules. Le cône C_g est défini comme la somme amalgamée du diagramme $B_k \longleftarrow S_k^1 \xrightarrow{g} U$. Appliquons $\overset{2}{\pi}$ qui commute aux colimites. Il vient un carré cocartésien

$$(C) \quad \begin{array}{ccc} \overset{2}{\pi}(S_k^1) & \xrightarrow{\overset{2}{\pi}(g)} & \overset{2}{\pi}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overset{2}{\pi}(B_k) & \longrightarrow & \overset{2}{\pi}(C_g) \end{array}$$

que nous allons maintenant expliciter.

Il est clair que $\overset{2}{\pi}S^1 = \tilde{\mathbb{Z}}$ et donc on a $\overset{2}{\pi}S_k^1 = \tilde{F}_k$. Par ailleurs on a le

10.1. Lemme : $\overset{2}{\pi}(B) = \mathcal{D}$ et par application de $\overset{2}{\pi}$, l'inclusion $S^1 \subset B$ devient l'application naturelle $\tilde{Z} \rightarrow \mathcal{D} = \text{Sc}(Z)$

Démonstration : C'est un bon exercice d'utilisation du calcul des colimites dans $2Gr$ et cg .

Mais alors la flèche verticale de gauche du diagramme (C) n'est autre que l'application naturelle $\tilde{F}_k \rightarrow \text{Sc}F_k$ d'après (1.2.5.) et ainsi $\overset{2}{\pi}(C_g)$ n'est autre que le cône du morphisme $\overset{2}{\pi}(g)$. Utilisons maintenant (9.2.4.): l'extension anodine v fournit un morphisme $\tilde{F}_n \rightarrow \overset{2}{\pi}(U)$ possédant une retraction r , et nous sommes en mesure d'appliquer la proposition (9.3.3.), notons abusivement g au lieu de $\overset{2}{\pi}(g)$ et $f = r \circ g$ alors $\bar{r} : C_g \rightarrow C_f$ devient une équivalence d'homotopie dans la catégorie cg . Comme le f que nous venons de trouver n'est autre que celui appelé $\pi_1(f) : F_r \rightarrow F_n$, nous pouvons énoncer :

10.2. Théorème : Soit $f : S_k^1 \rightarrow S_n^1$ une application continue et notons encore $f : F_k \rightarrow F_n$ l'homomorphisme induit. Alors les groupes d'homotopie π_1 et π_2 du cône de f pris dans la catégorie des espaces topologiques sont les mêmes que ceux de C_f , le cône de f pris dans la catégorie cg .

11. Compléments sur les homotopies.

Soit E un ensemble ordonné. On lui associe fonctoriellement un ensemble simplicial $C(E)$ défini par $C(E)_n = \text{Hom}([n], E)$, le Hom étant compris au sens des ensembles ordonnés. Un n -simplexe de $C(E)$ est donc une application croissante $[n] \rightarrow E$. Ainsi $C[n] = \Delta[n]$ et $C([n] \times [m]) = \Delta[n] \times \Delta[m]$

11.1. Proposition : Si E est un ensemble ordonné fini, on a $\overset{2}{\pi}C(E) = \Sigma\mathcal{OCh}(E)$.

Démonstration : Appelons *chaîne* de E une partie totalement ordonnée de E , et associons à une chaîne c de $n_c + 1$ éléments l'unique fonction strictement croissante $x_c : [n_c] \rightarrow E$ dont l'image est c . Soient enfin

$c(1), c(2), \dots, c(k)$ les chaînes maximales de E . On a un diagramme commutatif

$$(*) \quad \coprod_{i < j} [n_{c(i) \cap c(j)}] \xrightleftharpoons[u]{u} \coprod_i [n_{c(i)}] \xrightarrow{t} E$$

dans lequel u, v sont définis par les inclusions de $c(i) \cap c(j)$ dans $c(i)$, resp. $c(j)$, et $t[n_{c(i)}] = x_{c(i)}$. Ce diagramme définit E comme colimite dans la catégorie des ensembles ordonnés de la double flèche u, v , et il est facile de voir que l'on obtient encore des diagrammes coexact en lui appliquant successivement Ch et $\mathcal{O}$. Comme le foncteur Σ commute aux colimites, on obtient encore un diagramme coexact en appliquant aussi Σ . Par ailleurs on sait que le diagramme $*$ induit un diagramme coexact

$$(**) \quad \coprod_{i < j} \Delta[n_{c(i) \cap c(j)}] \xrightleftharpoons[u]{u} \coprod_i \Delta[n_{c(i)}] \xrightarrow{t} C(E)$$

Finalement on a un diagramme dont les lignes sont coexactes et les flèches verticales sont des égalités :

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i < j} \Sigma \mathcal{O} \text{Ch}[n_{c(i) \cap c(j)}] & \xrightleftharpoons[u]{u} & \coprod_i \Sigma \mathcal{O} \text{Ch}[n_{c(i)}] \xrightarrow{t} \Sigma \mathcal{O} \text{Ch} E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i < j} {}^2\pi(\Delta[n_{c(i) \cap c(j)}]) & \xrightleftharpoons[u]{u} & \coprod_i {}^2\pi(\Delta[n_{c(i)}]) \xrightarrow{t} {}^2\pi(C(E)). \end{array}$$

La proposition en résulte immédiatement.

11.2. Le foncteur $\mathcal{F}l$. Soit $\mathcal{Y}$ un 2-groupeïde. On va lui associer un 2-groupeïde $\mathcal{F}l(\mathcal{Y})$ de la manière suivante. Les objets de $\mathcal{F}l(\mathcal{Y})$ sont les 1-flèches de $\mathcal{Y}$. Soient a et b des objets de $\mathcal{F}l(\mathcal{Y})$. Les 1-flèches $a \rightarrow b$ sont tous les quintuplets $\{a, b, u, v, \eta\}$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{v} & \cdot \\ \uparrow a & \eta & \uparrow b \\ \cdot & \xrightarrow{u} & \cdot \end{array}$$

où $\eta : v * a \Rightarrow b * u$ est une 2-flèche de $\mathcal{Y}$. On désignera ce quintuplet simplement par η lorsque l'on ne veut pas faire apparaître explicitement les flèches horizontales u et v . Soient $\eta_1 : a \rightarrow b$ et $\eta_2 : b \rightarrow c$ deux flèches composables de $\mathcal{F}l(\mathcal{Y})$. On définit leur composée $\eta_2 * \eta_1 : a \rightarrow c$ comme étant

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{v_1} & \cdot & \xrightarrow{v_2} & \cdot \\ \uparrow a & \eta_1 & \uparrow b & \eta_2 & \uparrow c \\ \cdot & \xrightarrow{u_1} & \cdot & \xrightarrow{u_2} & \cdot \end{array} = \begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{v_2 * v_1} & \cdot \\ \uparrow a & \eta & \uparrow c \\ \cdot & \xrightarrow{u_2 * u_1} & \cdot \end{array}$$

avec $\eta = \eta_2 * i(b)^{-1} * \eta_1 = (\eta_2 * i(u_1)) \circ (i(v_2) * \eta_1)$.

