Catégories fortements triangulées

Georges MALTSINIOTIS

7, 8, 9 Novembre 2005

1.1. Soit N un entier, $N \geq 2$. On pose

$$D_N = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \mid x_1 < x_2 < x_1 + N\} \quad .$$

L'ensemble D_N est ordonné par l'ordre induit par l'ordre produit sur $\mathbb{Z}^2$:

$$(x_1, x_2) \leq (x'_1, x'_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq x'_1 \quad \text{et} \quad x_2 \leq x'_2 \quad ,$$

et est ainsi considéré comme une catégorie. On définit des foncteurs

$$I_N,\, J_N : D_N \longrightarrow D_N$$

par

$$I_N(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + N) \qquad \text{et} \qquad J_N(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1) \quad .$$

On a

$$I_N^2 = J_N^N \qquad \text{et} \qquad I_N J_N = J_N I_N \quad .$$

De même, on pose

$$\overline{D}_N = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \mid x_1 \leq x_2 \leq x_1 + N\} \quad ,$$

considéré comme catégorie par la relation d'ordre induit par l'ordre produit, et on a des foncteurs

$$\overline{I}_N,\, \overline{J}_N : \overline{D}_N \longrightarrow \overline{D}_N$$

définis par les mêmes formules, et satisfaisant aux mêmes relations que les foncteurs I_N et J_N.

1.2. (*À ne pas lire en première lecture.*) Pour un entier $N \geq 3$, on note

$$\delta_N : D_{N-1} \longrightarrow D_N$$

la restriction à D_{N-1} de l'application

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\xrightarrow{\delta_0^N\times\delta_0^N}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\quad ,$$

où δ_0^N désigne l'unique application strictement croissante (croissante injective) $\delta_0^N:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ dont l'image est formée des entiers relatifs qui ne sont pas multiples de N, et telle que $\delta_0^N(0)=1$:

$$\delta_0^N(i)=i+\left[\frac{i}{N-1}\right]+1\quad ,$$

où on note $[j]$ la partie entière d'un nombre rationnel j, de sorte que pour tout j, $j\in\mathbb{Q}$, on ait $j=[j]+j'$, avec $0\leq j'<1$. (On vérifie facilement que $(\delta_0^N\times\delta_0^N)(D_{N-1})\subset D_N$.)

Pour un entier $N\geq 2$, on note

$$\sigma_N:D_{N+1}\longrightarrow\overline{D}_N$$

la restriction à D_{N+1} de l'application

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\xrightarrow{\sigma_0^N\times\sigma_0^N}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\quad ,$$

où σ_0^N désigne l'unique application croissante dont la restriction aux entiers relatifs qui ne sont pas des multiples de $N+1$ est une bijection sur $\mathbb{Z}$, telle que tout multiple de $N+1$ a même image que son prédécesseur, et telle que $\sigma_0^N(0)=0$:

$$\sigma_0^N(i)=i-\left[\frac{i}{N+1}\right]\quad .$$

(On vérifie facilement que $(\sigma_0^N\times\sigma_0^N)(D_{N+1})\subset\overline{D}_N$.)

Dans la suite, on se fixe une catégorie additive $\mathcal{T}$, munie d'une auto-équivalence S

$$S:\mathcal{T}\longrightarrow\mathcal{T}\quad ,\qquad T\longmapsto S(T)=T[1]\quad .$$

1.3. Soit N un entier $N\geq 2$. Un N-*triangle* est un couple (F,φ)

$$F:D_N\longrightarrow\mathcal{T}\quad ,\qquad \varphi:F\circ I_N\xrightarrow{\sim}S\circ F\quad ,$$

où F est un foncteur, et φ un isomorphisme de foncteurs, le foncteur F satisfaisant à la condtion suivante : pour tous (x_1,x_2), (x_1',x_2') dans D_N, si $x_2\leq x_1'$ (ce qui implique en particulier que $(x_1,x_2)\leq(x_1',x_2')$), alors le morphisme $F(x_1,x_2)\to F(x_1',x_2')$, induit par le foncteur F, est nul. On remarque que cette condition implique aussi que pour tous (x_1,x_2), (x_1',x_2')

