STRUCTURES D'ASPHÉRICITÉ, FONCTEURS LISSES, ET FIBRATIONS

par

Georges Maltsiniotis

Résumé. — Le but de cet article est de généraliser la théorie des foncteurs lisses de Grothendieck afin d'inclure dans ce cadre la théorie des catégories fibrées. On obtient en particulier une nouvelle caractérisation des catégories fibrées.

Abstract. — The aim of this paper is to generalize Grothendieck's theory of smooth functors in order to include in this frame the theory of fibered categories. We obtain in particular a new catacterization of fibered categories.

Introduction

Dans "Pursuing Stacks" [**5**], Grothendieck introduit la notion de foncteur propre, ainsi que celle de foncteur lisse, en s'inspirant des propriétés cohomologiques des morphismes propres ou lisses de schémas. Si

$$\mathcal{D} \quad = \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[h]{} & Y \end{array}$$

est un carré commutatif de schémas, et M un faisceau étale abélien sur X, on a un morphisme canonique de "changement de base"

$$h^* Rf_*(M) \longrightarrow Rf'_* g^*(M) \quad .$$

Les théorèmes de changement de base propre et de changement de base lisse affirment [**1**, exposés 12, 13 et 16] que si le carré $\mathcal{D}$ est cartésien, ce morphisme est un isomorphisme dans les deux cas suivants :

(a) f est propre et M de torsion ;

(b) h est lisse, M est de torsion première aux exposants résiduels de Y, et f est quasi-compact et quasi-séparé.

On note $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories, et $\mathcal{W}_\infty$ la classe des flèches de $\mathcal{C}at$ dont l'image par le foncteur nerf est une équivalence faible simpliciale, autrement dit, un morphisme d'ensembles simpliciaux dont la réalisation topologique est une équivalence d'homotopie. La catégorie localisée $\mathcal{W}_\infty^{-1}\mathcal{C}at$, obtenue en inversant formellement les flèches appartenant à $\mathcal{W}_\infty$, est alors équivalente à la catégorie homotopique Hot des CW-complexes. Pour toute petite catégorie I, on pose

$$\mathbb{D}(I) = \big(\mathcal{W}_\infty^{I^\circ}\big)^{-1} \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at) \quad ,$$

où $\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at)$ désigne la catégorie des préfaisceaux sur I à valeurs dans $\mathcal{C}at$, autrement dit des foncteurs contravariants de I vers $\mathcal{C}at$, et $\mathcal{W}_\infty^{I^\circ}$ la classe des morphismes de foncteurs de I° vers $\mathcal{C}at$ qui sont dans $\mathcal{W}_\infty$ argument par argument :

$$\mathcal{W}_\infty^{I^\circ} = \{\alpha \in \mathsf{Fl}(\underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at)) \mid \alpha_i \in \mathcal{W}_\infty, i \in \mathsf{Ob}(I)\} \quad .$$

Pour toute flèche $u : I \to J$ de $\mathcal{C}at$, le foncteur image inverse

$$\underline{\mathsf{Hom}}(J^\circ, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at) \quad , \qquad F \longmapsto F \circ u^\circ \quad ,$$

définit un foncteur

$$u^* : \mathbb{D}(J) \longrightarrow \mathbb{D}(I) \quad .$$

En vertu d'un résultat d'Alex Heller [**7**], ce foncteur admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite

$$u_! : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}(J) \qquad \text{et} \qquad u_* : \mathbb{D}(I) \longrightarrow \mathbb{D}(J)$$

respectivement.

Grothendieck définit la notion de foncteur propre (resp. lisse) comme suit.

Définition. — On dit qu'un foncteur entre petites catégories $u : A \to B$ (resp. $w : B' \to B$) est *propre* (resp. *lisse*) si pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme de changement de base

$$w^* u_* \longrightarrow u'_* v^*$$

(ou de façon équivalente

$$v_! u'^* \longrightarrow u^* w_! \quad ,$$

transposé du précédent) est un isomorphisme, et cette propriété reste vraie après tout changement de base.

Grothendieck obtient des caractérisations simples des foncteurs propres et des foncteurs lisses, et il observe que sa théorie ne dépend que d'un petit nombre de propriétés formelles de $\mathcal{W}_\infty$ dont la plus importante est le théorème A de Quillen [**9**]. Il est ainsi conduit à introduire la notion de localisateur fondamental.

Un *localisateur fondamental* est une classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\mathcal{C}at$ satisfaisant aux propriétés suivantes.

Loc1 (Saturation faible.) *a*) La classe $\mathcal{W}$ contient les identités.

b) Si deux parmi les trois flèches d'un triangle commutatif sont dans $\mathcal{W}$, il en est de même de la troisième.

c) Si i est une flèche de $\mathcal{C}at$ admettant une rétraction r, et si ir appartient à $\mathcal{W}$, alors i est dans $\mathcal{W}$.

Loc2 Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors le foncteur $A \to e$ de A vers la catégorie ponctuelle e est dans $\mathcal{W}$.

Loc3 (Théorème A de Quillen relatif.) Pour tout triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{C}at$, si pour tout objet c de C, le foncteur $A/c \to B/c$ (où $A/c = A \times_C (C/c)$ et $B/c = B \times_C (C/c)$ désignent les "comma catégories" des objets au-dessus de c) induit par u est dans $\mathcal{W}$, il en est de même de u.

Grothendieck conjecture dans [**5**] que $\mathcal{W}_\infty$ est le plus petit localisateur fondamental. Cette conjecture est démontré par D.-C. Cisinski dans [**4**].

On dit qu'une petite catégorie A est $\mathcal{W}$-asphérique si le morphisme $A \to e$ est dans $\mathcal{W}$, et qu'un foncteur entre petites catégories $A \to B$ est $\mathcal{W}$-asphérique si pour tout objet b de B, la catégorie A/b est $\mathcal{W}$-asphérique. Il résulte en particulier de $\mathsf{Loc3}$ qu'un foncteur $\mathcal{W}$-asphérique est dans $\mathcal{W}$. On définit, comme dans le cas $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$, pour chaque petite catégorie I, la catégorie $\mathbb{D}(I)$ par

$$\mathbb{D}(I) = \left(\mathcal{W}^{I^\circ}\right)^{-1} \underline{\mathsf{Hom}}(I^\circ, \mathcal{C}at) \quad ,$$

et pour toute flèche $u : I \to J$ de $\mathcal{C}at$, on peut montrer de façon élémentaire [**8**] que le foncteur image inverse $u^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$ admet un adjoint à gauche $u_! : \mathbb{D}(I) \to \mathbb{D}(J)$. On peut donc, comme dans le cas $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$, définir la notion de foncteur $\mathcal{W}$-propre et $\mathcal{W}$-lisse, en utilisant les morphismes de changement de base relatifs à $u_!$.

En fait, la théorie développée dans la thèse de D.-C. Cisinski [**3**] montre l'existence également d'un adjoint à droite $u_* : \mathbb{D}(I) \to \mathbb{D}(J)$, moyennant une legère hypothèse sur $\mathcal{W}$, à savoir que $\mathcal{W}$ est *accessible*, autrement dit, qu'il est engendré par un *ensemble* de flèches de $\mathcal{C}at$ (qu'il est le plus petit localisateur fondamental contenant un *ensemble* de flèches de $\mathcal{C}at$).

Grothendieck obtient la caractérisation suivante des morphismes $\mathcal{W}$-lisses [**6**], [**8**].

Théorème. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est $\mathcal{W}$-lisse, autrement dit, pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u''"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme de changement de base $u''_! v^* \to w^* u'_!$ est un isomorphisme ;

(b) *pour tout objet b de B, l'inclusion*

$$A_b \to b\backslash A \quad , \qquad a \mapsto (a, 1_b : b \to u(a) = b)$$

(où A_b désigne la fibre de A au-dessus de b, et $b\backslash A = A \times_B (b\backslash B)$ la "comma catégorie" des objets sous b) est un foncteur $\mathcal{W}$-asphérique.

(c) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

si le foncteur w est $\mathcal{W}$-asphérique, il en est de même de v.

Grothendieck en déduit un fait qui l'émerveille : un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est $\mathcal{W}$-lisse si et seulement si le foncteur opposé $u^\circ : A^\circ \to B^\circ$ est $\mathcal{W}$-propre. Ce résultat est conséquence directe de la caractérisation ci-dessus, de la caractérisation "duale" des morphismes $\mathcal{W}$-propres, et du fait qu'un foncteur entre petites catégories est dans $\mathcal{W}$ si et seulement si le foncteur opposé l'est [**5**], [**6**], [**8**].

Un exemple important de foncteurs $\mathcal{W}$-lisses est celui des fibrations (morphismes $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ tels que A soit une catégorie fibrée sur B). Cela résulte du fait que si $u : A \to B$ est une fibration, alors pour tout objet b de B, l'inclusion

$$A_b \longrightarrow b\backslash A \quad , \qquad a \longmapsto (a, 1_b : b \to u(a) = b)$$

admet un adjoint à droite, et du fait qu'un foncteur entre petites catégories admettant un adjoint à droite est un foncteur $\mathcal{W}$-asphérique.

À l'origine de ce travail est l'observation que la classe des fibrations partage des nombreuses propriétés formelles avec la classe des foncteurs $\mathcal{W}$-lisses, de même que la classe des foncteurs admettant un adjoint à droite avec celle des foncteurs $\mathcal{W}$-asphériques. Il n'existe pourtant pas de localisateur fondamental $\mathcal{W}$ tel que les morphismes $\mathcal{W}$-lisses soient exactement les fibrations, ou tel que les morphismes $\mathcal{W}$-asphériques soient exactement les foncteurs admettant un adjoint à droite. Par ailleurs, on observe que les notions de foncteur $\mathcal{W}$-asphérique, $\mathcal{W}$-lisse, ou $\mathcal{W}$-propre ne dépendent que de la classe des catégories $\mathcal{W}$-asphériques. Si deux localisateurs fondamentaux ont même classe d'objets asphériques, alors les notions correspondantes de foncteurs asphériques, foncteurs lisses, ou foncteurs propres coïncident. J'ai cherché donc à dégager les propriétés minimales que doit satisfaire une classe *d'objets* de $\mathcal{C}at$, pour pouvoir développer une théorie de foncteurs lisses. Ceci m'a conduit, quitte à briser la symétrie par passage à la catégorie opposée, à introduire la notion de structure d'asphéricité à droite. La notion n'étant pas autoduale, il y a lieu de considérer aussi la notion duale de structure d'asphéricité à gauche, permettant de développer dualement une théorie de foncteurs propres.