Si $\{a, b, u, v, \eta\}$ et $\{a, b, u', v', \eta'\}$ sont deux 1-flèches de même source a et même but b , les 2-flèches $\eta \Rightarrow \eta'$ sont les décuplets $\{a, b, u, v, \eta, u', v', \eta', \Phi, \Psi\}$ où $\Phi : u \Rightarrow u'$ et $\Psi : v \Rightarrow v'$ sont des 2-flèches de $\mathcal{Y}$ telles que

le diagramme suivant de $\mathcal{Y}$ commute :

$$(c) \quad \begin{array}{ccc} v * a & \xrightarrow{\eta} & b * u \\ \Psi * i(a) \downarrow & & \downarrow i(b) * \Phi \\ v' * a & \xrightarrow{\eta'} & b * u' \end{array} .$$

On désignera pour simplifier par $(\Phi, \Psi) : \eta \Rightarrow \eta'$ la 2-flèche précédente. Soit $(\Phi', \Psi') : \eta' \Rightarrow \eta''$ une autre 2-flèche. La composée *interne* $(\Phi', \psi') \circ (\Phi, \Psi)$ est $\{a, b, u, v, \eta, u'', v'', \eta'', \Phi' \circ \Phi, \Psi' \circ \Psi\}$ que l'on écrira donc simplement $(\Phi' \circ \Phi, \Psi' \circ \Psi) : \eta \Rightarrow \eta''$. La composée *externe* de (Φ_1, Ψ_1) et (Φ_2, Ψ_2) est

$$\{a, c, u_2 * u_1, v_2 * v_1, u'_2 * u'_1, v'_2 * v'_1, \Phi_2 * \Phi_1, \Psi_2 * \Psi_1\}.$$

La vérification de la commutativité du diagramme requise par la définition des 2- flèches est évidente pour la composition interne. Elle est plus délicate pour la composition externe. La commutativité du diagramme (c) peut se traduire par l'égalité :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Psi} \\ \uparrow \eta' \uparrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} & = & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \uparrow \eta \uparrow \\ \xrightarrow{\Phi} \end{array} \end{array}$$

Avec ces conventions, nous avons à vérifier l'égalité

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} \xrightarrow{\Psi_1} & \xrightarrow{\Psi_2} \\ \uparrow \eta'_1 \uparrow & \uparrow \eta'_2 \uparrow \\ \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} \end{array} & = & \begin{array}{cc} \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} \\ \uparrow \eta_1 \uparrow & \uparrow \eta_2 \uparrow \\ \xrightarrow{\Phi_1} & \xrightarrow{\Phi_2} \end{array} \end{array}$$

qui résulte de l'usage répété de l'égalité (C) de 5. La vérification des axiomes des 2-groupeïdes ne présente ensuite aucune difficulté, ce qui achève la définition du 2-groupeïde $\mathcal{Fl}(\mathcal{Y})$.

11.2.1. Le foncteur $\mathcal{Fl}$ vient avec deux transformations naturelles $S, B : \mathcal{Fl} \rightarrow \text{Id}$ que l'on définit de la manière suivante. Soit $\{a, b, u, v, \eta, u', v', \eta', \Phi, \Psi\} : \eta \Rightarrow \eta'$ une 2-flèche de $\mathcal{Fl}(\mathcal{Y})$. On pose $S(a) = s(a), B(a) = b(a); S(\eta) = u, B(\eta) = v; S(\Phi, \Psi) = \Phi, B(\Phi, \Psi) = \Psi$.

Si l'on revient maintenant à la définition des homotopies donnée en 9.2., il est clair qu'il y a correspondance biunivoque entre les homotopies $\eta : f \sim g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et les morphismes de 2-groupeïdes $\eta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Fl}(\mathcal{Y})$ tels que $S \circ \eta = f$ et $B \circ \eta = g$.

11.2.2. Proposition : Soit Y un ensemble simplicial, et soient $f, g : \Delta[n] \rightarrow Y$ deux applications homotopes. Alors $\overset{2}{\pi}(f), \overset{2}{\pi}(g) : \overset{2}{\pi}(\Delta[n]) \rightarrow \overset{2}{\pi}(X)$ sont deux morphismes homotopes.

Démonstration : Notons i_0 (resp. i_1) l'application $[n] \rightarrow [1] \times [n]$ définie par $a \mapsto (0, a)$ (resp. $(1, a)$), et toutes celles qui seront naturellement induites par celle-ci. Soit alors $h : \Delta[1] \times \Delta[n] \rightarrow X$ une homotopie $f \sim g$.

D'après la proposition 11.1, $\theta = \overset{2}{\pi}(h)$ est un morphisme $\Sigma\mathcal{OCh}([1] \times [n]) \rightarrow \overset{2}{\pi}(Y)$, et l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma\mathcal{OCh}([n]) & & \\
 \searrow^{i_0} & \nearrow^f & \\
 & \Sigma\mathcal{OCh}([1] \times [n]) & \xrightarrow{\theta} \overset{2}{\pi}(Y) \\
 \nearrow^{i_1} & \searrow^g & \\
 \Sigma\mathcal{OCh}([n]) & &
 \end{array}$$

On pose alors $\eta(a) = \theta((0, a) < (1, a))$ pour tout $a = 0, 1, \dots, n$. Une 1-flèche de $\mathcal{OCh}[n]$ est une suite strictement croissante $u = (a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b)$. On lui associe deux 2-flèches de $\mathcal{OCh}([1] \times [n])$:

$$\alpha = ((0, a) = (0, a_1) < (1, a_1) < \dots < (1, a_k) = (1, b)) < ((0, a) < (1, b))$$

$$\beta = ((0, a) < \dots < (0, a_k) < (1, a_k) = (1, b)) < ((0, a) < (1, b)).$$

On pose alors $\eta_{a,b}(u) = \theta(\beta)^{-1} \circ \theta(\alpha)$. La vérification des axiomes se fait immédiatement en regardant les relations dans $\mathcal{OCh}([1] \times [n])$ provenant de l'ordre défini dans les catégories ordonnées.

11.2.3. Théorème : Soient X et Y deux ensembles simpliciaux, et f et g deux applications homotopes de X dans Y . Alors $\overset{2}{\pi}(f)$ et $\overset{2}{\pi}(g)$ sont homotopes (rel $\overset{2}{\pi}(A)$ si f et g sont homotopes rel A).

Démonstration : À l'ensemble simplicial X , on associe un diagramme d_X de $\mathcal{S}$ dont les objets sont les $\Delta[n]_x$, un pour chaque morphisme $x : \Delta[n] \rightarrow X$, et les morphismes $t_{x,y} : \Delta[n]_x \rightarrow \Delta[p]_y$ sont les applications croissantes $\bar{t}_{x,y} : [n] \rightarrow [p]$ telles que $t_{x,y} = \Delta[\bar{t}_{x,y}]$ et $y \circ t_{x,y} = x$. On sait qu'alors $X = \text{colim } d_X$. Comme le produit cartésien commute aux colimites, on a $\Delta[1] \times X = \text{colim } \Delta[1] \times d_X$. Soit h_x le composé

$$\Delta[1] \times \Delta[n] \xrightarrow{\text{Id} \times x} \Delta[1] \times X \xrightarrow{h} Y.$$

Mais d'après la démonstration de la proposition précédente nous savons associer une homotopie $\eta_x : f_x \sim g_x$ à la donnée de h_x , c'est à dire un morphisme $\eta_x : \Sigma\mathcal{OCh}([n]_x) \rightarrow \mathcal{Fl}(\mathcal{Y})$, et il est clair que l'on a $\eta_y \circ t_{x,y} = \eta_x$.