dans D_N, si on a $x_1 + N \leq x'_2$ (ce qui implique aussi en particulier que $(x_1, x_2) \leq (x'_1, x'_2)$), alors le morphisme $F(x_1, x_2) \to F(x'_1, x'_2)$, induit par le foncteur F, est nul. En effet, on a alors un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(x_1, x_2) & \longrightarrow & F(x'_1, x'_2) \\ \| & & \| \\ FI_N(x_2 - N, x_1) & & FI_N(x'_2 - N, x'_1) \\ {\scriptstyle \varphi_{(x_2 - N, x_1)}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \varphi_{(x'_2 - N, x'_1)}} \\ SF(x_2 - N, x_1) & \longrightarrow & SF(x'_2 - N, x'_1) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes. Comme $x_1 \leq x'_2 - N$, la flèche horizontale du bas est nulle, donc aussi celle du haut.

Un *morphisme de N-triangles* d'un N-triangle (F, φ) vers un N-triangle (F', φ') est un morphisme de foncteurs $\theta : F \to F'$ tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} F \circ I_N & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & S \circ F \\ {\scriptstyle \theta \star I_N} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle S \star \theta} \\ F' \circ I_N & \xrightarrow[\varphi']{\sim} & S \circ F' \end{array}$$

soit commutatif.

Les N-triangles correspondent aux diagrammes considérés dans la remarque 1.1.14 de [BBD], sauf qu'on n'exige pas la condition (d) de *loc. cit.*, qui n'a de sens que dans une catégorie triangulée. En particulier, à tout 3-triangle (F, φ), on associe un triangle (au sens ordinaire) :

$$F(0,1) \longrightarrow F(0,2) \longrightarrow F(1,2) \longrightarrow F(0,1)[1] \quad ,$$

le deux premiers morphismes étant définis par le foncteur F, la troisième étant le composé

$$F(1,2) \longrightarrow F(1,3) = FI_3(0,1) \xrightarrow{\varphi_{(0,1)}} SF(0,1) = F(0,1)[1] \quad .$$

1.4. Un N-triangle est essentiellement la même chose qu'un couple $(\overline{F}, \overline{\varphi})$, où $\overline{F} : \overline{D}_N \to \mathcal{T}$ est un foncteur et $\overline{\varphi} : \overline{F} \circ \overline{I}_N \xrightarrow{\sim} S \circ \overline{F}$ un isomorphisme de foncteurs, le foncteur $\overline{F}$ satisfaisant à la condition $\overline{F}(x, x) = 0$, $x \in \mathbb{Z}$, (donc aussi $\overline{F}(x, x + N) = 0$).

En effet, si $(\overline{F}, \overline{\varphi})$ est un tel couple $(\overline{F}|D_N, \overline{\varphi}|D_N)$ est un N-triangle, puisque si (x_1, x_2), $(x'_1, x'_2) \in D_N$ et si $x_2 \leq x'_1$, on a des morphismes dans $\overline{D}_N$

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_2, x_2) \longrightarrow (x'_1, x'_2) \quad ,$$

et comme $\overline{F}(x_2, x_2) = 0$, le composé $\overline{F}(x_1, x_2) \to \overline{F}(x'_1, x'_2)$ est nul.

Réciproquement, si (F,φ) est un N-triangle, on peut prolonger le foncteur $F : D_N \to \mathcal{T}$ en $\overline{F} : \overline{D}_N \to \mathcal{T}$ par

$$\overline{F}(x,x) = 0 = \overline{F}(x,x+N) \quad , \qquad x \in \mathbb{Z} \quad .$$

Si $(x_1,x_2) \leq (x,x) \leq (x'_1,x'_2)$, on a $x_2 \leq x'_1$, et si $(x_1,x_2) \leq (x,x+N) \leq (x'_1,x'_2)$, on a $x_1 + N \leq x'_2$, et dans les deux cas, $F(x_1,x_2) \to F(x'_1,x'_2)$ est nul, ce qui montre bien que $\overline{F}$ est un foncteur. Comme

$$\overline{I}_N(x,x) = (x,x+N) \qquad \text{et} \qquad \overline{I}_N(x,x+N) = (x+N,x+N) \quad ,$$

on peut définir $\overline{\varphi} : \overline{F} \circ \overline{I}_N \xrightarrow{\sim} S \circ \overline{F}$ par $\overline{\varphi}_{(x_1,x_2)} = \varphi_{(x_1,x_2)}$ si $(x_1,x_2) \in D_N$, et $\overline{\varphi}_{(x,x)} = 1_0 = \overline{\varphi}_{(x,x+N)}$, pour $x \in \mathbb{Z}$.