Dans le premier paragraphe, on définit la notion de structure d'asphéricité à droite, et on en déduit une notion de foncteur asphérique. On observe qu'il existe une structure d'asphéricité à droite minimale, correspondant à la classe des petites catégories ayant un objet final, les foncteurs asphériques pour cette structure étant exactement les foncteurs entre petites catégories admettant un adjoint à droite. À tout localisateur fondamental, on associe une structure d'asphéricité à droite dont les foncteurs asphériques sont les foncteurs asphériques au sens du localisateur fondamental.

Les deuxième et troisième paragraphes sont logiquement indépendants. Dans le deuxième, on considère les localisations des catégories de foncteurs, de source une petite catégorie et à valeurs dans $\mathcal{C}at$, par les morphismes de foncteurs qui sont asphériques argument par argument, et on montre l'existence des extensions de Kan homotopiques à gauche.

Dans le troisième, on introduit la notion de foncteur lisse associée à une structure d'asphéricité à droite. Dans ce cadre, la notion se scinde en deux : foncteurs lisses et foncteurs faiblement lisses. On donne plusieurs caractérisations équivalentes pour chacune de ces deux notions, et on étudie les principales propriétés. On démontre que les foncteurs lisses pour la structure d'asphéricité à droite minimale sont exactement les fibrations, et les foncteurs faiblement lisses, les préfibrations. Ce résultat fournit une nouvelle caractérisation des catégories fibrées. Enfin, on observe que pour la structure d'asphéricité à droite associée à un localisateur fondamental, les notions de foncteur lisse et faiblement lisse coïncident, et coïncident aussi avec celle de foncteur lisse au sens du localisateur fondamental.

Au dernier paragraphe, on fait la synthèse des deux précédents. On démontre une caractérisation des foncteurs lisses (associés à une structure d'asphéricité à droite) en termes du morphisme de changement de base. Vu que dans cette article on considère des foncteurs *covariants* dans $\mathcal{C}at$, au lieu de préfaisceaux, on obtient une caractérisation duale à celle de Grothendieck.

1. Les structures d'asphéricité à droite

1.1. — Une *structure d'asphéricité à droite* est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}at)$ satisfaisant aux deux conditions suivantes.

As1 Toute petite catégorie admettant un objet final est dans $\mathcal{A}$.

As2 Pour tout foncteur entre petites catégories $u : A \longrightarrow B$, si B appartient à $\mathcal{A}$, et si pour tout objet b de B, A/b est dans $\mathcal{A}$, alors A appartient aussi à $\mathcal{A}$.

Exemple 1.2. — La classe $\mathcal{A}$ des petites catégories admettant un objet final est une structure d'asphéricité à droite. En effet, la condition As1 étant satisfaite par définition, il suffit de vérifier la condition As2. Soit donc B une catégorie admettant un objet final b_0, et $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$ tel que pour tout objet b de B, A/b admette un objet final. Alors la catégorie A, qui est isomorphe à A/b_0, admet un objet final, ce qui prouve l'assertion. Cette structure d'asphéricité à droite est la *structure d'asphéricité à droite minimale.*

Exemple 1.3. — Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental. La classe des catégories $\mathcal{W}$-asphériques est une structure d'asphéricité à droite.

Dans la suite, on se fixe, une fois pour toutes, une structure d'asphéricité à droite $\mathcal{A}$.

1.4. — On dit qu'une petite catégorie C est $\mathcal{A}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si elle appartient à $\mathcal{A}$. La condition As1 affirme donc qu'une petite catégorie admettant un objet final est asphérique.

Proposition 1.5. — *Le produit de deux petites catégories asphériques est une catégorie asphérique.*

Démonstration. — Soient A et B deux petites catégories asphériques, et montrons que leur produit $A \times B$ est aussi asphérique. En considérant la première projection $A \times B \longrightarrow A$, il suffit en vertu de As2 de montrer que pour tout objet a de A, la catégorie $(A \times B)/a \simeq A/a \times B$ est asphérique. En considérant la deuxième projection $A/a \times B \longrightarrow B$, il suffit en vertu de As2 de montrer que pour tout objet b de B, la catégorie $(A/a \times B)/b \simeq A/a \times B/b$ est asphérique. Mais cette dernière admet un objet final, et l'assertion résulte de As1. □

1.6. — On dit qu'un morphisme $u : A \longrightarrow B$ est $\mathcal{A}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si pour tout objet b de B, la catégorie A/b est asphérique. La condition As2 affirme donc que si le but d'un morphisme asphérique est une catégorie asphérique, alors sa source est aussi asphérique. On remarque qu'une petite catégorie A est asphérique si et seulement si le foncteur $A \longrightarrow e$ de A vers la catégorie ponctuelle est un morphisme asphérique. Pour toute petite catégorie A, le foncteur identique $1_A : A \longrightarrow A$ est asphérique. En effet, pour tout objet a de A, la catégorie A/a admet un objet final, et l'assertion résulte de la condition As1.

Exemple 1.7. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite minimale (cf. 1.2), alors les morphismes asphériques sont exactement les foncteurs entre petites catégories admettant un adjoint à droite. En effet, un foncteur entre petites catégories $u : A \to B$ admet un adjoint à droite si et seulement si pour tout objet b de B, la catégorie A/b admet un objet final.

Exemple 1.8. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite associée à un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ (cf. 1.3), alors les morphismes $\mathcal{A}$-asphériques sont exactement les foncteurs $\mathcal{W}$-asphériques.

Corollaire 1.9. — *Soient $u : A \to B$, $u' : A' \to B'$ deux morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$. Alors le foncteur $u \times u' : A \times A' \to B \times B'$ est asphérique.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour tout objet (b, b') de $B \times B'$, la catégorie $(A \times A')/(b, b')$ est asphérique. Or, $(A \times A')/(b, b')$ est canoniquement isomorphe à $(A/b) \times (A'/b')$, et par hypothèse, A/b et A'/b' sont asphériques. L'assertion résulte donc de la proposition 1.5. □

Proposition 1.10. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl, "v"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$. Pour que le morphisme u soit asphérique, il faut et il suffit que pour tout objet c de C, le morphisme $u/c : A/c \to B/c$, induit par u, soit asphérique.

Démonstration. — On vérifie aussitôt que pour tout objet c de C, et tout objet $(b, p : v(b) \to c)$ de B/c, la catégorie $(A/c)/(b, p)$ est canoniquement isomorphe à A/b. On en déduit que si u est asphérique, il en est de même de u/c. Réciproquement, supposons que pour tout objet c de C, le morphisme u/c est asphérique. Alors pour tout objet b de B, la catégorie $(A/v(b))/(b, 1_{v(b)}) \simeq A/b$ est asphérique, ce qui prouve que u est asphérique. □

Proposition 1.11. — *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de $\mathcal{C}at$. Si u et v sont asphériques, il en est de même de leur composé vu.*

Démonstration. — Pour tout objet c de C, comme v est asphérique, la catégorie B/c est asphérique, et en vertu de la proposition précédente, comme u est asphérique, il en est de même du foncteur $u/c : A/c \to B/c$, induit par u. On en déduit que la catégorie A/c est asphérique (As2), ce qui prouve que vu est asphérique. □

Proposition 1.12. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Si u admet un adjoint à droite, alors u est asphérique.*

Démonstration. — Soit $v : B \to A$ un adjoint à droite de u. La bijection fonctorielle

$$\mathsf{Hom}_B(u(a), b)) \simeq \mathsf{Hom}_A(a, v(b)), \quad a \in \mathsf{Ob}(A),\ b \in \mathsf{Ob}(B),$$

implique que pour tout objet b de B, la catégorie A/b est isomorphe à la catégorie $A/v(b)$, qui admet un objet final. On en déduit que A/b est asphérique, ce qui prouve la proposition. □

Corollaire 1.13. — *Une équivalence de petites catégories est asphérique.*

1.14. — Soit $u : A \to B$ un foncteur. On rappelle que la *fibre* de u au-dessus d'un objet b de B est la sous-catégorie (non pleine) A_b de A dont les objets sont les objets a de A tels que $u(a) = b$, et dont les morphismes sont les flèches f de A telles que $u(f) = 1_b$. Soit $c : a \to a'$ un morphisme de A. On dit que c est *cocartésien* (relativement à u, ou au-dessus de B) si pour tout morphisme $f : a \to a''$ de A tel que $u(f) = u(c)$, il existe un unique morphisme $g : a' \to a''$ de A tel que $u(g) = 1_{u(a')}$ et $f = gc$.

$$\begin{tikzcd} & a'' \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "c"'] & a' \arrow[u, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

$$u(a) \xrightarrow[u(c)]{} u(a')$$

On dit que c est *hypercocartésien* (relativement à u, ou au-dessus de B) si pour tout morphisme $f : a \to a''$ de A, et tout morphisme $h : u(a') \to u(a'')$ de B tel que $u(f) = h\,u(c)$, il existe un morphisme unique $g : a' \to a''$ de A tel que $u(g) = h$ et $f = gc$.

$$\begin{tikzcd} & & a'' \\ a \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "c"'] & a' \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$$u(a) \xrightarrow[u(c)]{} u(a') \xrightarrow[h]{} u(a'')$$

On dit que u est une *précofibration* si pour tout morphisme $p : b \to b'$ de B, et tout objet a de A au-dessus de b $\ (u(a) = b)$, il existe un morphisme cocartésien $c : a \to a'$ au-dessus de p $\ (u(c) = p)$. On dit que u est une *cofibration* si u est une précofibration, et si le composé de deux morphismes cocartésiens composables de A est un morphisme cocartésien. On vérifie facilement que u est une cofibration si et seulement si pour tout morphisme $p : b \to b'$ de B, et tout objet a de A au-dessus de b $\ (u(a) = b)$, il existe un morphisme hypercocartésien $c : a \to a'$ au-dessus de p $\ (u(c) = p)$.

Dualement, on dit qu'un morphisme de A est *cartésien* (resp. *hypercartésien*) relativement à u, ou au-dessus de B, si le morphisme correspondant de A° (catégorie opposée de A) est cocartésien (resp. hypercocartésien) relativement à $u^\circ : A^\circ \to B^\circ$. On dit que le foncteur u est une *préfibration* (resp. une *fibration*) si le foncteur u° est une précofibration (resp. une cofibration).