On peut donc prendre la colimite des η_x , obtenant $\eta : X \rightarrow \mathcal{Fl}(\mathcal{Y})$ qui est l'homotopie cherchée.

11.2.4. Reprenons la situation de 9.3.3. Avec les notations de ce paragraphe, et puisque l'on a $\tilde{\eta} = k_g \circ \eta$, il en résulte que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{Z} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{Fl}(\mathcal{Z}) \\
 k_g \downarrow & & \downarrow \mathcal{Fl}(k_g) \\
 C_g & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & \mathcal{Fl}(C_g)
 \end{array}$$

11.2.5. Soient f_i et g_i deux morphismes homotopes rel $*$ de $\mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{C}'_i$, $i = 1, 2$, les quatre $\mathcal{C}$ étant des cg, et $*$ désignant leur unique objet lorsqu'on les considère comme des 2-groupoïdes.

Proposition : Dans ces conditions, $f_1 \vee f_2$ et $g_1 \vee g_2$ sont deux morphismes homotopes de $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2$ dans $\mathcal{C}'_1 \vee \mathcal{C}'_2$.

Démonstration : Soient η_i $i = 1, 2$ les homotopies, considérées comme des morphismes $\mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{F}l(\mathcal{C}'_i)$. Appliquons le foncteur $\mathcal{F}l$ aux inclusions naturelles $\mathcal{C}'_i \rightarrow \mathcal{C}'_1 \vee \mathcal{C}'_2$ et composons les morphismes ainsi obtenus avec η_i : on obtient deux morphismes $\mu_i : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{F}l(\mathcal{C}'_1 \vee \mathcal{C}'_2)$ qui sont égaux sur $*$ et qui définissent donc une unique homotopie $\mu : \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{F}l(\mathcal{C}'_1 \vee \mathcal{C}'_2)$ qui est l'homotopie cherchée.

11.3. Rappelons quelques résultats généraux sur les sommes amalgamées dans des catégories avec point base. Soient, pour $i = 1, 2$,

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_i & \longrightarrow & N_i \end{array}$$

deux carrés cocartésiens. Alors, il en va de même du carré

$$\begin{array}{ccc} B_1 \vee B_2 & \longrightarrow & N_1 \vee B_2, \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1 \vee N_2 & \longrightarrow & N_1 \vee N_2 \end{array}$$

et lorsque $B_1 = B_2 = B$, les colimites des deux diagrammes

$$M_1 \vee M_2 \longleftarrow A_1 \vee A_2 \xrightarrow{(f_1, f_2)} B \quad \text{et} \quad N_2 \longleftarrow B \longrightarrow N_1$$

sont les mêmes. Si l'on appelle μ_i le composé $A_i \rightarrow B_i \rightarrow B_1 \vee B_2$, $N_1 \vee B_2$ est la somme amalgamée du diagramme $M_1 \longleftarrow A_1 \xrightarrow{\mu_1} B_1 \vee B_2$ et de même $B_1 \vee N_2$ est la somme amalgamée du diagramme $M_2 \longleftarrow A_2 \xrightarrow{\mu_2} B_1 \vee B_2$. Considérons alors le cas (confer 3.3.) des homomorphismes de groupes $\lambda_i : H_i \rightarrow G_i$ et des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_i & \xrightarrow{\lambda_i} & \tilde{G}_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}(H_i) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\lambda_i) \end{array}$$

Il vient un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} G_1 \widetilde{\vee} G_2 & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mu_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}(\mu_2) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\lambda_1) \vee \mathcal{D}(\lambda_2) \end{array},$$

et par ailleurs on a $\mathcal{D}(\mu_1, \mu_2) = \mathcal{D}(\lambda_1) \vee \mathcal{D}(\lambda_2)$.

Considérons pour commencer le cas $H_1 = G_1$ et $\lambda_1 = \text{Id}$. Alors $\mathcal{D}(\lambda_1) = \mathcal{D}(G_1)$ a le type d'homotopie de $\tilde{1}$, 1 désignant ici le groupe réduit à l'élément neutre (9.2.1. avec $L = 0$). Donc $\mathcal{D}(\mu_1)$ a le type d'homotopie de $\tilde{G}_2$ (proposition 11.2.3), ce qui implique que $\pi_2(\mathcal{D}(\mu_1)) = 0$. D'après la proposition 3.4. il vient un isomorphisme $G_1^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[G_2] \rightarrow N(G_1)^{\text{ab}}$ où $N(G_1)$ est le plus petit sous groupe distingué de $G_1 \vee G_2$ qui contient G_1 .

Peut-on montrer ce résultat plus simplement ?

Partons maintenant de $\lambda_i : \mathbb{F}_{p_i} \rightarrow \mathbb{F}_{q_i}$ et notons $H'_i \in \mathbb{F}_{q_i}$ le plus petit sous groupe distingué de $\mathbb{F}_{q_i}$ contenant l'image de λ_i , et supposons que l'on ait, pour $i = 1, 2$, $\pi_2(\mathcal{D}(\lambda_i)) = 0$. Alors $\mathcal{D}(\lambda_i)$ n'est autre que le cg (confer 1.2.6.) $\mathcal{D}(H'_i, \mathbb{F}_{q_i})$. D'après 10. il existe un ensemble simplicial X_i et une équivalence d'homotopie $\overset{2}{\pi}(X_i) \sim \mathcal{D}(\lambda_i)$, et donc une équivalence d'homotopie $\overset{2}{\pi}(X_1 \vee X_2) = \overset{2}{\pi}(X_1) \vee \overset{2}{\pi}(X_2) \sim \mathcal{D}(\lambda_1) \vee \mathcal{D}(\lambda_2)$. Or l'hypothèse sur les λ_i implique que les X_i sont asphériques, et donc, d'après un théorème de J.H.C. Whitehead, il en va de même de $X_1 \vee X_2$, et donc $\pi_2(\mathcal{D}(\lambda_1) \vee \mathcal{D}(\lambda_2)) = 0$. Les généralités sur les sommes amalgamées permettent d'affirmer que $\pi_2(\mathcal{D}(\mu_1, \mu_2)) = 0$. Notons H_i (resp. N) le plus petit sous groupe distingué de $\mathbb{F}_{q_1} \vee \mathbb{F}_{q_2}$ contenant l'image de μ_i , (resp. de (μ_1, μ_2)). Il vient :

$$\mathcal{D}(H'_1, \mathbb{F}_{q_1}) \vee \mathcal{D}(H'_2, \mathbb{F}_{q_2}) = \mathcal{D}(N, \mathbb{F}_{q_1+q_2})$$

et (d' après 4.3.)

$$H_1 \cap H_2 = [H_1, H_2].$$

En particulier, il vient :

11.3.1. Proposition. Soient m et m' deux mots d'un groupe libre de type fini G qui ne soient pas des vraies puissances, et qui ne contiennent aucune lettre en commun. Soient H et H' les plus petits sous groupes distingués de G engendrés par m et m' . Alors on a $H \cap H' = [H, H']$.

Peut-on démontrer ce résultat directement ?

11.4. Voici une démonstration simple de quelques résultats de W.H.Cockcroft.

11.4.1. Proposition: Si un CW-complexe fini de dimension 2 non homotopiquement trivial a un π_1 fini , alors son π_2 est non nul.

