# STRUCTURES DE DÉRIVABILITÉ

*par*

Bruno KAHN & Georges MALTSINIOTIS

***Résumé.*** — On développe un cadre très général dans lequel les théorèmes de Quillen d'existence, de composition et d'adjonction des foncteurs dérivés sont valables. On généralise et unifie ainsi des résultats obtenus précédemment par Dwyer, Hirschhorn, Kan et Smith, dans leur formalisme des « catégories homotopiques », et par Radulescu-Banu dans le contexte des « catégories dérivables » de Cisinski.

***Abstract.*** — We introduce a very general framework in which Quillen's theorems of existence, composition and adjunction for derived functors can be proved. We thus generalize and unify previous results by Dwyer, Hirschhorn, Kan and Smith, obtained in their formalism of "homotopical categories", and by Radulescu-Banu in the context of Cisinski's "derivable categories".

## 1. Introduction

Dans son livre fondateur de l'algèbre homotopique [**15**], Quillen démontre, dans le cadre des catégories de modèles, trois théorèmes importants sur les foncteurs dérivés : un théorème *d'existence*, un théorème de *composition*, et un théorème *d'adjonction*. Une exposition plus récente de ces théorèmes, avec des hypothèses légèrement plus restrictives, peut se trouver dans le livre de Hirschhorn [**8**], ou dans celui de Hovey [**9**]. Ces mêmes théorèmes sont démontrés dans un cadre beaucoup plus général par Dwyer, Hirschhorn, Kan et Smith qui dégagent l'ingrédient essentiel de la théorie de Quillen, utile pour les prouver [**5**]. Dans une autre direction, Radulescu-Banu [**16**] développe un formalisme pour les démontrer dans le contexte des catégories dérivables de Cisinski [**4**].

Tous les foncteurs dérivés construits dans ces divers contextes sont des foncteurs dérivés *absolus* [**13**]. Dans le présent article, on introduit la notion de *structure de dérivabilité* qui permet d'assurer l'existence de tels foncteurs dérivés sous des hypothèses suffisamment générales pour englober tous les cas connus précédemment.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 18A40, 18E35, 18G10, 18G55, 55P60, 55U35.

Cette définition utilise de façon essentielle le concept de carré exact au sens de Guitart [**7**]. On énonce des conditions suffisantes de validité pour le théorème de composition des foncteurs dérivés, et le théorème d'adjonction est conséquence du théorème abstrait d'adjonction des foncteurs dérivés absolus [**13**]. Les propriétés définissant une structure de dérivabilité n'étant pas très faciles à vérifier en pratique, une partie importante de l'article est consacrée à l'étude de conditions suffisantes plus concrètes, inspirées des théorèmes de localisation démontrés dans [**10**].

Dans les paragraphes 2, 3 et 4, on fait des rappels sur les extensions de Kan, les foncteurs dérivés, la cofinalité, et les carrés exacts de Guitart. Le paragraphe 5 est le plus important, où on introduit la notion de structure de dérivabilité et on démontre, dans ce cadre, les théorèmes d'existence, de composition, et d'adjonction des foncteurs dérivés. Dans les paragraphes 6 et 7, on étudie des conditions suffisantes permettant de trouver des structures de dérivabilité. On introduit les notions de structure de dérivabilité de type simplicial et de type normand, inspirées de [**10**]. Le reste de l'article est consacré à la comparaison des structures introduites dans ce travail avec celles étudiées précédemment. En particulier, on retrouve les théorèmes de Quillen sur les foncteurs dérivés [**15**], ainsi que les généralisations de ces théorèmes par Dwyer, Hirschhorn, Kan et Smith [**5**], ou par Radulescu-Banu [**16**]. On constate aussi que les théorèmes de localisation de [**10**] impliquent les théorèmes classiques de localisation prouvés par Quillen [**15**], et leur généralisation due à Cisinski [**4**].

Dans ce travail, pour éviter toute difficulté ensembliste, on se place implicitement dans le cadre des univers de Grothendieck [**2**], et on se fixe un univers $\mathcal{U}$. On appellera *classe* un ensemble n'appartenant pas nécessairement à l'univers $\mathcal{U}$, et on réservera le terme d'*ensemble* pour ceux appartenant à $\mathcal{U}$. Toute catégorie appartient à un univers suffisamment grand. Comme dans [*loc. cit.*], et contrairement à l'usage courant, on ne supposera *pas* que la classe des flèches d'un objet vers un autre soit un *ensemble*. Si c'est le cas, on dira que la catégorie est *localement petite*. On dira qu'elle est *petite* si elle appartient à l'univers $\mathcal{U}$. Ces conventions pour les catégories sont compatibles à celles de [**5**]. La notion de catégorie de modèles de Quillen sera la notion originale de [**15**]. En particulier, sauf mention du contraire, on ne supposera pas qu'elle soit fermée, ni qu'elle admette des factorisations fonctorielles, pas plus que des limites (projectives ou inductives) autres que finies.

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, on note $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ la classe des objets de $\mathcal{C}$, $\mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ la classe de ses flèches, et $\mathcal{C}^\circ$ la catégorie opposée. Pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$, $1_c : c \to c$ désigne le morphisme identité de $c$. Pour tout couple de catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, on note $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$.

## 2. Rappels sur les extensions de Kan

*Dans ce paragraphe, on se fixe deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et un foncteur $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$.*

*2.1.* — Une *extension de Kan à gauche, le long de $P$*, d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un couple $(F', \alpha)$, où $F' : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ est un foncteur et $\alpha : F \to F' \circ P$ un morphisme de foncteurs,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, shift left=4ex, "\swArrow\alpha"] & \\ \mathcal{C}' \arrow[r, "F'"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour tout couple $(G, \beta)$, où $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ est un foncteur et $\beta : F \to G \circ P$ un morphisme de foncteurs, il existe un unique morphisme de foncteurs $\gamma : F' \to G$ tel que $\beta = (\gamma \star P)\alpha$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ F' \circ P \arrow[r, "\gamma \star P"'] & G \circ P \end{tikzcd}$$

En particulier, une extension de Kan à gauche de $F$ est unique à isomorphisme unique près : si $(F', \alpha)$ et $(F'', \alpha')$ sont deux extensions de Kan à gauche de $F$, il existe un isomorphisme unique de foncteurs $\gamma : F' \to F''$ tel que $\alpha' = (\gamma \star P)\alpha$.

*2.2.* — On rappelle que pour tout objet $c'$ de $\mathcal{C}'$, on note $P \downarrow c'$, ou plus simplement $\mathcal{C}/c'$, quand il n'y a aucune ambiguïté sur le foncteur $P$, la catégorie dont les objets sont les couples $(c,\, g : P(c) \to c')$, où $c$ est un objet de $\mathcal{C}$ et $g$ une flèche de $\mathcal{C}'$, un morphisme de $(c_0, g_0)$ vers $(c_1, g_1)$ étant une flèche $f : c_0 \to c_1$ de $\mathcal{C}$ telle que $g_0 = g_1 P(f)$.

$$\begin{tikzcd} P(c_0) \arrow[rr, "P(f)"] \arrow[dr, "g_0"'] & & P(c_1) \arrow[dl, "g_1"] \\ & c' & \end{tikzcd}$$

On a un foncteur d'oubli évident

$$U_{c'} = U_{P,c'} : \mathcal{C}/c' \longrightarrow \mathcal{C} \quad , \qquad (c, g) \longmapsto c \quad .$$

***Proposition 2.3.*** — *Si pour tout objet $c'$ de $\mathcal{C}'$, la limite inductive*

$$\varinjlim FU_{c'} = \varinjlim_{\mathcal{C}/c'} F\,|\,(\mathcal{C}/c') = \varinjlim_{(c, P(c)\to c')} F(c)$$

*existe dans $\mathcal{D}$, alors le foncteur $F$ admet une extension de Kan à gauche le long de $P$, $(F', \alpha)$, définie par*

$$F'(c') = \varinjlim_{\mathcal{C}/c'} F\,|\,(\mathcal{C}/c') = \varinjlim_{(c, P(c) \to c')} F(c) \quad , \qquad c' \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}') \quad ,$$

*la flèche $\alpha_c : F(c) \to F'P(c)$, pour $c$ objet de $\mathcal{C}$, étant le morphisme canonique correspondant à l'objet $(c, 1_{P(c)})$ de $\mathcal{C}/P(c)$.*

*Démonstration.* — Voir par exemple [**11**]. □

***2.4.*** — Si les hypothèses de la proposition ci-dessus sont satisfaites, on dit que le foncteur $F$ admet une extension de Kan à gauche le long de $P$ *point par point.*

***2.5.*** — Une *extension de Kan à gauche absolue, le long de* $P$, d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un couple $(F', \alpha)$ tel que pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, le couple $(H \circ F', H \star \alpha)$ soit une extension de Kan à gauche, le long de $P$, de $H \circ F$. En particulier, une extension de Kan à gauche absolue est une extension de Kan à gauche, et si $(F', \alpha)$ est une extension de Kan à gauche absolue de $F$, pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, le couple $(H \circ F', H \star \alpha)$ est une extension de Kan à gauche *absolue* de $H \circ F$.

***2.6.*** — On rappelle qu'on dit qu'un foncteur $G : I \to \mathcal{D}$ admet une *limite inductive absolue* si pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, le foncteur $HG$ admet une limite inductive (ce qui implique en particulier que le foncteur $G$ admet lui-même une limite inductive), et si de plus le morphisme canonique $\varinjlim HG \to H(\varinjlim G)$ est un isomorphisme. La notion de *limite projective absolue* se définit de façon duale.

***Proposition 2.7*** ([**7**, théorème 5.3, 1°]). — *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$F$ admet une extension de Kan à gauche absolue le long de $P$ ;*

(b) *pour tout objet $c'$ de $\mathcal{C}'$, le foncteur $F\,|\,(\mathcal{C}/c') : \mathcal{C}/c' \to \mathcal{D}$, composé du foncteur d'oubli $U_{c'} : \mathcal{C}/c' \to \mathcal{C}$ suivi du foncteur $F$, admet une limite inductive absolue.*

*Démonstration.* — L'implication $(b) \Rightarrow (a)$ résulte aussitôt de la proposition 2.3. Pour montrer la réciproque, soient $(F', \alpha)$ une extension de Kan à gauche absolue de $F$ le long de $P$, $\mathcal{V}$ un univers tel que les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ appartiennent à $\mathcal{V}$, $\widehat{\mathcal{D}}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathcal{V}$-ensembles (classes appartenant à $\mathcal{V}$) sur $\mathcal{D}$, et $h : \mathcal{D} \to \widehat{\mathcal{D}}$ le plongement de Yoneda. Le couple $(h \circ F', h \star \alpha)$ est alors une extension de Kan à gauche du foncteur $G = h \circ F$. Par ailleurs, comme la catégorie $\widehat{\mathcal{D}}$ admet des $\mathcal{V}$-limites inductives (indexées par des catégories appartenant à $\mathcal{V}$), le foncteur $G$ admet, en vertu de la proposition 2.3, une extension de Kan à gauche $(G', \beta)$ telle que pour tout objet $c'$ de $\mathcal{C}'$, on ait $G'(c') = \varinjlim hFU_{c'}$. L'unicité des extensions de Kan implique alors que $hF'(c') \simeq \varinjlim hFU_{c'}$. Le foncteur $h$ étant pleinement fidèle, on en déduit que le foncteur $FU_{c'}$ admet une limite inductive dans $\mathcal{D}$, et que $F'(c') \simeq \varinjlim FU_{c'}$.

Pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, $(H \circ F', H \star \alpha)$ étant une extension de Kan à gauche absolue de $HF$, ce qui précède montre que pour tout objet $c'$ de $\mathcal{C}'$, le foncteur $HFU_{c'}$ admet une limite inductive dans $\mathcal{E}$, et que $\varinjlim HFU_{c'} \simeq HF'(c') \simeq H(\varinjlim FU_{c'})$, ce qui prouve l'assertion. □

***Remarque 2.8.*** — En vertu des propositions 2.3 et 2.7, une extension de Kan à gauche absolue est une extension de Kan à gauche point par point, et une extension de Kan à gauche point par point est une extension de Kan à gauche. On peut montrer que ces deux implications sont strictes.

***2.9.*** — La notion d'*extension de Kan à droite* (resp. d'*extension de Kan à droite absolue*) d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est définie de façon duale. Pour qu'une telle extension existe, il suffit que pour tout objet $c'$ de $\mathcal{C}'$, le foncteur $F\,|\,(c' \backslash \mathcal{C}')$ admette une limite projective (resp. une limite projective absolue) dans $\mathcal{D}$, où $c' \backslash \mathcal{C} = c' \downarrow P$ est la catégorie opposée de la catégorie $P^\circ \downarrow c'$, le foncteur $P^\circ : \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{C}'^\circ$ étant le foncteur entre les catégories opposées déduit de $P$.

## 3. Rappels sur les foncteurs dérivés

Un foncteur dérivé est un cas particulier d'une extension de Kan le long d'un foncteur de localisation. Dans ce qui suit, on précise la terminologie adoptée dans cet article.

***3.1.*** — Un *localisateur* est un couple $(\mathcal{C}, W)$ formé d'une catégorie $\mathcal{C}$ et d'une classe de flèches $W$ de $\mathcal{C}$ ; on dira que $W$ est la classe des *équivalences faibles* du localisateur. On rappelle que pour tout localisateur $(\mathcal{C}, W)$, il existe une catégorie $W^{-1}\mathcal{C}$, appelée *localisation de $\mathcal{C}$ par $W$*, ou *catégorie homotopique* du localisateur $(\mathcal{C}, W)$, et un foncteur $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$, appelé *foncteur de localisation*, transformant toute flèche de $\mathcal{C}$ appartenant à $W$ en un isomorphisme de $W^{-1}\mathcal{C}$, et universel pour cette propriété : pour toute catégorie $\mathcal{D}$, et tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $F(W)$ soit contenu dans la classe des isomorphismes de $\mathcal{D}$, il existe un unique foncteur $\widetilde{F} : W^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que $F = \widetilde{F}P$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "F"] & \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, dashed, "\widetilde{F}"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

En fait, la catégorie localisée $W^{-1}\mathcal{C}$ satisfait même à une « 2-propriété universelle » : pour toute catégorie $\mathcal{D}$, le foncteur

$$\underline{\mathsf{Hom}}(W^{-1}\mathcal{C}, \mathcal{D}) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \quad , \qquad G \longmapsto G \circ P$$

induit un *isomorphisme* de catégories de $\underline{\mathsf{Hom}}(W^{-1}\mathcal{C}, \mathcal{D})$ sur la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ dont les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tels que la classe $F(W)$ soit formée d'isomorphismes de $\mathcal{D}$. La catégorie $W^{-1}\mathcal{C}$ est obtenue de $\mathcal{C}$ en inversant formellement les flèches appartenant à $W$ ; elle a les mêmes objets que $\mathcal{C}$, les morphismes étant des classes d'équivalence de « zigzags composables » de morphismes de $\mathcal{C}$, les flèches allant dans le « mauvais sens » appartenant à $W$. Le foncteur $P$ induit l'identité sur les objets, et associe à une flèche la classe d'équivalence du « zigzag » réduit à cette seule flèche (voir [**6**]).