Lemme 1.15. — *Un foncteur $u : A \to B$ est une précofibration si et seulement si pour tout objet b de B, le foncteur canonique $A_b \to A/b$, associant à un objet a de la fibre A_b de u au-dessus de b l'objet $(a, 1_b)$ de A/b, admet un adjoint à gauche.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 1.16. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, et supposons que u soit une précofibration, et que pour tout objet b de B, la fibre A_b de u au-dessus de b soit asphérique. Alors u est asphérique.*

Démonstration. — En vertu du lemme précédent, pour tout objet b de B, le foncteur

$$i_b : A_b \to A/b$$
$$a \mapsto (a, 1_b)$$

admet un adjoint à gauche

$$j_b : A/b \longrightarrow A_b \quad .$$

Il résulte alors de la proposition 1.12 que le foncteur j_b est asphérique, et comme A_b est asphérique, il en est de même de A/b (As2), ce qui prouve que u est asphérique. $\square$

1.17. — On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *localement $\mathcal{A}$-asphérique*, ou plus simplement *localement asphérique*, si pour tout objet a de A, le morphisme

$$A/a \longrightarrow B/b \quad , \qquad b = u(a) \quad ,$$

induit par u, est asphérique.

Exemples 1.18. — *a*) Un foncteur asphérique pleinement fidèle est localement asphérique.

b) Pour toute petite catégorie C, le foncteur $C \to e$ est localement asphérique.

Proposition 1.19. — a) *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Pour que u soit localement asphérique, il faut et il suffit que pour tout objet b de B, le foncteur $u/b : A/b \to B/b$, induit par u, le soit.*

b) *Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ un couple de morphismes composables de $\mathcal{C}at$. Si u et v sont localement asphériques, il en est de même de vu.*

c) *Soient $u : A \to B$, $u' : A' \to B'$ deux morphismes localement asphériques de $\mathcal{C}at$. Alors le foncteur $u \times u' : A \times A' \to B \times B'$ est localement asphérique.*

Démonstration. — La première assertion est immédiate, la deuxième résulte de la proposition 1.11, et la troisième du corollaire 1.9. $\square$

2. Extensions de Kan homotopiques

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, une structure d'asphéricité à droite $\mathcal{A}$.

2.1. — On note $\mathcal{A}sph_{\mathcal{A}}$, ou plus simplement $\mathcal{A}sph$, la classe des morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$, et on pose

$$\mathsf{Hot} = \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}sph^{-1}\mathcal{C}at \quad .$$

Plus généralement, pour toute petite catégorie I, on note $\mathcal{A}sph_{\mathcal{A}}(I)$, ou plus simplement $\mathcal{A}sph(I)$, la classe des morphismes de $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$ qui sont asphériques argument par argument, et on pose

$$\mathsf{Hot}(I) = \mathsf{Hot}_{\mathcal{A}}(I) = \mathcal{A}sph(I)^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \quad .$$

Pour toute flèche $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, si l'on note

$$w^* : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at)$$

le foncteur image inverse, on a

$$w^*(\mathcal{A}sph(I)) \subset \mathcal{A}sph(J) \quad .$$

On en déduit un foncteur entre les catégories localisées, noté aussi par abus

$$w^* : \mathsf{Hot}(I) \longrightarrow \mathsf{Hot}(J) \quad ,$$

rendant commutatif le carré

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \arrow[r, "w^*"] \arrow[d, "\gamma_I"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \arrow[d, "\gamma_J"] \\ \mathsf{Hot}(I) \arrow[r, "w^*"'] & \mathsf{Hot}(J) \end{tikzcd} \quad ,$$

dont les flèches verticales sont les morphismes de localisation.

Exemple 2.2. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite minimale (cf. 1.2), alors Hot est la catégorie $\overline{\mathcal{C}at}$ des petites catégories à homotopie près, autrement dit, la catégorie ayant mêmes objets que $\mathcal{C}at$, et telle que pour tout couple de petites catégories A, B,

$$\mathsf{Hom}_{\overline{\mathcal{C}at}}(A, B) = \pi_0\ \underline{\mathsf{Hom}}(A, B) \quad .$$

En effet, notons

$$\gamma : \mathcal{C}at \longrightarrow \mathsf{Hot} \quad , \qquad Q : \mathcal{C}at \longrightarrow \overline{\mathcal{C}at}$$

les foncteurs canoniques. En vertu des propriétés universelles de ces foncteurs, il suffit de montrer que :

a) l'image par Q d'un foncteur asphérique est un homotopisme;

b) deux foncteurs homotopes ont même image par γ dans Hot.

Pour montrer la première assertion, on remarque que les morphismes asphériques de $\mathcal{C}at$, pour la structure d'asphéricité à droite minimale, étant exactement les foncteurs, entre petites catégories, admettant un adjoint à droite (1.7), ils sont bien des homotopismes. Pour prouver la seconde assertion, il suffit de montrer que pour tout morphisme $h : \Delta_1 \times A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}at$, où Δ_1 désigne la catégorie $\{0 \longrightarrow 1\}$, on a $\gamma(h_0) = \gamma(h_1)$, où $h_\varepsilon = h(\partial_\varepsilon \times 1_A)$, $\varepsilon = 0, 1$, $\partial_\varepsilon : e \longrightarrow \Delta_1$ étant le morphisme de la catégorie ponctuelle e vers Δ_1 défini par l'objet ε de Δ_1. Or si l'on note $p : \Delta_1 \times A \longrightarrow A$ la deuxième projection, on a $p(\partial_0 \times 1_A) = 1_A = p(\partial_1 \times 1_A)$, et comme la catégorie Δ_1 admet un objet final, il résulte de As1 et du corollaire 1.9 que le foncteur p est asphérique. On en déduit que

$$\gamma(p)\gamma(\partial_0 \times 1_A) = \gamma(p(\partial_0 \times 1_A)) = \gamma(p(\partial_1 \times 1_A)) = \gamma(p)\gamma(\partial_1 \times 1_A) \quad ,$$

et que $\gamma(p)$ est un isomorphisme de Hot, d'où

$$\gamma(\partial_0 \times 1_A) = \gamma(\partial_1 \times 1_A) \quad ,$$

et par suite que

$$\gamma(h_0) = \gamma(h(\partial_0 \times 1_A)) = \gamma(h)\gamma(\partial_0 \times 1_A) = \gamma(h)\gamma(\partial_1 \times 1_A) = \gamma(h(\partial_1 \times 1_A)) = \gamma(h_1) \ .$$

Exemple 2.3. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite associée à un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ (cf. 1.3), alors il résulte de la théorie développée par D.-C. Cisinski [**3**] que

$$\mathsf{Hot} \simeq \mathcal{W}_{asph}^{-1}\mathcal{C}at \quad ,$$

où $\mathcal{W}_{asph}$ désigne le localisateur fondamental engendré par les flèches $A \longrightarrow e$ de $\mathcal{C}at$, pour A catégorie $\mathcal{W}$-asphérique. En effet, notons

$$\mathcal{C}at \xrightarrow{\ \gamma\ } \mathsf{Hot} \quad , \qquad \mathcal{C}at \xrightarrow{\ \gamma'\ } \mathcal{W}_{asph}^{-1}\mathcal{C}at$$

les foncteurs canoniques. En vertu des propriétés universelles de ces derniers, il suffit de montrer que :

a) $\mathcal{A}sph \subset \mathcal{W}_{asph}$;

b) $\gamma(\mathcal{W}_{asph})$ est contenu dans la classe des isomorphismes de Hot.

La première assertion est évidente. Pour montrer la deuxième, on remarque d'abord qu'un argument de passage à la limite inductive permet de supposer que le localisateur fondamental est accessible. La théorie de Thomason-Cisinski [**3**], [**10**] affirme alors l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée propre sur $\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{asph}$. Cela implique que $\mathcal{C}at$ admet une structure de catégorie d'objets fibrants [**2**] dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}_{asph}$, et dont les fibrations sont les flèches $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ telles que pour tout diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

si w est dans $\mathcal{W}_{asph}$, alors v l'est également. Mais alors en vertu du lemme de Ken Brown [**2**, I.1 Factorization lemma], pour montrer que $\gamma(\mathcal{W}_{asph})$ est formé d'isomorphismes de Hot, il suffit de montrer que l'image par γ d'une telle fibration appartenant à $\mathcal{W}_{asph}$ est un isomorphisme. Or, une telle flèche est universellement dans $\mathcal{W}_{asph}$, et en particulier est un morphisme $\mathcal{W}_{asph}$-asphérique, donc $\mathcal{W}$-asphérique, ce qui prouve l'assertion.

On peut facilement généraliser cet argument pour montrer que pour toute petite catégorie I, la catégorie $\mathsf{Hot}(I)$ est isomorphe à la localisation de la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$ par les flèches qui sont dans $\mathcal{W}_{asph}$ argument par argument.

2.4. — Pour tout objet I de $\mathcal{C}at$, on note $\mathcal{C}at/I$ la catégorie des petites catégories au-dessus de I, dont les objets sont les couples formés d'un objet A de $\mathcal{C}at$ et d'un foncteur $A \to I$, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd} \quad .$$

On désigne par $\mathcal{A}sph/I$ la classe des flèches

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{C}at/I$ telles que $A \to A'$ soit un foncteur asphérique. Pour toute flèche $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, on note

$$\mathcal{C}at/w : \mathcal{C}at/J \longrightarrow \mathcal{C}at/I$$

le foncteur défini par

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "v"'] & \mapsto & A \arrow[d, "wv"'] \\ J & & I \end{tikzcd} \quad .$$

On a

$$(\mathcal{C}at/w)(\mathcal{A}sph/J) \subset \mathcal{A}sph/I \quad ,$$

et le foncteur $\mathcal{C}at/w$ induit donc un foncteur

$$\overline{\mathcal{C}at/w} : (\mathcal{A}sph/J)^{-1}(\mathcal{C}at/J) \longrightarrow (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \quad .$$

2.5. — Pour toute petite catégorie I, on définit des foncteurs

$$\mathcal{C}at/I \xrightarrow{\Theta_I} \underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) \quad , \qquad \underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) \xrightarrow{\Theta'_I} \mathcal{C}at/I$$

$$(A,\, A \longrightarrow I) \longmapsto (i \longmapsto A/i) \quad , \qquad F \longmapsto (\textstyle\int F, \int F \longrightarrow I) \quad ,$$

où $\int F$ désigne la construction de Grothendieck de la catégorie cofibrée sur I définie par le foncteur F, et $\int F \to I$ le foncteur canonique. On rappelle que les objets de la catégorie $\int F$ sont les couples (i,a), où i est un objet de I, et a un objet de $F(i)$. Un morphisme de $\int F$ de source (i,a) et de but (i',a') est un couple (k,f), où $k : i \to i'$ est une flèche de I, et $f : F(k)(a) \to a'$ une flèche de $F(i')$. Si

$$(i,a) \xrightarrow{(k,f)} (i',a') \xrightarrow{(k',f')} (i'',a'')$$

est un couple de morphismes composables de $\int F$, leur composé est défini par

$$(k',f') \circ (k,f) = (k'k, f' \cdot F(k')(f)) \quad .$$

Le foncteur canonique $\int F \to I$, qui est une cofibration, est défini par

$$(i,a) \longmapsto i \quad , \qquad (k,f) \longmapsto k \quad .$$

Pour tout objet i de I, la fibre au-dessus de i du foncteur $\int F \to I$ s'identifie à la catégorie $F(i)$.

