

Lettre d'Alexandre Grothendieck à Jean-Louis Verdier

Éditée par Georges Maltsiniotis

INTRODUCTION

Cette lettre d'Alexandre Grothendieck à Jean-Louis Verdier datée du 26 mars 1966 est d'une grande richesse. On trouve en germe la thèse de Hoàng Xuân Sính [16], [2], la théorie des catégories et champs de Picard [1, Exposé XVIII, 1.4]⁽¹⁾, et quelques idées sur la cohomologie des champs développées dans la thèse de Jean Giraud [11]. Grothendieck revient sur ces thèmes dans ses lettres à Larry Breen de 1975 [13]. On peut citer quelques autres textes traitant des sujets plus ou moins proches, comme par exemple [17, §6-7]⁽²⁾, [6], [3], [9], [10], [24], [7], [5], [8].

Vers la fin de sa lettre Grothendieck écrit « De ces exemples, il me semble qu'il se dégage une impression commune, qui demande à être clarifiée : c'est qu'il doit y avoir un énoncé, qui dirait essentiellement qu'il y a *équivalence* entre la notion disons de n -groupeïde [...] et la notion d'ensemble semi-simplicial tronqué à l'ordre n [...]. Ceci devrait marcher au moins dans la mesure où on prend les n -catégories à n -équivalence près, les espaces resp. ensembles semi-simpliciaux (de Kan disons) à homotopie près ». Et plus loin « Un énoncé analogue devrait marcher avec n remplacé par ∞ ». C'est la première fois que Grothendieck énonce cette hypothèse, connue maintenant sous le nom d'« hypothèse d'homotopie », qu'il précisera dans ses lettres à Breen [13] et dans le chapitre I de *Pursuing Stacks* [12].

Cette conjecture n'est toujours pas établie pour $n > 3$. Pour $n = 1$, il s'agit d'un résultat classique. Pour $n = 2$, les 2-groupeïdes stricts modélisent les types d'homotopie 2-tronqués [23], [26]. À partir de $n = 3$, pour que cette conjecture aie une chance d'être vraie, on doit considérer une notion non stricte de n -groupeïde. Pour $n = 3$, André Joyal et Myles Tierney ont prouvé que les groupeïdes de Gray (3-groupeïdes strictement associatifs, avec unités et inverses stricts, mais dont la « règle de Godement » est remplacée par un isomorphisme de cohérence) sont des modèles pour les 3-types d'homotopie⁽³⁾, résultat qui a été précisé par plusieurs auteurs [21], [4], [18].

⁽¹⁾ N. Éd. Pierre Deligne qui a rédigé cet exposé précise d'ailleurs s'être inspiré de cette lettre.

⁽²⁾ N. Éd. Attention : cette partie de l'article n'est pas reprise dans la version publiée de 1993.

⁽³⁾ N. Éd. Voir la lettre de Joyal à Grothendieck [13].

Simon Henry a montré que l'hypothèse d'homotopie, pour une notion de ∞ -groupeïde proche de celle de Grothendieck [12], [22], se réduisait à une conjecture technique assez naturelle [14, conjecture 5.3.3] (laquelle malheureusement ne semble pas plus facile à établir que l'hypothèse d'homotopie elle-même). Edoardo Lanari a introduit dans sa thèse [19] une notion de n -groupeïde, pour n fini, inspirée de celle de ∞ -groupeïde de Grothendieck, et dans [20] il a démontré pour ces groupeïdes un résultat similaire à celui de Simon Henri. Ces travaux ont permis à ces deux auteurs de prouver l'hypothèse d'homotopie pour les « 3-groupeïdes à la Grothendieck » [15], le résultat de Joyal-Tierney pouvant alors être interprété comme un théorème de strictification.

La lettre est fidèlement transcrite, sans autre modification que quelques corrections orthographiques. Les références bibliographiques et quelques notes de bas de page indiquées par « N. Éd. » (pour distinguer de celles de Grothendieck indiquées par « N. Gr. ») ont été ajoutées par l'éditeur.

