STRUCTURES D'ASPHÉRICITÉ

GEORGES MALTSINIOTIS

CHAPITRE 1

LES STRUCTURES D'ASPHÉRICITÉ À DROITE

1.1. La définition des structures d'asphéricité à droite

1.1.1. — Une *structure d'asphéricité à droite* est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux deux conditions suivantes.

As1 Toute petite catégorie admettant un objet final est dans $\mathcal{A}$.

As2 Pour tout foncteur entre petites catégories $u : A \to B$, si B appartient à $\mathcal{A}$, et si pour tout objet b de B, A/b est dans $\mathcal{A}$, alors A appartient aussi à $\mathcal{A}$.

Exemple 1.1.2. — La classe $\mathcal{A}$ des petites catégories admettant un objet final est une structure d'asphéricité à droite. En effet, la condition As1 étant satisfaite par définition, il suffit de vérifier la condition As2. Soit donc $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$ tel que pour tout objet b de B, A/b admette un objet final, ce qui revient à supposer que u admet un adjoint à droite. Si la catégorie B admet un objet final, autrement dit, si le foncteur $B \to e$, de B vers la catégorie ponctuelle, admet un adjoint à droite, alors le composé

$$A \longrightarrow B \longrightarrow e$$

admet aussi un adjoint à droite, ce qui implique que A admet un objet final. Cette structure d'asphéricité à droite est la *structure d'asphéricité à droite minimale.*

Exemple 1.1.3. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental faible. La classe des catégories $\mathcal{W}$-asphériques est une structure d'asphéricité à droite.

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, une structure d'asphéricité à droite $\mathcal{A}$.

1.1.4. — On dit qu'une petite catégorie C est $\mathcal{A}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si elle appartient à $\mathcal{A}$. La condition As1 affirme donc qu'une petite catégorie admettant un objet final est asphérique.

Proposition 1.1.5. — *Le produit de deux petites catégories asphériques est une catégorie asphérique.*

Démonstration. — Soient A et B deux petites catégories asphériques, et montrons que leur produit $A \times B$ est aussi asphérique. En considérant la première projection $A \times B \to A$, il suffit en vertu de As2 de montrer que pour tout objet a de A, la catégorie $(A \times B)/a \simeq A/a \times B$ est asphérique. En considérant la deuxième projection $A/a \times B \to B$, il suffit en vertu de As2 de montrer que pour tout objet b de B, la catégorie $(A/a \times B)/b \simeq A/a \times B/b$ est asphérique. Mais cette dernière admet un objet final, et l'assertion résulte de As1. $\square$

1.1.6. — On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ est $\mathcal{A}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si pour tout objet b de B, la catégorie A/b est asphérique. La condition As2 affirme donc que si le but d'un morphisme asphérique est une catégorie asphérique, alors sa source est aussi asphérique. On remarque qu'une petite catégorie A est asphérique si et seulement si le foncteur $A \to e$ de A vers la catégorie ponctuelle est un morphisme asphérique. Pour toute petite catégorie A, le foncteur identique $1_A : A \to A$ est asphérique. En effet, pour tout objet a de A, la catégorie A/a admet un objet final, et l'assertion résulte de la condition As1.

Exemple 1.1.7. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite minimale (cf. 1.1.2), alors les morphismes asphériques sont exactement les foncteurs entre petites catégories admettant un adjoint à droite.

Exemple 1.1.8. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite associée à un localisateur fondamental faible $\mathcal{W}$ (cf. 1.1.3), alors les morphismes $\mathcal{A}$-asphériques sont exactement les foncteurs $\mathcal{W}$-asphériques.

Corollaire 1.1.9. — *Soient $u : A \to B$, $u' : A' \to B'$ deux morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$. Alors le foncteur $u \times u' : A \times A' \to B \times B'$ est asphérique.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour tout objet (b, b') de $B \times B'$, la catégorie $(A \times A')/(b, b')$ est asphérique. Or, $(A \times A')/(b, b')$ est canoniquement isomorphe à $(A/b) \times (A'/b')$, et par hypothèse, A/b et A'/b' sont asphériques. L'assertion résulte donc de la proposition 1.1.5. □

Proposition 1.1.10. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl, "v"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$. Pour que le morphisme u soit asphérique, il faut et il suffit que pour tout objet c de C, le morphisme $u/c : A/c \to B/c$, induit par u, soit asphérique.

Démonstration. — On vérifie aussitôt que pour tout objet c de C, et tout objet $(b, p : v(b) \to c)$ de B/c, la catégorie $(A/c)/(b, p)$ est canoniquement isomorphe à A/b. On en déduit que si u est asphérique, il en est de même de u/c. Réciproquement, supposons que pour tout objet c de C, le morphisme u/c est asphérique. Alors pour tout objet b de B, la catégorie $(A/v(b))/(b, 1_{v(b)}) \simeq A/b$ est asphérique, ce qui prouve que u est asphérique. □

Proposition 1.1.11. — *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de $\mathcal{C}at$. Si u et v sont asphériques, il en est de même de leur composé vu.*

Démonstration. — Pour tout objet c de C, comme v est asphérique, la catégorie B/c est asphérique, et en vertu de la proposition précédente, comme u est asphérique, il en est de même du foncteur $u/c : A/c \to B/c$, induit par u. On en déduit que la catégorie A/c est asphérique (As2), ce qui prouve que vu est asphérique. □

Proposition 1.1.12. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Si u admet un adjoint à droite, alors u est asphérique.*

Démonstration. — Soit $v : B \to A$ un adjoint à droite de u. La bijection fonctorielle

$$\mathsf{Hom}_B(u(a), b)) \simeq \mathsf{Hom}_A(a, v(b)), \quad a \in \mathsf{Ob}(A),\ b \in \mathsf{Ob}(B),$$

implique que pour tout objet b de B, la catégorie A/b est isomorphe à la catégorie $A/v(b)$, qui admet un objet final. On en déduit que A/b est asphérique, ce qui prouve la proposition. □

Corollaire 1.1.13. — *Une équivalence de petites catégories est asphérique.*

1.1.14. — Soit $u : A \to B$ un foncteur. On rappelle que la *fibre* de u au-dessus d'un objet b de B est la sous-catégorie (non pleine) A_b de A dont les objets sont les objets a de A tels que $u(a) = b$, et dont les morphismes sont les flèches f de A telles que $u(f) = 1_b$. Soit $c : a \to a'$ un morphisme de A. On dit que c est *cocartésien* (relativement à u, ou au-dessus de B) si pour tout morphisme $f : a \to a''$ de A tel que $u(f) = u(c)$, il existe un unique morphisme $g : a' \to a''$ de A tel que $u(g) = 1_{u(a')}$ et $f = gc$.

$$\begin{tikzcd} & a'' \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "c"'] & a' \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

$$u(a) \xrightarrow[u(c)]{} u(a')$$

On dit que c est *hypercocartésien* (relativement à u, ou au-dessus de B) si pour tout morphisme $f : a \to a''$ de A, et tout morphisme $h : u(a') \to u(a'')$ de B tel que $u(f) = hu(c)$, il existe un morphisme unique $g : a' \to a''$ de A tel que $u(g) = h$ et $f = gc$.

$$\begin{tikzcd} & & a'' \\ a \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "c"'] & a' \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$$u(a) \xrightarrow[u(c)]{} u(a') \xrightarrow[h]{} u(a'')$$

On dit que u est une *précofibration* si pour tout morphisme $p : b \to b'$ de B, et tout objet a de A au-dessus de b $(u(a) = b)$, il existe un morphisme cocartésien $c : a \to a'$ au-dessus de p $(u(c) = p)$. On dit que u est une *cofibration* si u est une précofibration, et si le composé de deux morphismes cocartésiens composables de A est un morphisme cocartésien. On vérifie facilement que u est une cofibration si et seulement si pour tout morphisme $p : b \to b'$ de B, et tout objet a de A au-dessus de b $(u(a) = b)$, il existe un morphisme hypercocartésien $c : a \to a'$ au-dessus de p $(u(c) = p)$.