1.5. Une *catégorie fortement triangulée* (resp. *catégorie n-prétriangulée*, pour un entier $n \geq 0$) est une catégorie additive $\mathcal{T}$ munie d'une auto-équivalence S, et pour tout entier N, $N \geq 2$ (resp. $n+2 \geq N \geq 2$), d'une classe de N-triangles, appelés *N-triangles distingués*, satisfaisant aux axiomes suivants.

FTR0) Pour tout $N \geq 2$ (resp. $n+2 \geq N \geq 2$), un N-triangle isomorphe à un N-triangle distingué est un N-triangle distingué.

FTRI) Pour tout $N \geq 2$ (resp. $n+2 \geq N \geq 2$), toute suite de $N-2$ morphismes composables s'insère dans un N-triangle distingué : pour toute suite de morphismes composables

$$X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_{N-1} \quad ,$$

il existe un N-triangle distingué (F,φ) et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(0,1) \arrow[r] \arrow[d] & F(0,2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & F(0,N-1) \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{N-1}
\end{tikzcd}$$

les flèches verticales étant des isomorphismes.

FTRII) Pour tout $N \geq 2$ (resp. $n+2 \geq N \geq 2$), tout morphisme de suites de $N-2$ morphismes composables dont la source (resp. le but) s'insère dans un N-triangle distingué (F,φ) (resp. (F',φ')) se prolonge en un morphisme de N-triangles de (F,φ) vers (F',φ'). De façon équivalente : soient (F,φ) et (F',φ') deux N-triangles distingués et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(0,1) \arrow[r] \arrow[d, "u_1"'] & F(0,2) \arrow[r] \arrow[d, "u_2"] & \cdots \arrow[r] & F(0,N-1) \arrow[d, "u_{N-1}"] \\
F'(0,1) \arrow[r] & F'(0,2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F'(0,N-1)
\end{tikzcd} \quad ,$$

les flèches horizontales étant induites par les foncteurs F et F'. Alors il existe un morphisme de N-triangles $\theta : F \rightarrow F'$ tel que pour tout i, $1 \leq i \leq N-1$, $\theta_{(0,i)} = u_i$.

FTRIII) *i*) Pour tout $N \geq 2$ (resp. $n+2 \geq N \geq 2$), pour qu'un N-triangle (F, φ) soit distingué, il faut et il suffit que le N-triangle $(FJ_N, \varphi \star J_N)$ le soit.

ii) Pour tout $N \geq 2$ (resp. $n+2 \geq N \geq 2$), et tout N-triangle distingué (F, φ), le N-triangle $(FI_N, -\varphi \star I_N)$ est distingué.

iii) Pour tout $N \geq 3$ (resp. $n+2 \geq N \geq 3$), et tout N-triangle distingué (F, φ), le $N-1$-triangle $(F\delta_N, \varphi \star \delta_N)$ est distingué.

iv) Pour tout $N \geq 2$ (resp. $n+1 \geq N \geq 2$), et tout N-triangle distingué (F, φ), le $N+1$-triangle $(F\sigma_N, \varphi \star \sigma_N)$ est distingué.

L'axiome FTRIII doit pouvoir s'énoncer de façon plus synthétique en définissant la catégorie C "engendrée par I_N, J_N, δ_N, σ_N", ayant comme objets les entiers $N \geq 2$,

$$I_N : N \rightarrow N \ , \quad J_N : N \rightarrow N \ , \quad \delta_N : N-1 \rightarrow N \ , \quad \sigma_N : N+1 \rightarrow N \quad ,$$

et un foncteur "d'orientation" $\varepsilon : \mathsf{C} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ de C vers la catégorie correspondant au groupe $\mathbb{Z}/2$, par

$$J_N,\ \delta_N,\ \sigma_N \longmapsto 0 \quad , \qquad I_N \longmapsto 1 \quad ,$$

puis en associant fonctoriellement à toute flèche $f : N' \rightarrow N$ de C, une application croissante $\overline{f} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, et à tout N-triangle (F, φ) un N'-triangle $f^*(F, \varphi) = (F \circ \overline{f}, (-1)^{\varepsilon(f)} \varphi \star \overline{f})$, et enfin en exigeant que pour toute flèche $f : N' \rightarrow N$ de C, et tout N-triangle distingué (F, φ), le N'-triangle $f^*(F, \varphi)$ soit distingué.