Pour tout morphisme $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, les foncteurs

$$\mathcal{C}at/J \xrightarrow{\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w} \underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) \quad , \qquad \underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) \xrightarrow{\Theta'_J \circ w^*} \mathcal{C}at/J$$

forment un couple de foncteurs adjoints, les morphismes d'adjonction

$$\varepsilon : \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \circ \Theta'_J \circ w^* \longrightarrow 1_{\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at)} \;, \quad \eta : 1_{\mathcal{C}at/J} \longrightarrow \Theta'_J \circ w^* \circ \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w$$

étant définis comme suit.

a) Définition de ε. Pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$, et tout objet i de I, on doit définir un foncteur

$$\varepsilon_{F,i} : \left(\textstyle\int Fw\right) / \, i \longrightarrow F(i) \quad .$$

Les objets de la catégorie $(\int Fw)/i$ sont les triplets $(j,a,p : w(j) \to i)$, où j est un objet de J, a un objet de $Fw(j)$, et p une flèche de I. Un morphisme de $(\int Fw)/i$, de source $(j,a,p : w(j) \to i)$ et de but $(j',a',p' : w(j') \to i)$, est un couple (l,f), où $l : j \to j'$ est une flèche de J, $f : Fw(l)(a) \to a'$ une flèche de $Fw(j')$, tel que

$$\begin{tikzcd} w(j) \arrow[rr, "w(l)"] \arrow[dr, "p"'] & & w(j') \arrow[dl, "p'"] \\ & i & \end{tikzcd} \qquad p = p'w(l) \quad .$$

On définit le foncteur $\varepsilon_{F,i}$ par

$$\varepsilon_{F,i}(j,a,p : w(j) \to i) = F(p)(a) \quad ,$$

$$\varepsilon_{F,i}(l,f) = F(p')(f) : F(p')Fw(l)(a) = F(p)(a) \longrightarrow F(p')(a') \quad .$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier la compatibilité à la composition et aux identités, ainsi que la fonctorialité en i et en F.

b) Définition de η. Pour tout objet $(A, v : A \to J)$ de $\mathcal{C}at/J$, on doit définir un foncteur, au-dessus de J,
$$\eta_{(A,v)} : A \longrightarrow \textstyle\int A/w(j) \quad ,$$
où $\int A/w(j)$ désigne, par abus de notation, la catégorie cofibrée sur J définie par le foncteur
$$J \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad j \longmapsto A/w(j) \quad .$$
Les objets de $\int A/w(j)$ sont les triplets $(j, a, p : wv(a) \to w(j))$, où j est un objet de J, a un objet de A, et p une flèche de I. Un morphisme de $(j, a, p : wv(a) \to w(j))$ vers $(j', a', p' : wv(a') \to w(j'))$ est un couple (l, f), où $l : j \to j'$ est une flèche de J, $f : a \to a'$ une flèche de A, tel que le carré
$$\begin{tikzcd} wv(a) \arrow[r, "wv(f)"] \arrow[d, "p"'] & wv(a') \arrow[d, "p'"] \\ w(j) \arrow[r, "w(l)"'] & w(j') \end{tikzcd}$$
soit commutatif. Pour tout objet a de A, on définit
$$\eta_{(A,v)}(a) = \big(v(a), a, 1_{wv(a)} : wv(a) \to wv(a)\big) \quad ,$$
et pour toute flèche $f : a \to a'$ de A,
$$\eta_{(A,v)}(f) = \big(v(f), f\big) : \big(v(a), a, 1_{wv(a)}\big) \longrightarrow \big(v(a'), a', 1_{wv(a')}\big).$$
On vérifie facilement la compatibilité à la composition et aux identités, ainsi que la fonctorialité en (A, v).

On laisse le soin au lecteur de vérifier les relations d'adjonction
$$\big((\Theta'_J \circ w^*)\star\varepsilon\big)\big(\eta\star(\Theta'_J \circ w^*)\big) = 1_{\Theta'_J \circ w^*} \ , \quad \big(\varepsilon\star(\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w)\big)\big((\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w)\star\eta\big) = 1_{\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w}$$
$$\Theta'_J \circ w^* \xrightarrow{\eta\star(\Theta'_J \circ w^*)} \Theta'_J \circ w^* \circ \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \circ \Theta'_J \circ w^* \xrightarrow{(\Theta'_J \circ w^*)\star\varepsilon} \Theta'_J \circ w^*$$
$$\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \xrightarrow{(\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w)\star\eta} \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \circ \Theta'_J \circ w^* \circ \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \xrightarrow{\varepsilon\star(\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w)} \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w$$
qui prouvent bien que $(\Theta_I \circ \mathcal{C}at/w,\ \Theta'_J \circ w^*)$ est un couple de foncteurs adjoints.

En particulier, pour $J = I$ et $w = 1_I$, on obtient que (Θ_I, Θ'_I) est un couple de foncteurs adjoints.

Lemme 2.6. — *Soient I une petite catégorie, $F, G : I \to \mathcal{C}at$ deux foncteurs, et $u : F \to G$ un morphisme de foncteurs. Si pour tout objet i de I, le foncteur $u_i : F(i) \to G(i)$ est asphérique, alors le foncteur*
$$\textstyle\int u : \int F \longrightarrow \int G$$
est aussi asphérique.

Démonstration. — On définit un foncteur
$$H : \textstyle\int G \longrightarrow \mathcal{C}at$$
comme suit. Pour tout objet (i, b) de $\int G$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, $b \in \mathsf{Ob}(G(i))$, on pose
$$H(i, b) = F(i)/b \quad ,$$
et pour tout morphisme $(k, g) : (i, b) \to (i', b')$ de $\int G$, où $k : i \to i'$ est une flèche de I, et $g : G(k)(b) \to b'$ une flèche de $G(i')$, on définit
$$H(k, g) : F(i)/b \longrightarrow F(i')/b'$$

par
$$(a,\, p : u_i(a) \longrightarrow b) \longmapsto (F(k)(a),\, g \cdot G(k)(p) : u_{i'}F(k)(a) \longrightarrow b') \quad .$$

$$\begin{tikzcd} u_{i'}F(k)(a) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & b' \\ G(k)u_i(a) \arrow[dr, "G(k)(p)"'] & & \\ & G(k)(b) \arrow[uur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Considérons la catégorie $\int H$. Les objets de cette catégorie sont les quadruplets $(i,\, b,\, a,\, p\, :\, u_i(a) \longrightarrow b)$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, $b \in \mathsf{Ob}(G(i))$, $a \in \mathsf{Ob}(F(i))$, $p \in \mathsf{Fl}(G(i))$, un morphisme de source (i,b,a,p) et de but (i',b',a',p') étant un triplet (k,g,f)
$$k : i \longrightarrow i' \in \mathsf{Fl}(I)\ , \quad g : G(k)(b) \longrightarrow b' \in \mathsf{Fl}(G(i'))\ , \quad f : F(k)(a) \longrightarrow a' \in \mathsf{Fl}(F(i'))$$
tel que le carré
$$\begin{tikzcd} u_{i'}F(k)(a) \arrow[r, "u_{i'}(f)"] \arrow[d, equal] & u_{i'}(a') \arrow[dd, "p'"] \\ G(k)u_i(a) \arrow[d, "G(k)(p)"'] & \\ G(k)(b) \arrow[r, "g"'] & b' \end{tikzcd}$$
soit commutatif. Pour tout couple de morphismes composables
$$(i,\, b,\, a,\, p) \xrightarrow{(k,g,f)} (i',\, b',\, a',\, p') \xrightarrow{(k',g',f')} (i'',\, b'',\, a'',\, p'') \quad ,$$
le composé est défini par
$$(k',\, g',\, f') \circ (k,\, g,\, f) = (k'k,\, g' \cdot G(k')(g),\, f' \cdot F(k')(f)) \quad .$$
Le foncteur canonique $\theta_H : \int H \longrightarrow \int G$ est défini par
$$(i,b,a,p) \longmapsto (i,b)\ ,\ \ (i,b,a,p) \in \mathsf{Ob}(\textstyle\int H)\ , \quad (k,g,f) \longmapsto (k,g)\ ,\ \ (k,g,f) \in \mathsf{Fl}(\textstyle\int H)\ .$$
On va définir un foncteur $S : \int F \longrightarrow \int H$ tel que le triangle
$$\begin{tikzcd} & \int H \arrow[dr, "\theta_H"] & \\ \int F \arrow[ur, "S"] \arrow[rr, "\int u"'] & & \int G \end{tikzcd}$$
soit commutatif. Pour tout objet (i,a) de $\int F$, $i \in \mathsf{Ob}(I)$, $a \in \mathsf{Ob}(F(i))$, on pose
$$S(i,a) = (i,\, u_i(a),\, a,\, 1_{u_i(a)}) \quad ,$$
et pour tout morphisme $(k,f) : (i,a) \longrightarrow (i',a')$ de $\int F$, où $k : i \longrightarrow i'$ est une flèche de I, et $f : F(k)(a) \longrightarrow a'$ une flèche de $F(i')$,
$$S(k,f) = (k,\, u_{i'}(f),\, f) : (i,\, u_i(a),\, a,\, 1_{u_i(a)}) \longrightarrow (i',\, u_{i'}(a'),\, a',\, 1_{u_{i'}(a')}) \quad .$$
On vérifie aussitôt la compatibilité de S aux identités et à la composition, ainsi que la commutativité du triangle ci-dessus. On va définir un foncteur $R : \int H \longrightarrow \int F$ qui sera un adjoint à droite et une rétraction de S. Pour tout objet (i,b,a,p) de $\int H$, on pose $R(i,b,a,p) = (i,a)$, et pour tout morphisme $(k,g,f) : (i,b,a,p) \longrightarrow (i',b',a',p')$