Dualement, on dit qu'un morphisme de A est *cartésien* (resp. *hypercartésien*) relativement à u, ou au-dessus de B, si le morphisme correspondant de A° (catégorie opposée de A) est cocartésien (resp. hypercocartésien) relativement à $u^\circ : A^\circ \to B^\circ$. On dit que le foncteur u est une *préfibration* (resp. une *fibration*) si le foncteur u° est une précofibration (resp. une cofibration).

Lemme 1.1.15. — *Un foncteur $u : A \to B$ est une précofibration si et seulement si pour tout objet b de B, le foncteur canonique $A_b \to A/b$, associant à un objet a de la fibre A_b de u au-dessus de b l'objet $(a, 1_b)$ de A/b, admet un adjoint à gauche.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 1.1.16. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, et supposons que u soit une précofibration, et que pour tout objet b de B, la fibre A_b de u au-dessus de b soit asphérique. Alors u est asphérique.*

Démonstration. — En vertu du lemme précédent, pour tout objet b de B, le foncteur

$$\begin{aligned} i_b : A_b &\longrightarrow A/b \\ a &\longmapsto (a, 1_b) \end{aligned}$$

admet un adjoint à gauche

$$j_b : A/b \longrightarrow A_b \quad .$$

Il résulte alors de la proposition 1.1.12 que le foncteur j_b est asphérique, et comme A_b est asphérique, il en est de même de A/b (As2), ce qui prouve que u est asphérique. □

1.1.17. — On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *localement $\mathcal{A}$-asphérique*, ou plus simplement *localement asphérique*, si pour tout objet a de A, le morphisme

$$A/a \longrightarrow B/b \quad , \qquad b = u(a) \quad ,$$

induit par u est asphérique.

Exemples 1.1.18. — *a*) Un foncteur asphérique pleinement fidèle est localement asphérique.

b) Pour toute petite catégorie C, le foncteur $C \to e$ est localement asphérique.

Proposition 1.1.19. — a) *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Pour que u soit localement asphérique, il faut et il suffit que pour tout objet b de B, le foncteur $u/b : A/b \to B/b$, induit par u, le soit.*

b) *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de $\mathcal{C}at$. Si u et v sont localement asphériques, il en est de même de vu.*

c) *Soient $u : A \to B$, $u' : A' \to B'$ deux morphismes localement asphériques de $\mathcal{C}at$. Alors le foncteur $u \times u' : A \times A' \to B \times B'$ est localement asphérique.*

Démonstration. — La première assertion est immédiate, la deuxième résulte de la proposition 1.1.11, et la troisième du corollaire 1.1.9. □

1.2. Extensions de Kan homotopiques

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, une structure d'asphéricité à droite $\mathcal{A}$.

1.2.1. — On note $\mathcal{A}sph_{\mathcal{A}}$, ou plus simplement $\mathcal{A}sph$, la classe des morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$, et on pose

$$\mathsf{Hot} = \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}sph^{-1}\mathcal{C}at \quad .$$

Plus généralement, pour toute petite catégorie I, on note $\mathcal{A}sph_{\mathcal{A}}(I)$, ou plus simplement $\mathcal{A}sph(I)$, la classe des morphismes de $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$ qui sont asphériques argument par argument, et on pose

$$\mathsf{Hot}(I) = \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}(I) = \mathcal{A}sph(I)^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \quad .$$

Pour toute flèche $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, si l'on note

$$w^* : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at)$$

le foncteur image réciproque, on a

$$w^*(\mathcal{A}sph(I)) \subset \mathcal{A}sph(J) \quad .$$

On en déduit un foncteur entre les catégories localisées, noté aussi par abus

$$w^* : \mathsf{Hot}(I) \longrightarrow \mathsf{Hot}(J) \quad ,$$

rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) & \xrightarrow{w^*} & \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \\ {\scriptstyle \gamma_I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_J} \\ \mathsf{Hot}(I) & \xrightarrow[w^*]{} & \mathsf{Hot}(J) \end{array} \quad ,$$

dont les flèches verticales sont les morphismes de localisation.

Exemple 1.2.2. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite minimale, alors Hot est la catégorie $\overline{\mathcal{C}at}$ des petites catégories à homotopie près, autrement dit, la catégorie ayant mêmes objets que $\mathcal{C}at$, et telle que pour tout couple de petites catégories A, B,

$$\mathsf{Hom}_{\overline{\mathcal{C}at}}(A, B) = \pi_0 \ \underline{\mathsf{Hom}}(A, B) \quad .$$

En effet, notons

$$\gamma : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathsf{Hot} \quad , \qquad Q : \mathcal{C}at \longrightarrow \overline{\mathcal{C}at}$$

les foncteurs canoniques. En vertu des propriétés universelles de ces foncteurs, il suffit de montrer que

a) l'image par Q d'un foncteur asphérique est un homotopisme;

b) deux foncteurs homotopes ont même image par γ dans Hot.

Pour montrer la première assertion, on remarque que les morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$, pour la structure d'asphéricité à droite minimale, étant exactement les foncteurs, entre petites catégories, admettant un adjoint à droite, ils sont bien des homotopismes. Pour prouver la seconde assertion, il suffit de montrer que pour tout morphisme $h : \Delta_1 \times A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$, on a $\gamma(h_0) = \gamma(h_1)$, où $h_\varepsilon = h(\partial_\varepsilon \times 1_A)$, $\varepsilon = 0, 1$, $\partial_\varepsilon : \Delta_0 \longrightarrow \Delta_1$ étant défini par l'objet ε de Δ_1. Or si l'on note $p : \Delta_1 \times A \longrightarrow A$ la deuxième projection, on a $p(\partial_0 \times 1_A) = 1_A = p(\partial_1 \times 1_A)$, et comme la catégorie Δ_1 admet un objet final, il résulte de As1 et du corollaire 1.1.9 que le foncteur p est asphérique. On en déduit que

$$\gamma(p)\gamma(\partial_0 \times 1_A) = \gamma(p(\partial_0 \times 1_A)) = \gamma(p(\partial_1 \times 1_A)) = \gamma(p)\gamma(\partial_1 \times 1_A) \quad ,$$

et que $\gamma(p)$ est un isomorphisme de Hot, d'où

$$\gamma(\partial_0 \times 1_A) = \gamma(\partial_1 \times 1_A) \quad ,$$

et par suite que

$$\gamma(h_0) = \gamma(h(\partial_0 \times 1_A)) = \gamma(h)\gamma(\partial_0 \times 1_A) = \gamma(h)\gamma(\partial_1 \times 1_A) = \gamma(h(\partial_1 \times 1_A)) = \gamma(h_1) \ .$$

Exemple 1.2.3. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite associée à un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ (cf. 1.1.3), alors il résulte de la théorie développée par D.-C. Cisinski que

$$\mathsf{Hot} \simeq \mathcal{W}_{asph}^{-1} \mathcal{C}at \quad ,$$

où $\mathcal{W}_{asph}$ désigne le localisateur fondamental engendré par les flèches $A \longrightarrow e$ de $\mathcal{C}at$, pour A catégorie $\mathcal{W}$-asphérique. En effet, notons

$$\mathcal{C}at \xrightarrow{\gamma} \mathsf{Hot} \quad , \qquad \mathcal{C}at \xrightarrow{\gamma'} \mathcal{W}_{asph}^{-1} \mathcal{C}at$$

les foncteurs canoniques. En vertu des propriétés universelles de ces derniers, il suffit de montrer que

a) $\mathcal{A}sph \subset \mathcal{W}_{asph}$;

b) $\gamma(\mathcal{W}_{asph})$ est contenu dans la classe des isomorphismes de Hot.