Georges Maltsiniotis

**LETTRE D'ALEXANDRE GROTHENDIECK À
JEAN-LOUIS VERDIER, 26.03.1966**

26.3.1966

Cher Verdier,

J'ai réfléchi un peu ces derniers jours aux « catégories de Picard » dont je t'avais parlé (pour lesquelles il faudra trouver d'ailleurs un nom plus adéquat). J'ai explicité entièrement les axiomes, pour arriver à décrire avec précision l'invariant du type Postnikov reliant π_0 et π_1 . Je suis arrivé aux conclusions suivantes. Tout d'abord, pour avoir des résultats sympathiques très proches du modèle topologique, il y a lieu pour commencer de laisser tomber la donnée de commutativité dans les données et axiomes de la catégorie, et de regarder les « Gr-catégories » et les « Gr- n -catégories » avec, comme seules données l'opération \otimes et l'isomorphisme d'associativité, soumis à un axiome du pentagone. (On peut déduire l'objet unité des axiomes, à isomorphisme unique près, donc pas la peine de le mettre dans les données). Sous ces conditions, on trouve comme invariants, caractérisant complètement la Gr-catégorie à « Gr-équivalence près », les objets suivants :

- 1) Un groupe π_0 (pas nécessairement commutatif).
- 2) Un π_0 -module π_1 (commutatif!).
- 3) Un élément $c^3 \in H^3(\pi_0, \pi_1)$.

Bien entendu, $\pi_0 =$ classes d'isomorphisme d'objets de \underline{G} , $\pi_1 =$ automorphismes de l'objet unité, le c^3 s'obtient en choisissant pour tout $\xi \in \pi_0$ un représentant L_ξ , et pour tout couple $\xi, \xi' \in \pi_0$ un isomorphisme $\phi(\xi, \xi') : L_\xi \otimes L_{\xi'} \rightarrow L_{\xi\xi'}$. Les isomorphismes d'associativité définissent alors des isomorphismes $z(\xi, \xi', \xi'') : L_{\xi\xi'\xi''} \rightarrow L_{\xi\xi'\xi''}$, qu'on peut identifier à des éléments de π_1 . L'axiome du pentagone signifie que la fonction z est un 3-cocycle, et quand on varie les $\phi(\xi, \xi')$, le cocycle correspondant décrit exactement une classe de cohomologie, qui est le c^3 cherché. Ce dernier apparaît donc comme une obstruction à trouver une Gr-équivalence de \underline{G} avec une catégorie réduite (i.e. où deux objets isomorphes sont identiques), avec pour isomorphismes d'associativité des *identités* (i.e. qui soit vraiment un groupe dans (Cat)). Il est immédiat d'ailleurs que \underline{G} est caractérisé par les données 1) 2) 3), et on peut expliciter ce point en notant que

toute classe de 3-cohomologie peut être décrite par un « complexe non commutatif » de longueur 1

$$L_1 \xrightarrow{d_1} L_0$$

ayant comme invariants d'homologie π_0 et π_1 , et où L_1 est commutatif (son image dans L_0 invariante) et enfin π_0 opérant sur L_1 de façon compatible avec les opérations sur $\text{Im } d_1$. À un tel complexe, on associe d'autre part une Gr-catégorie, dont les objets sont les éléments de L_0 , les morphismes de x dans y étant les éléments z de L_1 tels que $y = d_1(z)x$, — la composition des morphismes, et la loi \otimes étant évidents (N.B. l'isomorphisme d'associativité est l'identité ici!).