Démonstration: Soit $\lambda : F_p \rightarrow F_q$ l'homomorphisme définissant le CW-complexe. Par hypothèse, le conoyau K de λ est fini, disons d'ordre k . Soit $\mu : F_q \rightarrow K$ la projection canonique. Alors le noyau H de μ est d'indice fini k et par conséquent H est un sous-groupe libre de rang $n = k(q - 1) + 1$ de F_q . Mais le π_2 cherché est le noyau de l'homomorphisme surjectif $b^{\text{ab}} : \Gamma^{\text{ab}}(\lambda) = F_p^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}[K] \rightarrow H^{\text{ab}}$ ie $\mathbb{Z}^p \otimes \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^n$. La surjectivité implique que l'on a $k(q - 1) + 1 \leq kp$, i.e. $k(p - q + 1) \geq 1$. Mais alors le noyau de b^{ab} est non nul si $k > 1$. Si $k = 1$, alors le seul cas où le noyau de b^{ab} peut être nul est celui où on a $p = q$. Mais dans

ce cas, $\lambda : F_p \rightarrow F_p$ étant surjectif est un isomorphisme (confer par exemple *Combinatorial Group Theory* p.110, corollary 2.13.1.), et le CW-complexe est homotopiquement trivial, étant égal à un wedge de disques.

Si l'on part d'un 2-CW-complexe de π_1 fini et de π_2 non nul, alors $p > q$, et cette inégalité se conserve si l'on ajoute des 2-cellules à son 1-squelette. Comme le π_1 restera fini, le π_2 restera non nul. Il en résulte que la conjecture de Whitehead est vraie pour ces CW-complexes : c'est l'un des résultats de Cockcroft.

Proposition 11.4.2. : Si un CW-complexe X fini de dimension 2 a un π_1 libre, et si $H_2(X) = 0$, alors on a aussi $\pi_2(X) = 0$. (c'est aussi un résultat de Cockcroft).

Démonstration: Comme ci-dessus, on suppose que X est défini par l'application $\lambda : F_p \rightarrow F_q$. La suite exacte d'homologie du cône s'écrit $0 \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow \mathbb{Z}^p \xrightarrow{\lambda^{\text{ab}}} \mathbb{Z}^q \dots$ et l'hypothèse est donc que λ^{ab} est injective. Soit G l'image de λ . C'est un groupe libre, et l'application $u : F_p \rightarrow G$ étant surjective, il en va de même de u^{ab} et par conséquent le rang de G est au plus égal à p . Comme λ^{ab} est injective, ce rang est exactement p . On en conclut comme dans la proposition précédente que u est un isomorphisme. Par ailleurs l'hypothèse sur le π_1 implique que le conoyau K de λ est un groupe libre. Soit $\mu : F_q \rightarrow K$ l'application de passage au quotient. D'après *Combinatorial Group Theory* p. 132 theorem 3.3. il existe un isomorphisme $\varphi : F_r \vee F_k \rightarrow F_q$ tel que $\mu \circ \varphi|_{F_k}$ soit un isomorphisme, et qui applique H' , le sous groupe distingué engendré par F_r , sur le noyau de μ , i.e. sur le sous groupe distingué de F_q engendré par G . Notons comme précédemment H ce sous groupe. Passant aux abélianisés, on voit que l'on a $r = p$. Par ailleurs, H' est un groupe libre de base les mgm^{-1} où m parcourt F_k et g parcourt une base de F_r , et donc H'^{ab} est isomorphe comme $\mathbb{Z}[F_k]$ -module à $\mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Z}[F_k]$, cependant que l'on a $\Gamma^{\text{ab}}(\lambda) = \mathbb{Z}^p \otimes \mathbb{Z}[F_k]$, une égalité de $\mathbb{Z}[F_k]$ -modules. Mais alors, puisque $r = p$, b^{ab} est un épimorphisme de $\mathbb{Z}[F_k]$ -modules libre de même rang : c'est donc un isomorphisme.

11.4.3. Soit $\lambda : F_2 \rightarrow F_2$ l'homomorphisme défini par $\lambda(x) = xy^2$ et $\lambda(y) = x^2y$. Notons H_1 le sous groupe distingué de F_2 engendré par xy^2 et H_2 celui engendré par x^2y . Soit enfin H le noyau de μ (avec les notations de 11.4.1.). Comme le conoyau de λ est égal à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, nous sommes dans le cas envisagé en 11.4.1. Le cône de λ a donc un π_2 non nul. Comme ce π_2 est par ailleurs égal à $H_1 \cap H_2/[H_1, H_2]$, ce groupe est donc non nul. Par ailleurs H^{ab} est isomorphe à $\mathbb{Z}^4$ et $\Gamma_{\lambda}^{\text{ab}} = F_2^{\text{ab}} \otimes \mathbb{Z}(\text{coker } \lambda) = \mathbb{Z}^6$. Donc $H_1 \cap H_2/[H_1, H_2]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

11.4.4. À titre d'exercice, montrons que le commutateur $xyx^{-1}y^{-1}$ est un élément de $H_1 \cap H_2$ qui n'appartient pas à $[H_1, H_2]$. D'abord, utilisant combinatorial group theory (theorem 2.7. p 89 , theorem 2.9. p.94), on voit que H_1 et H_2 sont les sous-groupes libres de F_2 respectivement engendrés par les éléments $\alpha_n = x^{n+2}yx^{-n}$, $\beta_n = y^{n+2}xy^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$, et que $H = H_1H_2$ a pour base les quatre éléments $\{a = xyx^{-2}, b = x^3, c = x^2y, d = yx^{-1}\}$. Pour trouver ce dernier résultat à partir du théorème 2.7 rappelé ci-dessus, on relève les éléments de $F_2/H = \mathbb{Z}/3$ en $K = \{1, x, x^2\} \subset H$, et on fait les produits des éléments

de K par successivement x puis y . Si u est l'un de ces produits, soit $v \in K$ l'élément congru à u mod H . On calcule alors les six éléments uv^{-1} : deux sont égaux à 1, est les quatre autres sont les éléments indiqués ci-dessus. On peut maintenant expliciter l'application $b^{\text{ab}} : \Gamma^{\text{ab}}(\lambda) = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/3] \rightarrow H^{\text{ab}}$. Notons par une barre l'abélianisation et par θ le générateur de $\mathbb{Z}/3$, classe de x . D'après 3.3. b^{ab} est donné par $\bar{s} \otimes \theta^i \mapsto x^i \lambda(s) x^{-i} \mapsto \overline{x^i \lambda(s) x^{-i}}$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} x \otimes 1 &\mapsto \overline{x^2 y} = \bar{c} \\ y \otimes 1 &\mapsto \overline{y^2 x} = \bar{b} + \bar{a} + \bar{d} \\ x \otimes \theta &\mapsto \overline{x^3 y x^{-1}} = \bar{b} + \bar{d} \\ x \otimes \theta^2 &\mapsto \overline{x^4 y x^{-2}} = \bar{b} + \bar{a} \\ y \otimes \theta &\mapsto \overline{xy^2} = \bar{a} + \bar{c} \\ y \otimes \theta^2 &\mapsto \overline{x^2 y^2 x^{-1}} = \bar{c} + \bar{d} \end{aligned}$$