La première assertion est évidente. Pour montrer la deuxième, on remarque d'abord qu'un argument de passage à la limite inductive permet de supposer que le localisateur fondamental est accessible. La théorie de Thomason-Cisinski affirme alors l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée propre sur $\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{asph}$. Cela implique que $\mathcal{C}at$ admet une structure de catégorie d'objets fibrants dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{asph}$, et dont les fibrations sont les flèches $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ telles que pour tout diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

si w est dans $\mathcal{W}_{asph}$, alors v aussi. Mais alors en vertu du lemme de Ken Brown, pour montrer que $\gamma(\mathcal{W}_{asph})$ est formé d'isomorphismes de Hot, il suffit de montrer que l'image par γ d'une telle fibration appartenant à $\mathcal{W}_{asph}$ est un isomorphisme. Or, une telle flèche est universellement dans $\mathcal{W}_{asph}$, et en particulier est un morphisme $\mathcal{W}_{asph}$-asphérique, donc $\mathcal{W}$-asphérique, ce qui prouve l'assertion.

On peut facilement généraliser cet argument pour montrer que pour toute petite catégorie I, la catégorie $\mathsf{Hot}(I)$ est isomorphe à la localisation de la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$ par les flèches qui sont dans $\mathcal{W}_{asph}$ argument par argument.

1.2.4. — Pour tout objet I de $\mathcal{C}at$, on note $\mathcal{C}at/I$ la catégorie des petites catégories au-dessus de I, dont les objets sont les couples formés d'un objet A de $\mathcal{C}at$ et d'un foncteur $A \to I$, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd} \quad .$$

On désigne par $\mathcal{A}sph/I$ la classe des flèches

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{C}at/I$ telles que $A \to A'$ soit un foncteur asphérique. Pour toute flèche $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, on note

$$\mathcal{C}at/w : \mathcal{C}at/J \to \mathcal{C}at/I$$

le foncteur définit par

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "v"'] & \mapsto & A \arrow[d, "wv"'] \\ J & & I \end{tikzcd} \quad .$$

On a

$$(\mathcal{C}at/w)(\mathcal{A}sph/J) \subset \mathcal{A}sph/I \quad ,$$

et le foncteur $\mathcal{C}at/w$ induit donc un foncteur

$$\overline{\mathcal{C}at/w} : (\mathcal{A}sph/J)^{-1}(\mathcal{C}at/J) \longrightarrow (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \quad .$$

1.2.5. — Pour toute petite catégorie I, on définit des foncteurs

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{C}at/I \xrightarrow{\Theta_I} \underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) & , & \underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) \xrightarrow{\Theta'_I} \mathcal{C}at/I \\ (A,\, A \longrightarrow I) \longmapsto (i \longmapsto A/i) & , & F \longmapsto (\textstyle\int F,\, \int F \longrightarrow I) & . \end{array}$$

Pour tout morphisme $w : J \longrightarrow I$ de $\mathcal{C}at$, on vérifie facilement que les foncteurs

$$\mathcal{C}at/J \xrightarrow{\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w} \underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) \quad , \qquad \underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) \xrightarrow{\Theta'_J \circ w^*} \mathcal{C}at/J$$

forment un couple de foncteurs adjoints, les morphismes d'adjonction

$$\varepsilon : \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \circ \Theta'_J \circ w^* \longrightarrow 1_{\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at)} \quad ,$$
$$\eta : 1_{\mathcal{C}at/J} \longrightarrow \Theta'_J \circ w^* \circ \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \quad ,$$

étant définis comme suit.

a) Définition de ε. Pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, et tout objet i de I, on doit définir un foncteur

$$\varepsilon_{F,i} : \left(\textstyle\int Fw\right) / \, i \longrightarrow F(i) \quad .$$

Les objets de la catégorie $(\int Fw)/i$ sont les triplets $(j, a, p : w(j) \longrightarrow i)$, où j est un objet de J, a un objet de $Fw(j)$, et p une flèche de I. Un morphisme de $(\int Fw)/i$, de source $(j, a, p : w(j) \longrightarrow i)$ et de but $(j', a', p' : w(j') \longrightarrow i)$, est un couple (l, f), où $l : j \longrightarrow j'$ est une flèche de J, $f : Fw(l)(a) \longrightarrow a'$ une flèche de $Fw(j')$, telles que

$$\begin{tikzcd} w(j) \arrow[rr, "w(l)"] \arrow[dr, "p"'] & & w(j') \arrow[dl, "p'"] \\ & i & \end{tikzcd} \qquad\qquad p = p'w(l) \quad .$$

On définit le foncteur $\varepsilon_{F,i}$ par

$$\varepsilon_{F,i}(j, a, p : w(j) \longrightarrow i) = F(p)(a) \quad ,$$
$$\varepsilon_{F,i}(l, f) = F(p')(f) : F(p')Fw(l)(a) = F(p)(a) \longrightarrow F(p')(a') \quad .$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier la compatibilité à la composition et aux identités, ainsi que la fonctorialité en i et en F.

b) Définition de η. Pour tout objet $(A, v : A \longrightarrow J)$ de $\mathcal{C}at/J$, on doit définir un foncteur, au-dessus de J,

$$\eta_{(A,v)} : A \longrightarrow \textstyle\int A/w(j) \quad ,$$

où $\int A/w(j)$ désigne, par abus de notation, la catégorie cofibrée sur J définie par le foncteur

$$J \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad j \longmapsto A/w(j) \quad .$$

Les objets de $\int A/w(j)$ sont les triplets $(j, a, p : wv(a) \longrightarrow w(j))$, où j est un objet de J, a un objet de A, et p une flèche de I. Un morphisme de $(j, a, p : wv(a) \longrightarrow w(j))$

vers $(j', a', p' : wv(a') \to w(j'))$ est un couple (l, f), où $l : j \to j'$ est une flèche de J, $f : a \to a'$ une flèche de A, telles que le carré

$$\begin{tikzcd} wv(a) \arrow[r, "wv(f)"] \arrow[d, "p"'] & wv(a') \arrow[d, "p'"] \\ w(j) \arrow[r, "w(l)"'] & w(j') \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Pour tout objet a de A, on définit

$$\eta_{(A,v)}(a) = \big(v(a), a, 1_{wv(a)} : wv(a) \to wv(a)\big) \quad ,$$

et pour toute flèche $f : a \to a'$ de A,

$$\eta_{(A,v)}(f) = \big(v(f), f\big) : \big(v(a), a, 1_{wv(a)}\big) \longrightarrow \big(v(a'), a', 1_{wv(a')}\big).$$

On vérifie facilement la compatibilité à la composition et aux identités, ainsi que la fonctorialité en (A, v).

En particulier, pour $J = I$ et $w = 1_I$, on obtient que (Θ_I, Θ'_I) est un couple de foncteurs adjoints.

Lemme 1.2.6. — *Soient I une petite catégorie, $F, G : I \to \mathcal{C}at$ deux foncteurs, et $u : F \to G$ un morphisme de foncteurs. Si pour tout objet i de I, le foncteur $u_i : F(i) \to G(i)$ est asphérique, alors le foncteur*

$$\textstyle\int u : \int F \longrightarrow \int G$$

est aussi asphérique.