Vu les conventions adoptées concernant les catégories, la catégorie localisée existe toujours. Si la catégorie $\mathcal{C}$ est petite, il en est de même de $W^{-1}\mathcal{C}$. En revanche, si $\mathcal{C}$ est *localement* petite, la localisation peut ne *pas* être localement petite.

*3.2.* — Étant donné un localisateur $(\mathcal{C}, W)$, la théorie des foncteurs dérivés permet parfois d'associer à un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur de la catégorie homotopique de $(\mathcal{C}, W)$ vers $\mathcal{D}$, sans que le foncteur $F$ transforme nécessairement les équivalences faibles en isomorphismes. On rappelle qu'un *foncteur dérivé à droite* de $F$ est une extension de Kan à *gauche* $(\mathsf{R}F, \alpha)$ de $F$, le long du foncteur de localisation $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha", shift right=2ex] & \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\mathsf{R}F"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Pour tout foncteur $G : W^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, et tout morphisme de foncteurs $\beta : F \to G \circ P$, il existe alors un unique morphisme de foncteurs $\gamma : \mathsf{R}F \to G$ tel que $\beta = (\gamma \star P)\, \alpha$. De même, un *foncteur dérivé à droite absolu* de $F$ est une extension de Kan à gauche absolue de $F$, le long de $P$. Si le foncteur $F$ transforme les équivalences faibles en isomorphismes, et si $\widetilde{F} : W^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ désigne le foncteur induit par $F$, de sorte que $F = \widetilde{F}P$, alors il résulte de la « 2-propriété universelle » de la localisation que le couple $(\widetilde{F}, 1_F)$ est un foncteur dérivé à droite absolu de $F$.

*3.3.* — Soient $(\mathcal{C}, W)$ et $(\mathcal{C}', W')$ deux localisateurs. Un *morphisme de localisateurs* de $(\mathcal{C}, W)$ vers $(\mathcal{C}', W')$ est un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tel que $F(W) \subset W'$. Il existe alors un unique foncteur $\bar{F} : W^{-1}\mathcal{C} \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ tel que $\bar{F}P = P'F$, où $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$ et $P' : \mathcal{C}' \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ désignent les foncteurs de localisation.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "P'"] \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\bar{F}"'] & W'^{-1}\mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

La théorie des foncteurs dérivés *totaux* permet parfois d'associer à un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur de la catégorie homotopique de $(\mathcal{C}, W)$ vers celle de $(\mathcal{C}', W')$, sans que le foncteur $F$ respecte nécessairement les équivalences faibles. Un foncteur *dérivé total à droite* d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur dérivé à droite $(\underline{\mathsf{R}}F, \alpha)$

du foncteur $P'F$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\not\swarrow\alpha"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "P'"] \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\underline{\mathbb{R}}F"'] & W'^{-1}\mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

Pour tout couple $(G, \beta)$, où $G : W^{-1}\mathcal{C} \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ est un foncteur et $\beta : P'F \to GP$ un morphisme de foncteurs, il existe alors un unique morphisme de foncteurs $\gamma : \underline{\mathbb{R}}F \to G$ tel que $\beta = (\gamma \star P)\,\alpha$. De même, un *foncteur dérivé total à droite absolu* de $F$ est un foncteur dérivé à droite absolu du foncteur $P'F$. Si le foncteur $F$ est un morphisme de localisateurs, et si $\bar{F} : W^{-1}\mathcal{C} \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ désigne le foncteur induit par $F$, de sorte que $P'F = \bar{F}P$, alors le couple $(\bar{F}, 1_{P'F})$ est un foncteur dérivé total à droite absolu de $F$.

*3.4.* — Les notions de *foncteur dérivé à gauche*, de *foncteur dérivé à gauche absolu*, de *foncteur dérivé total à gauche*, et de *foncteur dérivé total à gauche absolu* se définissent de façon duale.

## 4. Rappels sur la cofinalité et les 2-carrés exacts au sens de Guitart

*4.1.* — On rappelle qu'un foncteur $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est *cofinal*[(1)], ou 0-*coasphérique* [**12**], si pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, la catégorie $d\backslash\mathcal{C} = d \downarrow K$ est 0-connexe (connexe non vide). Si le foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est cofinal, alors pour tout foncteur $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

($a$) le foncteur $F$ admet une limite inductive dans $\mathcal{E}$ ;

($b$) le foncteur $F \circ K$ admet une limite inductive dans $\mathcal{E}$ ;

et si ces conditions équivalentes sont satisfaites, alors le morphisme canonique

$$\varinjlim\,(FK) \longrightarrow \varinjlim F$$

est un isomorphisme. On en déduit aussitôt que $F$ admet une limite inductive absolue si et seulement si le foncteur $FK$ admet une telle limite. La notion de foncteur *final*, ou 0-*asphérique*, se définit de façon duale.

***Exemple** 4.2.* — Soit $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur. Alors le foncteur de localisation $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$ est à la fois final et cofinal. Montrons par exemple qu'il est final. Il s'agit de montrer que pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$, la catégorie $\mathcal{C}/P(c) = P \downarrow P(c)$ est 0-connexe. Or, cette catégorie possède un objet particulier, l'objet $(c, 1_{P(c)})$ (et en particulier elle est non vide), et pour montrer qu'elle est connexe, il suffit de prouver que tout objet $(c', x : P(c') \to P(c))$ de $\mathcal{C}/P(c)$ peut être relié à cet objet particulier

(1) La terminologie adoptée ici est conforme à celle de [**2**] ou de [**12**]. Dans [**11**], ou dans [**10**], on dit final. Ainsi dans notre terminologie, l'inclusion de la catégorie ponctuelle définie par un objet final d'une catégorie sera un foncteur *cofinal*, et celle définie par un objet initial un foncteur *final*.

par un zigzag de flèches. Pour cela, on raisonne par récurrence sur la longueur minimale $m$ d'un zigzag représentant la flèche $x$ de $W^{-1}\mathcal{C}$. Si cette longueur est égale à 0, alors $c' = c$, $x = 1_{P(c)}$, et il n'y a rien à démontrer. Sinon, $x$ est de la forme $x = x'P(f)^{\eta}$, où $\eta = \pm 1$, $f$ est une flèche arbitraire $c' \to c''$ de $\mathcal{C}$ si $\eta = 1$, ou une flèche $c'' \to c'$ appartenant à $W$ si $\eta = -1$, et $x' : P(c'') \to P(c)$ une flèche de $W^{-1}\mathcal{C}$ pouvant être représentée par un zigzag de longueur $m-1$. Si $\eta = 1$ (resp. si $\eta = -1$), la flèche $f$ définit un morphisme $(c', x) \to (c'', x')$ (resp. $(c'', x') \to (c', x)$) de $\mathcal{C}/P(c)$, et on conclut par hypothèse de récurrence. La cofinalité de $P$ se démontre de façon duale.

En particulier, si $W = \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$ est la classe de *toutes* les flèches de $\mathcal{C}$, de sorte que $W^{-1}\mathcal{C} = \Pi_1(\mathcal{C})$ soit le *groupoïde fondamental* de $\mathcal{C}$, le foncteur canonique $\mathcal{C} \to \Pi_1(\mathcal{C})$ est à la fois final et cofinal.

*4.3.* — Un 2-*carré* est un diagramme du type

$$\mathcal{Q} \ = \ \begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u'"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\alpha"] & \mathcal{A} \arrow[d, "u"] \\ \mathcal{B}' \arrow[r, "w"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd} \qquad ,$$

consistant en la donnée de quatre catégories $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, de quatre foncteurs $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $u' : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$, $v : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$, $w : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, et d'un morphisme de foncteurs $\alpha : uv \to wu'$. Pour tout objet $b'$ de $\mathcal{B}'$, si l'on pose $b = w(b')$, le foncteur $v$ induit un foncteur $v/b' : \mathcal{A}'/b' \to \mathcal{A}/b$ (autrement dit un foncteur $u' \downarrow b' \to u \downarrow b$), défini par

$$(a', g' : u'(a') \to b') \longmapsto (v(a'), w(g')\alpha_{a'} : uv(a') \to b) \ , \quad a' \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}') \ , \quad g' \in \mathsf{Fl}(\mathcal{B}') \ .$$

De même, pour tout objet $a$ de $\mathcal{A}$, si l'on pose $b = u(a)$, le foncteur $u'$ induit un foncteur $a\backslash u' : a\backslash\mathcal{A}' \to b\backslash\mathcal{B}'$ (autrement dit un foncteur $a \downarrow v \to b \downarrow w$), défini par

$$(a', f : a \to v(a')) \longmapsto (u'(a'), \alpha_{a'}u(f) : b \to wu'(a')) \ , \quad a' \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}') \ , \quad f \in \mathsf{Fl}(\mathcal{A}) \ .$$

Soient $a$ un objet de $\mathcal{A}$, $b'$ un objet de $\mathcal{B}'$, et $g : u(a) \to w(b')$ une flèche de $\mathcal{B}$. On vérifie facilement que si l'on considère l'objet $(a, g)$ de $\mathcal{A}/w(b')$ et l'objet $(b', g)$ de $u(a)\backslash\mathcal{B}'$, les catégories $(a, g)\backslash(\mathcal{A}'/b') = (a, g) \downarrow (v/b')$ et $(a\backslash\mathcal{A}')/(b', g) = (a\backslash u') \downarrow (b', g)$ sont isomorphes, et s'identifient à la catégorie $J_{(b',a,g)}$ dont les objets sont les triplets

$$(a', f : a \to v(a'), g' : u'(a') \to b') \ , \quad a' \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}') \ , \quad f \in \mathsf{Fl}(\mathcal{A}) \ , \quad g' \in \mathsf{Fl}(\mathcal{B}') \ ,$$

tels que $w(g')\alpha_{a'}u(f) = g$, et dont les morphismes, d'un objet $(a'_1, f_1, g'_1)$ vers un autre $(a'_2, f_2, g'_2)$, sont les flèches $f' : a'_1 \to a'_2$ de $\mathcal{A}'$ telles que $f_2 = v(f')f_1$ et $g'_1 = g'_2u'(f')$. Ainsi les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(a) pour tout objet $b'$ de $\mathcal{B}'$, le foncteur $v/b' : \mathcal{A}'/b' \to \mathcal{A}/w(b')$ est cofinal ;

(b) pour tout objet $a$ de $\mathcal{A}$, le foncteur $a\backslash u' : a\backslash\mathcal{A}' \to u(a)\backslash\mathcal{B}'$ est final ;

(c) pour tout objet $a$ de $\mathcal{A}$, tout objet $b'$ de $\mathcal{B}'$, et toute flèche $g : u(a) \to w(b')$ de $\mathcal{B}$, la catégorie $J_{(b',a,g)}$ est 0-connexe.

On dit que le 2-carré $\mathcal{Q}$ est *exact au sens de Guitart* si ces trois conditions équivalentes sont satisfaites. Pour des nombreuses autres caractérisations des carrés exacts au sens de Guitart, voir [**7**]. Pour une généralisation de cette notion, voir [**14**].

## 5. Structures de dérivabilité

***Définition 5.1***. — On dit qu'un morphisme de localisateurs $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ est un *morphisme de Guitart à droite* si le 2-carré

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow 1_{QK}"] & \mathcal{D} \arrow[d, "Q"] \\ S^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\bar{K}"'] & T^{-1}\mathcal{D} \end{tikzcd} \quad ,$$

où $P$ et $Q$ désignent les morphismes de localisation, et $\bar{K}$ le foncteur induit par $K$, est exact au sens de Guitart. Cela signifie qu'une des trois (donc toutes les trois) conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

($a$) pour tout objet $\bar{c}$ de $S^{-1}\mathcal{C}$, si l'on pose $\bar{d} = \bar{K}(\bar{c})$, le foncteur $\mathcal{C}/\bar{c} \to \mathcal{D}/\bar{d}$ (autrement dit le foncteur $P \downarrow \bar{c} \to Q \downarrow \bar{d}$), induit par $K$, est cofinal ;

($b$) pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, si l'on pose $\bar{d} = Q(d)$ (bien que $\bar{d} = d$, il est utile ici de faire la distinction selon que l'on considère $d$ comme objet de $\mathcal{D}$ ou de $T^{-1}\mathcal{D}$), le foncteur $d\backslash\mathcal{C} \to \bar{d}\backslash S^{-1}\mathcal{C}$ (autrement dit le foncteur $d \downarrow K \to \bar{d} \downarrow \bar{K}$), induit par $P$, est final ;

($c$) pour tout objet $\bar{c}$ de $S^{-1}\mathcal{C}$, tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, et toute flèche $y : Q(d) \to \bar{K}(\bar{c})$ de $T^{-1}\mathcal{D}$, la catégorie dont les objets sont les triplets $(c,\ g : d \to K(c),\ x : P(c) \to \bar{c})$, où $c$ est un objet de $\mathcal{C}$, $g$ une flèche de $\mathcal{D}$, et $x$ une flèche de $S^{-1}\mathcal{C}$, tels que $\bar{K}(x)Q(g) = y$, et dont les morphismes, d'un objet $(c, g, x)$ vers un autre $(c', g', x')$, sont les flèches $f : c \to c'$ de $\mathcal{C}$ telles que $g' = K(f)g$ et $x = x'P(f)$, est 0-connexe.

***Proposition 5.2***. — *Soient $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme de localisateurs, $\bar{K} : S^{-1}\mathcal{C} \to T^{-1}\mathcal{D}$ le foncteur induit par $K$, et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un foncteur. On suppose que $K$ est un morphisme de Guitart à droite. Alors si le foncteur $G$ admet un foncteur dérivé à droite absolu $(\mathsf{R}G, \beta)$, le couple $(\mathsf{R}G \circ \bar{K}, \beta \star K)$ est un foncteur dérivé à droite absolu du foncteur $G \circ K$.*

*Démonstration*. — Comme le foncteur $K$ est un morphisme de Guitart à droite, pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$, si l'on note $\bar{c}$ son image dans $S^{-1}\mathcal{C}$, le foncteur $\mathcal{C}/\bar{c} \to \mathcal{D}/\bar{K}(\bar{c})$ est cofinal. Comme le foncteur $G$ admet un foncteur dérivé à droite absolu $(\mathsf{R}G, \beta)$, le foncteur $G\,|\,\mathcal{D}/\bar{K}(\bar{c})$ admet une limite inductive absolue dans $\mathcal{E}$, et on a un isomorphisme $\mathsf{R}G(\bar{K}(\bar{c})) \simeq \varinjlim G\,|\,\mathcal{D}/\bar{K}(\bar{c})$, le morphisme $\beta_{K(c)} : G(K(c)) \to \mathsf{R}G(\bar{K}(\bar{c}))$ s'identifiant au morphisme canonique correspondant à l'objet $(K(c), 1_{\bar{K}(\bar{c})})$ de $\mathcal{D}/\bar{K}(\bar{c})$. Par cofinalité, on en déduit que le foncteur $G \circ K\,|\,\mathcal{C}/\bar{c}$ admet une limite inductive absolue dans $\mathcal{E}$, et par suite que le foncteur $F = G \circ K$ admet un foncteur dérivé à droite absolu $(\mathsf{R}F, \alpha)$ tel que $\mathsf{R}F(\bar{c}) = \varinjlim G \circ K\,|\,\mathcal{C}/\bar{c} \simeq \varinjlim G\,|\,\mathcal{D}/\bar{K}(\bar{c}) \simeq \mathsf{R}G(\bar{K}(\bar{c}))$, le morphisme $\alpha_c : F(c) \to \mathsf{R}F(\bar{c})$ étant le morphisme canonique correspondant à l'objet $(c, 1_{\bar{c}})$ de $\mathcal{C}/\bar{c}$, et s'identifiant donc à $\beta_{K(c)}$, ce qui prouve la proposition. $\square$

***Remarque 5.3.*** — La proposition ci-dessus est aussi conséquence de la stabilité par composition des carrés exacts de Guitart [**7**, théorème 1.8], et d'une caractérisation des extensions de Kan absolues en termes de carrés exacts de Guitart [**7**, théorème 5.3, 2°].