Dans une catégorie n-prétriangulée on dispose donc de classes de N-triangles distingués pour tout N, $2 \leq N \leq n+2$. On dit dans ce cas qu'un $(n+3)$-triangle (F, φ) est $(n+2)$-*distingué* si pour tout $p \in \mathbb{Z}$, le $(n+2)$-triangle $(FJ^p_{N+3}\delta_N, \varphi \star J^p_{N+3}\delta_N)$ est distingué. (Quand on disposera du formalisme de la catégorie C, on pourra définir plus généralement pour tout $N \geq 2$, et tout N', $n+2 \geq N' \geq 2$, les N-triangles N'-*distingués* comme étant les N-triangles (F, φ) tels que pour toute flèche $f : N' \rightarrow N$ de C, le N'-triangle $f^*(F, \varphi)$ soit distingué.) Une *catégorie n-triangulée* est une catégorie n-prétriangulée, où l'axiome FRTI est renforcé en demandant de plus que toute suite de $n+1$ morphismes s'insère dans un $(n+3)$-triangle $(n+2)$-distingué.

Il résulte aussitôt des définitions que pour tout entier $n \geq 0$, une catégorie fortement triangulée est une catégorie n-triangulée, et une catégorie n-triangulée est une catégorie n-prétriangulée. Pour tout couple d'entiers $n' > n \geq 0$, une catégorie n'-prétriangulée est une catégorie n-triangulée.

1.6. Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux catégories additives, munies d'auto-équivalences S et S' respectivement, $G : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ un foncteur additif, et $\tau : GS \to S'G$ un isomorphisme de foncteurs. Si (F, φ) est un N-triangle de $\mathcal{T}$, $N \geq 2$, on définit un N-triangle (F', φ') de $\mathcal{T}'$ en posant $F' = GF$ et $\varphi' = (\tau \star F)(G \star \varphi)$

$$F'I_N = GFI_N \xrightarrow{G\star\varphi} GSF \xrightarrow{\tau\star F} S'GF = S'F' \quad ,$$

qu'on appelle *image de* (F, φ) *par* G (à l'aide de τ). Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont des catégories fortement triangulées (resp. n-prétriangulées ou n-triangulées, pour un entier $n \geq 0$) un foncteur exact de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{T}'$ est un couple (G, τ) formé d'un foncteur additif $G : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ et d'un isomorphisme de foncteurs $\tau : GS \to S'G$ tel que pour tout $N \geq 2$ (resp. $n + 2 \geq N \geq 2$), l'image de tout N-triangle distingué de $\mathcal{T}$ soit un triangle distingué de $\mathcal{T}'$.

1.7. On rappelle (1.3) que dans une catégorie additive munie d'une auto-équivalence, on associe à tout 3-triangle (F, φ), un triangle (au sens ordinaire)

$$F(0,1) \longrightarrow F(0,2) \longrightarrow F(1,2) \longrightarrow F(0,1)[1] \quad .$$

Théorème 1. *Une catégorie fortement triangulée munie de la classe des triangles associés aux* 3*-triangles distingués est une catégorie triangulée.*

Esquisse de démonstration. En vertu de FTR0, un triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué. Le fait que

$$X \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

est un triangle distingué résulte de FTRI pour $N = 2$, et FTRIII, (iv) pour $N = 2$. Tout morphisme s'insère dans un triangle distingué en vertu de FTRI pour $N = 3$. L'axiome TRII (tourner les triangles) résulte de FTRIII, (ii) pour $N = 3$. Tout morphisme entre les premières flèches de deux triangles se prolonge en un morphisme de triangles en vertu de FTRII, pour $N = 3$. L'axiome de l'octaèdre résulte de FTRI pour $N = 4$, et FTRIII, (i), (iii) pour $N = 4$.

Le théorème 1 peut se préciser en remarquant que les catégories triangulées sont exactement les catégories 1-triangulées, les catégorie prétriangulées (mêmes axiomes que les catégories triangulées sans l'axiome de l'octaèdre) étant exactement les catégories 1-prétriangulées. Les catégories 0-triangulées ou 0-prétriangulées sont simplement les catégories additives munies d'une auto-équivalence.