Démonstration. — On définit un foncteur

$$H : \textstyle\int G \longrightarrow \mathcal{C}at$$

comme suit. Pour tout objet (i, b) de $\int G$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, $b \in \mathsf{Ob}(G(i))$, on pose

$$H(i, b) = F(i)/b \quad ,$$

et pour toute morphisme $(k, g) : (i, b) \to (i', b')$ de $\int G$, où $k : i \to i'$ est une flèche de I, et $g : G(k)(b) \to b'$ une flèche de $G(i')$, on définit

$$H(k, g) : F(i)/b \longrightarrow F(i')/b'$$

par

$$(a,\ p : u_i(a) \to b) \longmapsto (F(k)(a),\ g \cdot G(k)(p) : u_{i'}F(k)(a) \to b') \quad .$$

$$\begin{tikzcd} u_{i'}F(k)(a) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & b' \\ G(k)u_i(a) \arrow[dr, "G(k)(p)"'] & & \\ & G(k)(b) \arrow[uur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Considérons la catégorie $\int H$. Les objets de cette catégorie sont les quadruplets $(i,\, b,\, a,\, p\, :\, u_i(a) \to b)$, $i \in I$, $b \in \mathsf{Ob}(G(i))$, $a \in \mathsf{Ob}(F(i))$, $p \in \mathsf{Fl}(G(i))$, un morphisme de source (i, b, a, p) et de but (i', b', a', p') étant un triplet (k, g, f)

$$k : i \to i' \in \mathsf{Fl}(I)\ , \quad g : G(k)(b) \to b' \in \mathsf{Fl}(G(i'))\ , \quad f : F(k)(a) \to a' \in \mathsf{Fl}(F(i'))$$

tel que le carré

$$\begin{tikzcd} u_{i'}F(k)(a) \arrow[r, "u_{i'}(f)"] \arrow[d, equal] & u_{i'}(a') \arrow[dd, "p'"] \\ G(k)u_i(a) \arrow[d, "G(k)(p)"'] & \\ G(k)(b) \arrow[r, "g"'] & b' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Pour tout couple de morphismes composables

$$(i,\, b,\, a,\, p) \xrightarrow{(k,g,f)} (i',\, b',\, a',\, p') \xrightarrow{(k',g',f')} (i'',\, b'',\, a'',\, p'') \quad ,$$

le composé est défini par

$$(k',\, g',\, f') \circ (k,\, g,\, f) = (k'k,\, g' \cdot G(k')(g),\, f' \cdot F(k')(f)) \quad .$$

Le foncteur canonique $\theta_H : \int H \to \int G$ est défini par

$$(i, b, a, p) \mapsto (i, b)\ , \ \ (i, b, a, p) \in \mathsf{Ob}(\textstyle\int H)\ , \quad (k, g, f) \mapsto (k, g)\ , \ \ (k, g, f) \in \mathsf{Fl}(\textstyle\int H)\ .$$

On va définir un foncteur $S : \int F \to \int H$ tel que le triangle

$$\begin{tikzcd} & \int H \arrow[dr, "\theta_H"] & \\ \int F \arrow[ur, "S"] \arrow[rr, "\int u"'] & & \int G \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Pour tout objet (i, a) de $\int F$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, $a \in \mathsf{Ob}(F(i))$, on pose

$$S(i, a) = (i,\, u_i(a),\, a,\, 1_{u_i(a)}) \quad ,$$

et pour tout morphisme $(k, f) : (i, a) \to (i', a')$ de $\int F$, où $k : i \to i'$ est une flèche de I, et $f : F(k)(a) \to a'$ une flèche de $F(i')$,

$$S(k, f) = (k,\, u_{i'}(f),\, f) : (i,\, u_i(a),\, a,\, 1_{u_i(a)}) \longrightarrow (i',\, u_{i'}(a'),\, a',\, 1_{u_{i'}(a')}) \quad .$$

On vérifie aussitôt la compatibilité de S aux identités et à la composition, ainsi que la commutativité du triangle ci-dessus. On va définir un foncteur $R : \int H \to \int F$ qui sera un adjoint à droite et une retraction de S. Pour tout objet (i, b, a, p) de $\int H$, on pose $R(i, b, a, p) = (i, a)$, et pour tout morphisme $(k, g, f) : (i, b, a, p) \to (i', b', a', p')$ de $\int H$, on pose $R(k, g, f) = (k, f)$. La compatibilité de R aux identités et la composition est évidente, ainsi que l'égalité $RS = 1_{\int F}$. On définit un morphisme de foncteurs $\varepsilon : SR \to 1_{\int H}$ comme suit. Pour tout objet $(i,\, b,\, a,\, p : u_i(a) \to b)$ de $\int H$, on pose

$$\varepsilon_{(i,b,a,p)} = (1_i, p, 1_a) : SR(i, b, a, p) = S(i, a) = (i,\, u_i(a),\, a,\, 1_{u_i(a)}) \longrightarrow (i, b, a, p) \quad ,$$

et on constate aussitôt qu'on définit ainsi un morphisme de $\int H$. Pour tout morphisme $(k,g,f) : (i,b,a,p) \longrightarrow (i',b',a',p')$ de $\int H$, le carré

$$\begin{array}{ccc} SR(i,b,a,p) & \xrightarrow{\varepsilon_{(i,b,a,p)}} & (i,b,a,p) \\ {\scriptstyle SR(k,g,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (k,g,f)} \\ SR(i',b',a',p') & \xrightarrow{\varepsilon_{(i',b',a',p')}} & (i',b',a',p') \end{array}$$

est bien commutatif. En effet,

$$(k,g,f)\varepsilon_{(i,b,a,p)} = (k,g,f)(1_i,p,1_a) = (k, g\,G(k)(p), f)$$

$$\varepsilon_{(i',b',a',p')}SR(k,g,f) = (1_{i'},p',1_{a'})S(k,f) = (1_{i'},p',1_{a'})(k,u_{i'}(f),f) = (k,p'u_{i'}(f),f)$$

et $p'u_{i'}(f) = g\,G(k)(p)$, puisque (k,g,f) est un morphisme de $\int H$. On en déduit que $\varepsilon : SR \longrightarrow 1_{\int H}$ est bien un morphisme de foncteurs. Enfin, pour tout objet (i,b,a,p) de $\int H$, on a

$$R(\varepsilon_{(i,b,a,p)}) = R(1_i,p,1_a) = (1_i,1_a) \quad ,$$

et pour tout objet (i,a) de $\int F$, on a

$$\varepsilon_{S(i,a)} = \varepsilon_{(i,u_i(a),a,1_{u_i(a)})} = (1_i, 1_{u_i(a)}, 1_a) \quad ,$$

ce qui prouve que

$$\varepsilon : SR \longrightarrow 1_{\int H} \qquad \text{et} \qquad 1_{1_{\int F}} : 1_{\int F} \longrightarrow RS = 1_{\int F}$$

satisfont aux relations d'adjonction, et que R est un adjoint à droite de S. Il résulte donc de la proposition 1.1.12 que S est un foncteur asphérique. Comme θ_H est une cofibration à fibres asphériques, il est aussi un foncteur asphérique (proposition 1.1.16), et il en est donc de même de leur composé $\int u = \theta_H S$ (proposition 1.1.11), ce qui achève la démonstration. □

Théorème 1.2.7. — *Pour toute petite catégorie I, on a*

$$\mathcal{A}sph/I = \Theta_I^{-1}(\mathcal{A}sph(I)) \quad , \qquad \Theta'_I(\mathcal{A}sph(I)) \subset \mathcal{A}sph/I$$

et les foncteurs

$$\overline{\Theta_I} : (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \longrightarrow \mathcal{A}sph(I)^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) = \mathsf{Hot}(I)$$

et

$$\overline{\Theta'_I} : \mathsf{Hot}(I) = \mathcal{A}sph(I)^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) \longrightarrow (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \quad ,$$

induits par Θ_I et Θ'_I respectivement, sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — L'égalité $\mathcal{A}sph/I = \Theta_I^{-1}(\mathcal{A}sph(I))$ résulte de la proposition 1.1.10, et l'inclusion $\Theta'_I(\mathcal{A}sph(I)) \subset \mathcal{A}sph/I$ du lemme précédent. On en déduit un couple de foncteurs adjoints

$$\overline{\Theta}_I : (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \longrightarrow \mathsf{Hot}(I) \quad , \quad \overline{\Theta'_I} : \mathsf{Hot}(I) = \longrightarrow (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I)$$

les morphismes d'adjonctions étant induits par les morphismes d'adjonction

$$\varepsilon : \Theta_I\Theta'_I \longrightarrow 1_{\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at)} \quad , \qquad \eta : 1_{\mathcal{C}at/I} \longrightarrow \Theta'_I\Theta_I$$