***Définition 5.4.*** — Soit $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme de localisateurs. Une *$K$-résolution à droite* (ou plus simplement *résolution à droite*, quand aucune ambiguïté n'en résulte) d'un objet $d$ de $\mathcal{D}$ est un couple $(c, t)$, où $c$ est un objet de $\mathcal{C}$, et $t : d \to K(c)$ une flèche de $\mathcal{D}$ appartenant à $T$. On dit que le morphisme de localisateurs $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ *permet des résolutions à droite* si pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, il existe une $K$-résolution à droite de $d$.

***Proposition 5.5.*** — *Soient $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme de localisateurs, $\bar{K} : S^{-1}\mathcal{C} \to T^{-1}\mathcal{D}$ le foncteur induit par $K$, et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un foncteur. On suppose que $K$ est un morphisme de Guitart à droite, et qu'il permet des résolutions à droite. Alors si l'on pose $F = G \circ K : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *le foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ admet un foncteur dérivé à droite absolu ;*

(b) *le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ admet un foncteur dérivé à droite absolu.*

*De plus, si ces conditions équivalentes sont satisfaites, et si* $(\mathsf{R}F, \alpha)$ (resp. $(\mathsf{R}G, \beta)$) *désigne un foncteur dérivé à droite de $F$* (resp. *de $G$*), *alors pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, et toute résolution à droite $(c, t : d \to K(c))$ de $d$, on a un isomorphisme canonique* $\mathsf{R}G(d) \simeq \mathsf{R}F(c)$ *qui identifie $\beta_d$ au composé $\alpha_c G(t)$.*

$$G(d) \xrightarrow{G(t)} GK(c) = F(c) \xrightarrow{\alpha_c} \mathsf{R}F(c) \simeq \mathsf{R}G(d)$$

*Démonstration.* — On note $P : \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ et $Q : \mathcal{D} \to T^{-1}\mathcal{D}$ les morphismes de localisation. L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte de la proposition 5.2. Réciproquement, supposons que le foncteur $F$ admette un foncteur dérivé à droite absolu $(\mathsf{R}F, \alpha)$. Pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, et toute résolution à droite $(c, t : d \to K(c))$ (il en existe par hypothèse), le foncteur $F\,|\,\mathcal{C}/P(c)$ admet alors une limite inductive absolue, et on a un isomorphisme $\mathsf{R}F(c) \simeq \varinjlim F\,|\,\mathcal{C}/P(c)$, le morphisme $\alpha_c$ étant identifié par cet isomorphisme au morphisme canonique $F(c) \to \varinjlim F\,|\,\mathcal{C}/P(c)$ correspondant à l'objet $(c, 1_{P(c)})$ de $\mathcal{C}/P(c)$. Comme $K$ est un morphisme de Guitart à droite, le foncteur $\mathcal{C}/P(c) \to \mathcal{D}/\bar{K}P(c)$ est cofinal, et par suite, le foncteur $G\,|\,\mathcal{D}/\bar{K}P(c)$ admet une limite inductive absolue et le morphisme canonique $\varinjlim F\,|\,\mathcal{C}/P(c) \to \varinjlim G\,|\,\mathcal{D}/\bar{K}P(c)$ est un isomorphisme. Or, la flèche $t$ étant dans $T$, elle induit un isomorphisme $\mathcal{D}/Q(d) \simeq \mathcal{D}/QK(c) = \mathcal{D}/\bar{K}P(c)$, identifiant $G\,|\,\mathcal{D}/Q(d)$ à $G\,|\,\mathcal{D}/\bar{K}P(c)$. On en déduit que le foncteur $G|\mathcal{D}/Q(d)$ admet une limite inductive absolue, et que le foncteur $G$ admet un foncteur dérivé à droite absolu $(\mathsf{R}G, \beta)$ tel que $\mathsf{R}G(d) = \varinjlim G|\mathcal{D}/Q(d) \simeq \varinjlim G|\mathcal{D}/\bar{K}P(c) \simeq \varinjlim F|\mathcal{C}/P(c) \simeq \mathsf{R}F(c)$, le morphisme $\beta_d : G(d) \to \mathsf{R}G(d)$ étant le morphisme canonique correspondant à l'objet $(d, 1_{Q(d)})$ de $\mathcal{D}/Q(d)$. On vérifie facilement qu'il s'identifie par les isomorphismes ci-dessus au composé $\alpha_c G(t)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

***Remarque 5.6.*** — Les propositions 5.2 et 5.5 sont encore valables si on remplace partout « foncteur dérivé à droite absolu » par « foncteur dérivé à droite *défini en tout objet* » (voir 2.2). Les preuves restent les mêmes, quitte à remplacer partout « limite inductive absolue » par « limite inductive ».

***Corollaire 5.7.*** — *Soient $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme de localisateurs, $\bar{K} : S^{-1}\mathcal{C} \to T^{-1}\mathcal{D}$ le foncteur induit par $K$, et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un foncteur. On suppose que $K$ est un morphisme de Guitart à droite, et qu'il permet des résolutions à droite. Si le foncteur $F = GK$ transforme les flèches de $\mathcal{C}$ appartenant à $S$ en des isomorphismes de $\mathcal{E}$, alors le foncteur $G$ admet un foncteur dérivé à droite absolu $(\mathsf{R}G, \beta)$, et pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$ et toute résolution à droite $(c, t : d \to K(c))$ de $d$, on a un isomorphisme canonique $\mathsf{R}G(d) \simeq GK(c)$ qui identifie $\beta_d$ à $G(t)$.*

*Démonstration.* — Comme le foncteur $F = GK$ transforme les flèches de $\mathcal{C}$ appartenant à $S$ en des isomorphismes de $\mathcal{E}$, il induit un foncteur $\bar{F} : S^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{E}$, et le couple $(\bar{F}, 1_F)$ est un foncteur dérivé à droite absolu de $F$. Le corollaire est alors un cas particulier de la proposition précédente. $\square$

La proposition précédente et son corollaire conduisent à poser la définition suivante.

***Définition 5.8.*** — Soit $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur. Une *structure de dérivabilité à droite sur* $(\mathcal{C}, W)$ est un couple formé d'un localisateur $(\mathcal{C}_0, W_0)$, et d'un morphisme de localisateurs $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ qui est un morphisme de Guitart à droite et qui permet des résolutions à droite. Le plus souvent, on dira plus simplement que le morphisme $K$ est une structure de dérivabilité à droite sur $(\mathcal{C}, W)$.

***Proposition 5.9.*** — **(Théorème d'existence des foncteurs dérivés.)** *Soient $(\mathcal{C}, W)$ et $(\mathcal{C}', W')$ deux localisateurs, $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$ et $P' : \mathcal{C}' \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ les foncteurs de localisation, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur. S'il existe une structure de dérivabilité à droite $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ sur $(\mathcal{C}, W)$ telle que $FK(W_0) \subset W'$, autrement dit telle que $FK : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}', W')$ soit un morphisme de localisateurs,* *alors $F$ admet un foncteur dérivé total à droite absolu $(\underline{\mathsf{R}}F, \alpha)$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow_{\alpha}"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "P'"] \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\underline{\mathsf{R}}F"'] & W'^{-1}\mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

*De plus, pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$, et toute $K$-résolution à droite $(c, w : c \to K(c_0))$ de $c$, on à un isomorphisme canonique $\underline{\mathsf{R}}F(c) \simeq FK(c_0)$ dans $W'^{-1}\mathcal{C}'$, identifiant $\alpha_c$ à l'image de $F(w)$ dans $W'^{-1}\mathcal{C}'$.*

*Démonstration.* — La proposition résulte aussitôt du corollaire 5.7, appliqué au foncteur $G = P'F$, puisque le foncteur $GK = P'FK$ transforme les flèches de $\mathcal{C}_0$ appartenant à $W_0$ en isomorphismes de $W'^{-1}\mathcal{C}'$. □

***Proposition 5.10.*** — **(Théorème de composition des foncteurs dérivés.)** *Soient $(\mathcal{C}, W)$, $(\mathcal{C}', W')$ et $(\mathcal{C}'', W'')$ trois localisateurs, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et $F' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}''$ des foncteurs. On suppose qu'il existe des structures de dérivabilité à droite $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ et $K' : (\mathcal{C}'_0, W'_0) \to (\mathcal{C}', W')$ sur $(\mathcal{C}, W)$ et $(\mathcal{C}', W')$ respectivement, et un foncteur $F_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}'_0$ tels que :*

(a) *$K'F_0 = FK$ ;*

(b) *$F_0(W_0) \subset W'_0$ ;*

(c) *$F'K'(W'_0) \subset W''$.*

*Alors les foncteurs $F$, $F'$ et $F'' = F'F$ admettent des foncteurs dérivés totaux à droite absolus $(\underline{\mathsf{R}}F, \alpha)$, $(\underline{\mathsf{R}}F', \alpha')$ et $(\underline{\mathsf{R}}F'', \alpha'')$ respectivement tels que*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow_{\alpha}"] & \mathcal{C}' \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "P'"] \arrow[dr, phantom, "\not\Downarrow_{\alpha'}"] & \mathcal{C}'' \arrow[d, "P''"] \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\underline{\mathsf{R}}F"'] \arrow[rr, bend right, "\underline{\mathsf{R}}F''"'] & W'^{-1}\mathcal{C}' \arrow[r, "\underline{\mathsf{R}}F'"'] & W''^{-1}\mathcal{C}'' \end{tikzcd}$$

*$\underline{\mathsf{R}}F'' = \underline{\mathsf{R}}F' \circ \underline{\mathsf{R}}F$ et $\alpha'' = (\underline{\mathsf{R}}F' \star \alpha)(\alpha' \star F)$.*

*Démonstration.* — On remarque que si l'on ajoute les identités dans les classes de flèches $W$, $W'$, $W''$, $W_0$ et $W'_0$, toutes les hypothèses de la proposition restent valables. On peut donc, sans perte de généralité, supposer que ces classes contiennent les identités. En vertu des conditions $(a)$, $(b)$ et $(c)$, on a

$$FK(W_0) = K'F_0(W_0) \subset K'(W'_0) \subset W' \quad ,$$
$$F''K(W_0) = F'FK(W_0) \subset F'K'(W'_0) \subset W'' \quad ,$$

et il résulte donc de la proposition précédente que les foncteurs $F$, $F'$ et $F''$ admettent des foncteurs dérivés totaux à droite absolus $(\underline{\mathrm{R}}F, \alpha)$, $(\underline{\mathrm{R}}F', \alpha')$ et $(\underline{\mathrm{R}}F'', \alpha'')$ respectivement. En vertu de la propriété universelle du troisième, il existe un unique morphisme de foncteurs $\beta : \underline{\mathrm{R}}F'' \to \underline{\mathrm{R}}F' \circ \underline{\mathrm{R}}F$ tel que $(\underline{\mathrm{R}}F' \star \alpha)(\alpha' \star F) = (\beta \star P)\alpha''$. Pour conclure, il suffit de prouver que $\beta$ est un isomorphisme. Soient $c$ un objet de $\mathcal{C}$, et $(c_0, w : c \to K(c_0))$ une $K$-résolution à droite de $c$. En vertu de la proposition précédente, on a des isomorphismes $\underline{\mathrm{R}}F(c) \simeq FK(c_0)$ et $\underline{\mathrm{R}}F''(c) \simeq F''K(c_0) = F'FK(c_0)$ dans $W'^{-1}\mathcal{C}'$ et dans $W''^{-1}\mathcal{C}''$ respectivement. D'autre part, $FK(c_0) = K'F_0(c_0)$, et $(F_0(c_0), 1_{K'F_0(c_0)}))$ est une $K'$-résolution à droite de $FK(c_0)$. On a donc, en vertu de la même proposition, un isomorphisme $\underline{\mathrm{R}}F'(FK(c_0)) \simeq F'(K'F_0(c_0)) = F'FK(c_0)$. On en déduit un isomorphisme $\underline{\mathrm{R}}F''(c) \simeq \underline{\mathrm{R}}F' \circ \underline{\mathrm{R}}F(c)$. On laisse le soin au lecteur de faire la vérification fastidieuse que cet isomorphisme est bien égal à $\beta_c$, ce qui achève la démonstration. $\square$

***5.11***. — On définit de façon duale les notions de *morphisme de Guitart à gauche*, de *$K$-résolution à gauche*, de morphisme de localisateurs *permettant des résolutions à gauche* et de *structure de dérivabilité à gauche*.