Une base du noyau de b^{ab} est donc formée des deux éléments $(x+y)(\theta-1)$ et $(x+y)(\theta^2-1)$. Par ailleurs, $F_2/H_1 = \mathbb{Z}$ et donc $b^{\text{ab}} : \Gamma^{\text{ab}}(\alpha) \rightarrow H_1^{\text{ab}}$ est l'application $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow H_1^{\text{ab}}$ donnée par $x \otimes t^n \mapsto x^n \alpha(x) x^{-n} = \alpha_n$. C'est un isomorphisme, ce que prédisait d'ailleurs le théorème de Lyndon puisque $x^2 y$ n'est pas une vraie puissance. Même résultat pour $\Gamma(\beta)$ en remplaçant x par y et H_1 par H_2 . Donc $\Gamma(\alpha) \approx H_1$ et $\Gamma(\beta) \approx H_2$. Les générateurs de $\Gamma(\alpha)$ sont, dans la description par générateurs et relations donnée en 3.2. tous les éléments de $\mathbb{Z} \times F_2$, et l'image du couple (x^n, g) est $g\alpha(x)^n g^{-1}$, de même celle de (y^n, g) est $g\beta(y)^n g^{-1}$. Revenons à $xyx^{-1}y^{-1}$. Le couple $(xyx^{-1}y^{-1}, yxy^{-1}x^{-1}) \in H_1 \rtimes H_2$ est un représentant mod $\omega(U)$ d'un élément du π_2 de $\mathcal{D}(H_1, H_2, F_2)$ dont on veut savoir s'il est non nul. Pour cela nous allons chercher à quel élément de $\Gamma^{\text{ab}}(\lambda)$ il correspond par l'isomorphisme $\mathcal{D}(H_1, H_2, F_2) \approx \mathcal{D}(\lambda)$. Or $xyx^{-1}y^{-1} = (xyx(yx^2)^{-1})^{-1} = \alpha_{-1}\alpha_{-2}^{-1}$ et de même $yxy^{-1}x^{-1} = \beta_{-1}\beta_{-2}^{-1}$. Mais dans $\Gamma(\alpha)$ le produit de générateurs $(x, x^{-1})(x^{-1}, x^{-2})$ va sur $\alpha_{-1}\alpha_{-2}^{-1}$, et dans $\Gamma(\beta)$, $(y, y^{-1})(y^{-1}, y^{-2})$ va sur $\beta_{-1}\beta_{-2}^{-1}$. Donc dans $\Gamma(\lambda)$ le produit de générateurs $(x, x^{-1})(x^{-1}, x^{-2})(y, y^{-1})(y^{-1}, y^{-2})$ correspond à $(xyx^{-1}y^{-1}, yxy^{-1}x^{-1}) \in H_1 \rtimes H_2$ (on rappelle que $\mathcal{D}(\lambda)$ est isomorphe à la somme amalgamée de $\mathcal{D}(\alpha) \longleftarrow F_2 \longrightarrow \mathcal{D}(\beta)$). Pour terminer, il suffit d'envoyer chacun des quatre générateurs sur leur image dans $\Gamma^{\text{ab}}(\lambda)$. Comme le générateur $(z, g) \in F_2 \times F_2$ va sur $\bar{z} \otimes (g \bmod H)$, on trouve $x \otimes \theta^2 - x \otimes \theta + y \otimes \theta^2 - y \otimes \theta = (x+y) \otimes (\theta^2 - \theta)$: c'est un élément non nul du π_2 , et donc $xyx^{-1}y^{-1} \notin [H_1, H_2]$.

De même, $A = x^3 y x^2 y^{-1} x^{-5}$ est aussi un élément de $H_1 \cap H_2$ qui n'appartient pas à $[H_1, H_2]$. En effet on a d'une part $A = \alpha_1 \alpha_3^{-1}$ et d'autre part $A = \beta_{-2} \beta_{-4} \beta_{-6} \beta_{-7} \beta_{-9} \beta_{-10}^{-1} \beta_{-8}^{-1} \beta_{-6}^{-1} \beta_{-4}^{-1} \beta_{-2}^{-1}$ ce qui permet de construire dans $\Gamma(\lambda)$ l'élément suivant, où l'on a posé $g = \beta_{-2} \beta_{-4} \beta_{-6}$:

$$(x, x)(x, x^3)^{-1}(y, gy^{-8})(y, gy^{-10})(y, gy^{-9})^{-1}(y, gy^{-7})^{-1}$$

dont l'image dans $\Gamma^{\text{ab}}(\lambda)$ est

$$x \otimes \theta - x \otimes 1 + y \otimes \theta + y \otimes \theta^2 - y \otimes 1 - y \otimes \theta^2 = (x + y)(\theta - 1).$$

11.5. Le cas relatif. Revenons au paragraphe 10, et traitons le cas d'un CW-complexe X de dimension 2 auquel on attache des 2-cellules à son 1-squelette, obtenant l'espace Y . Au niveau des ensembles simpliciaux, on a donc d'abord un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S_k^1 & \xrightarrow{g} & U \xleftarrow{v} S_n^1 \\ \downarrow & & \downarrow k_g \\ B_k & \xrightarrow{q_g} & C_g = X \end{array}$$

où v est anodine et le carré cocartésien, et, quite à agrandir U , si l'on attache k' cellules à C_g par l'application g' , il vient un second diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{g'} & S_{k'}^1 \\ \downarrow q_g & & \downarrow \\ X & & B_{k'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xleftarrow{\quad} & B_{k'} \end{array}$$

où $Y = C_{q_g \circ g'}$ a le type d'homotopie de l'ensemble cherché, et la paire (Y, X) est aussi celle que l'on cherche. Les considérations générales de 11.3. sur les sommes amalgamées fournissent un diagramme dont les trois carrés sont cocartésiens (et où $X' = C_{g'}$) :

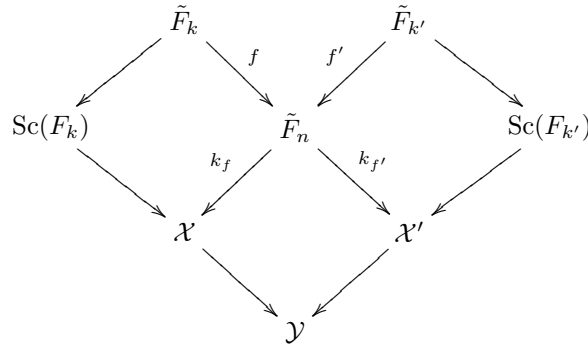
$$\begin{array}{ccccc} & S_k^1 & & S_{k'}^1 & \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ B_k & & U & & B_{k'} \\ & \searrow & \swarrow k_g & \searrow k_{g'} & \\ & X & & X' & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & Y & & & \end{array}$$

Passons aux $\overset{2}{\pi}$, et écrivons pour simplifier g, g', v au lieu de $\overset{2}{\pi}(g), \overset{2}{\pi}(g'), \overset{2}{\pi}(v)$, posons $f = r \circ g, f' = r \circ g'$, et soient $\bar{r}' : \overset{2}{\pi}(C_{g'}) = \overset{2}{\pi}(X) \rightarrow C_{f'}$, $\varphi' : C_{f'} \rightarrow \overset{2}{\pi}(C_{g'}) = \overset{2}{\pi}(X')$ construits comme $\bar{r}$ et φ . Il vient les deux diagrammes commutatifs (en choisissant sur les deux lignes les mêmes flèches horizontales soit pleines, soit