(cf. 1.2.5). Il suffit donc de montrer que pour tout foncteur $F : I \longrightarrow \mathcal{C}at$, le morphisme de foncteurs ε_F est dans $\mathcal{A}sph(I)$, et que pour tout objet $(A, v : A \longrightarrow I)$ de $\mathcal{C}at/I$, le morphisme $\eta_{(A,v)}$ de $\mathcal{C}at/I$ est dans $\mathcal{A}sph/I$.

a) En vertu de 1.2.5, pour tout objet i de I, $\varepsilon_{F,i}$ est le morphisme

$$\big(\textstyle\int F\big) \,/\, i \longrightarrow F(i)$$

associant à un objet $(j,a,p : j \to i)$ de $\big(\int F\big)/i$, $j \in \mathsf{Ob}(I)$, $a \in \mathsf{Ob}(F(j))$, $p \in \mathsf{Fl}(I)$, l'objet $F(p)(a)$ de $F(i)$. On vérifie facilement que ce foncteur admet comme adjoint à droite le foncteur d'inclusion

$$F(i) \longrightarrow \big(\textstyle\int F\big) \,/\, i \quad , \qquad a \longmapsto (i, a, 1_i) \quad ,$$

(cf. lemme 1.1.15), ce qui prouve, en vertu de la proposition 1.1.12, qu'il est asphérique. On en déduit que ε_F est asphérique argument par argument, ce qui prouve l'assertion relative à ε_F.

b) En vertu de 1.2.5, le morphisme $\eta_{(A,v)}$ est l'inclusion

$$A \longrightarrow \textstyle\int A/i \quad , \qquad a \longmapsto (v(a), a, 1_{v(a)}) \quad ,$$

où $\int A/i$ désigne, par abus de notation, la catégorie cofibrée sur I définie par le foncteur

$$I \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad i \longmapsto A/i \quad .$$

On vérifie facilement que ce foncteur admet comme adjoint à droite le foncteur

$$\textstyle\int A/i \longrightarrow A \quad , \qquad (i, a, p : v(a) \to i) \longmapsto a$$

(cf. preuve du lemme 1.2.6), ce qui prouve qu'il est asphérique, et achève la preuve du théorème. □

1.2.8. — Pour toute flèche $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, on note

$$w_! : \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$$

le composé $w_! = \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \circ \Theta'_J$.

$$\underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \xrightarrow{\ \Theta'_J\ } \mathcal{C}at/J \xrightarrow{\ \mathcal{C}at/w\ } \mathcal{C}at/I \xrightarrow{\ \Theta_I\ } \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$$

Comme en vertu du théorème 1.2.7 et de 1.2.4, on a

$$\Theta'_J(\mathcal{A}sph(J)) \subset \mathcal{A}sph/J \ , \quad (\mathcal{C}at/w)(\mathcal{A}sph/J) \subset \mathcal{A}sph/I, \quad \Theta_I(\mathcal{A}sph/I) \subset \mathcal{A}sph(I) \ ,$$

ce foncteur induit un foncteur entre les catégories localisées noté aussi par abus

$$w_! : \mathsf{Hot}(J) \longrightarrow \mathsf{Hot}(I)$$

qui est composé des foncteurs

$$\mathsf{Hot}(J) \xrightarrow{\ \overline{\Theta'_J}\ } (\mathcal{A}sph/J)^{-1}(\mathcal{C}at/J) \xrightarrow{\ \overline{\mathcal{C}at/w}\ } (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \xrightarrow{\ \overline{\Theta_I}\ } \mathsf{Hot}(I)$$

induits par Θ'_J, $\mathcal{C}at/w$ et Θ_I. On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) & \xrightarrow{\ w_!\ } & \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \\ {\scriptstyle \gamma_J}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_I} \\ \mathsf{Hot}(J) & \xrightarrow[\ w_!\ ]{} & \mathsf{Hot}(I) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les morphismes de localisation.

Théorème 1.2.9. — *Pour tout morphisme $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, les foncteurs*

$$w_! : \mathsf{Hot}(J) \longrightarrow \mathsf{Hot}(I) \quad , \qquad w^* : \mathsf{Hot}(I) \longrightarrow \mathsf{Hot}(J)$$

forment un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. — Il résulte de 1.2.1, 1.2.4, 1.2.5 et du théorème 1.2.7 que le couple de foncteurs $(\overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{C}at/w}\,,\ \overline{\Theta'}_J \circ w^*)$

$$(\mathcal{A}sph/J)^{-1}(\mathcal{C}at/J) \xrightarrow{\overline{\mathcal{C}at/w}} (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \xrightarrow{\overline{\Theta}_I} \mathsf{Hot}(I)$$

$$\mathsf{Hot}(I) \xrightarrow{w^*} \mathsf{Hot}(J) \xrightarrow{\overline{\Theta'}_J} (\mathcal{A}sph/J)^{-1}(\mathcal{C}at/J)$$

est un couple de foncteurs adjoints. Comme en vertu du théorème 1.2.7, $\overline{\Theta}_J$ et $\overline{\Theta'}_J$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, $w^* \simeq \overline{\Theta}_J \circ (\overline{\Theta'}_J \circ w^*)$ est un adjoint à droite de $(\overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{C}at/w}) \circ \overline{\Theta'}_J = w_!$, ce qui prouve le théorème. □

1.3. Morphismes lisses

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, une structure d'asphéricité à droite $\mathcal{A}$.

Définition 1.3.1. — On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *faiblement $\mathcal{A}$-lisse*, ou plus simplement *faiblement lisse*, si pour tout objet b de B, le morphisme canonique

$$j_b : A_b \longrightarrow b\backslash A \quad , \qquad a \mapsto (a, 1_b : b \to u(a)) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(A_b) \ ,$$

est asphérique.

Exemple 1.3.2. — Une préfibration est un morphisme faiblement lisse. En effet, pour tout objet b de B, le foncteur j_b admet alors un adjoint à droite (dual du lemme 1.1.15), et est donc asphérique en vertu de la proposition 1.1.12. En particulier, toute immersion ouverte est un morphisme faiblement lisse.

Proposition 1.3.3. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est faiblement lisse ;*

(b) *pour tout objet a de A, les fibres du morphisme*

$$A/a \longrightarrow B/b \quad , \qquad b = u(a) \quad ,$$

induit par u, sont asphériques.

(c) *pour tout diagramme de carrés cartésiens,*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ \Delta_0 \arrow[r] & \Delta_1 \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

où $\Delta_0 \to \Delta_1$ désigne l'inclusion $\{0\} \hookrightarrow \{0 \to 1\}$, le morphisme $A'' \to A'$ est asphérique.

(d) *pour toute flèche $g : b_0 \to b_1$ de B, et tout objet a_1 de A_{b_1}, la catégorie $A(a_1, g)$ dont les objets sont les flèches $f : a \to a_1$ de A de but a_1 qui relèvent g $(u(f) = g)$, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"] \arrow[d, "h"'] & \\ a' \arrow[r, "f'"'] & a_1 \end{tikzcd} ,$$

avec h morphisme de A_{b_0} $(u(h) = 1_{b_0})$, est asphérique.