***Proposition 5.12***. — **(Théorème d'adjonction des foncteurs dérivés.)** *Soient $(\mathcal{C}, W)$ et $(\mathcal{C}', W')$ deux localisateurs, $P : \mathcal{C} \to W^{-1}\mathcal{C}$ et $P' : \mathcal{C}' \to W'^{-1}\mathcal{C}'$ les foncteurs de localisation,*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}' \quad , \qquad G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$$

*un couple de foncteurs adjoints, et*

$$\varepsilon : F \circ G \longrightarrow 1_{\mathcal{C}'} \quad , \qquad \eta : 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow G \circ F$$

*les morphismes d'adjonction. On suppose qu'il existe une structure de dérivabilité à gauche $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ sur $(\mathcal{C}, W)$ et une structure de dérivabilité à droite $K' : (\mathcal{C}'_0, W'_0) \to (\mathcal{C}', W')$ sur $(\mathcal{C}', W')$ telles que $FK(W_0) \subset W'$ et $GK'(W'_0) \subset W$. Alors le foncteur $F$* (resp. *$G$) admet un foncteur dérivé total à gauche* (resp. *à droite*) *absolu $(\underline{\mathrm{L}}F, \alpha)$* (resp. $(\underline{\mathrm{R}}G, \beta)$)*,*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, phantom, "{}^{\alpha}\!\nearrow"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "P'"] \\ W^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, "\underline{\mathrm{L}}F"'] & W'^{-1}\mathcal{C}' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r, "G"] \arrow[d, "P'"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow_{\beta}"] & \mathcal{C} \arrow[d, "P"] \\ W'^{-1}\mathcal{C}' \arrow[r, "\underline{\mathrm{R}}G"'] & W^{-1}\mathcal{C} \end{tikzcd}$$

*les foncteurs*

$$\underline{\mathrm{L}}F : W^{-1}\mathcal{C} \longrightarrow W'^{-1}\mathcal{C}' \quad , \qquad \underline{\mathrm{R}}G : W'^{-1}\mathcal{C}' \longrightarrow W^{-1}\mathcal{C}$$

*forment un couple de foncteurs adjoints, et on peut choisir les morphismes d'adjonction*

$$\underline{\varepsilon} : \underline{\mathrm{L}}F \circ \underline{\mathrm{R}}G \longrightarrow 1_{W'^{-1}\mathcal{C}'} \quad , \qquad \underline{\eta} : 1_{W^{-1}\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\mathrm{R}}G \circ \underline{\mathrm{L}}F$$

*de sorte que les deux carrés suivants soient commutatifs.*

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{L}}F \circ P \circ G \arrow[r, "\underline{\mathsf{L}}F\star\beta"] \arrow[d, "\alpha\star G"'] & \underline{\mathsf{L}}F \circ \underline{\mathsf{R}}G \circ P' \arrow[d, "\underline{\varepsilon}\star P'"] \\
P' \circ F \circ G \arrow[r, "P'\star\varepsilon"'] & P'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{R}}G \circ P' \circ F & \underline{\mathsf{R}}G \circ \underline{\mathsf{L}}F \circ P \arrow[l, "\underline{\mathsf{R}}G\star\alpha"'] \\
P \circ G \circ F \arrow[u, "\beta\star F"] & P \arrow[l, "P\star\eta"] \arrow[u, "\underline{\eta}\star P"']
\end{tikzcd}$$

*Démonstration.* — L'existence des foncteurs dérivés totaux absolus résulte de la proposition 5.9 et de son dual, et on conclut par le théorème d'adjonction des foncteurs dérivés absolus de [**13**]. □

***Remarque 5.13.*** — La propriété d'un morphisme de localisateurs d'être un morphisme de Guitart (à droite ou à gauche) est difficile à vérifier, car elle fait intervenir les catégories localisées. Ainsi, il n'est pas facile de prouver qu'un morphisme de localisateurs est une structure de dérivabilité (à droite ou à gauche). Le but des paragraphes suivants est de donner des conditions suffisantes simples à vérifier, directement en termes du morphisme des localisateurs, pour qu'il soit une structure de dérivabilité (à droite ou à gauche).

## 6. Structures de dérivabilité de type simplicial

***6.1.*** — Soit $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur. Pour toute petite catégorie $I$, on déduit un localisateur $(\mathcal{C}_I, W_I)$, où $\mathcal{C}_I$ désigne la catégorie des foncteurs de $I$ vers $\mathcal{C}$, et $W_I$ les « équivalences faibles argument par argument », autrement dit les morphismes de foncteurs $\varphi$ tels que pour tout objet $i$ de $I$, le morphisme $\varphi_i$ de $\mathcal{C}$ soit dans $W$. Tout foncteur $u : I \to J$ entre petites catégories induit un morphisme de localisateurs $u^* : (\mathcal{C}_J, W_J) \to (\mathcal{C}_I, W_I)$. Tout morphisme de localisateurs $F : (\mathcal{C}, W) \to (\mathcal{C}', W')$ induit un morphisme de localisateurs $F_I : (\mathcal{C}_I, W_I) \to (\mathcal{C}'_I, W'_I)$.

***6.2.*** — On dit que le localisateur $(\mathcal{C}, W)$ est *multiplicatif* si la classe de flèches $W$ contient les identités et est stable par composition, et alors $W$ peut être considérée comme une sous-catégorie (non pleine) de $\mathcal{C}$, ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$. Si le localisateur $(\mathcal{C}, W)$ est multiplicatif, alors pour toute petite catégorie $I$, le localisateur $(\mathcal{C}_I, W_I)$ l'est aussi.

***6.3.*** — Soient $(\mathcal{C}, S)$ et $(\mathcal{D}, T)$ deux localisateurs *multiplicatifs*, et $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme de localisateurs. Pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, on appelle *catégorie des $K$-résolutions à droite* de $d$, ou plus simplement, quand aucune confusion n'en résulte, *catégorie des résolutions à droite* de $d$, la catégorie dont les objets sont les $K$-résolutions à droite de $d$, autrement dit, les couples $(c, t : d \to K(c))$, où $c$ est un objet de $\mathcal{C}$ et $t$ une flèche de $T$, un morphisme d'un objet $(c, t)$ vers un autre $(c', t')$ étant une flèche $s : c \to c'$ de $S$ telle que $t' = K(s)t$. Ainsi, si l'on note $K_0 : S \to T$ le foncteur induit par $K$, la catégorie des résolutions à droite de $d$ n'est autre que la catégorie $d\backslash S = d\downarrow K_0$. Plus généralement, si $I$ est une petite catégorie, et $d : I \to \mathcal{D}$ un *foncteur*, on appelle *catégorie des $K$-résolutions à droite* de $d$, ou plus simplement *catégorie des résolutions à droite* de $d$, la catégorie des $K_I$-résolutions à droite de $d$, relative au morphisme de localisateurs $K_I : (\mathcal{C}_I, S_I) \to (\mathcal{D}_I, T_I)$, le foncteur $d$ étant vu comme objet de la catégorie $\mathcal{D}_I$.

***6.4.*** — On note $\Delta$ la *catégorie des simplexes*, sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ordonnés dont les objets sont les ensembles

$$\varDelta_n = \{0, 1, \dots, n\} \ , \quad n \geq 0 \ ,$$

ordonnés par l'ordre naturel, de sorte que la catégorie $\widehat{\Delta}$ des préfaisceaux sur $\Delta$ soit la catégorie des *ensembles simpliciaux*. On ne fera pas de distinction entre un ensemble ordonné et la catégorie associée, ayant comme objets les éléments de l'ensemble ordonné, l'ensemble des flèches d'un objet $i$ vers un autre $j$ ayant exactement un élément ou étant vide selon que $i \leq j$ ou pas. Pour toute catégorie $\mathcal{D}$, la classe des objets de $\mathcal{D}$ s'identifie à celle des foncteurs de $\varDelta_0$ vers $\mathcal{D}$, la classe des flèches de $\mathcal{D}$ à celle des foncteurs de $\varDelta_1$ vers $\mathcal{D}$, et la classe des couples de flèches composables de $\mathcal{D}$ à celle des foncteurs de $\varDelta_2$ vers $\mathcal{D}$. En particulier, si $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ désigne un morphisme entre localisateurs multiplicatifs, on pourra donc parler de la catégorie des $K$-résolutions à droite d'une flèche de $\mathcal{D}$, ou d'un couple de flèches composables de $\mathcal{D}$.

***Lemme 6.5.*** — *Soient $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme entre localisateurs multiplicatifs, et $\bar{K} : S^{-1}\mathcal{C} \to T^{-1}\mathcal{D}$ le foncteur induit par $K$. On suppose que :*

(a) *le foncteur $\bar{K}$ est pleinement fidèle ;*

(b) *pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, la catégorie des résolutions à droite de $d$ est $0$-connexe ;*

(c) *pour toute flèche $g$ de $\mathcal{D}$, la catégorie des résolutions à droite de $g$ est non vide.*

*Alors $K$ est un morphisme de Guitart à droite permettant des résolutions à droite, autrement dit, le couple formé du localisateur $(\mathcal{C}, S)$ et du morphisme de localisateurs $K$ est une structure de dérivabilité à droite sur $(\mathcal{D}, T)$.*

*Démonstration.* — La condition $(b)$ signifie en particulier que pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, la catégorie des résolutions à droite de $d$ est non vide, et par suite, que $K$ permet des résolutions à droite. Il reste donc à établir que $K$ est un morphisme de Guitart, autrement dit, que si l'on note $P : \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ et $Q : \mathcal{D} \to T^{-1}\mathcal{D}$ les foncteurs de localisation, pour tout objet $\bar{c}$ de $S^{-1}\mathcal{C}$, tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, et toute flèche $y : Q(d) \to \bar{K}(\bar{c})$ de $T^{-1}\mathcal{D}$, la catégorie $J = J_{(\bar{c},d,y)}$ dont les objets sont les triplets $(c,\ g : d \to K(c),\ x : P(c) \to \bar{c})$, où $c$ est un objet de $\mathcal{C}$, $g$ une flèche de $\mathcal{D}$, et $x$ une flèche de $S^{-1}\mathcal{C}$, tels que $\bar{K}(x)Q(g) = y$, et dont les morphismes, d'un objet $(c, g, x)$ vers un autre $(c', g', x')$, sont les flèches $f : c \to c'$ de $\mathcal{C}$ telles que $g' = K(f)g$ et $x = x'P(f)$, est 0-connexe.

$i)$ Soit $I = I_d$ la catégorie des résolutions à droite de $d$. On définit un foncteur $k : I \to J$ comme suit. Soit $(c, t : d \to K(c))$ un objet de $I$. Comme $t$ est une flèche de $T$, le morphisme $Q(t)$ est inversible dans $T^{-1}\mathcal{D}$, et on a donc une flèche $yQ(t)^{-1} : QK(c) = \bar{K}P(c) \to \bar{K}(\bar{c})$. Le foncteur $\bar{K}$ étant pleinement fidèle, il existe un morphisme unique $x : P(c) \to \bar{c}$ tel que $\bar{K}(x) = yQ(t)^{-1}$, et on a $\bar{K}(x)Q(t) = y$, autrement dit, $(c, t, x)$ est un objet de $J$. On pose $k(c, t) = (c, t, x)$. Si $s : (c, t) \to (c', t')$ est une flèche de $I$, on pose $k(s) = s$, et la fidélité de $\bar{K}$ implique aussitôt que $s$ est un morphisme de $k(c, t)$ vers $k(c', t')$.

*ii*) Soient $g : d \to d'$ une flèche de $\mathcal{D}$, et $y' : Q(d') \to \bar{K}(\bar{c})$ un morphisme de $T^{-1}\mathcal{D}$ tels que $y = y'Q(g)$. On a alors un foncteur évident $J_{(\bar{c},d',y')} \to J_{(\bar{c},d,y)} = J$,

$$\big(c, g' : d' \to K(c), x : P(c) \to \bar{c}\big) \longmapsto \big(c, g'g : d \to K(c), x : P(c) \to \bar{c}\big) \quad ,$$

et en composant avec le foncteur $I_{d'} \to J_{(\bar{c},d',y')}$, construit comme dans $(i)$, on déduit un foncteur $k_{g,y'} : I_{d'} \to J$, associant à un objet $(c, t : d' \to K(c))$ de $I_{d'}$ l'objet $(c, tg, x)$ de $J$, où $x : P(c) \to \bar{c}$ désigne l'unique flèche de $S^{-1}\mathcal{C}$ telle que $\bar{K}(x) = y'Q(t)^{-1}$. On remarque que le foncteur $k$ défini dans $(i)$ est égal à $k_{1_d,y}$.

*iii*) Comme en vertu de $(b)$ la catégorie $I$ des résolutions à droite de $d$ est en particulier non vide, il résulte de $(i)$ que la catégorie $J$ est non vide. Comme en vertu de $(b)$ la catégorie $I$ est connexe, il résulte de $(i)$ que pour montrer que la catégorie $J$ est connexe, il suffit de prouver que tout objet $(c,\ g : d \to K(c),\ x : P(c) \to \bar{c})$ de $J$ peut être relié par un zigzag de flèches de $J$ à un objet appartenant à l'image du foncteur $k$. Or, la condition $(c)$ implique l'existence d'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "t''"] \arrow[d, "g"'] & K(c'') \arrow[d, "K(f)"] \\ K(c) \arrow[r, "t'"'] & K(c') \end{tikzcd} \quad ,$$

où $f : c'' \to c'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, et $t'$ et $t''$ sont des flèches de $T$. Comme le foncteur $\bar{K}$ est pleinement fidèle, il existe un unique morphisme $z : P(c) \to P(c')$ tel que $\bar{K}(z) = Q(t')$, et comme $Q(t')$ est un isomorphisme, il en est de même de $z$. Posons $x' = xz^{-1}$ et $g' = t'g$. On remarque que $(c', g', x')$ est un objet de $J$, puisque

$$\bar{K}(x')Q(g') = \bar{K}(x)\bar{K}(z)^{-1}Q(t')Q(g) = \bar{K}(x)Q(g) = y \quad .$$

D'autre part, si l'on pose $y' = \bar{K}(x)$ et $d' = K(c)$, on a $y = y'Q(g)$, et en vertu de $(ii)$, on a un foncteur $k_{g,y'} : I_{d'} \to J$. On vérifie aussitôt que si l'on considère les objets $(c, 1_{K(c)})$ et $(c', t')$ de $I_{d'}$, on a

$$k_{g,y'}(c, 1_{K(c)}) = (c, g, x) \qquad \text{et} \qquad k_{g,y'}(c', t') = (c', g', x') \quad .$$

La connexité de $I_{d'}$ implique alors que $(c, g, x)$ peut être relié à $(c', g', x')$ par un zigzag de flèches de $J$. On conclut en considérant l'objet $(c'', t'')$ de la catégorie $I$, et en constatant que $k(c'', t'') = (c'', t'', x'')$, où $x'' = x'P(f)$, et que $f$ est un morphisme de $(c'', t'', x'')$ vers $(c', g', x')$. □

***Proposition 6.6***. — *Soit $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme entre localisateurs multiplicatifs. On suppose que :*

(a) *pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, la catégorie des résolutions à droite de $d$ est* 1*-connexe ;*

(b) *pour toute flèche $g$ de $\mathcal{D}$, la catégorie des résolutions à droite de $g$ est* 0*-connexe ;*

(c) *pour tout couple de flèches composables $(g', g)$ de $\mathcal{D}$, la catégorie des résolutions à droite de $(g', g)$ est non vide* (autrement dit, $-1$-connexe).

*Alors $K$ est un morphisme de Guitart à droite permettant des résolutions à droite, autrement dit, le couple formé du localisateur $(\mathcal{C}, S)$ et du morphisme de localisateurs $K$ est une structure de dérivabilité à droite sur $(\mathcal{D}, T)$.*

*Démonstration.* — En vertu de [**10**, théorème 2.1], les conditions ($a$), ($b$) et ($c$) impliquent que le foncteur $\bar{K} : S^{-1}\mathcal{C} \to T^{-1}\mathcal{D}$, induit par $K$, est une équivalence de catégories. La proposition résulte donc du lemme précédent. □

La proposition précédente conduit donc à poser la définition suivante.

***Définition 6.7***. — Soit $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur multiplicatif. Une *structure de dérivabilité de type simplicial à droite sur* $(\mathcal{C}, W)$ est un couple formé d'un localisateur multiplicatif $(\mathcal{C}_0, W_0)$, et d'un morphisme de localisateurs $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

($a$) pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$, la catégorie des $K$-résolutions à droite de $c$ est 1-connexe ;

($b$) pour toute flèche $f$ de $\mathcal{C}$, la catégorie des $K$-résolutions à droite de $f$ est 0-connexe ;

($c$) pour tout couple de flèches composables $(f', f)$ de $\mathcal{C}$, la catégorie des $K$-résolutions à droite de $(f', f)$ est non vide.