de $\int H$, on pose $R(k,g,f)=(k,f)$. La compatibilité de R aux identités et la composition est évidente, ainsi que l'égalité $RS=1_{\int F}$. On définit un morphisme de foncteurs $\varepsilon : SR \to 1_{\int H}$ comme suit. Pour tout objet $(i,\, b,\, a,\, p: u_i(a)\to b)$ de $\int H$, on pose

$$\varepsilon_{(i,b,a,p)} = (1_i, p, 1_a) : SR(i,b,a,p) = S(i,a) = (i,\ u_i(a),\ a,\ 1_{u_i(a)}) \longrightarrow (i,b,a,p) \quad ,$$

et on constate aussitôt qu'on définit ainsi un morphisme de $\int H$. Pour tout morphisme $(k,g,f) : (i,b,a,p) \to (i',b',a',p')$ de $\int H$, le carré

$$\begin{tikzcd}
SR(i,b,a,p) \arrow[r, "\varepsilon_{(i,b,a,p)}"] \arrow[d, "SR(k,g,f)"'] & (i,b,a,p) \arrow[d, "(k,g,f)"] \\
SR(i',b',a',p') \arrow[r, "\varepsilon_{(i',b',a',p')}"] & (i',b',a',p')
\end{tikzcd}$$

est bien commutatif. En effet,

$$(k,g,f)\varepsilon_{(i,b,a,p)} = (k,g,f)(1_i,p,1_a) = (k, g\,G(k)(p), f) \quad ,$$

$$\varepsilon_{(i',b',a',p')}SR(k,g,f) = (1_{i'},p',1_{a'})S(k,f) = (1_{i'},p',1_{a'})(k,u_{i'}(f),f) = (k,p'u_{i'}(f),f)$$

et $p'u_{i'}(f) = g\,G(k)(p)$, puisque (k,g,f) est un morphisme de $\int H$. On en déduit que $\varepsilon : SR \to 1_{\int H}$ est bien un morphisme de foncteurs. Enfin, pour tout objet (i,b,a,p) de $\int H$, on a

$$R(\varepsilon_{(i,b,a,p)}) = R(1_i,p,1_a) = (1_i,1_a) \quad ,$$

et pour tout objet (i,a) de $\int F$, on a

$$\varepsilon_{S(i,a)} = \varepsilon_{(i,u_i(a),a,1_{u_i(a)})} = (1_i, 1_{u_i(a)}, 1_a) \quad ,$$

ce qui prouve que

$$\varepsilon : SR \longrightarrow 1_{\int H} \qquad \text{et} \qquad 1_{1_{\int F}} : 1_{\int F} \longrightarrow RS = 1_{\int F}$$

satisfont aux relations d'adjonction, et que R est un adjoint à droite de S. Il résulte donc de la proposition 1.12 que S est un foncteur asphérique. Comme par hypothèse pour tout objet i de I, u_i est un foncteur asphérique, θ_H est une cofibration à fibres asphériques. On en déduit que le foncteur θ_H est asphérique (proposition 1.16), et par suite qu'il en est de même du composé $\int u = \theta_H S$ (proposition 1.11), ce qui achève la démonstration. □

Théorème 2.7. — *Pour toute petite catégorie I, on a*

$$\mathcal{A}sph/I = \Theta_I^{-1}(\mathcal{A}sph(I)) \quad , \qquad \Theta'_I(\mathcal{A}sph(I)) \subset \mathcal{A}sph/I$$

et les foncteurs

$$\overline{\Theta_I} : (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \longrightarrow \mathcal{A}sph(I)^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) = \mathsf{Hot}(I)$$

et

$$\overline{\Theta'_I} : \mathsf{Hot}(I) = \mathcal{A}sph(I)^{-1}\,\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at) \longrightarrow (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \quad ,$$

induits par Θ_I et Θ'_I respectivement, sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — L'égalité $\mathcal{A}sph/I = \Theta_I^{-1}(\mathcal{A}sph(I))$ résulte de la proposition 1.10, et l'inclusion $\Theta'_I(\mathcal{A}sph(I)) \subset \mathcal{A}sph/I$ du lemme précédent. On en déduit un couple de foncteurs adjoints

$$\overline{\Theta_I} : (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \longrightarrow \mathsf{Hot}(I) \quad , \qquad \overline{\Theta'_I} : \mathsf{Hot}(I) \longrightarrow (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I)$$

les morphismes d'adjonction étant induits par les morphismes d'adjonction

$$\varepsilon : \Theta_I\Theta'_I \longrightarrow 1_{\underline{\mathsf{Hom}}(I,\mathcal{C}at)} \quad , \qquad \eta : 1_{\mathcal{C}at/I} \longrightarrow \Theta'_I\Theta_I$$

(cf. 2.5). Il suffit donc de montrer que pour tout foncteur $F : I \to \mathcal{C}at$, le morphisme de foncteurs ε_F est dans $\mathcal{A}sph(I)$, et que pour tout objet $(A, v : A \to I)$ de $\mathcal{C}at/I$, le morphisme $\eta_{(A,v)}$ de $\mathcal{C}at/I$ est dans $\mathcal{A}sph/I$.

a) En vertu de 2.5, pour tout objet i de I, $\varepsilon_{F,i}$ est le morphisme

$$\left(\textstyle\int F\right) / i \longrightarrow F(i)$$

associant à un objet $(j, a, p : j \to i)$ de $\left(\int F\right)/i$, $j \in \mathsf{Ob}(I)$, $a \in \mathsf{Ob}(F(j))$, $p \in \mathsf{Fl}(I)$, l'objet $F(p)(a)$ de $F(i)$. On vérifie facilement que ce foncteur admet comme adjoint à droite le foncteur d'inclusion

$$F(i) \longrightarrow \left(\textstyle\int F\right) / i \quad , \qquad a \longmapsto (i, a, 1_i) \quad ,$$

(cf. lemme 1.15), ce qui prouve, en vertu de la proposition 1.12, qu'il est asphérique. On en déduit que ε_F est asphérique argument par argument, ce qui prouve l'assertion relative à ε_F.

b) En vertu de 2.5, le morphisme $\eta_{(A,v)}$ est l'inclusion

$$A \longrightarrow \textstyle\int A/i \quad , \qquad a \longmapsto (v(a), a, 1_{v(a)}) \quad ,$$

où $\int A/i$ désigne, par abus de notation, la catégorie cofibrée sur I définie par le foncteur

$$I \longrightarrow \mathcal{C}at \quad , \qquad i \longmapsto A/i \quad .$$

On vérifie facilement que ce foncteur admet comme adjoint à droite le foncteur

$$\textstyle\int A/i \longrightarrow A \quad , \qquad (i, a, p : v(a) \to i) \longmapsto a$$

(cf. preuve du lemme 2.6), ce qui prouve qu'il est asphérique (1.12), et achève la preuve du théorème. □

2.8. — Pour toute flèche $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, on note

$$w_! : \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$$

le composé $w_! = \Theta_I \circ \mathcal{C}at/w \circ \Theta'_J$.

$$\underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \xrightarrow{\Theta'_J} \mathcal{C}at/J \xrightarrow{\mathcal{C}at/w} \mathcal{C}at/I \xrightarrow{\Theta_I} \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at)$$

Comme en vertu du théorème 2.7 et de 2.4, on a

$$\Theta'_J(\mathcal{A}sph(J)) \subset \mathcal{A}sph/J \ , \quad (\mathcal{C}at/w)(\mathcal{A}sph/J) \subset \mathcal{A}sph/I, \quad \Theta_I(\mathcal{A}sph/I) \subset \mathcal{A}sph(I) \ ,$$

ce foncteur induit un foncteur entre les catégories localisées, noté aussi par abus

$$w_! : \mathsf{Hot}(J) \longrightarrow \mathsf{Hot}(I) \quad ,$$

qui est le composé des foncteurs

$$\mathsf{Hot}(J) \xrightarrow{\overline{\Theta'_J}} (\mathcal{A}sph/J)^{-1}(\mathcal{C}at/J) \xrightarrow{\overline{\mathcal{C}at/w}} (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \xrightarrow{\overline{\Theta_I}} \mathsf{Hot}(I)$$

induits par Θ'_J, $\mathcal{C}at/w$ et Θ_I. On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \arrow[r, "w_!"] \arrow[d, "\gamma_J"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \arrow[d, "\gamma_I"] \\ \mathsf{Hot}(J) \arrow[r, "w_!"'] & \mathsf{Hot}(I) \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont les morphismes de localisation.

Théorème 2.9. — *Pour tout morphisme $w : J \to I$ de $\mathcal{C}at$, les foncteurs*

$$w_! : \mathsf{Hot}(J) \longrightarrow \mathsf{Hot}(I) \quad , \qquad w^* : \mathsf{Hot}(I) \longrightarrow \mathsf{Hot}(J)$$

forment un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. — Il résulte de 2.1, 2.4, 2.5 et du théorème 2.7 que le couple de foncteurs $(\overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{C}at/w}\,,\, \overline{\Theta'_J} \circ w^*)$

$$(\mathcal{A}sph/J)^{-1}(\mathcal{C}at/J) \xrightarrow{\overline{\mathcal{C}at/w}} (\mathcal{A}sph/I)^{-1}(\mathcal{C}at/I) \xrightarrow{\overline{\Theta}_I} \mathsf{Hot}(I)$$

$$\mathsf{Hot}(I) \xrightarrow{w^*} \mathsf{Hot}(J) \xrightarrow{\overline{\Theta'_J}} (\mathcal{A}sph/J)^{-1}(\mathcal{C}at/J)$$

est un couple de foncteurs adjoints. Comme en vertu du théorème 2.7, $\overline{\Theta}_J$ et $\overline{\Theta'_J}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, $w^* \simeq \overline{\Theta}_J \circ (\overline{\Theta'_J} \circ w^*)$ est un adjoint à droite de $(\overline{\Theta}_I \circ \overline{\mathcal{C}at/w}) \circ \overline{\Theta'_J} = w_!$, ce qui prouve le théorème. □

Remarque 2.10. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite associée à un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ (cf. 1.3), alors il résulte de la théorie développée par D.-C. Cisinski [**3**] que le foncteur

$$w_! : \mathsf{Hot}(J) \longrightarrow \mathsf{Hot}(I)$$

s'identifie au foncteur dérivé à gauche de l'adjoint à gauche du foncteur image inverse

$$w^* : \underline{\mathsf{Hom}}(I, \mathcal{C}at) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(J, \mathcal{C}at) \quad .$$

3. Foncteurs lisses

Dans ce paragraphe, on se fixe, une fois pour toutes, une structure d'asphéricité à droite $\mathcal{A}$.