Démonstration. — On laisse au lecteur le soin de vérifier que pour toute flèche $g : b_0 \to b_1$ de B et tout objet a_1 de A au-dessus de b_1, la catégorie $A_{b_0}/(a_1, g)$ (définie par $j_{b_0} : A_{b_0} \to b_0\backslash A$ et l'objet $(a_1, g : b_0 \to u(a_1) = b_1)$ de $b_0\backslash A$), ainsi que la fibre de $A/a_1 \to B/b_1$, au-dessus de l'objet (b_0, g) de B/b_1, sont isomorphes à la catégorie $A(a_1, g)$, ce qui prouve l'équivalence des conditions (a), (b) et (d). Montrons l'équivalence de (c) et (d). La donnée d'une flèche $g : b_0 \to b_1$ de B équivaut à celle d'une flèche $\Delta_1 \to B$, comme dans (c), et affirmer, avec les notations de (c), que l'inclusion $A'' \to A'$ est asphérique, c'est affirmer que pour tout objet a' de A', la catégorie A''/a' est asphérique. Si a' est un objet de la fibre A'_0 de A' au-dessus de 0, qui s'identifie à A'', cela est vrai sans hypothèse sur u, puisqu'alors A''/a' admet un objet final. Il suffit donc de le vérifier pour a' dans la fibre A'_1 de A' au-dessus de 1. Mais alors a' s'identifie à un objet a_1 de A_{b_1}, et on vérifie que A''/a' est isomorphe à la catégorie $A(a_1, g)$ de (d). Cela achève la démonstration. □

Corollaire 1.3.4. — *Les morphismes faiblement lisses sont stables par changement de base, autrement dit, pour tout carré cartésien dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

si u est faiblement lisse, il en est de même de u'.

Démonstration. — Le corollaire résulte de la proposition précédente, puisque la condition (c) est stable par changement de base. □

Lemme 1.3.5. — *Soient $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, a un objet de A, et $b = u(a)$. Si le morphisme u est faiblement lisse, il en est de même du morphisme $A/a \to B/b$, induit par u.*

Démonstration. — En vertu de la condition (b) de la proposition 1.3.3, il suffit de montrer que pour tout objet $(a', f : a' \to a)$ de A/a, le morphisme $(A/a)/(a', f) \to (B/b)/(b', g)$, où $(b', g) = (u(a'), u(f))$, est à fibres asphériques. Or ce morphisme s'identifie au morphisme $A/a' \to B/b'$, induit par u, qui est à fibres asphériques, en vertu de la condition (b) de la proposition 1.3.3, puisque le morphisme u est faiblement lisse. □

Exemple 1.3.6. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite minimale, les morphismes faiblement lisses sont exactement les préfibrations. En effet, en gardant les notations de la condition (d) de la proposition 1.3.3, si $g : b_0 \to b_1$ est une flèche de B, et a_1 un objet de A au-dessus de b_1, dire qu'il existe un morphisme cartésien de but a_1 au-dessus de g équivaut à affirmer que la catégorie $A(a_1, g)$ admet un objet final.

Définition 1.3.7. — On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *$\mathcal{A}$-lisse*, ou plus simplement *lisse*, si pour tout diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \xrightarrow{v} & A' & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B'' & \xrightarrow[w]{} & B' & \longrightarrow & B \end{array} \quad ,$$

si le morphisme w est asphérique, il en est de même de v.

Proposition 1.3.8. — *La classe des morphismes lisses est stable par composition, et par changement de base.*

Démonstration. — C'est une conséquence formelle de la définition. □

Proposition 1.3.9. — *Un morphisme lisse est faiblement lisse.*

Démonstration. — Cela résulte de la condition (c) de la proposition 1.3.3. □

Proposition 1.3.10. — *Un isomorphisme local est un morphisme lisse.*

Démonstration. — Soient $u : A \to B$ un isomorphisme local, et

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u''"'] & A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w'"'] & B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} ,$$

un diagramme de carrés cartésiens le morphisme w' étant supposé asphérique. Pour tout objet a' de A', on en déduit un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A''/a' \arrow[r] \arrow[d] & A'/a' \arrow[r] \arrow[d] & A/a \arrow[d] \\ B''/b' \arrow[r] & B'/b' \arrow[r] & B/b \end{tikzcd} ,$$

où $a = v(a')$, $b' = u'(a')$, $b = u(a) = w(b')$, dont les flèches verticales sont des isomorphismes. Comme par hypothèse la catégorie B''/b' est asphérique, il en est de même de A''/a', ce qui prouve la proposition. □

Proposition 1.3.11. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est lisse ;*

(b) *pour tout objet a de A, le morphisme $A/a \to B/b$, $b = u(a)$, induit par u, est lisse.*

Démonstration. — Supposons que u soit lisse, et soit a un objet de A, $b = u(a)$. La stabilité des morphismes lisses par changement de base (1.3.8) implique que le foncteur $A/b \to B/b$, induit par u est lisse. Comme le foncteur canonique $A/a \to B/b$ est un isomorphisme local, il résulte de la proposition précédente qu'il est lisse. La stabilité des morphismes lisses par composition (1.3.8) implique donc que le composé $A/a \to B/b$ est lisse.

Réciproquement, supposons que pour tout objet a de A, le foncteur $A/a \to B/b$, $b = u(a)$, induit par u, est lisse, et considérons un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

avec w foncteur asphérique. Pour tout objet a de A, on en déduit un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A''/a \arrow[r] \arrow[d] & A'/a \arrow[r] \arrow[d] & A/a \arrow[d] \\ B''/b \arrow[r] & B'/b \arrow[r] & B/b \end{tikzcd} \quad ,$$

où $b = u(a)$. Comme le foncteur w est asphérique, il en est de même du morphisme $B''/b \to B'/b$ (1.1.10). Le foncteur $A/a \to B/b$ étant lisse, on en déduit que $A''/a \to A'/a$ est asphérique. Comme cela est vrai pour tout objet a de A, il résulte de la proposition 1.1.10 que v est asphérique, ce qui achève la démonstration. □

1.3.12. — Soit

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

un diagramme dans $\mathcal{C}at$. On peut former le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

où $A' = B' \times_B A$, ainsi que le 2-carré

$$\begin{tikzcd} A'_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[d, "u'_0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\nearrow}"] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

où A'_0 est la “comma catégorie” dont les objets sont les triplets

$$(b',\, a,\, g : w(b') \to u(a)) \quad , \qquad b' \in \mathsf{Ob}(B') \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(A) \ , \quad g \in \mathsf{Fl}(B) \ ,$$

un morphisme de (b'_0, a_0, g_0) vers (b'_1, a_1, g_1) étant un couple (g', f), où $g' : b'_0 \to b'_1$ est une flèche de B', et $f : a_0 \to a_1$ une flèche de A, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} w(b'_0) \arrow[r, "w(g')"] \arrow[d, "g_0"'] & w(b'_1) \arrow[d, "g_1"] \\ u(a_0) \arrow[r, "u(f)"'] & u(a_1) \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Les foncteurs u'_0, v'_0 sont définis par

$$u'_0(b', a, g) = b' \ , \quad v_0(b', a, g) = a \ , \qquad (b', a, g) \in \mathsf{Ob}(A'_0) \ ,$$
$$u'_0(g', f) = g' \ , \qquad v_0(g', f) = f \ , \qquad (g', f) \in \mathsf{Fl}(A'_0) \ ,$$

et le morphisme de foncteurs $\alpha : wu'_0 \to uv_0$ par

$$\alpha_{(b',a,g)} = g : wu'_0(b', a, g) = w(b') \longrightarrow u(a) = uv_0(b', a, g) \ , \quad (b', a, g) \in \mathsf{Ob}(A'_0) \quad .$$