Le plus souvent, on dira plus simplement que le morphisme $K$ est une structure de dérivabilité de type simplicial à droite sur $(\mathcal{C}, W)$.

***6.8***. — La proposition précédente affirme donc qu'une structure de dérivabilité de type simplicial à droite sur un localisateur multiplicatif est une structure de dérivabilité à droite. La notion de *structure de dérivabilité de type simplicial à gauche* sur un localisateur multiplicatif est définie de façon duale.

## 7. Structures de dérivabilité de type normand

***Définition 7.1***. — Soit $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur multiplicatif. Une *structure de dérivabilité de type normand à droite sur* $(\mathcal{C}, W)$ est un couple formé d'un localisateur multiplicatif $(\mathcal{C}_0, W_0)$, et d'un morphisme de localisateurs $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

($a$) pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$, la catégorie des $K$-résolutions à droite de $c$ est 1-connexe ;

($b$) le 2-carré :

$$\begin{tikzcd} W_0 \arrow[r, "K_0"] \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow 1_{iK_0}"] & W \arrow[d, "i"] \\ \mathcal{C}_0 \arrow[r, "K"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd},$$

où $i$ et $i_0$ désignent les foncteurs d'inclusion, et $K_0$ le foncteur induit par $K$, est exact au sens de Guitart.

Le plus souvent, on dira plus simplement que le morphisme $K$ est une structure de dérivabilité de type normand à droite sur $(\mathcal{C}, W)$. La notion de *structure de dérivabilité de type normand à gauche sur* $(\mathcal{C}, W)$ se définit de façon duale.

***Remarque 7.2.*** — La condition ($b$) signifie que pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$, l'inclusion de la catégorie des $K$-résolutions à droite de $c$ dans la catégorie $c\backslash\mathcal{C}_0 = c \downarrow K$ est un foncteur final. Il résulte donc de [**10**, théorème 4.3] qu'une structure de dérivabilité de type normand à droite sur un localisateur multiplicatif est une structure de dérivabilité de type simplicial à droite. En particulier, en vertu de [*loc. cit.*, théorème 2.1], le foncteur $K$ induit une équivalence de catégories des catégories localisées. Dans le cas « simplicial », la construction d'un quasi-inverse se fait « à la main », par le choix d'une résolution à droite, pour chaque objet et chaque flèche. Dans le cas « normand », la construction de ce quasi-inverse peut se faire de façon plus conceptuelle, à l'aide d'extensions de Kan *à droite*, comme suit.

***Proposition 7.3.*** — *Soient $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme entre localisateurs multiplicatifs, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ un foncteur transformant les flèches de $S$ en isomorphismes de $\mathcal{E}$. Si $K$ est une structure de dérivabilité de type normand à droite, le foncteur $F$ admet une extension de Kan à droite absolue le long de $K$, $(G, \beta)$,*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "K"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow\beta"] \\ & \mathcal{E} \end{tikzcd},$$

*où $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ est un foncteur transformant les flèches de $T$ en isomorphismes de $\mathcal{E}$, et $\beta : GK \to F$ est un* isomorphisme *de foncteurs. De plus, pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, et toute résolution à droite $(c, t : d \to K(c))$ de $d$, on a un isomorphisme canonique $G(d) \xrightarrow{\sim} F(c)$.*

*Démonstration.* — Comme le foncteur $F$ transforme les flèches de $S$ en isomorphismes de $\mathcal{E}$, il induit un foncteur $\widetilde{F} : S^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{E}$. Pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, notons $I_d$ la catégorie des résolutions à droite de $d$, et $J_d$ la catégorie $d\backslash\mathcal{C} = d \downarrow K$. Comme $K$ est une structure de dérivabilité de type normand à droite, l'inclusion $I_d \to J_d$ est un foncteur final. Pour prouver que le foncteur $F$ admet une extension de Kan à droite absolue le long de $K$, il suffit de montrer que pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, le foncteur $F\,|\,J_d$ admet une limite projective absolue, et par finalité il suffit de le montrer pour le foncteur $F\,|\,I_d$, ou encore pour le foncteur $\widetilde{F}\,|\,\Pi_1(I_d)$ (voir exemple 4.2), ce qui résulte du fait que la catégorie $\Pi_1(I_d)$ admet un objet initial (le groupoïde $\Pi_1(I_d)$ étant par hypothèse simplement connexe, tout objet est à la fois initial et final). Le foncteur $F$ admet donc une extension de Kan à droite absolue $(G,\beta)$ telle que pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, $G(d) = \varprojlim F\,|\,J_d$, et pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$, $\beta_c : GK(c) \to F(c)$ est le morphisme canonique correspondant à l'objet $(c, 1_{K(c)})$ de $J_{K(c)}$.

Explicitons ce qui précède. Pour toute résolution à droite $(c, t : d \to K(c))$ de $d$, on a un zigzag de foncteurs finaux

$$e \xrightarrow{(c,t)} \Pi_1(I_d) \longleftarrow I_d \longrightarrow J_d$$

(où $e$ désigne la catégorie ponctuelle, $(c,t) : e \to \Pi_1(I_d)$ le foncteur défini par l'objet $(c,t)$ de $\Pi_1(I_d)$, $I_d \to \Pi_1(I_d)$ le foncteur canonique de localisation, et $I_d \to J_d$ le foncteur d'inclusion) induisant des isomorphismes

$$F(c) = \varprojlim \widetilde{F}\,|\,e \xleftarrow{\ \sim\ } \varprojlim \widetilde{F}\,|\,\Pi_1(I_d) \xrightarrow{\ \sim\ } \varprojlim F\,|\,I_d \xleftarrow{\ \sim\ } \varprojlim F\,|\,J_d = G(d) \quad ,$$

et un diagramme commutatif dont les flèches obliques désignent les morphismes canoniques correspondant à l'objet $(c,t)$ des catégories $J_d$, $I_d$, $\Pi_1(I_d)$ et à l'unique objet de la catégorie ponctuelle

$$\begin{array}{ccccccc}
\varprojlim \widetilde{F}\,|\,e & \xleftarrow{\ \sim\ } & \varprojlim \widetilde{F}\,|\,\Pi_1(I_d) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \varprojlim F\,|\,I_d & \xleftarrow{\ \sim\ } & \varprojlim F\,|\,J_d = G(d) \\
& {\scriptstyle =}\searrow & \searrow & & \swarrow & \swarrow & \\
& & & F(c) & & &
\end{array}
\quad .$$

Cela prouve que pour toute résolution à droite $(c,t)$ de $d$, le morphisme canonique $G(d) = \varprojlim F\,|\,J_d \to F(c)$ est un isomorphisme, et en particulier, que $\beta$ est un isomorphisme de foncteurs.

Il reste à prouver que le foncteur $G$ transforme les flèches de $T$ en isomorphismes de $\mathcal{E}$. Soient donc $t : d \to d'$ une flèche de $T$, et $(c, t' : d' \to K(c))$ une résolution à droite de $d'$. On a un diagramme commutatif de catégories

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \overset{(c,t't)}{\nearrow} & \Pi_1(I_d) & \longleftarrow & I_d & \longrightarrow & J_d \\
e & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & \underset{(c,t')}{\searrow} & \Pi_1(I_{d'}) & \longleftarrow & I_{d'} & \longrightarrow & J_{d'}
\end{array}
\quad ,$$

où les foncteurs verticaux sont induits par le foncteur

$$J_{d'} \longrightarrow J_d \quad , \qquad (c', g : d' \to K(c')) \longmapsto (c', gt : d \to K(c')) \ , \quad (c', g) \in \mathsf{Ob}(J_{d'}) \ .$$

On en déduit un diagramme commutatif dans $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd}
 & \varprojlim \widetilde{F}\,|\,\Pi_1(I_d) \arrow[r, "\sim"] \arrow[ld, "\sim"'] \arrow[d] & \varprojlim F\,|\,I_d \arrow[d] & \varprojlim F\,|\,J_d = G(d) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "G(t)"] \\
F(c) = \varprojlim \widetilde{F}\,|\,e & & & \\
 & \varprojlim \widetilde{F}\,|\,\Pi_1(I_{d'}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[lu, "\sim"] & \varprojlim F\,|\,I_{d'} & \varprojlim F\,|\,J_{d'} = G(d') \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd} ,$$

où les flèches horizontales et obliques sont des isomorphismes, ce qui implique de proche en proche que les flèches verticales le sont aussi, et achève la démonstration. □

***Corollaire 7.4***. — *Soient $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme entre localisateurs multiplicatifs, et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un foncteur transformant les flèches de $T$ en isomorphismes de $\mathcal{E}$. Si $K$ est une structure de dérivabilité de type normand à droite, et si l'on pose $F = GK$, le couple $(G, 1_F)$ est une extension de Kan à droite absolue de $F$ le long de $K$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "K"] \arrow[rd, "F"'] \arrow[rd, phantom, shift left=3, "\swarrow 1_F"] & \mathcal{D} \arrow[d, "G"] \\
 & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

*Démonstration*. — En vertu de la proposition précédente, comme le foncteur $F$ transforme les flèches de $S$ en isomorphismes, il admet une extension de Kan à droite absolue le long de $K$, $(G', \beta)$, où $G' : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ transforme les flèches de $T$ en isomorphismes, et $\beta : G'K \to F$ est un isomorphisme de foncteurs. En vertu de la propriété universelle des extensions de Kan à droite, appliquée au couple $(G, 1_F)$, il existe un morphisme de foncteurs unique $\gamma : G \to G'$ tel que $1_F = \beta(\gamma \star K)$. Pour conclure, il suffit de prouver que $\gamma$ est un isomorphisme. Or, comme $\beta$ est un isomorphisme, il en est de même de $\gamma \star K$. D'autre part, si l'on note $Q : \mathcal{D} \to T^{-1}\mathcal{D}$ le foncteur de localisation, en vertu de sa 2-propriété universelle, les foncteurs $G$ et $G'$ induisent des foncteurs $\widetilde{G}, \widetilde{G'} : T^{-1}\mathcal{D} \to \mathcal{E}$ tels que $G = \widetilde{G}Q$ et $G' = \widetilde{G'}Q$, et le morphisme de foncteurs $\gamma$ un morphisme de foncteurs $\widetilde{\gamma} : \widetilde{G} \to \widetilde{G'}$ tel que $\gamma = \widetilde{\gamma} \star Q$. Il suffit donc de montrer que $\widetilde{\gamma}$ est un isomorphisme. Or, $\widetilde{\gamma} \star QK = \gamma \star K$ est un isomorphisme, et comme le morphisme $K$ permet des résolutions à droite, le foncteur $QK$ est essentiellement surjectif, ce qui implique que $\widetilde{\gamma}$ est un isomorphisme, et achève la démonstration. □

***Corollaire 7.5***. — *Soient $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme entre localisateurs multiplicatifs, et $\bar{K} : S^{-1}\mathcal{C} \to T^{-1}\mathcal{D}$ le foncteur induit par $K$. Si $K$ est une structure de dérivabilité de type normand à droite, alors $\bar{K}$ est une équivalence de catégories.*

*Démonstration*. — Notons $P : \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ et $Q : \mathcal{D} \to T^{-1}\mathcal{D}$ les foncteurs de localisation. En vertu de la proposition 7.3, appliquée à la catégorie $\mathcal{E} = S^{-1}\mathcal{C}$ et au foncteur $F = P$, le foncteur $P$ admet une extension de Kan à droite absolue le long de $K$,

$(L, \beta)$, où le foncteur $L : \mathcal{D} \to S^{-1}\mathcal{C}$ transforme les flèches de $T$ en isomorphismes et induit donc un foncteur $\widetilde{L} : T^{-1}\mathcal{D} \to S^{-1}\mathcal{C}$ tel que $\widetilde{L}Q = L$, et $\beta : LK \to P$ est un isomorphisme de foncteurs. On va montrer que $\widetilde{L}$ est un quasi-inverse de $\bar{K}$. Comme $\widetilde{L}\bar{K}P = \widetilde{L}QK = LK$, le foncteur $\widetilde{L}\bar{K}P$ est isomorphe au foncteur $P$, et en vertu de la 2-propriété universelle de la localisation, $\widetilde{L}\bar{K}$ est isomorphe à $1_{S^{-1}\mathcal{C}}$. Comme $(L, \beta)$ est une extension de Kan à droite *absolue* de $P$, le couple $(\bar{K}L, \bar{K} \star \beta)$ est une extension de Kan à droite de $\bar{K}P = QK$. Mais en vertu du corollaire précédent, appliqué à la catégorie $\mathcal{E} = T^{-1}\mathcal{D}$ et au foncteur $G = Q$, le couple $(Q, 1_{QK})$ est une extension de Kan à droite de $QK$. L'unicité, à isomorphisme près, des extensions de Kan implique que le foncteur $\bar{K}L = \bar{K}\widetilde{L}Q$ est isomorphe au foncteur $Q$, et la 2-propriété universelle de la localisation implique que $\bar{K}\widetilde{L}$ est isomorphe à $1_{T^{-1}\mathcal{D}}$, ce qui achève la démonstration. □

***Remarque 7.6.*** — Le corollaire précédent implique, en vertu du lemme 6.5, qu'une structure de dérivabilité de type normand à droite est une structure de dérivabilité à droite, sans utiliser les résultats de [**10**]. En effet, en gardant les notations du corollaire ci-dessus, la seule chose qui reste à vérifier pour appliquer ce lemme est que toute flèche de $\mathcal{D}$ admet une résolution. Soit donc $g : d' \to d$ une flèche de $\mathcal{D}$. Comme la catégorie des résolutions à droite de $d$ est 1-connexe, elle est en particulier non vide, et il existe donc un objet $c$ de $\mathcal{C}$ et une flèche $t : d \to K(c)$ de $T$. Comme le foncteur d'inclusion de la catégorie des résolutions à droite $I_{d'}$ de $d'$ dans la catégorie $d'\backslash\mathcal{C}$ est final, la catégorie $I_{d'}/(c, tg)$ est 0-connexe, et en particulier non vide, et il existe donc une résolution à droite $(c', t' : d' \to K(c'))$ de $d'$, et un morphisme $f : (c', t') \to (c, tg)$ de $d'\backslash\mathcal{C}$, autrement dit, une flèche $f : c' \to c$ de $\mathcal{C}$ telle que $tg = K(f)t'$, ce qui prouve l'assertion.

## 8. Structures de dérivabilité de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith

***8.1.*** — Soit $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme de localisateurs. Un *quasi-inverse faible à droite* du morphisme $K$ est un couple $(R, \tau)$, formé d'un morphisme de localisateurs $R : (\mathcal{D}, T) \to (\mathcal{C}, S)$, et d'un morphisme de foncteurs $\tau : 1_{\mathcal{D}} \to KR$, tel que pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, la flèche $\tau_d : d \to KR(d)$ soit dans $T$, autrement dit, tel que le couple $(R, \tau)$ soit une résolution à droite du foncteur identique de $\mathcal{D}$. Un quasi-inverse faible à droite de $K$ induit un quasi-inverse à droite du foncteur $\bar{K} : S^{-1}\mathcal{C} \to T^{-1}W$ induit par $K$.