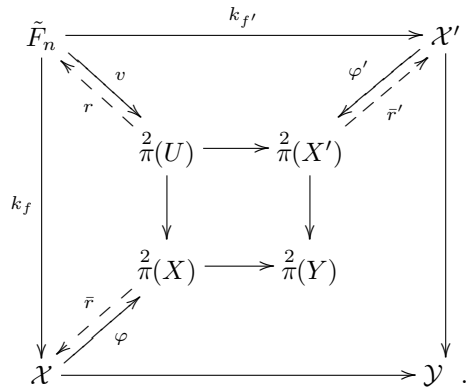
en tirets)

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{F}_k & \xrightarrow{g} & \frac{2}{\pi}(U) \xleftarrow[\bar{r}]{v} \tilde{F}_n \\
 \downarrow & & \downarrow k_g \quad \downarrow k_f \\
 \text{Sc}(F_k) & \xrightarrow{q_g} & \frac{2}{\pi}(X) \xleftarrow[\bar{r}]{\varphi} C_f
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \tilde{F}_n & \xleftarrow[\bar{r}]{v} \frac{2}{\pi}(U) \xleftarrow{g'} \tilde{F}_{k'} \\
 \downarrow k_{f'} & & \downarrow k_{g'} \\
 C_{f'} & \xleftarrow[\bar{r}']{\varphi'} \frac{2}{\pi}(X') \xleftarrow{q_{f'}} \text{Sc}(F_{k'})
 \end{array}$$

et aussi



dont les trois carrés sont cocartésiens et où l'on a posé $\mathcal{X} = C_f$, $\mathcal{X}' = C_{f'}$ et où $\mathcal{Y}$ est la somme amalgamée du diagramme $C_f \xleftarrow{k_f} \tilde{F}_n \xrightarrow{k_{f'}} C_{f'}$. Finalement, mettant ensemble des parties de ces diagrammes, on obtient le diagramme dont tous les “carrés” sont cocartésiens, et qui commutent avec la convention évidente pour le choix des flèches obliques



Il existe deux uniques flèches $\frac{2}{\pi}(Y) \xleftarrow[\Phi]{R} \mathcal{Y}$ qui complètent le diagramme précédant en le laissant commutatif, et de plus on a $R \circ \Phi = \text{id}$ et $\Phi \circ R \sim \text{id}$. C'est clair pour la première égalité. Pour démontrer la seconde on introduit le diagramme (qui est commutatif d'après 11.2.4.) où l'homotopie $\bar{\eta}'$ est définie comme

$\bar{\eta}$ en remplaçant f par f' :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Fl}(\overset{2}{\pi}U) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Fl}(\overset{2}{\pi}(X')) \\
\downarrow & \swarrow \eta & \nearrow \bar{\eta}' \\
& \overset{2}{\pi}(U) \xrightarrow{\quad} \overset{2}{\pi}(X') & \\
& \downarrow & \downarrow \\
& \overset{2}{\pi}(X) \xrightarrow{\quad} \overset{2}{\pi}(Y) & \\
& \nwarrow \bar{\eta} & \\
\mathcal{Fl}(\overset{2}{\pi}X) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Fl}(\overset{2}{\pi}Y) .
\end{array}$$

Encore une fois il existe une unique flèche $E : \overset{2}{\pi}(Y) \rightarrow \mathcal{Fl}(\overset{2}{\pi}(Y))$ qui le laisse commutatif : c'est l'homotopie cherchée. Les groupes d'homotopie π_1 et π_2 de Y sont donc ceux de $\mathcal{Y}$. En fait il y a mieux. Le morphisme $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ permet de récupérer la suite exacte d'homotopie

$$(*) \quad \pi_2(X) \rightarrow \pi_2(Y) \rightarrow \pi_2(Y, X) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y).$$

En effet, notons ω l'application $X \rightarrow Y$, Ω l'application $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et posons $\bar{\omega} = \overset{22}{\nu}\pi(\omega)$, $\bar{\Omega} = \overset{2}{\nu}\Omega$. Notons aussi d'une manière générale Γ_h la fibre homotopique de l'application h . Ainsi on a $\pi_2(Y, X) = \pi_1(\Gamma_\omega)$, et la transformation naturelle $\text{Id} \rightarrow \overset{22}{\nu}\pi$ applique la suite exacte précédente dans celle correspondant à $\bar{\omega}$. Le corollaire 9.4.5. et le lemme des cinq montrent que $\pi_1(\Gamma_\omega) \rightarrow \pi_1(\Gamma_{\bar{\omega}})$ est un isomorphisme. Par ailleurs le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\overset{22}{\nu}\pi(X) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & \overset{22}{\nu}\pi(Y) \\
\downarrow \overset{2}{\nu}(\bar{r}) & & \downarrow \overset{2}{\nu}(\bar{R}) \\
\overset{2}{\nu}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\bar{\Omega}} & \overset{2}{\nu}(\mathcal{Y})
\end{array}$$

dont les flèches verticales induisent des isomorphismes des π_1 et π_2 montre que finalement la suite exacte $*$ s'identifie fonctoriellement à la suite exacte dans les mêmes degrés du morphisme $\bar{\Omega}$, i.e. à la suite exacte

$$(**) \quad \pi_2(\mathcal{X}) \rightarrow \pi_2(\mathcal{Y}) \rightarrow \pi_1(\Gamma_{\bar{\Omega}}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{Y}).$$

Il ne reste plus qu'à expliciter $\pi_1(\Gamma_{\bar{\Omega}})$. Rappelons la définition de Γ_h lorsque $h : U \rightarrow V$ est une application entre complexes de Kan réduits, ce qui est le cas ici (confer 9.4.1.). C'est, en dimension n , l'ensemble des couples (x, z) avec $x : \Delta[n] \rightarrow U$ et $z : \Delta[1] \times \Delta[n] \rightarrow V$ tels que $z|_{0 \times \Delta[n] \cup \Delta[1] \times *} = *$ et $z|_{1 \times \Delta[n]} = h \circ x$. Par ailleurs, le π_1 d'un complexe de Kan réduit K est le quotient de l'ensemble des 1-simplexes par la relation d'équivalence $a \sim a'$ si et seulement si il existe un $b \in K_2$ avec $d_0 b = *$, $d_1 b = a$, $d_2 b = a'$.

D'après la définition de $\overset{2}{\nu}$ et 11.1, se donner $\Delta[1] \times \Delta[n] \rightarrow \overset{2}{\nu}(\mathcal{Y})$, c'est se donner une application de 2-catégories $\mathcal{OCh}([1] \times [n]) \rightarrow \mathcal{Y}$. En utilisant les relations explicitées en 8.2., on trouve sans peine l'explicitation suivante de $\pi_1(\Gamma_{\tilde{\Omega}})$: on prend l'ensemble des triples (x, u, v) formés d'une 1-flèche x de $\mathcal{X}$ et de deux 2-flèches u et v de $\mathcal{Y}$ telles que $s(u) = \Omega(x)$, $b(u) = b(v)$, $s(v) = 1$, et on quotiente par la relation $(x, u, v) \sim (x', u', v')$ si et seulement si il existe une 2-flèche $\theta : x' \Rightarrow x$ telle que l'on ait $\Omega(\theta) = u^- \circ v \circ v'^- \circ u'$.