On se fixe un objet b'_0 de B', un objet a_1 de A, et un morphisme $g : w(b'_0) \to u(a_1)$. On pose $b_0 = w(b'_0)$, $b_1 = u(a_1)$. À ces données, on va associer trois catégories C_0, C_1, C_2, et on va laisser au lecteur le soin de vérifier qu'elles sont isomorphes entre elles.

a) Définition de C_0. Le triplet (b'_0, a_1, g) est un objet de A'_0, et on a un foncteur canonique $A' \to A'_0$ associant à un objet (b', a) de A', $b' \in \mathsf{Ob}(B')$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, $w(b') = u(a)$, l'objet $(b', a, 1_{u(a)})$ de A'_0. La catégorie C_0 est la catégorie $A'/(b'_0, a_1, g)$.

b) Définition de C_1. On a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A'/a_1 \arrow[r] \arrow[d] & A/a_1 \arrow[d] \\ B'/b_1 \arrow[r] & B/b_1 \end{tikzcd} ,$$

et le couple (b'_0, g) est un un objet de B'/b_1. La catégorie C_1 est la catégorie $(A'/a_1)/(b'_0, g)$.

c) Définition de C_2. Considérons la catégorie $(B'/b'_0)^*$ obtenue de B'/b'_0 par adjonction d'un objet final, et l'inclusion $B'/b'_0 \hookrightarrow (B'/b'_0)^*$. Considérons aussi le morphisme $(B'/b'_0)^* \to B$ défini comme suit. Sa restriction à B'/b'_0 est le composé $B'/b'_0 \to B' \xrightarrow{w} B$, du morphisme canonique $B'/b'_0 \to B'$ suivi du foncteur w, l'image de l'objet final de $(B'/b'_0)^*$ est b_1, et l'image d'une flèche de $(B'/b'_0)^*$, de source un objet $(b', q : b' \to b'_0)$ de B'/b'_0 et de but l'objet final de $(B'/b'_0)^*$, est le morphisme $gw(q)$ de B. Formons le diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{A'} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B'/b'_0 \arrow[r] & (B'/b'_0)^* \arrow[r] & B \end{tikzcd} .$$

Si l'on note a'_1 l'objet de $\overline{A'} = (B'/b'_0)^* \times_B A$ au-dessus de l'objet final de $(B'/b'_0)^*$, et dont la projection dans A est a_1, alors la catégorie C_2 est la catégorie A''/a'_1.

Théorème 1.3.13. — *Soit $u : A \to B$ une flèche de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est lisse ;*

(b) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

si le foncteur w est asphérique pour la structure d'asphéricité à droite minimale, autrement dit s'il admet un adjoint à droite, alors le morphisme v est asphérique ;

(c) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

avec B'' catégorie admettant un objet final, B' obtenue de B'' par adjonction d'un objet final, et w l'inclusion canonique, le morphisme v est asphérique ;

(d) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d, "u''"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

et tout objet a' de A', le morphisme

$$A''/a' \longrightarrow B''/b' \quad , \qquad b' = u'(a') \quad ,$$

induit par u'' est asphérique.

Démonstration. — Les implications $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ sont évidentes. Montrons l'implication $(c) \Rightarrow (d)$. La condition (c) étant stable par changement de base, il suffit de montrer que si

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien, a_1 un objet de A, $b_1 = u(a_1)$, et $(b'_0,\ g : w(b'_0) \longrightarrow b_1)$ un objet de B'/b_1, alors la catégorie $(A'/a_1)/(b'_0, g)$ est asphérique. En vertu de 1.3.12, cette catégorie est isomorphe à la catégorie A''/a'_1, où

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{A'} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B'/b'_0 \arrow[r] & (B'/b'_0)^* \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

est le diagramme de carrés cartésiens considéré dans 1.3.12, (c), et a'_1 l'objet de $\overline{A'}$ au-dessus de l'objet final de $(B'/b'_0)^*$ dont l'image dans A est l'objet a_1. Or, en vertu de la condition (c), le foncteur $A'' \longrightarrow \overline{A'}$ est asphérique. On en déduit que la catégorie A''/a'_1 est asphérique, donc aussi la catégorie $(A'/a_1)/(b'_0, g)$.

Il reste à montrer l'implication $(d) \Rightarrow (a)$. La condition (d) étant stable par changement de base, il suffit de montrer que si

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien, avec w morphisme asphérique, alors v est un foncteur asphérique. Soit a un objet de A. Il s'agit de montrer que la catégorie A'/a est asphérique. Soit $b = u(a)$. En vertu de la condition (d), le morphisme $A'/a \longrightarrow B'/b$, induit par u', est asphérique. Comme par hypothèse le foncteur w est asphérique, la catégorie B'/b est asphérique, et il en est donc de même de A'/a, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 1.3.14. — *Un foncteur lisse est localement asphérique.*

Démonstration. — Le corollaire résulte aussitôt de la condition (d) du théorème. □

Proposition 1.3.15. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est une fibration ;*

(b) *u est lisse pour la structure d'asphéricité à droite minimale ;*

(c) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

si le foncteur w admet un adjoint à droite, il en est de même de v.

(d) *pour tout diagramme de carrés cartésiens,*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ \Delta_1 \arrow[r] & \Delta_2 \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

où $\Delta_1 \to \Delta_2$ désigne l'inclusion $\{0 \to 1\} \hookrightarrow \{0 \to 1 \to 2\}$, le foncteur $A'' \to A'$ admet un adjoint à droite.

Démonstration. — Comme les foncteurs asphériques pour la structure d'asphéricité à droite minimale sont exactement ceux qui admettent un adjoint à droite, l'équivalence des conditions (b) et (c) est tautologique. L'implication $(c) \Rightarrow (d)$ étant évidente, il suffit donc de prouver les implications $(a) \Rightarrow (b)$ et $(d) \Rightarrow (a)$.

Comme les fibrations sont stables par changement de base, pour montrer l'implication $(a) \Rightarrow (b)$, il suffit de montrer que pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A' = B' \times_B A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} ,$$

si u est une fibration, et si pour tout objet b de B, la catégorie B'/b admet un objet final, alors pour tout objet a de A, la catégorie A'/a admet un objet final.

Soit donc a_1 un objet de A, $b_1 = u(a_1)$ son image dans B, et $(b'_0,\, g : w(b'_0) \to b_1)$ un objet final de B'/b_1. Comme u est une fibration, il existe un morphisme hypercartésien $k : a_0 \to a_1$ de A tel que $u(k) = g$. On va montrer que $\big((b'_0, a_0),\, k : a_0 \to a_1\big)$ est un objet final de A'/a_1. Soit donc $\big((b', a),\, f : a \to a_1\big)$ un objet de A'/a_1, $w(b') = u(a)$. Il s'agit de montrer qu'il existe une flèche de A'/a_1 et une seule de source $\big((b', a), f\big)$ et de but $\big((b'_0, a_0), k\big)$, autrement-dit, qu'il existe un unique couple (g', h), où $g' : b' \to b'_0$ est une flèche de B', et $h : a \to a_0$ une flèche de A, tel que $w(g') = u(h)$ et $f = kh$. En particulier, pour un tel couple on a $u(f) = u(k)u(h) = gw(g')$, ce qui signifie que $g' : \big(b',\, u(f) : w'(b') \to b_1\big) \longrightarrow \big(b'_0,\, g : w(b'_0) \to b_1\big)$ est une flèche de B'/b_1. L'hypothèse que (b'_0, g) est un objet final de B'/b_1 montre alors l'existence et l'unicité d'un tel g'. Comme le morphisme k est hypercartésien, il existe alors une flèche unique $h : a \to a_0$ de A, telle que $u(h) = w(g')$ et $f = kh$, ce qui prouve l'assertion.