Les N-triangles distingués d'une catégorie fortement triangulée, $N \geq 2$, sont des diagrammes du type considéré dans la remarque 1.1.14 de [BBD], pour la structure de catégorie triangulée du théorème 1, la réciproque n'étant pas vraie en général. En fait, les diagrammes considérés dans *loc. cit.* sont exactement les N-triangles 3-distingués.

1.8. Soit Dia une sous-2-catégorie 2-pleine de la 2-catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories, “admissible” comme domaine de définition d'un dérivateur triangulé (par exemple $\mathsf{Dia} = \mathcal{C}at$, ou Dia formée des catégories directes finies).

Théorème 2. *Pour tout dérivateur triangulé $\mathbb{D}$ de domaine Dia, et tout I dans Dia, la catégorie $\mathbb{D}(I)$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie fortement triangulée, et pour toute flèche $u : I \to J$ dans Dia, le foncteur $u^* : \mathbb{D}(J) \to \mathbb{D}(I)$ est (canoniquement muni d'une structure de foncteur) exact.*

Je me bornerai ici à décrire les N-triangles distingués de $\mathbb{D}(e)$, où e désigne la catégorie ponctuelle, dans le cas où les ensembles ordonnés infinis $\overline{D}_N$ appartiennent à Dia. (Dans le cas contraire, on doit être plus soigneux, et choisir une partie finie de $\overline{D}_N$, suffisante pour determiner, à isomorphisme près, un N-triangle distingué.)

On rappelle qu'on note $\square$ la catégorie opposée à la catégorie

$$\begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \arrow[d] \\ (1,0) \arrow[r] & (1,1) \end{tikzcd}$$

et $\ulcorner$, $\lrcorner$ les catégories opposées aux sous-catégories

$$\begin{tikzcd} (0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,1) \\ (1,0) & \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & (0,1) \arrow[d] \\ (1,0) \arrow[r] & (1,1) \end{tikzcd}$$

de $\square^\circ$ et $i_{\ulcorner} : \ulcorner \to \square$, $i_{\lrcorner} : \lrcorner \to \square$ les foncteurs d'inclusion. On dit qu'un objet X de $\mathbb{D}(\square)$ est homotopiquement *cartésien* (resp. *cocartésien*) si le morphisme d'adjonction

$$X \longrightarrow i_{\lrcorner *} i_{\lrcorner}^* X \qquad (\text{resp. } i_{\ulcorner !} i_{\ulcorner}^* X \to X\ )$$

est un isomorphisme, le dernier axiome des dérivateurs triangulés assurant qu'un objet de $\mathbb{D}(\square)$ est homotopiquement cartésien si et seulement s'il est homotopiquement cocartésien.

Notons

$$i_0 : e \longrightarrow \ulcorner \quad , \qquad i_1 : e \longrightarrow \square$$

les foncteurs définis par les objets $(0,0)$ et $(1,1)$ de $\ulcorner$ et $\square$ respectivement. Le foncteur de *suspension* $S : \mathbb{D}(e) \to \mathbb{D}(e)$, défini par $S = i_1^* i_{\ulcorner !} i_{0*}$, est une auto-équivalence de la catégorie additive $\mathbb{D}(e)$, et pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, le diagramme sous-jacent à l'objet $i_{\ulcorner !}\, i_{0*}X$ de $\mathbb{D}(\square)$ est

$$\mathsf{dia}(i_{\ulcorner !}\, i_{0*}X) \ = \ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S(X) \end{array} \qquad .$$

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$ muni de la relation d'ordre induit par l'ordre produit sur $\mathbb{Z}^2$. On dit qu'un objet X de $\mathbb{D}(E)$ est *homotopiquement multicartésien* si pour tous entiers k_0, k_1, l_0, l_1, $k_0 < k_1$, $l_0 < l_1$, tels que $(k_\varepsilon, l_\eta) \in E$, pour $\varepsilon, \eta = 0, 1$, si l'on note $i : \square \to E$ le foncteur défini par

$$i(\varepsilon, \eta) = (k_\varepsilon, l_\eta) \quad , \qquad \varepsilon, \eta = 0, 1 \ ,$$

l'objet i^*X de $\mathbb{D}(\square)$ est cartésien.