Lorsque on se donne en plus sur \underline{G} un isomorphisme de commutativité satisfaisant les conditions de cohérence raisonnables avec celui d'associativité, alors π_0 est commutatif et opère trivialement sur π_1 , et d'ailleurs l'élément c^3 ne détermine plus la structure plus riche à Grab-équivalence près. Il faut ici remplacer le groupe H^3 par le groupe plus fin $H_S^3(\pi_0, \pi_1)$, décrit à l'aide de cocycles z satisfaisant la condition de symétrie

$$z(\xi\xi'\xi'')z(\xi'\xi''\xi)z(\xi''\xi\xi') = z(\xi''\xi'\xi)z(\xi'\xi\xi'')z(\xi\xi''\xi')$$

pris modulo les bords de 2-chaînes symétriques au sens ordinaire $f(\xi\xi') = f(\xi'\xi)$. Note qu'on construit facilement des exemples où le groupe ainsi obtenu n'est pas nul, et même a une image non nulle dans H^3 : si par exemple $\pi_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors l'image dans H^3 est H^3 tout entier.⁽⁴⁾

J'avais espéré bien entendu trouver un invariant rupinant reliant des groupes aussi importants que le groupe de Picard et le groupe des unités sur une variété algébrique (plus généralement, sur un espace annelé). Malheureusement, dans ces cas, il est toujours nul! Plus précisément et plus généralement, soit X un site muni d'un faisceau abélien G , alors la catégorie des G -torseurs est une Grab-catégorie, dont le π_0 et le π_1 sont $H^1(X, G)$ et $H^0(X, G)$; l'invariant dans H_S^3 est alors toujours nul. En effet, on constate que si $0 \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow 0$ est une résolution de longueur 1 de G , avec C_0 injectif, d'où un complexe de longueur 1

$$0 \rightarrow L_1 = \Gamma C_0 \rightarrow L_0 = \Gamma C_1 \rightarrow 0$$

alors \underline{G} avec sa structure de Grab-catégorie est équivalente à la Grab-catégorie définie comme dit plus haut par ce complexe. Or pour une Grab-catégorie obtenue ainsi par un complexe *abélien*, l'invariant dans le H_S^3 est toujours nul, comme on voit facilement

⁽⁴⁾ N. Gr. On construit, pour une catégorie de Picard *commutative*, une application

$$\sigma : \pi_0 \rightarrow \pi_1 \quad (\text{signature})$$

en regardant pour tout objet X de P , la symétrie $\sigma(X, X)$ de $X \otimes X$. Dire que σ est nulle signifie qu'on peut choisir la rigidification avec les ϕ de telle façon que les isomorphismes de symétrie

$$L_\xi \otimes L_{\xi'} \xrightarrow{\phi} L_{\xi\xi'} \longrightarrow L_{\xi'} \otimes L_\xi \xrightarrow{\phi} L_{\xi'\xi}$$

(compte tenu que $L_{\xi\xi'} = L_{\xi'\xi}$) soient des *identités*. C'est pour des telles P seulement qu'on a la classification par $H_S^3(\pi_0, \pi_1)$ ⁽⁵⁾ qu'il convient d'ailleurs de restreindre en ne prenant que les 3-cocycles satisfaisant la condition plus forte : $c(x, y, z) - c(x, z, y) + c(z, x, y) = 0$.

⁽⁵⁾ N. Gr. = 0 toujours!

(par exemple en remplaçant le complexe par un complexe dans lequel L_0 est libre, donc $\text{Im } d_1 = B_0$ est libre, et en utilisant un relèvement $B_0 \rightarrow L_1$). Ceci est certainement lié au fait que dans la catégorie $\text{D}(\text{Ab})$, un complexe de longueur 1 est connu quand on connaît ses deux invariants d'homologie, — car les Ext^2 sur \mathbb{Z} sont nuls. Dès qu'on passe aux $\text{Gr-}n$ -catégories ($n \geq 2$), donc aux complexes de longueur quelconque, cette circonstance assez exceptionnelle cessera de jouer. — Comme conséquence, si X est commutativement annelé, alors l'élément qu'on trouve dans $\text{H}_S^3(K^0(X), K^1(X))$ n'est peut-être pas nul, mais la considération du foncteur « déterminant » montre que son image dans $\text{H}_S^3(K^0(X), \mathbb{G}_m(X))$ est nul. Lorsque X est un schéma affine, alors $K^1(X) = \mathbb{G}_m(X)^{(6)}$, et on ne trouve donc pas d'invariant non trivial⁽⁷⁾ nouveau pour $K^0(A)$ et $K^1(A)$, A un anneau commutatif. Par contre, dès que A n'est pas commutatif, il semble plausible qu'on puisse trouver un invariant non trivial.