Il reste à prouver l'implication $(d) \Rightarrow (a)$. Soit donc $u : A \to B$ une flèche de $\mathcal{C}at$, et $\Delta_2 \to B$ un foncteur défini par un couple de flèches composables $b_0 \xrightarrow{g_1} b_1 \xrightarrow{g_2} b_2$ de B, et formons le diagramme de carrés cartésiens de la condition (d). Cette condition signifie que pour tout objet a'_2 de A' dont l'image a_2 dans A est au-dessus de b_2, la catégorie A''/a'_2 admet un objet final. Décrivons cette dernière. L'ensemble des objets de A''/a'_2 s'identifie à la somme disjointe $A''_0 \amalg A''_1$, où

$$A''_0 = \{(a_0, f_0) \mid a_0 \in \mathsf{Ob}(A),\ u(a_0) = b_0,\ f_0 : a_0 \to a_2 \in \mathsf{Fl}(A),\ u(f_0) = g_2 g_1\} \quad ,$$
$$A''_1 = \{(a_1, f_1) \mid a_1 \in \mathsf{Ob}(A),\ u(a_1) = b_1,\ f_1 : a_1 \to a_2 \in \mathsf{Fl}(A),\ u(f_1) = g_2\} \quad ,$$

et pour tous (a_0, f_0), $(a'_0, f'_0) \in A''_0$, (a_1, f_1), $(a'_1, f'_1) \in A''_1$, on a

$$\mathsf{Hom}_{A''/a'_2}((a_0, f_0), (a'_0, f'_0)) = \{g \mid g : a_0 \to a'_0 \in \mathsf{Fl}(A),\ u(g) = 1_{b_0},\ f_0 = f'_0 g\} \quad ,$$
$$\mathsf{Hom}_{A''/a'_2}((a_0, f_0), (a_1, f_1)) = \{g \mid g : a_0 \to a_1 \in \mathsf{Fl}(A),\ u(g) = g_1,\ f_0 = f_1 g\} \quad ,$$
$$\mathsf{Hom}_{A''/a'_2}((a_1, f_1), (a_0, f_0)) = \varnothing \quad ,$$
$$\mathsf{Hom}_{A''/a'_2}((a_1, f_1), (a'_1, f'_1)) = \{g \mid g : a_1 \to a'_1 \in \mathsf{Fl}(A),\ u(g) = 1_{b_1},\ f_1 = f'_1 g\} \quad .$$

Comme la catégorie A''/a'_2 admet un objet final, elle est en particulier non vide. Le cas particulier où $b_0 = b_1$ et $g_1 = 1_{b_1}$ montre alors que pour toute flèche $b_1 \to b_2$ de B, et tout objet a_2 de A au-dessus de b_2, il existe un morphisme $a_1 \to a_2$ de A au-dessus de $b_1 \to b_2$. En revenant au cas général ($b_0 \xrightarrow{g_1} b_1 \xrightarrow{g_2} b_2$ arbitraire), cela implique que A''_0 et A''_1 sont des ensembles non vides. Comme il n'y a pas de morphisme de A''/a'_2 d'un objet appartenant à A''_1 vers un objet appartenant à A''_0, on en déduit que l'objet final (a_1, f_1) de A''/a'_2 appartient à A''_1. En particulier, cela implique que (a_1, f_1) est aussi un objet final de la sous-catégorie pleine de A''/a'_2 formée des objets appartenant à A''_1, ce qui signifie exactement que f_1 est un morphisme cartésien au-dessus de g_2. Comme g_2 est une flèche arbitraire de B et a_2 un objet arbitraire de la fibre de A au-dessus du but de g_2, cela implique déjà que u est une préfibration. Mais comme (a_1, f_1) est un objet final de A''/a'_2, on a aussi que pour tout objet (a_0, f_0) de A''/a'_2 appartenant à l'ensemble A''_0, $f_0 : a_0 \to a_2 \in \mathsf{Fl}(A)$, $u(f_0) = g_2 g_1$, il existe un morphisme unique $g : (a_0, f_0) \to (a_1, f_1)$ de A''/a'_2, autrement dit, une unique flèche $g : a_0 \to a_1$ de A telle que $f_1 g = f_0$ et $u(g) = g_1$. Comme g_1 est une flèche arbitraire de B de but la source de g_2, ceci implique que le morphisme f_1 est hypercartésien, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 1.3.16. — *Les fibrations sont des foncteurs lisses (pour toute structure d'asphéricité à droite).*

Lemme 1.3.17. — *Soient $w : J \to I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, et $F : I \to \mathcal{C}at$ un foncteur. Alors on a un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} \int Fw & \xrightarrow{\widetilde{w}} & \int F \\ {\scriptstyle \theta_{Fw}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_F} \\ J & \xrightarrow[w]{} & I \end{array} \quad ,$$

où θ_{Fw}, θ_F désignent les cofibrations associées aux foncteurs Fw et F respectivement, et $\widetilde{w}$ le foncteur $(j, a) \mapsto (w(j), a)$, $(j, a) \in \mathsf{Ob}(\int Fw)$, induit par w.

Démonstration. — Le lemme résulte d'une simple vérification, laissée au lecteur. □

1.3.18. — Soit

$$\mathcal{D} \ = \quad \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{w} & A \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ B' & \xrightarrow[v]{} & B \end{array}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$. Pour tout foncteur $F : A \to \mathcal{C}at$, on déduit un carré cartésien composé

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "\theta_{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "\theta_F"] \\ A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

(cf. 1.3.17). Pour tout objet b' de B', le foncteur $\widetilde{w}$ induit un foncteur

$$(\textstyle\int Fw)/b' \longrightarrow (\textstyle\int F)/v(b') \quad ,$$

et on remarque que

$$(\textstyle\int Fw)/b' = (u'_!w^*(F))(b') \qquad \text{et} \qquad (\textstyle\int F)/v(b') = (v^*u_!(F))(b') \quad .$$

On en déduit un morphisme

$$\kappa_{\mathcal{D}} : u'_!w^* \longrightarrow v^*u_!$$

de $\underline{\mathsf{Hom}}(\underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at), \underline{\mathsf{Hom}}(B', \mathcal{C}at))$, appelé *morphisme de changement de base associé au carré* $\mathcal{D}$.

Proposition 1.3.19. — *Soit*

$$\mathcal{D} = \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$*, avec* v *foncteur lisse. Alors le morphisme de changement de base* $\kappa_{\mathcal{D}} : u'_!w^* \to v^*u_!$ *est asphérique argument par argument, autrement dit, pour tout foncteur* $F : A \to \mathcal{C}at$*, et tout objet* b' *de* B'*,*

$$\kappa_{\mathcal{D},F}(b') : (u'_!w^*(F))(b') \longrightarrow (v^*u_!(F))(b')$$

est asphérique.

Démonstration. — Soit $F : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur, et considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "u'\theta_{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "u\theta_F"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd} \quad .$$

Comme le foncteur v est lisse, il résulte de la condition (d) du théorème 1.3.13 que pour tout objet b' de B', le foncteur $\kappa_{\mathcal{D},F}(b') : (\int Fw)/b' \to (\int F)/v(b')$, induit par $\widetilde{w}$, est asphérique, ce qui prouve la proposition. □

Théorème 1.3.20. — *Soit* $u : A \to B$ *un morphisme de* $\mathcal{C}at$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est lisse ;*

(b) *pour tout diagramme de carrés cartésiens dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[d] \\ A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme de changement de base associé au carré du haut est un foncteur asphérique argument par argument.

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 1.3.19 et de la stabilité des morphismes lisses par changement de base (proposition 1.3.8). Réciproquement, on remarque que la condition (b), appliquée au foncteur constant $B'' \to \mathcal{C}at$, de valeur la catégorie ponctuelle e, implique que pour tout objet a' de A', si l'on note b' son image dans B', le morphisme $A''/a' \to B''/b'$ est asphérique. On en déduit que u satisfait à la condition (d) du théorème 1.3.13, ce qui démontre le théorème. $\square$