Définition 3.1. — On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *faiblement $\mathcal{A}$-lisse*, ou plus simplement *faiblement lisse*, si pour tout objet b de B, le morphisme canonique

$$j_b : A_b \longrightarrow b\backslash A \quad , \qquad a \mapsto (a, 1_b : b \to u(a)) \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(A_b) \ ,$$

est asphérique.

Exemple 3.2. — Une préfibration est un morphisme faiblement lisse. En effet, pour tout objet b de B, le foncteur j_b admet alors un adjoint à droite (dual du lemme 1.15), et est donc asphérique en vertu de la proposition 1.12. Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite minimale (1.2), il résulte de la caractérisation des foncteurs asphériques pour cette structure (1.7), et du dual du lemme 1.15, que les morphismes faiblement lisses pour la structure d'asphéricité à droite minimale sont exactement les préfibrations.

Proposition 3.3. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est faiblement lisse ;*

(b) *pour tout objet a de A, les fibres du morphisme*

$$A/a \longrightarrow B/b \quad , \qquad b = u(a) \quad ,$$

induit par u, sont asphériques.

(c) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ \Delta_0 \arrow[r] & \Delta_1 \arrow[r] & B \end{tikzcd},$$

où $\Delta_0 \to \Delta_1$ *désigne l'inclusion* $\{0\} \hookrightarrow \{0 \to 1\}$, *le morphisme* $A'' \to A'$ *est asphérique.*

(d) *pour toute flèche* $g : b_0 \to b_1$ *de* B, *et tout objet* a_1 *de* A_{b_1}, *la catégorie* $A(a_1, g)$ *dont les objets sont les flèches* $f : a \to a_1$ *de* A *de but* a_1 *qui relèvent* g $(u(f) = g)$, *et dont les morphismes sont les triangles commutatifs*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\ & a_1 \\ a' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd},$$

avec h *morphisme de* A_{b_0} $(u(h) = 1_{b_0})$, *est asphérique.*

Démonstration. — On laisse au lecteur le soin de vérifier que pour toute flèche $g : b_0 \to b_1$ de B, et tout objet a_1 de A au-dessus de b_1, la catégorie $A_{b_0}/(a_1, g)$ (définie par $j_{b_0} : A_{b_0} \to b_0\backslash A$ et l'objet $(a_1, g : b_0 \to u(a_1) = b_1)$ de $b_0\backslash A$), ainsi que la fibre de $A/a_1 \to B/b_1$, au-dessus de l'objet (b_0, g) de B/b_1, sont isomorphes à la catégorie $A(a_1, g)$, ce qui prouve l'équivalence des conditions (a), (b) et (d). Montrons l'équivalence de (c) et (d). La donnée d'une flèche $g : b_0 \to b_1$ de B équivaut à celle d'une flèche $\Delta_1 \to B$, comme dans (c), et affirmer, avec les notations de (c), que l'inclusion $A'' \to A'$ est asphérique, c'est affirmer que pour tout objet a' de A', la catégorie A''/a' est asphérique. Si a' est un objet de la fibre A'_0 de A' au-dessus de 0, qui s'identifie à A'', cela est vrai sans hypothèse sur u, puisqu'alors A''/a' admet un objet final. Il suffit donc de le vérifier pour a' dans la fibre A'_1 de A' au-dessus de 1. Mais alors a' s'identifie à un objet a_1 de A_{b_1}, et on vérifie que A''/a' est isomorphe à la catégorie $A(a_1, g)$ de (d). Cela achève la démonstration. □

Corollaire 3.4. — *Les morphismes faiblement lisses sont stables par changement de base, autrement dit, pour tout carré cartésien dans* $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r] & B \end{tikzcd},$$

si u *est faiblement lisse, il en est de même de* u'.

Démonstration. — Le corollaire résulte de la proposition précédente, puisque la condition (c) est stable par changement de base. □

Proposition 3.5. — *Soit* $u : A \to B$ *un morphisme de* $\mathcal{C}at$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) u *est faiblement lisse ;*

(b) *pour tout objet* a *de* A, *le morphisme* $A/a \to B/b$, $b = u(a)$, *induit par* u, *est faiblement lisse.*

Démonstration. — Supposons que le foncteur u soit faiblement lisse, et soient a un objet de A, et $b = u(a)$. En vertu de la condition (b) de la proposition 3.3, pour prouver que le foncteur $A/a \to B/b$, induit par u, est faiblement lisse, il suffit de montrer que pour tout objet $(a', f : a' \to a)$ de A/a, le morphisme $(A/a)/(a', f) \to (B/b)/(b', g)$, où $(b', g) = (u(a'), u(f))$, est à fibres asphériques. Or ce morphisme s'identifie au morphisme $A/a' \to B/b'$, induit par u, qui est à fibres asphériques, en vertu de la condition (b) de la proposition 3.3. Réciproquement, supposons que pour tout objet a de A, le foncteur $A/a \to B/b$, $b = u(a)$, induit par u, soit faiblement lisse, et montrons qu'alors u l'est aussi. En vertu de la condition (b) de la proposition 3.3, l'hypothèse que $A/a \to B/b$ soit faiblement lisse implique que le morphisme $(A/a)/(a, 1_a) \to (B/b)/(b, 1_b)$ est à fibres asphériques. Mais ce dernier s'identifie au morphisme $A/a \to B/b$, induit par u, ce qui prouve que u est faiblement lisse, en vertu toujours de la condition (b) de la proposition 3.3. □

Définition 3.6. — On dit qu'un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *$\mathcal{A}$-lisse*, ou plus simplement *lisse*, si pour tout diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

si le morphisme w est asphérique, il en est de même de v.

Proposition 3.7. — *La classe des morphismes lisses est stable par composition, et par changement de base.*

Démonstration. — C'est une conséquence formelle de la définition. □

Proposition 3.8. — *Un morphisme lisse est faiblement lisse.*

Démonstration. — Cela résulte de la condition (c) de la proposition 3.3. □

Proposition 3.9. — *Un isomorphisme local est un morphisme lisse.*

Démonstration. — Soit $u : A \to B$ un isomorphisme local, autrement dit, une flèche $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ telle que pour tout objet a de A, le foncteur $A/a \to B/b$, $b = u(a)$, induit par u, soit un isomorphisme, et considérons un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u''"'] & A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w'"'] & B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme w' étant supposé asphérique. Pour tout objet a' de A', on en déduit un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A''/a' \arrow[r] \arrow[d] & A'/a' \arrow[r] \arrow[d] & A/a \arrow[d] \\ B''/b' \arrow[r] & B'/b' \arrow[r] & B/b \end{tikzcd} \quad ,$$

où $a = v(a')$, $b' = u'(a')$, $b = u(a) = w(b')$, dont les flèches verticales sont des isomorphismes. Comme par hypothèse la catégorie B''/b' est asphérique, il en est de même de A''/a', ce qui prouve la proposition. □

Proposition 3.10. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est lisse ;*

(b) *pour tout objet a de A, le morphisme $A/a \to B/b$, $b = u(a)$, induit par u, est lisse.*

Démonstration. — Supposons que u soit lisse, et soit a un objet de A, $b = u(a)$. La stabilité des morphismes lisses par changement de base (3.7) implique que le foncteur $A/b \to B/b$, induit par u, est lisse. Comme le foncteur canonique $A/a \to A/b$ est un isomorphisme local, il résulte de la proposition précédente qu'il est lisse. La stabilité des morphismes lisses par composition (3.7) implique donc que le composé $A/a \to B/b$ est lisse.

Réciproquement, supposons que pour tout objet a de A, le foncteur $A/a \to B/b$, $b = u(a)$, induit par u, est lisse, et considérons un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

avec w foncteur asphérique. Pour tout objet a de A, on en déduit un diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A''/a \arrow[r] \arrow[d] & A'/a \arrow[r] \arrow[d] & A/a \arrow[d] \\ B''/b \arrow[r] & B'/b \arrow[r] & B/b \end{tikzcd} ,$$

où $b = u(a)$. Comme le foncteur w est asphérique, il en est de même du morphisme $B''/b \to B'/b$ (1.10). Le foncteur $A/a \to B/b$ étant lisse, on en déduit que $A''/a \to A'/a$ est asphérique. Comme cela est vrai pour tout objet a de A, il résulte de la proposition 1.10 que v est asphérique, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 3.11. — *Les foncteurs localement asphériques sont stables par changement de base lisse, autrement dit, pour tout carré cartésien dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} ,$$

si u est lisse et w localement asphérique, alors v est localement asphérique.

Démonstration. — Pour tout objet a' de A', on a un carré cartésien de $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} A'/a' \arrow[r] \arrow[d] & A/a \arrow[d] \\ B'/b' \arrow[r] & B/b \end{tikzcd} ,$$

où $a = v(a')$, $b' = u'(a')$, et $b = u(a) = w(b')$. En vertu de la proposition précédente, si u est lisse, il en est de même de $A/a \to B/b$, et si v est localement asphérique, le foncteur $B'/b' \to B/b$ est asphérique, ce qui prouve que $A'/a' \to A/a$ est asphérique, et achève la démonstration. □

3.12. — Soit

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

un diagramme dans $\mathcal{C}at$. On peut former le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} ,$$

où $A' = B' \times_B A$, ainsi que le “2-carré”

$$\begin{tikzcd} A'_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[d, "u'_0"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha \nearrow"] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} ,$$

où A'_0 est la “comma catégorie” dont les objets sont les triplets

$$(b',\, a,\, g : w(b') \to u(a)) \quad , \qquad b' \in \mathsf{Ob}(B') \ , \quad a \in \mathsf{Ob}(A) \ , \quad g \in \mathsf{Fl}(B) \ ,$$

un morphisme de (b'_0, a_0, g_0) vers (b'_1, a_1, g_1) étant un couple (g', f), où $g' : b'_0 \to b'_1$ est une flèche de B', et $f : a_0 \to a_1$ une flèche de A, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} w(b'_0) \arrow[r, "w(g')"] \arrow[d, "g_0"'] & w(b'_1) \arrow[d, "g_1"] \\ u(a_0) \arrow[r, "u(f)"'] & u(a_1) \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Les foncteurs u'_0, v'_0 sont définis par

$$u'_0(b', a, g) = b' \ , \quad v_0(b', a, g) = a \ , \qquad (b', a, g) \in \mathsf{Ob}(A'_0) \ ,$$
$$u'_0(g', f) = g' \ , \qquad v_0(g', f) = f \ , \qquad (g', f) \in \mathsf{Fl}(A'_0) \ ,$$

et le morphisme de foncteurs $\alpha : wu'_0 \to uv_0$ par

$$\alpha_{(b', a, g)} = g : wu'_0(b', a, g) = w(b') \longrightarrow u(a) = uv_0(b', a, g) \ , \quad (b', a, g) \in \mathsf{Ob}(A'_0) \quad .$$