***Définition 8.2.*** — Soit $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur multiplicatif. Une *structure de dérivabilité à droite de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith sur* $(\mathcal{C}, W)$ est un couple formé d'un localisateur multiplicatif $(\mathcal{C}_0, W_0)$, et d'un morphisme de localisateurs $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$, satisfaisant aux conditions suivantes :

($a$) le foncteur $K$ est pleinement fidèle ;
($b$) $W_0 = K^{-1}(W)$ ;

($c$) le morphisme de localisateurs $K$ admet un quasi-inverse faible à droite.

Le plus souvent, on dira plus simplement que le morphisme $K$ est une structure de dérivabilité à droite de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith sur $(\mathcal{C}, W)$. Si $\mathcal{C}_0$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$, $K$ le foncteur d'inclusion, et $W_0 = W \cap \mathsf{Fl}(\mathcal{C}_0)$, on dira que $\mathcal{C}_0$ est *une structure de dérivabilité à droite de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith sur* $(\mathcal{C}, W)$ si $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ l'est.

***Exemple 8.3.*** — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles de Quillen avec factorisations fonctorielles, $W$ sa classe d'équivalences faibles, et $\mathcal{C}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets fibrants. Alors $\mathcal{C}_f$ est une structure de dérivabilité à droite de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith sur $(\mathcal{C}, W)$.

***8.4.*** — Soit $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme entre localisateurs multiplicatifs, et $I$ une petite catégorie. Si $K$ est une structure de dérivabilité à droite de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith sur $(\mathcal{D}, T)$, alors le morphisme de localisateurs $K_I : (\mathcal{C}_I, S_I) \to (\mathcal{D}_I, T_I)$ est une structure de dérivabilité à droite de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith sur $(\mathcal{D}_I, T_I)$.

***Proposition 8.5.*** — *Soit $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme entre localisateurs multiplicatifs. Si $K$ est une structure de dérivabilité à droite de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith sur $(\mathcal{D}, T)$, alors pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, la catégorie des résolutions à droite de $d$ est contractile.*

*Démonstration.* — Soient $(R, \tau)$ un quasi-inverse faible à droite du morphisme $K$, $d$ un objet de $\mathcal{D}$, notons $I_d$ la catégorie des résolutions à droite de $d$, et posons $c_0 = R(d)$ et $t_0 = \tau_d$. Alors le couple $(c_0, t_0 : d \to K(c_0))$ est un objet de $I_d$. On va construire un zigzag d'endofoncteurs de $I_d$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (c_0, t_0) \arrow[dr, "\alpha"'] & & 1_{I_d} \arrow[dl, "\beta"] \\ & H & \end{tikzcd} ,$$

où $(c_0, t_0)$ désigne aussi l'endofoncteur constant de valeur $(c_0, t_0)$, ce qui prouvera l'assertion. Cette construction résultera essentiellement de l'observation qu'en vertu de la fonctorialité de $\tau$, pour tout objet $(c, t : d \to K(c))$ de $I_d$, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t_0 = \tau_d"'] & K(c) \arrow[d, "\tau_{K(c)}"] \\ K(c_0) = KR(d) \arrow[r, "KR(t)"'] & KRK(c) \end{tikzcd} ,$$

fonctoriel en l'objet $(c, t)$ de $I_d$.

i) *Définition du foncteur $H : I_d \to I_d$.* Pour tout objet $(c, t : d \to K(c))$ de $I_d$, on pose

$$H(c,t) = \big(RK(c), \tau_{K(c)}t = KR(t)\tau_d : d \to KRK(c)\big) \quad ,$$

et pour toute flèche $s : (c,t) \to (c',t')$ de $I_d$, $H(s) = RK(s)$, qui est bien un morphisme de $I_d$ car le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "t'"] & \\ K(c) \arrow[rr, "K(s)"'] \arrow[d, "\tau_{K(c)}"'] & & K(c') \arrow[d, "\tau_{K(c')}"] \\ KRK(c) \arrow[rr, "KRK(s)"'] & & KRK(c') \end{tikzcd}$$

ii) *Définition du morphisme de foncteurs $\alpha$.* Pour tout objet $(c, t : d \to K(c))$ de $I_d$, on pose $\alpha_{(c,t)} = R(t) : c_0 = R(d) \to RK(c)$,

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "\tau_d = t_0"'] \arrow[dr, "\tau_{K(c)}t = KR(t)\tau_d"] & \\ KR(d) = K(c_0) \arrow[rr, "{K(\alpha_{(c,t)}) \atop {\shortparallel \atop KR(t)}}"'] & & KRK(c) \end{tikzcd} \quad ,$$

et on vérifie aussitôt que $\alpha$ est un morphisme du foncteur constant égal à $(c_0, t_0)$ vers le foncteur $H$.

iii) *Définition du morphisme de foncteurs $\beta$.* On remarque que comme le foncteur $K$ est pleinement fidèle, et comme $S = K^{-1}(T)$, pour tout objet $c$ de $\mathcal{C}$, il existe une flèche unique $\sigma_c : c \to RK(c)$ de $S$ telle que $K(\sigma_c) = \tau_{K(c)}$. Pour tout objet $(c, t : d \to K(c))$ de $I_d$, on pose $\beta_{(c,t)} = \sigma_c$,

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "\tau_{K(c)}t"] & \\ K(c) \arrow[rr, "{K(\beta_{(c,t)}) \atop {\shortparallel \atop \tau_{K(c)}}}"'] & & KRK(c) \end{tikzcd} \quad ,$$

et la fonctorialité de $\tau$ implique celle de $\beta$, grâce à la fidélité de $K$. $\square$

***Corollaire 8.6.*** — *Une structure de dérivabilité à droite de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith sur un localisateur multiplicatif est une structure de dérivabilité de type simplicial à droite.*

*Démonstration.* — Comme une catégorie contractile est en particulier 1-connexe, et donc aussi 0-connexe et non vide, le corollaire résulte aussitôt de la proposition précédente et des considérations du numéro 8.4, appliquées aux catégories $\Delta_1$ et $\Delta_2$. □

***Remarque 8.7.*** — En revanche, une structure de dérivabilité à droite de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith n'est *pas* nécessairement une structure de dérivabilité de type normand à droite. En effet, soient par exemple $\mathcal{C} = \Delta_1 \times \Delta_1$ la catégorie

$$\mathcal{C} = \begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \arrow[d] \\ (1,0) \arrow[r] & (1,1) \end{tikzcd} \quad ,$$

$W$ la classe des flèches de $\mathcal{C}$ formée des identités et des flèches verticales, $\mathcal{C}_0$ la sous-catégorie pleine $\mathcal{C} - \{(0,0)\}$ de $\mathcal{C}$, formée des objets de $\mathcal{C}$ autres que $(0,0)$, et $W_0 = W \cap \mathsf{Fl}(C_0)$. Alors si $K$ désigne le morphisme de localisateurs défini par l'inclusion $\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$, le couple $(R, \tau)$, où $R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ est le foncteur défini par $R(\varepsilon, \eta) = (1, \eta)$, pour $\varepsilon, \eta \in \{0, 1\}$, et $\tau$ l'unique morphisme de foncteurs $1_{\mathcal{C}} \to KR$, est un quasi-inverse faible à droite de $K$, et par suite, $K$ est une structure de dérivabilité à droite de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith. En revanche, $K$ n'est pas une structure de dérivabilité de type normand à droite, puisque la flèche $(0,0) \to (0,1)$ de $\mathcal{C}$ (dont le but est dans $\mathcal{C}_0$) ne peut pas être décomposée en une flèche de $W$ suivie d'une flèche de $\mathcal{C}_0$, ce qui contredit la condition de finalité $(b)$ de la définition 7.1 d'une telle structure (voir remarque 7.2). En vertu du corollaire 8.6, l'exemple ci-dessus montre aussi qu'une structure de dérivabilité de type simplicial à droite n'est pas nécessairement de type normand.

***Remarque 8.8.*** — En vertu de la proposition 6.6 et du corollaire 8.6, les propositions 5.9, 5.10 et 5.12 impliquent en particulier les théorèmes d'existence, de composition et d'adjonction des foncteurs dérivés dans le cadre des catégories homotopiques ("homotopical catégories") et des foncteurs déformables de [**5**].

***8.9.*** — Les notions de *quasi-inverse faible à gauche*, et de *structure de dérivabilité à gauche de Dwyer-Hirschhorn-Kan-Smith* sont définies de façon duale.

## 9. Structures de dérivabilité de Radulescu-Banu

***9.1.*** — Soit $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme de localisateurs. On dit que $K$ *satisfait à la condition de Radulescu-Banu à droite* si pour tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, toute résolution à droite $(c, t : d \to K(c))$ de $d$, et tout objet $(c', g : d \to K(c'))$ de $d\backslash\mathcal{C}$, il existe un objet $(c'', g' : d \to K(c''))$ de $d\backslash\mathcal{C}$, et des morphismes $s : (c'', g') \to (c, t)$ et $f : (c'', g') \to (c', g)$ de $d\backslash\mathcal{C}$, la flèche $s$ de $\mathcal{C}$ appartenant à $S$. Ainsi on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g'"] & K(c) \\ K(c') & K(c'') \arrow[l, "K(f)"] \arrow[u, "K(s)"'] \end{tikzcd} \quad .$$

***Définition 9.2.*** — Soit $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur. Une *structure de dérivabilité à droite de Radulescu-Banu sur* $(\mathcal{C}, W)$ est un couple formé d'un localisateur $(\mathcal{C}_0, W_0)$, et d'un morphisme de localisateurs $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

($a$) le morphisme $K$ permet des résolutions à droite ;

($b$) le morphisme $K$ satisfait à la condition de Radulescu-Banu à droite ;

($c$) le foncteur $\bar{K} : W_0^{-1}\mathcal{C}_0 \to W^{-1}\mathcal{C}$ induit par $K$ est pleinement fidèle.

Le plus souvent, on dira plus simplement que le morphisme $K$ est une structure de dérivabilité à droite de Radulescu-Banu sur $(\mathcal{C}, W)$.

***Proposition 9.3.*** — *Une structure de dérivabilité à droite de Radulescu-Banu est une structure de dérivabilité à droite.*

*Démonstration.* — Soit $K : (\mathcal{C}, S) \to (\mathcal{D}, T)$ un morphisme de localisateurs, et supposons que $K$ soit une structure de dérivabilité à droite de Radulescu-Banu sur $(\mathcal{C}, W)$. Comme par définition le morphisme $K$ permet des résolutions à droite, pour montrer que $K$ est une structure de dérivabilité à droite, il suffit de prouver que $K$ est un morphisme de Guitart à droite, autrement dit, que si l'on note $P : \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ et $Q : \mathcal{D} \to T^{-1}\mathcal{D}$ les foncteurs de localisation, et $\bar{K} : S^{-1}\mathcal{C} \to T^{-1}\mathcal{D}$ le foncteur induit par $K$, pour tout objet $\bar{c}$ de $S^{-1}\mathcal{C}$, tout objet $d$ de $\mathcal{D}$, et toute flèche $y : Q(d) \to \bar{K}(\bar{c})$ de $T^{-1}\mathcal{D}$, la catégorie $J$ dont les objets sont les triplets $(c,\, g : d \to K(c),\, x : P(c) \to \bar{c})$, où $c$ est un objet de $\mathcal{C}$, $g$ une flèche de $\mathcal{D}$, et $x$ une flèche de $S^{-1}\mathcal{C}$, tels que $\bar{K}(x)Q(g) = y$, et dont les morphismes, d'un objet $(c, g, x)$ vers un autre $(c', g', x')$, sont les flèches $f : c \to c'$ de $\mathcal{C}$ telles que $g' = K(f)g$ et $x = x'P(f)$, est 0-connexe.

Comme le morphisme $K$ permet des résolutions à droite, on peut choisir une résolution à droite $(c, t : d \to K(c))$ de $d$. Comme le foncteur $\bar{K}$ est plein, il existe un morphisme $x : P(c) \to \bar{c}$ tel que $\bar{K}(x) = yQ(t)^{-1}$, et alors $(c, t, x)$ est un objet de $J$, ce qui prouve déjà que la catégorie $J$ est non vide. Montrons que tout objet $(c',\, g' : d \to K(c'),\, x' : P(c') \to \bar{c})$ de $J$ peut être relié par un zigzag de flèches de $J$ à l'objet $(c, t, x)$. Comme $K$ satisfait à la condition de Radulescu-Banu à droite, il existe un objet $(c'', g'' : d \to K(c''))$ de $d\backslash\mathcal{C}$ et des morphismes $f : (c'', g'') \to (c', g')$ et $s : (c'', g'') \to (c, t)$, avec $s$ appartenant à $S$, se sorte que

$$g' = K(f)g'' \qquad \text{et} \qquad t = K(s)g'' \quad ,$$

ce qui implique en particulier que $Q(g'')$ est inversible. Posons $x'' = x'P(f)$. Alors $(c'', g'', x'')$ est un objet de $J$, et $f : (c'', g'', x'') \to (c', g', x')$ un morphisme de $J$. Montrons que $s$ est un morphisme de $(c'', g'', x'')$ vers $(c, t, x)$, ce qui achèvera la démonstration. Il suffit de prouver que $x'' = xP(s)$, et pour cela, comme le foncteur $\bar{K}$ est fidèle, que $\bar{K}(x'') = \bar{K}(x)\bar{K}P(s)$, ou encore, comme $Q(g'')$ est inversible, que $\bar{K}(x'')Q(g'') = \bar{K}(x)\bar{K}P(s)Q(g'')$, autrement dit que $\bar{K}(x)\bar{K}P(s)Q(g'') = y$. Or, on a $\bar{K}(x)\bar{K}P(s)Q(g'') = \bar{K}(x)QK(s)Q(g'') = \bar{K}(x)Q(t) = y$. $\square$

***Remarque 9.4***. — Toute ressemblance de la démonstration ci-dessus avec celle du lemme 6.5 n'est pas fortuite, mais la proposition ci-dessus n'est pas conséquence de ce lemme, et on renonce à dégager le lemme plus général qui impliquera les deux assertions à la fois, mais qui sera inutilement compliqué et pas très utile. Il est peu vraisemblable qu'une structure de dérivabilité à droite de Radulescu-Banu soit de type normand ou même simplicial (voir néanmoins [**10**, proposition 5.10, (b)]).

***Remarque 9.5***. — La proposition 9.3 montre que les théorèmes d'existence et d'adjonction des foncteurs dérivés obtenus par Radulescu-Banu [**16**] sont des cas particuliers des propositions 5.9 et 5.12.

***9.6***. — Les notions de morphisme de localisateurs *satisfaisant à la condition de Radulescu-Banu à gauche*, et de *structure de dérivabilité à gauche de Radulescu-Banu* sur un localisateur sont définies de façon duale.

## 10. Structures de dérivabilité d'Anderson-Brown-Cisinski

***10.1***. — On dit qu'un localisateur $(\mathcal{C}, W)$ *contient les isomorphismes* si tout isomorphisme de $\mathcal{C}$ appartient à $W$ ; on dit qu'il *satisfait à la propriété de deux sur trois* si pour tout triangle commutatif de $\mathcal{C}$ dont deux parmi les trois flèches appartiennent à $W$ la troisième est aussi dans $W$. Un localisateur contenant les isomorphismes et satisfaisant à la propriété de deux sur trois est en particulier un localisateur multiplicatif.