J'ai envie de te signaler quelques exemples de $\text{Grab-}n$ -catégories. Soit X, G comme ci-dessus, soit \underline{G} la catégorie des gerbes liées par G . C'est une deux-catégorie (ces objets sont des catégories!) d'autre part dans la thèse de Giraud on étudie l'opération $P \overset{G}{\wedge} Q$ sur deux G -gerbes⁽⁸⁾, qui a les propriétés formelles du produit tensoriel, version 2-catégorie. Les objets à équivalence près de \underline{G} forment le groupe $\text{H}^2(X, G)$, d'autre part l'objet unité de \underline{G} est la catégorie \underline{G} des G -torseurs équivalente aussi à la catégorie des \underline{G} -endomorphismes de cette dernière, dont les objets modulo isomorphisme forment le groupe $\text{H}^1(X, G)$. Enfin, l'objet unité de \underline{G} est le toseur trivial G , dont le groupe des automorphismes est $\text{H}^0(X, G)$. Les invariants π_0, π_1, π_2 de \underline{G} (une fois écrites des définitions en forme — ce qui constituera un travail non négligeable de rédaction) seront donc respectivement $\text{H}^2(G), \text{H}^1(G), \text{H}^0(G)$. D'autre part, si

$$0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow C^2 \longrightarrow 0$$

est une résolution de G , avec C^0 et C^1 injectifs, d'où un complexe

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma C^0 & \longrightarrow & \Gamma C^1 & \longrightarrow & \Gamma C^2 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les objets de cohomologie sont précisément les précédents, il doit être plus ou moins contenu dans les raisonnements de Giraud que \underline{G} est Grab- équivalente à la $\text{Grab-}2$ -catégorie définie (de la façon évidente) par ce complexe. — Lorsque X est commutativement annelé, et $G = \mathbb{G}_m$, alors on peut définir une $\text{Grab-}2$ -catégorie très voisine de la précédente, dont les 0-flèches (= objets) sont les Algèbres d'Azumaya sur X , les 1-flèches de \underline{A} à \underline{B} étant les couples (\underline{E}, ϕ) formés d'un Module loc libre \underline{E} et d'un isomorphisme $\phi : \underline{\text{End}}(\underline{E}) \rightarrow \underline{A} \otimes \underline{B}$, les 2-flèches de ce (\underline{E}, ϕ) dans (\underline{E}', ϕ') étant les isomorphismes $\psi : \underline{E} \rightarrow \underline{E}'$ compatibles avec ϕ et ϕ' . Modulo un peu de soin pour définir la composition des 1-flèches, on trouve bien une 2-catégorie, et le produit

⁽⁶⁾ N. Gr. déconnant !

⁽⁷⁾ N. Gr. peut-être que si !

⁽⁸⁾ N. Éd. Voir [11, chapitre IV, §2.4].