On se fixe un objet b'_0 de B', un objet a_1 de A, et un morphisme $g : w(b'_0) \to u(a_1)$. On pose $b_0 = w(b'_0)$, $b_1 = u(a_1)$. À ces données, on va associer trois catégories C_0, C_1, C_2, et on va laisser au lecteur le soin de vérifier qu'elles sont isomorphes entre elles.

a) Définition de C_0. Le triplet (b'_0, a_1, g) est un objet de A'_0, et on a un foncteur canonique $A' \to A'_0$ associant à un objet (b', a) de A', $b' \in \mathsf{Ob}(B')$, $a \in \mathsf{Ob}(A)$, $w(b') = u(a)$, l'objet $(b', a, 1_{u(a)})$ de A'_0. La catégorie C_0 est la catégorie $A'/(b'_0, a_1, g)$.

b) Définition de C_1. On a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A'/a_1 \arrow[r] \arrow[d] & A/a_1 \arrow[d] \\ B'/b_1 \arrow[r] & B/b_1 \end{tikzcd} ,$$

et le couple (b'_0, g) est un un objet de B'/b_1. La catégorie C_1 est la catégorie $(A'/a_1)/(b'_0, g)$.

c) Définition de C_2. Considérons la catégorie $(B'/b'_0)^*$ obtenue de B'/b'_0 par adjonction d'un objet final, et l'inclusion $B'/b'_0 \hookrightarrow (B'/b'_0)^*$. En vertu de la propriété universelle de cette construction, il existe un morphisme unique $(B'/b'_0)^* \to B/b_1$ de $\mathcal{C}at$ tel que l'image par ce foncteur de l'objet final de $(B'/b'_0)^*$ soit l'objet final $(b_1, 1_{b_1})$ de B/b_1, et tel que le carré

$$\begin{tikzcd} B'/b'_0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & B/b_0 \arrow[d] \\ (B'/b'_0)^* \arrow[r] & B/b_1 \end{tikzcd} ,$$

dont la flèche horizontale du haut est induite par w, et la flèche verticale de droite est définie par g, soit commutatif. Considérons le composé $(B'/b'_0)^* \to B/b_1 \to B$ de ce foncteur avec le foncteur canonique de B/b_1 vers B, et formons le diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{A'} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B'/b'_0 \arrow[r] & (B'/b'_0)^* \arrow[r] & B \end{tikzcd} .$$

Si l'on note a'_1 l'objet de $\overline{A'} = (B'/b'_0)^* \times_B A$ au-dessus de l'objet final de $(B'/b'_0)^*$, et dont la projection dans A est a_1, alors la catégorie C_2 est la catégorie A''/a'_1.

Théorème 3.13. — *Soit $u : A \to B$ une flèche de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est lisse ;*

(b) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

si le foncteur w est asphérique pour la structure d'asphéricité à droite minimale, autrement dit s'il admet un adjoint à droite, alors le morphisme v est asphérique ;

(c) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

avec B'' catégorie admettant un objet final, B' obtenue de B'' par adjonction d'un objet final, et w l'inclusion canonique, le morphisme v est asphérique ;

(d) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d, "u''"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

et tout objet a' de A', le morphisme

$$A''/a' \longrightarrow B''/b' \quad , \qquad b' = u'(a') \quad ,$$

induit par u'', est asphérique.

Démonstration. — Les implications $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ sont évidentes. Montrons l'implication $(c) \Rightarrow (d)$. La condition (c) étant stable par changement de base, il suffit de montrer que si

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien, a_1 un objet de A, $b_1 = u(a_1)$, et $(b'_0,\, g : w(b'_0) \longrightarrow b_1)$ un objet de B'/b_1, alors la catégorie $(A'/a_1)/(b'_0, g)$ est asphérique. En vertu de 3.12, cette catégorie est isomorphe à la catégorie A''/a'_1, où

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{A'} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B'/b'_0 \arrow[r] & (B'/b'_0)^* \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

est le diagramme de carrés cartésiens considéré dans 3.12, (c), et a'_1 l'objet de $\overline{A'}$ au-dessus de l'objet final de $(B'/b'_0)^*$ et dont l'image dans A est l'objet a_1. Or, en vertu de la condition (c), le foncteur $A'' \longrightarrow \overline{A'}$ est asphérique. On en déduit que la catégorie A''/a'_1 est asphérique, donc aussi la catégorie $(A'/a_1)/(b'_0, g)$.

Il reste à montrer l'implication $(d) \Rightarrow (a)$. La condition (d) étant stable par changement de base, il suffit de montrer que si

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien, avec w morphisme asphérique, alors v est un foncteur asphérique. Soit a un objet de A. Il s'agit de montrer que la catégorie A'/a est asphérique. Soit $b = u(a)$. En vertu de la condition (d), le morphisme $A'/a \longrightarrow B'/b$, induit par u', est asphérique. Comme par hypothèse le foncteur w est asphérique, la catégorie B'/b est asphérique, et il en est donc de même de A'/a, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 3.14. — *Un foncteur lisse est localement asphérique.*

Démonstration. — Le corollaire résulte aussitôt de la condition (d) du théorème. □

Proposition 3.15. — *Soit $u : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est une fibration ;*

(b) *u est lisse pour la structure d'asphéricité à droite minimale ;*

(c) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r, "v"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B'' \arrow[r, "w"'] & B' \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

si le foncteur w admet un adjoint à droite, il en est de même de v ;

(d) *pour tout diagramme de carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ \Delta_1 \arrow[r] & \Delta_2 \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

où $\Delta_1 \to \Delta_2$ désigne l'inclusion $\{0 \to 1\} \hookrightarrow \{0 \to 1 \to 2\}$, le foncteur $A'' \to A'$ admet un adjoint à droite.

Démonstration. — Comme les foncteurs asphériques pour la structure d'asphéricité à droite minimale sont exactement ceux qui admettent un adjoint à droite (1.7), l'équivalence des conditions (b) et (c) est tautologique. L'implication $(c) \Rightarrow (d)$ étant évidente, il suffit donc de prouver les implications $(a) \Rightarrow (b)$ et $(d) \Rightarrow (a)$.

Comme les fibrations sont stables par changement de base, pour montrer l'implication $(a) \Rightarrow (b)$, il suffit de montrer que pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A' = B' \times_B A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "w"'] & B \end{tikzcd} ,$$

si u est une fibration, et si pour tout objet b de B, la catégorie B'/b admet un objet final, alors pour tout objet a de A, la catégorie A'/a admet un objet final.

Soient donc a_1 un objet de A, b_1 son image dans B, et $(b'_0,\, g : w(b'_0) \to b_1)$ un objet final de B'/b_1. Comme u est une fibration, il existe un morphisme hypercartésien $k : a_0 \to a_1$ de A tel que $u(k) = g$. On va montrer que $\big((b'_0, a_0),\, k : a_0 \to a_1\big)$ est un objet final de A'/a_1. Soit donc $\big((b', a),\, f : a \to a_1\big)$ un objet de A'/a_1, $w(b') = u(a)$. Il s'agit de montrer qu'il existe une flèche de A'/a_1 et une seule de source $\big((b', a), f\big)$ et de but $\big((b'_0, a_0), k\big)$, autrement-dit, qu'il existe un unique couple (g', h), où $g' : b' \to b'_0$ est une flèche de B', et $h : a \to a_0$ une flèche de A, tel que $w(g') = u(h)$ et $f = kh$. En particulier, pour un tel couple on a $u(f) = u(k)u(h) = gw(g')$, ce qui signifie que $g' : \big(b',\, u(f) : w'(b') \to b_1\big) \longrightarrow \big(b'_0,\, g : w(b'_0) \to b_1\big)$ est une flèche de B'/b_1. L'hypothèse que (b'_0, g) est un objet final de B'/b_1 montre alors l'existence et l'unicité d'un tel g'. Comme le morphisme k est hypercartésien, il existe alors une flèche unique $h : a \to a_0$ de A telle que $u(h) = w(g')$ et $f = kh$, ce qui prouve l'assertion.

Il reste à prouver l'implication $(d) \Rightarrow (a)$. Soit donc $\Delta_2 \to B$ un foncteur défini par un couple de flèches composables

$$b_0 \xrightarrow{g_0} b_1 \xrightarrow{g_1} b_2$$

de B, et formons le diagramme de carrés cartésiens de la condition (d). Cette condition signifie que pour tout objet a'_2 de A' dont l'image a_2 dans A est au-dessus de b_2, la catégorie A''/a'_2 admet un objet final. Décrivons cette dernière. L'ensemble des objets de A''/a'_2 s'identifie à la somme disjointe $A''_0 \amalg A''_1$, où

$$A''_0 = \{(a_0, f_0) \mid a_0 \in \mathsf{Ob}(A),\ u(a_0) = b_0,\ f_0 : a_0 \to a_2 \in \mathsf{Fl}(A),\ u(f_0) = g_1 g_0\} \quad ,$$
$$A''_1 = \{(a_1, f_1) \mid a_1 \in \mathsf{Ob}(A),\ u(a_1) = b_1,\ f_1 : a_1 \to a_2 \in \mathsf{Fl}(A),\ u(f_1) = g_1\} \quad ,$$

et pour tous (a_0, f_0), $(a'_0, f'_0) \in A''_0$, (a_1, f_1), $(a'_1, f'_1) \in A''_1$, on a

$$\mathsf{Hom}_{A''/a'_2}((a_0, f_0), (a'_0, f'_0)) = \{g \mid g : a_0 \to a'_0 \in \mathsf{Fl}(A),\ u(g) = 1_{b_0},\ f_0 = f'_0 g\} \quad ,$$
$$\mathsf{Hom}_{A''/a'_2}((a_0, f_0), (a_1, f_1)) = \{g \mid g : a_0 \to a_1 \in \mathsf{Fl}(A),\ u(g) = g_0,\ f_0 = f_1 g\} \quad ,$$
$$\mathsf{Hom}_{A''/a'_2}((a_1, f_1), (a_0, f_0)) = \varnothing \quad ,$$
$$\mathsf{Hom}_{A''/a'_2}((a_1, f_1), (a'_1, f'_1)) = \{g \mid g : a_1 \to a'_1 \in \mathsf{Fl}(A),\ u(g) = 1_{b_1},\ f_1 = f'_1 g\} \quad .$$