***Définition 10.2***. — Soit $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur contenant les isomorphismes et satisfaisant à la propriété de deux sur trois. Une *structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski sur* $(\mathcal{C}, W)$ est un couple formé d'un localisateur $(\mathcal{C}_0, W_0)$, et d'un morphisme de localisateurs $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ tel que $W_0 = K^{-1}(W)$, et tel qu'il existe une classe de flèches $Fib_0$ de $\mathcal{C}_0$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(*a*) $(\mathcal{C}_0, W_0, Fib_0)$ est une catégorie d'objets fibrants au sens de K. S. Brown [**3**], avec les flèches appartenant à $W_0$ (resp. à $Fib_0$) comme *équivalences faibles* (resp. comme *fibrations*), autrement dit, les propriétés suivantes sont satisfaites :

F0) la catégorie $\mathcal{C}_0$ admet un objet final $*$, et pour tout objet $X$ de $\mathcal{C}_0$, la flèche $X \to *$ est une fibration ;

F1) les fibrations sont stables par composition, et tout isomorphisme de $\mathcal{C}_0$ est une fibration ;

F2) les fibrations sont quarrables, et les fibrations, ainsi que les *fibrations triviales* (les flèches de $\mathcal{C}_0$ qui sont à la fois des fibrations et des équivalences faibles) sont stables par changement de base. Autrement dit, pour toute fibration $p : X \to Y$, et toute flèche $Y' \to Y$ de $\mathcal{C}_0$, le produit fibré $X' = Y' \times_Y X$ existe dans $\mathcal{C}_0$, la première projection $p' : X' \to Y'$ est une fibration, et si $p$ est une fibration triviale, il en est de même de $p'$ ;

F3) toute flèche de $\mathcal{C}_0$ se décompose en une équivalence faible, suivie d'une fibration ;

($b$) le foncteur $K$ satisfait aux deux propriétés d'exactitude à gauche suivantes :

E0) il transforme tout objet final de $\mathcal{C}_0$ en un objet final de $\mathcal{C}$ ;

E1) il transforme tout carré cartésien de $\mathcal{C}_0$ dont deux flèches parallèles sont des fibrations, en carré cartésien de $\mathcal{C}$ ;

($c$) pour tout objet $X$ de $\mathcal{C}_0$, tout objet $Y$ de $\mathcal{C}$, et toute flèche $g : Y \to K(X)$ de $\mathcal{C}$, il existe un objet $X'$ de $\mathcal{C}_0$, une flèche $t : Y \to K(X')$ de $\mathcal{C}$ appartenant à $W$, et une flèche $f : X' \to X$ de $\mathcal{C}_0$ tels que $g = K(f)t$.

Le plus souvent, on dira plus simplement que le morphisme $K$ est une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski sur $(\mathcal{C}, W)$. Si $\mathcal{C}_0$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, $K$ le foncteur d'inclusion, et $W_0 = W \cap \mathsf{Fl}(\mathcal{C}_0)$, on dira que $\mathcal{C}_0$ est *une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski sur* $(\mathcal{C}, W)$ si $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ l'est. La notion de *structure de dérivabilité à gauche d'Anderson-Brown-Cisinski* est définie de façon duale.

***Remarque 10.3***. — Les propriétés ($a$), (F0) et (F2) impliquent en particulier que la catégorie $\mathcal{C}_0$ admet des produits finis, et les conditions ($b$), (E0) et (E1) que le foncteur $K$ commute aux dits produits. Les conditions ($a$), (F3) et ($c$) impliquent que pour tout objet $X$ de $\mathcal{C}_0$, tout objet $Y$ de $\mathcal{C}$, et toute flèche $g : Y \to K(X)$, il existe un objet $X'$ de $\mathcal{C}_0$, une flèche $t : Y \to K(X')$ de $\mathcal{C}$ appartenant à $W$, et une flèche $p : X' \to X$ de $\mathcal{C}_0$ appartenant à $Fib_0$, tels que $g = K(p)t$.

***Exemple 10.4***. — Si $(\mathcal{C}, W, Fib)$ est une catégorie *dérivable à gauche* au sens de Cisinski [**4**], avec les flèches appartenant à $W$ (resp. à $Fib$) comme *équivalences faibles* (resp. comme *fibrations*), et si l'on note $\mathcal{C}_0$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets fibrants (tels que la flèche vers l'objet final soit une fibration), alors $\mathcal{C}_0$ est une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski sur $(\mathcal{C}, W)$. En effet, si l'on note $K : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$ le foncteur d'inclusion, et si l'on pose $W_0 = W \cap \mathcal{C}_0$ et $Fib_0 = Fib \cap \mathcal{C}_0$, on vérifie aussitôt que les axiomes des catégories dérivables impliquent les conditions de la définition ci-dessus. Plus précisément, si on néglige les fibrations de but non fibrant, qui ne jouent aucun rôle dans les catégories dérivables à gauche, alors les catégories dérivables à gauche sont exactement les couples formés d'une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ telle que le foncteur $K$ identifie $\mathcal{C}_0$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ (autrement dit, telle que $K$ soit pleinement fidèle et injectif sur les objets), et d'une classe $Fib_0$ de flèches de $\mathcal{C}_0$ satisfaisant aux conditions de la définition 10.2.

***Exemple 10.5***. — En particulier, si $\mathcal{C}$ est une catégorie de modèles de Quillen, $W$ sa classe d'équivalences faibles, et $\mathcal{C}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets fibrants, alors $\mathcal{C}_f$ est une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski sur $(\mathcal{C}, W)$.

***Exemple 10.6***. — Soient $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur contenant les isomorphismes et satisfaisant à la propriété de deux sur trois, $\mathcal{C}_0$ une catégorie admettant des limites projectives finies, $K : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$ un foncteur exact à gauche (commutant aux limites projectives finies), et posons $W_0 = K^{-1}(W)$. On suppose que la classe de flèches $W_0$ de $\mathcal{C}_0$ est stable par changements de base. Si pour tout objet $Y$ de $\mathcal{C}$, tout objet $X$ de $\mathcal{C}_0$, et toute flèche $g : Y \to K(X)$ de $\mathcal{C}$, il existe un objet $X'$ de $\mathcal{C}_0$, un morphisme $f : X' \to X$ de $\mathcal{C}_0$, et une flèche $t : Y \to K(X')$ de $W$ tels que $g = K(f)t$, alors le morphisme de localisateurs $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ est une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski sur $(\mathcal{C}, W)$. En effet, si on pose $Fib_0 = \mathsf{Fl}(\mathcal{C}_0)$, toutes les conditions de la définition 10.2 sont satisfaites.

***Lemme 10.7***. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie non vide, et $P : \mathcal{C} \to \Pi_1(\mathcal{C})$ le foncteur canonique de localisation. On suppose que :*

(a) *pour tout couple d'objets $X_1$ et $X_2$ de $\mathcal{C}$, il existe un diagramme dans $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & X_1 \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & X_2 \end{tikzcd} \quad ;$$

(b) *pour toute double flèche $X_1 \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} X_2$ de $\mathcal{C}$, on a $P(u) = P(v)$.*

*Alors la catégorie $\mathcal{C}$ est 1-connexe.*

*Démonstration*. — Comme la catégorie $\mathcal{C}$ est non vide, la condition ($a$) implique que $\mathcal{C}$ est 0-connexe. Pour conclure, il suffit donc de prouver que pour tout couple $X_0$, $X_1$ d'objets de $\mathcal{C}$, deux zigzags arbitraires de flèches de $\mathcal{C}$ de $X_0$ vers $X_1$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Y_1 \arrow[r, dash] & Y_2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & Y_m \arrow[dr, dash] & \\ X_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & & & & X_1 \\ & Z_1 \arrow[r, dash] & Z_2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & Z_n \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

(les traits indiquant une flèche dans un sens ou dans l'autre) définissent la même flèche dans $\Pi_1(\mathcal{C})$. Or, la condition ($a$) implique aussitôt par récurrence l'existence d'un objet $X$ de $\mathcal{C}$, et de flèches $f_0 : X \to X_0$, $f_1 : X \to X_1$, $X \to Y_i$, $1 \leq i \leq m$, $X \to Z_j$, $1 \leq j \leq n$. D'autre part, la condition ($b$) implique que l'image dans $\Pi_1(\mathcal{C})$

de *tout* triangle de $\mathcal{C}$ est un triangle *commutatif.* On en déduit de proche en proche que chacun de deux zigzags définit la même flèche de $\Pi_1(\mathcal{C})$, égale à $P(f_1)P(f_0)^{-1}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

***Proposition 10.8.*** — *Une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski est une structure de dérivabilité de type normand à droite.*

*Démonstration.* — Soient $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur contenant les isomorphismes et satisfaisant à la propriété de deux sur trois, et $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski. Par définition, il existe une classe de flèches $Fib_0$ de $\mathcal{C}_0$ satisfaisant aux conditions de la définition 10.2. Montrons que $K$ est une structure de dérivabilité de type normand à droite. Pour cela, il suffit de vérifier les conditions $(a)$ et $(b)$ de la définition 7.1.

*a*) Soit $Y$ un objet de $\mathcal{C}$. En vertu du lemme précédent, pour montrer que la catégorie $I$ des $K$-résolutions à droite de $Y$ est 1-connexe, il suffit de prouver qu'elle est non vide et qu'elle satisfait aux conditions $(a)$ et $(b)$ du lemme. On remarque que comme par hypothèse le localisateur $(\mathcal{C}, W)$ satisfait à la propriété de deux sur trois, et $W_0 = K^{-1}(W)$, la catégorie $I$ est la sous-catégorie *pleine* de $Y\backslash\mathcal{C}_0$ formée des objets $(X, t : Y \to K(X))$ de $Y\backslash\mathcal{C}_0$ tels que la flèche $t$ soit dans $W$.

*i*) *La catégorie $I$ est non vide.* En vertu des conditions $(a)$, (F0) et $(b)$, (E0) de la définition 10.2, la catégorie $\mathcal{C}_0$ admet un objet final $*$, et $K(*)$ est un objet final de $\mathcal{C}$. La condition $(c)$, appliquée à l'unique flèche de $Y$ vers $K(*)$, implique l'existence d'un objet $X$ de $\mathcal{C}_0$, et d'une flèche $t : Y \to K(X)$ de $\mathcal{C}$ appartenant à $W$, ce qui prouve l'assertion.

*ii*) *Soient $(X_1, t_1 : Y \to K(X_1))$, $(X_2, t_2 : Y \to K(X_2))$ deux résolutions à droite de $Y$. Alors il existe une résolution à droite $(X, t : Y \to K(X))$ de $Y$, et des morphismes de résolutions à droite $f_1 : (X, t) \to (X_1, t_1)$ et $f_2 : (X, t) \to (X_2, t_2)$.* En effet, il résulte de la remarque 10.3 que le produit $X_1 \times X_2$ existe dans $\mathcal{C}_0$, et que le foncteur $K$ transforme ce produit en produit. On en déduit un morphisme $(t_1, t_2) : Y \to K(X_1 \times X_2)$, et en vertu de la condition $(c)$ de la définition 10.2, il existe un objet $X$ de $\mathcal{C}_0$, une flèche $t : Y \to K(X)$ de $\mathcal{C}$ appartenant à $W$, et un morphisme $f : X \to X_1 \times X_2$ de $\mathcal{C}_0$ tels que $(t_1, t_2) = K(f)t$. Alors $(X, t)$ est une résolution à droite de $Y$, et en composant $f$ avec les projections de $X_1 \times X_2$ sur $X_1$ et $X_2$, on déduit des morphismes de résolutions à droite $f_1 : (X, t) \to (X_1, t_1)$ et $f_2 : (X, t) \to (X_2, t_2)$, ce qui prouve l'assertion.

*iii*) *Soient $(X_1, t_1 : Y \to K(X_1))$, $(X_2, t_2 : Y \to K(X_2))$ deux résolutions à droite de $Y$, et $f_1, f_2 : (X_1, t_1) \to (X_2, t_2)$ deux morphismes de résolutions. Alors si $P : I \to \Pi_1(I)$ désigne le foncteur canonique de localisation, on a $P(f_1) = P(f_2)$.* En effet, il résulte de la remarque 10.3 que le produit $X_2 \times X_2$ existe dans $\mathcal{C}_0$ et que le foncteur $K$ transforme ce produit en produit. En vertu de la condition $(a)$, (F3) de la définition 10.2, la flèche $(f_1, f_2) : X_1 \to X_2 \times X_2$ de $\mathcal{C}_0$ se décompose en

$(f_1, f_2) = (f'_1, f'_2)s$, avec $s \in W_0$ et $(f'_1, f'_2) \in Fib_0$

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "{(f_1,f_2)}"] \arrow[dr, "s"'] & & X_2 \times X_2 \\ & X'_1 \arrow[ur, "{(f'_1,f'_2)}"'] & \end{tikzcd} \quad ,$$

et en vertu des conditions $(a)$, (F2) et $(b)$, (E1), on a un carré cartésien dans $\mathcal{C}_0$

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f'_0"] \arrow[d, "f_0"'] & X'_1 \arrow[d, "{(f'_1,f'_2)}"] \\ X_2 \arrow[r, "\Delta"'] & X_2 \times X_2 \end{tikzcd} \quad ,$$

où $\Delta$ désigne le foncteur diagonal, dont l'image par le foncteur $K$ est un carré cartésien de $\mathcal{C}$. Comme $f_1$ et $f_2$ sont des morphismes de résolutions, on a $K(f'_1)K(s)t_1 = K(f_1)t_1 = t_2 = K(f_2)t_1 = K(f'_2)K(s)t_1$, et la propriété universelle des carrés cartésiens implique l'existence d'une flèche $g : Y \to K(X_0)$ de $\mathcal{C}$ telle que $K(f_0)g = t_2$ et $K(f'_0)g = K(s)t_1$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left, "K(s)t_1"] \arrow[ddr, bend right, "t_2"'] & & \\ & K(X_0) \arrow[r, "K(f'_0)"'] \arrow[d, "K(f_0)"] & K(X'_1) \arrow[d, "{K(f'_1,f'_2)}"] \\ & K(X_2) \arrow[r, "K(\Delta)"'] & K(X_2 \times X_2) \simeq K(X_2) \times K(X_2) \end{tikzcd}$$

En vertu de la condition $(c)$, il existe un objet $X$ de $\mathcal{C}_0$, une flèche $t : Y \to K(X)$ de $W$, et un morphisme $f : X \to X_0$ de $\mathcal{C}_0$ tels que $g = K(f)t$. Finalement, on a un diagramme dans $I$,

$$\begin{tikzcd} (X_1, t_1) \arrow[dr, "s"] & & \\ & (X'_1, K(s)t_1) \arrow[r, shift left, "f'_1"] \arrow[r, shift right, "f'_2"'] & (X_2, t_2) \\ (X, t) \arrow[ur, "f'_0 f"'] & & \end{tikzcd} \quad ,$$

tel que

$$f'_1 s = f_1 \quad , \qquad f'_2 s = f_2 \qquad \text{et} \qquad f'_1 f'_0 f = f_0 f = f'_2 f'_0 f \quad .$$

La troisième égalité implique que dans $\Pi_1(I)$, on a $P(f'_1) = P(f'_2)$, et les deux premières que $P(f_1) = P(f_2)$, ce qui prouve l'assertion.