tensoriel des algèbres d’Azumaya en fait une Grab-2-catégorie, soit $\underline{\underline{\text{Br}}}_X$. On obtient alors un homomorphisme naturel da Grab-2-catégories

$$\underline{\underline{\text{Br}}}_X \longrightarrow \underline{\underline{G}}_X \quad ,$$

en associant à chaque Algèbre d’Azumaya \underline{A} la gerbe des « banalisations » de \underline{A} , i.e. en langage habituel, des couples (\underline{E}, ϕ) d’un Module loc. libre \underline{E} et d’un isomorphisme $\phi : \underline{\text{End}}(\underline{E}) \xrightarrow{\sim} \underline{A}$. Notant que les invariants d’homotopie de $\underline{\underline{\text{Br}}}_X$ sont respectivement $\text{Br}(X)$, $\text{Pic}(X)$, $\mathbb{G}_m(X)$, on constate avec satisfaction que l’homomorphisme précédent induit les homomorphismes qu’on devine sur les π_i , donc un isomorphisme en dimensions 0, 1 (le 2-foncteur est 2-fidèle), et l’injection bien connue en dim. 2. Dire que $\text{Br}(X) \rightarrow \text{H}^2(X, \mathbb{G}_m)$ est bijective (ce qui, dans le cas topologique, a une nette tendance à se produire, d’après Serre . . .) signifie aussi que le 2-homomorphisme ci-dessus est une 2-équivalence, ou encore que toute \mathbb{G}_m -gerbe provient d’une Algèbre d’Azumaya.⁽⁹⁾

On rencontre également sans les chercher des Grab-3-catégories. Avec toujours G un faisceau abélien sur X , soit $\underline{\underline{G}}$ (trois fois souligné) la 3-catégorie dont les 0-flèches = objets sont les G -2-gerbes sur X (whatever that means, vu que G -0-gerbe = torseur sous G , G -1-gerbe = G -gerbe au sens de la thèse de Giraud . . .), les 1,2,3-flèches définies à l’avenant, ainsi que la loi \otimes . On doit trouver des invariants $\text{H}^3(X, G)$, $\text{H}^2(X, G)$, $\text{H}^1(X, G)$, $\text{H}^0(X, G)$, reliés à l’aide du complexe

$$0 \longrightarrow \Gamma C^0 \longrightarrow \Gamma C^1 \longrightarrow \Gamma C^2 \longrightarrow \Gamma C^3 \longrightarrow 0$$

qu’on devine, et qui donne $\underline{\underline{G}}$ à Grab-3-équivalence près. Cette catégorie est liée à une Grab-3-catégorie remarquable, très analogue à $\underline{\underline{\text{Br}}}_X$, dont les 0-flèches sont les liens sur X de centre G , les 1-flèches de L à L' sont les gerbes P sur X liées par $L^\circ \overset{G}{\wedge} L'$ (où L° est le lien opposé à L), les 2-flèches de P à Q sont les homomorphismes u de $L^\circ \overset{G}{\wedge} L'$ -gerbes, et enfin les 3-flèches de u à v sont les homomorphismes d’homomorphismes (= foncteurs) entre $L^\circ \overset{G}{\wedge} L'$ -gerbes. La loi de composition est le produit $L \overset{G}{\wedge} L'$ de la thèse de Giraud⁽¹⁰⁾. On trouve une Grab-3-catégorie, qu’on pourrait dénoter par $\underline{\underline{\text{ML}}}_G$ (ML signifie MacLane). Ces invariants π_0 à π_3 sont respectivement $\text{ML}(G)$, $\text{H}^2(X, \underline{G})$, $\text{H}^1(X, G)$, $\text{H}^0(X, G)$, où $\text{ML}(G)$ est le « groupe de MacLane » des liens de centre G modulo les liens réalisables (par des gerbes). On trouve un homomorphisme de Grab-3-catégories

$$\underline{\underline{\text{ML}}}_G \longrightarrow \underline{\underline{G}}$$

en associant à tout lien L de centre G sur X la G -2-gerbe dont la valeur, pour tout $U \in \text{Ob}X$, est la 2-catégorie des « réalisations » de $L|U$, i.e. des gerbes sur U liées par $L|U$. Sur les invariants d’homotopie, l’application induite est l’identité en

⁽⁹⁾ N. Éd. Sur ce sujet, voir [11, chapitre V, §4], [13, (App. 1), 4)] et [25].