Comme la catégorie A''/a'_2 admet un objet final, elle est en particulier non vide. Le cas particulier où $b_0 = b_1$ et $g_0 = 1_{b_1}$ montre alors que pour toute flèche $b_1 \to b_2$ de B, et tout objet a_2 de A au-dessus de b_2, il existe un morphisme $a_1 \to a_2$ de A au-dessus de $b_1 \to b_2$. En revenant au cas général ($b_0 \xrightarrow{g_0} b_1 \xrightarrow{g_1} b_2$ arbitraire), cela implique que A''_0 et A''_1 sont des ensembles non vides. Comme il n'y a pas de morphisme de A''/a'_2 d'un objet appartenant à A''_1 vers un objet appartenant à A''_0, on en déduit que l'objet final (a_1, f_1) de A''/a'_2 appartient à A''_1. En particulier, cela implique que (a_1, f_1) est aussi un objet final de la sous-catégorie pleine de A''/a'_2 formée des objets appartenant à A''_1, ce qui signifie exactement que f_1 est un morphisme cartésien au-dessus de g_1, et montre que f_1 est déterminé par g_1 seul indépendamment de g_0. Comme g_1 est une flèche arbitraire de B, et a_2 un objet arbitraire de la fibre de A au-dessus du but de g_1, cela implique déjà que u est une préfibration. Mais comme (a_1, f_1) est un objet final de A''/a'_2, on a aussi que pour tout objet (a_0, f_0) de A''/a'_2 appartenant à l'ensemble A''_0, $f_0 : a_0 \to a_2 \in \mathsf{Fl}(A)$, $u(f_0) = g_1 g_0$, il existe un morphisme unique $g : (a_0, f_0) \to (a_1, f_1)$ de A''/a'_2, autrement dit, une unique flèche $g : a_0 \to a_1$ de A telle que $f_1 g = f_0$ et $u(g) = g_0$. Comme g_0 est une flèche arbitraire de B de but la source de g_1, et comme f_1 est indépendant de g_0, ceci implique que le morphisme f_1 est hypercartésien, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 3.16. — *Les fibrations sont des foncteurs lisses (pour toute structure d'asphéricité à droite).*

Démonstration. — Le corollaire résulte de la condition (c) de la proposition précédente, de la condition (b) du théorème 3.13, et de la proposition 1.12. □

Exemple 3.17. — Si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite associée à un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ (exemple 1.3), il résulte de la caractérisation de Grothendieck des foncteurs $\mathcal{W}$-lisses, et du théorème 3.13, que si u est un morphisme de $\mathcal{C}at$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) u est $\mathcal{W}$-lisse ;

(b) u est faiblement $\mathcal{A}$-lisse ;

(c) u est $\mathcal{A}$-lisse.

En revanche, la proposition 3.15, et l'exemple 3.2 montrent que si $\mathcal{A}$ est la structure d'asphéricité à droite minimale, alors la classe des foncteurs $\mathcal{A}$-lisses est strictement contenue dans celle des foncteurs faiblement $\mathcal{A}$-lisses, puisqu'il existe des préfibrations qui ne sont pas des fibrations.

4. Foncteurs lisses, et morphismes de changement de base

Lemme 4.1. — *Soient $w : J \to I$ un morphisme de $\mathcal{C}at$, et $F : I \to \mathcal{C}at$ un foncteur. Alors on a un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "\theta_{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "\theta_F"] \\ J \arrow[r, "w"'] & I \end{tikzcd} \quad ,$$

où θ_{Fw}, θ_F désignent les cofibrations associées aux foncteurs Fw et F respectivement, et $\widetilde{w}$ le foncteur $(j,a) \mapsto (w(j),a)$, $(j,a) \in \mathsf{Ob}(\int Fw)$, induit par w.

Démonstration. — Le lemme résulte d'une simple vérification, laissée au lecteur. □

4.2. — Soit

$$\mathcal{D} = \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$. Pour tout foncteur $F : A \to \mathcal{C}at$, on déduit un carré cartésien composé

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "\theta_{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "\theta_F"] \\ A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

(cf. 4.1). Pour tout objet b' de B', le foncteur $\widetilde{w}$ induit un foncteur

$$(\textstyle\int Fw)/b' \longrightarrow (\textstyle\int F)/v(b') \quad ,$$

et on remarque que

$$(\textstyle\int Fw)/b' = (u'_! w^*(F))(b') \qquad \text{et} \qquad (\textstyle\int F)/v(b') = (v^* u_!(F))(b')$$

(cf. 2.8). On en déduit un morphisme

$$\kappa_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \longrightarrow v^* u_!$$

de $\underline{\mathsf{Hom}}(\underline{\mathsf{Hom}}(A,\mathcal{C}at), \underline{\mathsf{Hom}}(B',\mathcal{C}at))$, appelé *morphisme de changement de base associé au carré $\mathcal{D}$.*

Proposition 4.3. — *Soit*

$$\mathcal{D} = \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$, avec v foncteur lisse. Alors le morphisme de changement de base $\kappa_{\mathcal{D}} : u'_! w^* \to v^* u_!$ est asphérique argument par argument, autrement dit, pour tout foncteur $F : A \to \mathcal{C}at$, et tout objet b' de B', le morphisme

$$\kappa_{\mathcal{D},F}(b') : (u'_! w^*(F))(b') \longrightarrow (v^* u_!(F))(b')$$

est asphérique.

Démonstration. — Soit $F : A \to \mathcal{C}at$ un foncteur, et considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \int Fw \arrow[r, "\widetilde{w}"] \arrow[d, "u'\theta_{Fw}"'] & \int F \arrow[d, "u\theta_F"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd} .$$

Comme le foncteur v est lisse, il résulte de la condition (d) du théorème 3.13 que pour tout objet b' de B', le foncteur $\kappa_{\mathcal{D},F}(b') : (\int Fw)/b' \to (\int F)/v(b')$, induit par $\widetilde{w}$, est asphérique, ce qui prouve la proposition. □

Théorème 4.4. — *Soit $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *u est lisse ;*

(b) *pour tout diagramme de carrés cartésiens dans $\mathcal{C}at$*

$$\begin{tikzcd} A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[d] \\ A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd} ,$$

le morphisme de changement de base associé au carré du haut est un foncteur asphérique argument par argument.

Démonstration. — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 4.3 et de la stabilité des morphismes lisses par changement de base (proposition 3.7). Réciproquement, on remarque que la condition (b), appliquée au foncteur constant $B'' \to \mathcal{C}at$, de valeur la catégorie ponctuelle e, implique que pour tout objet a' de A', si l'on note b' son image dans B', le morphisme $A''/a' \to B''/b'$ est asphérique. On en déduit que u satisfait à la condition (d) du théorème 3.13, ce qui démontre le théorème. □

Remarque 4.5. — Soit

$$\mathcal{D} = \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u'"'] & A \arrow[d, "u"] \\ B' \arrow[r, "v"'] & B \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de $\mathcal{C}at$, et

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathsf{Hom}}(A, \mathcal{C}at) \arrow[r, "w^*"] \arrow[d, "u_!"'] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow\kappa_{\mathcal{D}}"] & \underline{\mathsf{Hom}}(A', \mathcal{C}at) \arrow[d, "u'_!"] \\ \underline{\mathsf{Hom}}(B, \mathcal{C}at) \arrow[r, "v^*"'] & \underline{\mathsf{Hom}}(B', \mathcal{C}at) \end{tikzcd} \qquad u'_! w^* \xrightarrow{\kappa_{\mathcal{D}}} v^* u_!$$

le morphisme de changement de base (4.2). On peut facilement vérifier que le morphisme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Hot}(A) \arrow[r, "w^*"] \arrow[d, "u_!"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\overline{\kappa}_{\mathcal{D}}"] & \mathsf{Hot}(A') \arrow[d, "u'_!"] \\ \mathsf{Hot}(B) \arrow[r, "v^*"'] & \mathsf{Hot}(B') \end{tikzcd} \qquad u'_! w^* \xrightarrow{\overline{\kappa}_{\mathcal{D}}} v^* u_! \quad ,$$

induit par $\kappa_{\mathcal{D}}$ aux catégories localisées, est le morphisme de "changement de base" défini formellement par les adjonctions (cf. théorème 2.9) : le morphisme $\overline{\kappa}_{\mathcal{D}}$ est le composé

$$u'_! w^* \xrightarrow{u'_! w^* \star \eta} u'_! w^* u^* u_! = u'_! u'^* v^* u_! \xrightarrow{\varepsilon' \star v^* u_!} v^* u_! \quad ,$$

où

$$\eta : 1_{\mathsf{Hot}(A)} \longrightarrow u^* u_! \quad , \qquad \varepsilon' : u'_! u'^* \longrightarrow 1_{\mathsf{Hot}(B')}$$

désignent les morphismes d'adjonction. La proposition 4.3 implique que si le foncteur v est lisse, alors le morphisme de foncteurs $\overline{\kappa}_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme.

Références

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA4). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305. Springer-Verlag, 1972-1973.

[2] K. S. Brown. Abstract homotopy and generalized sheaf cohomology. *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 186 : 419–458, 1973.

[3] D.-C. Cisinski. Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7, 2002, www-math.univ-paris13.fr/~cisinski/, à paraître dans *Astérisque*.

[4] D.-C. Cisinski. Le localisateur fondamental minimal. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, 45-2 : 109–140, 2004.

[5] A. Grothendieck. *Pursuing stacks*. Manuscrit, 1983, à paraître dans *Documents Mathématiques*.

[6] A. Grothendieck. *Les dérivateurs*. Manuscrit, 1990, www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html.

[7] A. Heller. Homotopy theories. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, 71(383), 1988.

[8] G. Maltsiniotis. La théorie de l'homotopie de Grothendieck. *Astérisque*, 301 : 1–140, 2005.

[9] D. Quillen. Higher algebraic K-theory : I, *Algebraic K-theory I*, pages 85–147. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341. Springer-Verlag, 1973.

[10] R. W. Thomason. $\mathcal{C}at$ as a closed model category. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, XXI-3 : 305–324, 1980.

Georges Maltsiniotis