11.5.1. En particulier, lorsque $\Omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est l'application $\tilde{G} \rightarrow \mathcal{D}(\lambda)$ du théorème 3.3., la relation d'équivalence se simplifie et on trouve immédiatement que $\pi_1(\Gamma_{\tilde{\Omega}})$ n'est autre que $\Gamma(\lambda)$. Mais alors la suite exacte d'homotopie (**) devient

$$0 \rightarrow \pi_2(\mathcal{D}(\lambda)) \rightarrow \Gamma(\lambda) \rightarrow G \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}(\lambda)) \rightarrow (1)$$

où l'application $\Gamma(\lambda) \rightarrow G$ est b . Il n'y a là rien de nouveau, sauf que, puisque $\mathcal{D}(\lambda)$ n'est autre que le cône de λ (car $\mathcal{D}(H)$ est isomorphe à $\text{Sc}(H)$), et puisque $\Gamma(\lambda)$ est isomorphe au module croisé libre associé à λ , on retrouve le théorème suivant de J.H.C. Whitehead :

Théorème : Soient U et V deux bouquets de cercles, $f : U \rightarrow V$ une application continue et soit X le 2-CW-complexe obtenu en attachant à V des 2-cellules le long de f . Alors $\pi_2(X, V)$ est le module croisé libre de l'homomorphisme $\pi_1(f) : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(V)$.

11.5.2. En fait le théorème de Whitehead s'applique à l'attachement de 2-cellules à un CW-complexe quelconque, et non à un bouquet de sphères. Avant d'étudier ce cas, commençons par établir quelques généralités. Soit donc $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de cg, et soit, comme ci-dessus, (x, u, v) un générateur de $\pi_1(\Gamma_f)$. On voit immédiatement sur la définition que l'on a les équivalences suivantes :

$$(x, u, v) \sim (x, v^- \circ u, i(1)) \sim (x, i f_1(x), u^- \circ v).$$

En particulier, si $\mathcal{A} = \tilde{G}$ pour un certain groupe G , l'application $(x, u, v) \rightarrow u^- \circ v$ passe au quotient et définit une bijection $\pi_1(\Gamma_f) \rightarrow \ker s$ (ce qui démontre l'assertion de 11.5.1.).

On définit l'homomorphisme $\pi_2(\mathcal{B}) \rightarrow \pi_1(\Gamma_f)$ en faisant correspondre à $\omega \in \pi_2(\mathcal{B})$ la classe du triplet $(1, i(1), \omega)$, et un homomorphisme $\pi_1(\Gamma_f) \rightarrow \pi_1(\mathcal{A})$ qui à la classe de (x, u, v) associe la classe de $x \in \mathcal{A}_1$ dans le π_1 . Alors la suite

$$\pi_2(\mathcal{A}) \rightarrow \pi_2(\mathcal{B}) \rightarrow \pi_1(\Gamma_f) \rightarrow \pi_1(\mathcal{A}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{B})$$

est exacte. Montrons par exemple l'exactitude en $\pi_1(\Gamma_f)$. Le composé $\pi_2(\mathcal{B}) \rightarrow \pi_1(\Gamma_f) \rightarrow \pi_1(\mathcal{A})$ est nul, étant $\omega \mapsto (1, i(1), \omega) \mapsto \text{classe de } 1$; et si le triplet $(x, f_1(x), v)$ a pour image 0 dans $\pi_1(\mathcal{A})$, alors il existe un $\theta \in \mathcal{A}_2$ avec $s(\theta) = 1$ et $b(\theta) = x$, et donc, par définition de l'équivalence, on a $(x, i(x), v) \sim (1, i(1), f(\theta)^- \circ v)$. Ce dernier triplet est l'image de $f(\theta)^- \circ v \in \pi_2(\mathcal{B})$, ce qui achève la vérification de l'exactitude en ce point. Les autres vérifications sont analogues.

Notons aussi qu'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{a} & \mathcal{A}' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{b} & \mathcal{B}' \end{array}$$

induit un homomorphisme $\pi_1(\Gamma_f) \rightarrow \pi_1(\Gamma_{f'})$ donné au niveau des triplets par $(x, u, v) \mapsto (a_1(x), b_2(u), b_2(v))$.

11.5.3. Considérons la situation suivante. Soit $\lambda : H \rightarrow G$ un homomorphisme de groupes, et soit $\mathcal{A} : M \rtimes G \xrightleftharpoons[b]{s} G$ un cg. Soit enfin $\mathcal{B}$ la somme amalgamée du diagramme

$$\mathcal{A} \xleftarrow{i \circ \tilde{\lambda}} \tilde{H} \longrightarrow \mathcal{D}(H) ,$$

si bien que l'on a le diagramme suivant, dont les deux carrés sont cocartésiens :

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} \tilde{H} & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & \tilde{G} & \xrightarrow{i} & \mathcal{A} \\ \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow f \\ \mathcal{D}(H) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\lambda) & \xrightarrow{k} & \mathcal{B} \end{array}$$

et où le carré de droite est dans la situation de 4.4. On cherche $\pi_1(\Gamma_f)$. L'adjonction du foncteur π_1 de la catégorie des cg vers celle des groupes, au foncteur $\sim$ de la catégorie des groupes vers celle des cg, fournit un morphisme naturel $c : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{A})$. Soit $\mathcal{C}$ la somme amalgamée du diagramme

$$\mathcal{B} \xleftarrow{f} \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\pi}_1(\mathcal{A}) ,$$

ce qui fournit un nouveau carré cocartésien

$$(**) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{c} & \tilde{\pi}_1 \\ f \downarrow & & \downarrow i \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{j} & \mathcal{C} \end{array}$$

(on a posé $\pi_1 = \pi_1(\mathcal{A})$ pour simplifier l'écriture) que l'on peut coller à droite des deux précédents. En composant les trois, obtient le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H} & \xrightarrow{c_1 \circ \lambda} & \tilde{\pi}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}(H) & \longrightarrow & \mathcal{C} , \end{array}$$

si bien que $\mathcal{C}$ n'est autre que $\mathcal{D}(c_1 \circ \lambda)$.

Théorème : L'homomorphisme $\pi_1(\Gamma_f) \rightarrow \pi_1(\Gamma_i)$ induit par le carré $(**)$ est un isomorphisme. Autrement dit, $\pi_1(\Gamma_f)$ est le module croisé libre engendré par l'homomorphisme $c_1 \circ \lambda : H \rightarrow \pi_1$.

Lorsqu'on applique ce théorème à la situation $\Omega : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ci-dessus dans 11.5., on retrouve le théorème de Whitehead.