⁽¹⁰⁾ N. Éd. Voir [11, chapitre IV, §1.6]

dimension ≤ 2 (donc notre foncteur est 3-fidèle), et en dimension 3 c'est par définition l'homomorphisme d'obstruction⁽¹¹⁾

$$\text{ML}(G) \hookrightarrow H^3(X, G) \quad ,$$

qui est injectif, et qui dans le cas étudié par MacLane (et peut-être toujours — il semble que Giraud n'ait pas résolu cette question⁽¹²⁾) est un isomorphisme.

Bien entendu, il faudrait introduire les G soulignés n fois, et en préciser la structure comme ci-dessus. Je vais essayer d'intéresser Bénabou à la question.

De ces exemples, il me semble qu'il se dégage une impression commune, qui demande à être clarifiée : c'est qu'il doit y avoir un énoncé, qui dirait essentiellement qu'il y a *équivalence* entre la notion disons de n -groupeïde, éventuellement muni d'une Gr ou d'une Grab-structure, et la notion d'ensemble semi-simplicial tronqué à l'ordre n , éventuellement muni d'une structure de groupe resp. de groupe commutatif (ce qui permettra par le tapis Dold d'oublier les structures semi-simpliciales pour ne plus retenir que le complexe associé). Ceci devrait marcher au moins dans la mesure où on prend les n -catégories à n -équivalence près, les espaces resp. ensembles semi-simpliciaux (de Kan disons) à homotopie près, les complexes abéliens à isomorphisme dans la catégorie dérivée $D(\text{Ab})$ près. Un énoncé analogue devrait marcher avec n remplacé par ∞ , le passage d'une ∞ -catégorie à la n -catégorie associée (qui se définira par analogie avec le passage de la 2-catégorie (Cat) à la catégorie ordinaire des « catégories à équivalence près ») correspondant au procédé de Serre-Cartan de tuage des groupes d'homotopie supérieurs. Malheureusement, je n'ai pas sous la main le séminaire homotopique, pour vérifier que pour un ensemble semi-simplicial de Kan donné, le complexe en groupes qu'on lui associe pour définir les groupes d'homotopie possède bien les structures supplémentaires que j'ai énoncées au début sur la situation $(L^1 \rightarrow L^0)$, — où bien sûr π_0 et π_1 doivent être écrits maintenant π_1 et π_2 (décalage dû au passage d'un espace à l'espace des chemins). Dans le cas de complexes de longueur quelconque, je pense que l'espèce de structure sur laquelle on doit tomber est un complexe de π_0 -modules

$$\longrightarrow L_n \longrightarrow \dots \longrightarrow L_1 \longrightarrow B_0 \longrightarrow 0 \quad ,$$

plus une extension de π_0 par B_0 . Mais j'avoue que je me sens encore très mal à l'aise en homotopie. Si toi et Gabriel avez le temps et l'envie de me tapiriser un peu, je pourrais bien faire un tour à Strasbourg pour un jour ou deux, dans les semaines qui viennent, pour en discuter avec vous. Comme je ne laïusse plus à mon séminaire, j'ai le temps et pourrais venir au moment qui vous arrangerait le mieux.

Bien cordialement

A. Grothendieck

⁽¹¹⁾ N. Éd. Voir [11, chapitre VI, théorème 2.8].

⁽¹²⁾ N. Éd. Voir [11, chapitre VI, remarque 2.9].