$b)$ Soient $Y_0$ un objet de $\mathcal{C}$, $X_0$ un objet de $\mathcal{C}_0$, et $g_0 : Y_0 \to K(X_0)$ une flèche de $\mathcal{C}$. Pour prouver la condition $(b)$ de la définition 7.1, il suffit de montrer que la catégorie

$J$ dont les objets sont les triplets $(X, t : Y_0 \to K(X), f : X \to X_0)$, où $X$ est un objet de $\mathcal{C}_0$, $f$ un morphisme de $\mathcal{C}_0$, et $t$ une flèche de $W$, tels que $g_0 = K(f)t$, un morphisme, d'un objet $(X, t, f)$ vers un autre $(X', t', f')$, étant une flèche $s : X \to X'$ de $\mathcal{C}_0$ telle que $t' = K(s)t$ et $f = f's$ (la flèche $s$ étant automatiquement dans $W_0$), est 0-connexe.

*i) La catégorie $J$ est non vide.* C'est exactement ce qu'affirme la condition $(c)$ de la définition 10.2.

*ii) La catégorie $J$ est connexe.* En vertu de la remarque 10.3, il existe un objet $X'_0$ de $\mathcal{C}_0$, une flèche $t_0 : Y_0 \to K(X'_0)$ de $\mathcal{C}$ appartenant à $W$, et une flèche $f_0 : X'_0 \to X_0$ de $\mathcal{C}_0$ appartenant à $Fib_0$ tels que $g_0 = K(f_0)t_0$. On en déduit un objet $(X'_0, t_0, f_0)$ de $J$. Pour prouver que la catégorie $J$ est connexe, il suffit de montrer que tout objet $(X, t, f)$ de $J$ peut être relié par un zigzag de flèches de $J$ à l'objet $(X'_0, t_0, f_0)$. En vertu des conditions $(a)$, (F2) et $(b)$, (E1) de la définition 10.2, le produit fibré $X' = X \times_{X_0} X'_0$ existe dans $\mathcal{C}_0$, et $K(X') \simeq K(X) \times_{K(X_0)} K(X'_0)$. Comme $K(f)t = g_0 = K(f_0)t_0$, on en déduit une flèche $(t, t_0) : Y_0 \to K(X')$, et en vertu de la condition $(c)$, il existe un objet $X''$ de $\mathcal{C}_0$, un morphisme $f' : X'' \to X'$ de $\mathcal{C}_0$, et une flèche $t' : Y_0 \to K(X'')$ de $W$ tels que $(t, t_0) = K(f')t'$. En composant la flèche $f'$ avec le morphisme canonique $X' = X \times_{X_0} X'_0 \to X_0$, on déduit une flèche $f'' : X'' \to X_0$ telle que $K(f'')t' = g_0$, d'où un objet $(X'', t', f'')$ de $J$. En composant le morphisme $f'$ avec les projections de $X' = X \times_{X_0} X'_0$ sur $X$ et $X'_0$, on déduit des morphismes $(X'', t', f'') \to (X, t, f)$ et $(X'', t', f'') \to (X'_0, t_0, f_0)$ de $J$, ce qui prouve l'assertion, et achève la démonstration de la proposition. □

***Remarque 10.9.*** — Dans la démonstration de la proposition ci-dessus, on n'a pas utilisé la stabilité des fibrations par composition (condition $(a)$, (F1) de la définition 10.2), ni la stabilité des fibrations et fibrations triviales par changement de base (de la condition $(a)$, (F2)), utilisant simplement la quarrabilité des fibrations dans $\mathcal{C}_0$.

***Corollaire 10.10.*** — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles de Quillen, $W$ sa classe d'équivalences faibles, et $\mathcal{C}_f$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets fibrants. Alors $\mathcal{C}_f$ est une structure de dérivabilité de type normand à droite sur $(\mathcal{C}, W)$.*

*Démonstration.* — Vu l'exemple 10.5, le corollaire est un cas particulier de la proposition précédente. □

***Remarque 10.11.*** — Le corollaire ci-dessus montre que les théorèmes de Quillen d'existence, de composition, et d'adjonction des foncteurs dérivés sont des cas particuliers des propositions 5.9, 5.10 et 5.12. De même, en vertu du corollaire 7.5, on en déduit le théorème de Quillen affirmant que l'inclusion de la sous-catégorie des objets fibrants d'une catégorie de modèles dans cette dernière induit une équivalence des catégories localisées. Une variante de la preuve de la proposition 10.8, consistant à remplacer partout les décompositions en une équivalence faible suivie d'une fibration par des décompositions en une cofibration triviale suivie d'une fibration, permet de montrer que l'inclusion de la sous-catégorie pleine d'une catégorie de modèles de Quillen, formée des objets à la fois fibrants et cofibrants, dans celle des objets cofibrants est aussi une structure de dérivabilité de type normand à droite (sans être nécessairement une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski). Ainsi, on peut également en déduire l'équivalence des catégories localisées. Par ailleurs, vu l'exemple 10.4, la proposition 10.8 montre que les théorèmes d'existence, de composition, et d'adjonction des foncteurs dérivés dans le cadre des catégories dérivables de Cisinski [**4**], sont aussi des cas particuliers des propositions 5.9, 5.10 et 5.12. Enfin, en vertu du corollaire 7.5, on en déduit le théorème de Cisinski affirmant que l'inclusion de la sous-catégorie des objets fibrants d'une catégorie dérivable à gauche dans cette dernière induit une équivalence des catégories localisées [*loc. cit.*].

***Corollaire 10.12***. — *Une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski est une structure de dérivabilité à droite de Radulescu-Banu.*

*Démonstration*. — Soient $(\mathcal{C}, W)$ un localisateur contenant les isomorphismes et satisfaisant à la propriété de deux sur trois, et $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski. Par définition, il existe une classe de flèches $Fib_0$ de $\mathcal{C}_0$ satisfaisant aux conditions de la définition 10.2. Montrons que $K$ est une structure de dérivabilité à droite de Radulescu-Banu. Comme en vertu de la proposition 10.8 le morphisme $K$ est une structure de dérivabilité de type normand à droite, la catégorie des $K$-résolutions à droite de tout objet de $\mathcal{C}$ est 1-connexe, et en particulier non vide, ce qui prouve que le morphisme $K$ permet des résolutions à droite. D'autre part, le corollaire 7.5 implique que le foncteur $\bar{K} : W_0^{-1}\mathcal{C}_0 \to W^{-1}\mathcal{C}$, induit par $K$, est une équivalence de catégorie. Il reste donc simplement à démontrer que le morphisme $K$ satisfait à la condition de Radulescu-Banu. Soient $Y$ un objet de $\mathcal{C}$, $(X, t : Y \to K(X))$ une résolution à droite de $Y$, et $(X', g : Y \to K(X'))$ un objet arbitraire de $Y\backslash\mathcal{C}_0$. Il résulte de la remarque 10.3 que le produit $X \times X'$ existe dans $\mathcal{C}_0$, et que le foncteur $K$ transforme ce produit en produit. On en déduit un morphisme $(t, g) : Y \to K(X \times X')$, et en vertu de la condition $(c)$ de la définition 10.2, il existe un objet $X''$ de $\mathcal{C}_0$, une flèche $t' : Y \to K(X'')$ de $\mathcal{C}$ appartenant à $W$, et un morphisme $f : X'' \to X \times X'$ de $\mathcal{C}_0$ tels que $(t, g) = K(f)t'$. Alors $(X'', t')$ est un objet de $Y\backslash\mathcal{C}_0$, et en composant $f$ avec les projections de $X \times X'$ sur $X$ et $X'$, on déduit des morphismes $s : (X'', t') \to (X, t)$ et $f' : (X'', t') \to (X', g)$ de $Y\backslash\mathcal{C}_0$. Comme $t$ et $t'$ sont des flèches de $W$, il résulte de la propriété de deux sur trois et de l'égalité $W_0 = K^{-1}(W)$ que $s$ appartient à $W_0$, ce qui achève la démonstration. □

***Remarque 10.13***. — Tous les résultats de ce paragraphe, sauf celui affirmant que les catégories dérivables de Cisinski correspondent exactement aux structures de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ telles que le foncteur $K$ soit pleinement fidèle et injectif sur les objets, sont valables en remplaçant la notion de structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski par celle de structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski *faible*, définie comme suit.

Une *structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski faible*, sur un localisateur $(\mathcal{C}, W)$ satisfaisant à la propriété de deux sur trois, est un couple formé d'un localisateur $(\mathcal{C}_0, W_0)$, et d'un morphisme de localisateurs $K : (\mathcal{C}_0, W_0) \to (\mathcal{C}, W)$ tel que $W_0 = K^{-1}(W)$, et tel qu'il existe une classe de flèches $Fib_0$ de $\mathcal{C}_0$ satisfaisant aux conditions suivantes :

($a$) la catégorie $\mathcal{C}_0$ admet un objet final $*$, pour tout objet $X$ de $\mathcal{C}_0$, la flèche $X \to *$ appartient à $Fib_0$, et le foncteur $K$ transforme tout objet final de $\mathcal{C}_0$ en un objet final de $\mathcal{C}$ ;

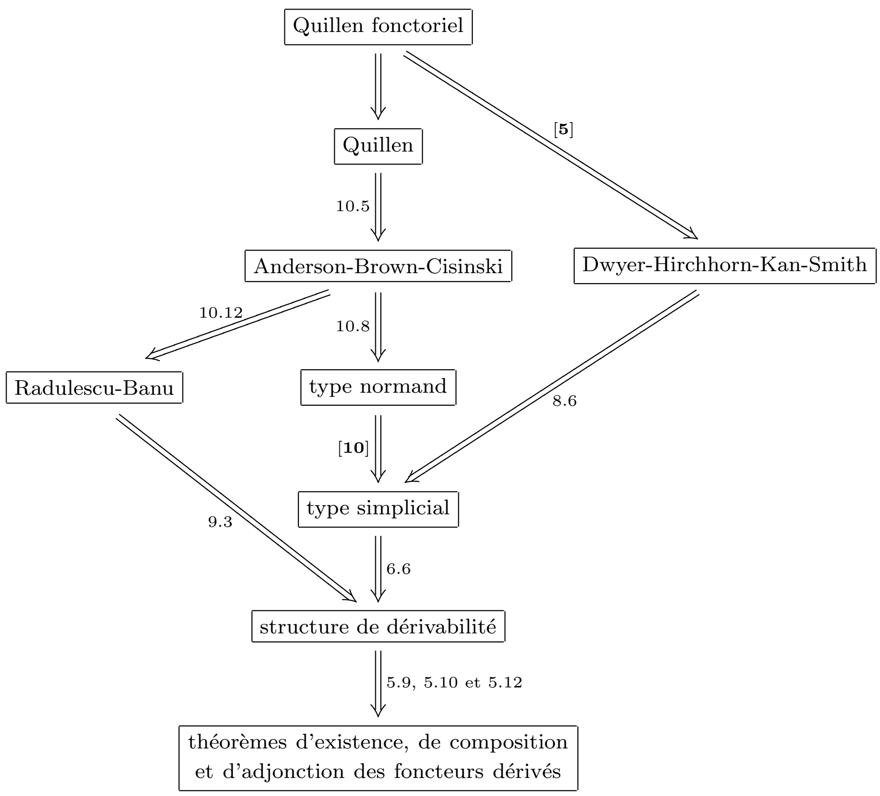
($b$) pour tout couple de flèches $p : X \to Y$ et $Y' \to Y$ de $\mathcal{C}_0$, si $p$ appartient à $Fib_0$, alors le produit fibré $X' = Y' \times_Y X$ existe dans $\mathcal{C}_0$, et le foncteur $K$ transforme ce produit fibré en produit fibré ;

($c$) toute flèche de $\mathcal{C}_0$ se décompose en une flèche appartenant à $W_0$, suivie d'une flèche appartenant à $Fib_0$ ;

($d$) pour tout objet $X$ de $\mathcal{C}_0$, tout objet $Y$ de $\mathcal{C}$, et toute flèche $g : Y \to K(X)$ de $\mathcal{C}$, il existe un objet $X'$ de $\mathcal{C}_0$, une flèche $t : Y \to K(X')$ de $\mathcal{C}$ appartenant à $W$, et une flèche $f : X' \to X$ de $\mathcal{C}_0$ tels que $g = K(f)t$.

Les démonstrations de la proposition 10.8 et du corollaire 10.12 montrent que toute structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski faible est une structure de dérivabilité de type normand à droite et une structure de dérivabilité à droite de Radulescu-Banu. Toute structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski est une structure de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski faible. En particulier, les exemples 10.4, 10.5 et 10.6 sont des exemples de structures de dérivabilité à droite d'Anderson-Brown-Cisinski faibles, et dans ce dernier exemple on n'a plus besoin de supposer que la classe de flèches $W_0$ de $\mathcal{C}_0$ soit stable par changements de base.

## Table d'implications




## Références

[1] D. W. Anderson – « Fibrations and geometric realizations », *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **84** (1978), no. 5, p. 765–788.

[2] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA4), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, Springer-Verlag, 1972.

[3] K. S. Brown – « Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology », *Transactions of the Amer. Math. Soc.* **186** (1973), p. 419–458.

[4] D.-C. Cisinski – « Catégories dérivables », Prépublication, 2002.

[5] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan & J. H. Smith – *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 113, American Mathematical Society, 2004.

[6] P. Gabriel & M. Zisman – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik, Band 35, Springer-Verlag, 1967.

[7] R. Guitart – « Relations et carrés exacts », *Ann. sc. math. Québec* **IV, 2** (1980), p. 103–125.

[8] P. S. Hirschhorn – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 99, American Mathematical Society, 2002.

[9] M. Hovey – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 63, American Mathematical Society, 1999.

[10] B. Kahn & R. Sujatha – « A few localisation theorems », *Homology, Homotopy and Applications* **9** (2007), p. 137–161.

[11] S. MacLane – *Categories for the working mathematician*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1998, Second edition.

[12] G. Maltsiniotis – « La théorie de l'homotopie de Grothendieck », *Astérisque* **301** (2005), p. 1–140.

[13] ———, « Le théorème de Quillen, d'adjonction des foncteurs dérivés, revisité », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **344** (2007), p. 549–552.

[14] ———, « Carrés exacts homotopiques », En préparation, 2008.

[15] D. Quillen – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[16] A. Radulescu-Banu – « Cofibrations in homotopy theory », Prépublication, 2006.

---

Bruno KAHN, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, Case Postale 7012, 2, place Jussieu, F-75251 PARIS cedex 05, FRANCE • *E-mail :* `kahn@math.jussieu.fr`
*Url :* `http://www.math.jussieu.fr/~kahn/`

Georges MALTSINIOTIS, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, Case Postale 7012, 2, place Jussieu, F-75251 PARIS cedex 05, FRANCE
*E-mail :* `maltsin@math.jussieu.fr` • *Url :* `http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/`