11.5.4. Démonstration du théorème. Commençons par expliciter le morphisme $\mathcal{D}(\lambda) \rightarrow \mathcal{D}(c_1 \circ \lambda)$, c'est à dire l'homomorphisme $\Gamma(\lambda) \rightarrow \Gamma(c_1 \circ \lambda)$ obtenu en composant le carré de droite de $(*)$ et le carré $(**)$. D'après 3.3, $\Gamma(\lambda)$ est un quotient du groupe libre K engendré par toutes les paires (h, t) où h parcourt H et t parcourt G . De même, $\Gamma(c_1 \circ \lambda)$ est un quotient du groupe libre L engendré par toutes les paires (h, τ) avec $h \in H$, $\tau \in \pi_1$. Notons $q : H \rightarrow \Gamma(\lambda)$ et aussi $q : H \rightarrow \Gamma(c_1 \circ \lambda)$ les passages au quotient par les relations explicitées en 3.3. Soit $p : K \rightarrow L$ l'homomorphisme de groupes qui au générateur (h, t) associe le générateur $(h, c_1(t))$. (Rappelons que $c_1(x)$ est la classe de $x \in G$ dans π_1 et que $c_2(z)$, pour $z \in \mathcal{D}(\lambda)_2$, est la classe commune de $s(z)$ et $b(z)$ dans π_1 .) Cet homomorphisme est compatible avec les relations et définit donc par passage aux quotients un homomorphisme $\bar{p} : \Gamma(\lambda) \rightarrow \Gamma(c_1 \circ \lambda)$: c'est l'homomorphisme cherché.

- *Surjectivité.* Il suffit de relever un élément de la forme $q(h, \tau) \in \pi_1(\Gamma_i) = \Gamma(c_1 \circ \lambda)$. Or, $q(h, \tau)$ correspond au triplet $(\xi, i(\xi), q(h, \tau))$ où on a posé $\xi = b(q(h, \tau)) = \tau c_1 \circ \lambda(h) \tau^{-1}$. Soit $t \in G$ un relèvement de τ , et soit $x = b(q(h, t)) = t \lambda(h) t^{-1}$. Alors le triplet $(x, i f_1(x), q(h, t))$ a pour image par $\bar{p}$ le triplet précédent. De la surjectivité de l'application composée $\pi_1(\Gamma(\lambda)) \rightarrow \pi_1(\Gamma(f)) \rightarrow \pi_1(\Gamma(c_1 \circ \lambda))$ résulte la surjectivité de celle de droite, qui est celle que l'on cherche.

- *Injectivité.* Soit (x, u, v) un triplet pour $\Gamma(f)$ dont la classe appartient au noyau. son image $(c_1(x), j(u), j(v))$ est donc équivalente au triplet $(1, 1, 1)$. Par définition cela implique que l'on a $c_1(x) = 1$ et donc que, dans G , on a $x \sim 1$. Il existe donc un élément $w \in \mathcal{D}(\lambda)$ avec $s(w) = 1, b(w) = x$, et on a $(x, u, v) \sim (1, u \circ f_2(w), v)$. On suppose donc dès le début que l'on part d'un triplet $(1, u, v)$. À son tour, ce triplet est équivalent au triplet $(1, 1, u^- \circ v)$ et l'on remarque que l'on a $\theta = u^- \circ v \in \pi_2(\mathcal{B})$. Notre hypothèse est maintenant que θ appartient à $\ker j_2$ et nous devons montrer que cela implique que $(1, 1, \theta) \sim (1, 1, 1)$. Pour ce faire, nous commençons par rappeler (confer 4.4.) que $N = \ker(s : \mathcal{B}_2 \rightarrow G)$ est un quotient de $M \rtimes \Gamma(\lambda)$ muni d'une certaine multiplication tordue par l'action de G , quotient par le sous groupe des relations noté U . On relève θ en un couple $(m, z) = (m, 1)(1, z) \in M \rtimes \Gamma(\lambda)$, et l'on a $j_2(\theta) = i(c_1(b(m)))\bar{p}(z) = \bar{p}(z)$. Donc $\bar{p}(z) = 1$. Pour conclure, on utilise le lemme suivant :

Lemme : Si on a $\bar{p}(z) = 1$, alors il existe un $w \in M$ tel que dans N on a $(1, z) = (w, 1) \mod U$.

Mais alors, mod U on a $(m, z) = (mw, 1)$ i.e. $\theta = f_2(mz)$, et revenant aux triplets, on a $(1, 1, \theta) \sim (1, 1, 1)$, ce qui termine la démonstration du théorème.

11.5.5. Démonstration du lemme. Puisque l'on a $z \in \Gamma(\lambda)$, on peut le relever en un $y \in K$. De l'égalité $\bar{p}(z) = q(p(y))$, on déduit que $p(y)$ appartient aux relations définissant les Γ . On voit facilement sur la définition de ces relations (a) et (b) en 3.2. que si $\bar{r}$ est une relation de $\Gamma(c_1 \circ \lambda)$, alors il existe une relation r

de $\Gamma(\lambda)$ telle que $p(r) = \bar{r}$. Mais alors si $p(y) = \bar{R}$, un produit de relations (a) et (b), il existe un produit R des relations analogues pour $\Gamma(\lambda)$ tel que $p(R) = \bar{R}$. Alors yR^{-1} appartient au noyau de p . Or ce noyau est le groupe libre dont on obtient un système de générateurs (et même une base) de la façon suivante. Puisque L est libre, il existe une section σ de p . Plus précisément on définit $\sigma(h, \tau) = (h, t_\tau)$ par le choix d'un relèvement t_τ de τ . Au couple (g, l) d'un générateur de K qui n'appartient pas à l'image de σ et d'un mot $l \in L$ on associe l'élément $T(g, l) = \sigma(l)g\sigma(p(g)^{-1})\sigma(l)^{-1} \in \ker p$. L'ensemble de ces $T(g, l)$ est l'ensemble des générateurs cherché. Remarquons que si $g = (h, t)$, alors $g\sigma(p(g)^{-1})$ vaut $(h, t)(h, t_{c_1(t)})^{-1}$. Or t et $t_{c_1(t)}$ ont même image par c_1 . Donc il existe un $m \in M$ tel que $b(m) = t_{c_1(t)}t^{-1}$ et compte tenu de l'action de G sur $\Gamma(\lambda)$ (confer 3.2.) on peut écrire

$$q(g\sigma(p(g)^{-1})) = q(g)\theta_{b(m)}(q(g)^{-1}).$$

Maintenant yR^{-1} est égal à un certain produit T des générateurs $T(g, l)$, et l'on a $q(y) = q(T)$, donc il suffit de démontrer le lemme lorsque $y = T(g, l)$. Dans ce cas, $z = q(y) = Aq(g)\theta_{b(m)}(q(g)^{-1})A^{-1}$ pour un certain A de $\Gamma(\lambda)$. Appliquons maintenant k pour aller dans N via $M \rtimes \Gamma(\lambda)$:

$$k(z) = (1, z) = (1, A)(1, q(g)\theta_{b(m)}(q(g)^{-1}))(1, A)^{-1}.$$

D'après 4.4.3., $(m\theta_{b(g)}(m)^{-1}, q(g)\theta_{b(m)}(q(g)^{-1}))$ est un élément de U , et donc mod U on a

$$(1, q(g)\theta_{b(m)}(q(g)^{-1})) = (\theta_{b(m)}(m)m^{-1}, 1)$$

et il vient

$$(1, z) = (1, A)(m', 1)(1, A)^{-1}$$

pour un certain $m' \in \Gamma(\lambda)$. Enfin, utilisant la multiplication dans $M \rtimes \Gamma(\lambda)$, on trouve,

$$(1, z) = (\theta_b(A)m', 1)(1, A)(1, A)^{-1} = (m'', 1)$$

ce qui achève la démonstration.