RÉFÉRENCES

- [1] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK & J.-L. VERDIER – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Math., vol. 305, Springer-Verlag, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), avec la collaboration de P. DELIGNE et B. SAINT-DONAT.
- [2] J. C. BAEZ – « Hoàng Xuân Sính’s thesis : categorifying group theory », *Thang Long J. Sci. Math. Math. Sci.* **2** (2023), no. 8, p. 1–35.
- [3] J. C. BAEZ & A. D. LAUDA – « Higher-dimensional algebra. V. 2-groups », *Theory Appl. Categ.* **12** (2004), p. 423–491.
- [4] C. BERGER – « Double loop spaces, braided monoidal categories and algebraic 3-type of space », *Higher homotopy structures in topology and mathematical physics* (Poughkeepsie, NY, 1996), Contemp. Math., vol. 227, J. McCleary éd., Amer. Math. Soc., 1999, p. 49–66.
- [5] C. BERTOLIN & A. E. TATAR – « Extensions of Picard 2-stacks and the cohomology groups Ext^i of length 3 complexes », *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **193** (2014), no. 1, p. 291–315.
- [6] L. BREEN – *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*, Astérisque 225, Société Mathématique de France, 1994.
- [7] M. CALVO, A. M. CEGARRA & N. T. QUANG – « Higher cohomologies of modules », *Algebr. Geom. Topol.* **12** (2012), no. 1, p. 343–413.
- [8] A. CAMPBELL – « A higher categorical approach to Giraud’s non-abelian cohomology », Thèse, Macquarie University, 2016.
- [9] A. M. CEGARRA & E. KHMALADZE – « Homotopy classification of braided graded categorical groups », *J. Pure Appl. Algebra* **209** (2007), no. 2, p. 411–437.

- [10] ———, « Homotopy classification of graded Picard categories », *Adv. Math.* **213** (2007), no. 2, p. 644–686.
- [11] J. GIRAUD – *Cohomologie non abélienne*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179, Springer-Verlag, 1971.
- [12] A. GROTHENDIECK – « *Pursuing Stacks, Volume I* », Documents Mathématiques, vol. 20, Société Mathématique de France, 2022, tapuscrit de 1983, édité par G. Maltsiniotis.
- [13] ———, « *Pursuing Stacks, Appendice au Chapitre I, et correspondance* », Manuscrits, édités par M. Künzer & G. Maltsiniotis, à paraître dans *Documents Mathématiques*, Société Mathématique de France.
- [14] S. HENRY – « Algebraic models of homotopy types and the homotopy hypothesis », Prépublication, arXiv:1609.04622, 2016.
- [15] S. HENRY & E. LANARI – « On the homotopy hypothesis for 3-groupoids », *Theory Appl. Categ.* **39** (2023), p. 735–768.
- [16] HOÀNG XUÂN SÍNH – « Gr-catégories », Thèse d’État, Université Paris 7, 1975.
- [17] A. JOYAL & R. STREET – « Braided monoidal categories », Macquarie University report no. 860081, 1986.
- [18] S. LACK – « A Quillen model structure for Gray-categories », *J. K-Theory* **8** (2011), no. 2, p. 183–221.
- [19] E. LANARI – « Homotopy theory of Grothendieck ∞ -groupoids and ∞ -categories », Thèse, Macquarie University, 2018.
- [20] ———, « A semi-model structure for Grothendieck weak 3-groupoids », Prépublication, arXiv:1809.07923, 2018.
- [21] O. LEROY – « Sur une notion de 3-catégorie adaptée à l’homotopie », Prépublication de l’Université Montpellier II, 1994.
- [22] G. MALTSINIOTIS – « Grothendieck ∞ -groupoids and still another definition of ∞ -categories », Prépublication, arXiv:1009.2331, 2010.
- [23] I. MOERDIJK & J.-A. SVENSSON – « Algebraic classification of equivariant homotopy 2-types. I », *J. Pure Appl. Algebra* **89** (1993), no. 1-2, p. 187–216.
- [24] A. E. TATAR – « Length 3 complexes of abelian sheaves and Picard 2-stacks », *Adv. Math.* **226** (2011), no. 1, p. 62–110.
- [25] B. TOËN – « Derived Azumaya algebras and generators for twisted derived categories », *Invent. Math.* **189** (2012), no. 3, p. 581–652.
- [26] M. ZISMAN – « Ensembles simpliciaux et 2-groupoïdes », Exposé accessible à <https://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/Inedits.html>.