Soit N un entier, $N \geq 2$. Pour tout $(x_1, x_2) \in \overline{D}_N$, on note aussi par abus $(x_1, x_2) : e \to \overline{D}{}^{\circ}_N$ le foncteur de la catégorie ponctuelle vers la catégorie opposé de $\overline{D}_N$ défini par l'objet (x_1, x_2), et pour tout objet X de $\mathbb{D}(\overline{D}{}^{\circ}_N)$ on désigne par $X_{(x_1,x_2)}$ la fibre $(x_1, x_2)^*(X)$ de X en (x_1, x_2), et par $\overline{F}_X$ le diagramme sous-jacent à X

$$\overline{F}_X = \mathsf{dia}(X) \quad , \qquad \overline{F}_X(x_1, x_2) = X_{(x_1,x_2)} \ , \quad (x_1, x_2) \in \overline{D}_N \quad .$$

On note F_X la restriction de $\overline{F}_X$ à D_N. Soit X un objet homotopiquement multicartésien de $\mathbb{D}(\overline{D}{}^{\circ}_N)$ tel que pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$, $\overline{F}_X(x, x) = X_{(x,x)}$ et $\overline{F}_X(x, x+N) = X_{(x,x+N)}$ soient des objets nuls de $\mathbb{D}(e)$. On va définir un isomorphisme fonctoriel $\varphi_X : F_X \circ I_N \xrightarrow{\sim} S \circ F_X$ comme suit. Soit (x_1, x_2) dans D_N, de sorte que $x_1 < x_2$ et $x_2 < x_1 + N$. On en déduit un diagramme dans $\overline{D}_N$

$$\begin{array}{ccc} (x_1, x_2) & \longrightarrow & (x_1, x_1 + N) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (x_2, x_2) & \longrightarrow & (x_2, x_1 + N) \end{array} \qquad ,$$

d'où un foncteur $i : \square \to \overline{D}{}^{\circ}_N$

$$(0,0) \mapsto (x_1, x_2),\ (0,1) \mapsto (x_1, x_1{+}N),\ (1,0) \mapsto (x_2, x_2),\ (1,1) \mapsto (x_2, x_1{+}N)\,.$$

Comme $\big(i^*(X)\big)_{(1,0)} = X_{(x_2,x_2)}$ et $\big(i^*(X)\big)_{(0,1)} = X_{(x_1,x_1+N)}$ sont par hypothèse des objets nuls de $\mathbb{D}(e)$, et comme $\big(i^*(X)\big)_{(0,0)} = X_{(x_1,x_2)} = F(x_1, x_2)$ et $\big(i^*(X)\big)_{(1,1)} = X_{(x_2,x_1+N)} = F(x_2, x_1 + N)$, on en déduit un isomorphisme canonique $F(x_2, x_1 + N) \xrightarrow{\sim} F(x_1, x_2)[1]$, qui est par définition la valeur de φ_X

en (x_1, x_2). Il résulte alors des considérations du paragraphe 1.4 que (F_X, φ_X) est un N-triangle, et on appellera un tel triangle N-triangle distingué standard. Par définition, un N-triangle distingué sera un N-triangle isomorphe à un N-triangle distingué standard.

1.9. Il semblerait que les constructions de Franke dans [F] fourniraient, pour tout entier $n \geq 0$, des exemples de catégories fortement triangulées non équivalentes (comme catégories fortement triangulées) dont les catégories n-triangulées sous-jacentes seraient équivalentes (comme catégories n-triangulées).

1.10. Matthias Künzer a développé une autre théorie de catégories triangulées "supérieures", proche mais non équivalente [K]. Le présent travail a pu être influencé de façon subliminale par des exposés d'Alexei Bondal, au Séminaire d'Analyse Algébrique en 2002 [B].

Références

[**BBD**] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, "Faisceaux pervers", Astérisque 100 (1982).

[**F**] J. Franke, *Uniqueness theorems for certain triangulated categories possessing an Adams spectral sequence*, preprint, K-theory Preprint Archives 139 (1996).

[**K**] M. Künzer, *Heller triangulated categories*, preprint, arXiv:math.CT/0508565 v2 (2005).

[**B**] A. Bondal, Exposés au Séminaire d'Analyse Algébrique (2002)..

Georges Maltsiniotis, CNRS, Université Paris 7, UFR de Mathématiques, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France
maltsin@math.jussieu.fr
www.math.jussieu.fr/~maltsin