Lettre d'André Joyal à Alexandre Grothendieck

Éditée par Georges Maltsiniotis

Introduction

Cette lettre d'André Joyal à Alexandre Grothendieck, datée du 11 avril 1984, est un vrai chef-d'œuvre. Elle contient entre autres la première preuve de l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée de Quillen [**23**], [**24**] sur la catégorie des faisceaux simpliciaux, et la première, à ma connaissance, apparition de la notion de catégorie monoïdale tressée [**17**], avant le terme.

La première moitié de la lettre est entièrement consacrée à la construction de la catégorie des modèles fermée des objets simpliciaux d'un topos absolument arbitraire. Les équivalences faibles considérées sont celles d'Illusie [**16**], définies par les faisceaux des groupes d'homotopie, et les cofibrations sont les monomorphismes. La démonstration, essentiellement complète, est basée sur le théorème de Barr [**3**], [**7**], et l'argument du petit objet. Une preuve particulièrement compacte et élégante de cet argument est présentée. Cette partie se termine par quelques variantes possibles, et en particulier, par le cas des complexes de chaînes d'une catégorie abélienne de Grothendieck.

Dans la deuxième moitié, André Joyal expose certains résultats de classification des types d'homotopie tronqués, obtenus en collaboration avec Myles Tiernay. En particulier, il introduit la notion de catégorie monoïdale tressée (qui n'a pas encore ce nom), et il explique que les 3-types d'homotopie pointés simplement connexes sont classifiés par les catégories monoïdales tressées, dont les objets et les flèches sont inversibles. Plus généralement, il définit un produit tensoriel sur la catégorie des 2-groupoïdes, permettant de modéliser tous les 3-types d'homotopie par les groupoïdes enrichies en 2-groupoïdes (au sens de la structure monoïdale définie par ce produit tensoriel). Cette classification des 3-types d'homotopie a été redécouverte, et démontrée dans tous les détails, dans un travail remarquable d'Olivier Leroy [**21**].

Les notes de bas de page d'André Joyal datent de 2006. L'éditeur a ajouté les références bibliographiques et quelques notes.

G. Maltsiniotis

Lettre d'André Joyal à Alexandre Grothendieck, 11.04.1984

11/4/84

Cher Grothendieck,

voilà que je me décide enfin à t'écrire. J'ai promis de t'envoyer la démonstration de l'existence d'une structure de modèles au sens de Quillen [**23**] sur la catégorie des faisceaux simpliciaux d'un topos (de Grothendieck) arbitraire. Quand j'ai reçu tes lettres, je n'avais pas du tout ce problème à l'esprit et je n'y pensais plus depuis plus d'une année. Je m'intéresse actuellement au problème de la description *algébrique* des types d'homotopie. Quand une question m'intéresse suffisamment, elle me colle littéralement à l'esprit et il me devient difficile de me concentrer sur autre chose. J'ai même laissé de côté la lecture pourtant passionnante de tes notes. J'ai pu me libérer partiellement du problème il y a environ deux semaines, ce qui m'a permis de revenir à la lecture de tes notes (et de tes lettres). J'ai constaté avec une agréable surprise que tu réfléchis sur un grand nombre de questions que je considère fondamentales et de grande importance. Ici, nous avons un séminaire (depuis deux années) sur les aspects catégoriques de l'homotopie et de la topologie. Ce n'est pas un séminaire très couru. Les fidèles sont plutôt catégoriciens : Eilenberg, Diaconescu, Linton, Tierney et moi-même. L'année passée il y avait aussi Gavin Wraith en visite à l'Université de Columbia (je suis moi-même visiteur ici depuis 82, l'année prochaine je serai à l'Université du Québec). Il faut ajouter Alex Heller, qui est actuellement en sabbatique quelque part en Italie. Voici la petite histoire du résultat sur les faisceaux simpliciaux. Heller a d'abord démontré [**13**] le résultat suivant : « Pour toute (petite) catégorie A, la catégorie $(A^\wedge)^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$ des préfaisceaux simpliciaux sur A admet une structure de modèles, où les cofibrations sont les monomorphismes » (les équivalences étant définies comme tu le sais). Curieusement, Heller ne croyait pas à ce résultat. J'ai tellement insisté qu'il a trouvé une démonstration en dualisant une démonstration par lui du résultat bien connu (Quillen [**23**]) : « La catégorie $(A^\wedge)^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$ admet une structure de modèles, où les fibrations sont les fibrations de Kan locales » (*i.e.* fibrations après évaluation sur les objets de A). Je m'interroge sur la signification de ces différentes structures de modèles. Il est cependant clair qu'elles permettent d'établir l'existence de foncteurs $\mathrm{R}f_*$ et $\mathrm{L}f_!$ pour un foncteur quelconque $f : A \longrightarrow B$. Tu trouveras une description sommaire de ces résultats dans un manuscrit de Heller ci-inclus(1).

Pour le cas général d'un topos, il faut trouver une nouvelle démonstration, car celle de Heller ne semble pas se transposer. Voici donc une démonstration basée sur des principes qui ne sont pas éloignés de ceux que tu as utilisés dans ton article « Tôhoku » [**12**]. (Peut-être connais-tu déjà cette démonstration.) Soit $\mathcal{E}$ un topos. Il faut d'abord préciser le concept d'équivalence faible(2). Il suffit pour cela de décrire

(1) N. Éd. Probablement une version préliminaire de [**13**].

(2) N. A. J. Le concept d'équivalence faible dans la catégorie des objets simpliciaux d'un topos, ainsi que celui des faisceaux des groupes d'homotopie, a été introduit par Illusie [**16**].

les faisceaux $\pi_n(X)$ $(n \geq 0)$, associés à un objet $X \in \mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$: $\pi_0(X)$ est le conoyau de $X_1 \rightrightarrows X_0$; pour décrire $\pi_n(X)$ $(n \geq 1)$, il faut le concevoir comme un objet de $\mathcal{E}/X_0$, car on évite ainsi le choix d'un point de base (une section globale) de X_0. Autrement dit, le point de base est générique. La construction de Kan des groupes d'homotopie [**18**], [**19**] est alors possible, car celle-ci n'utilise que les limites finies et les colimites

Définition : Un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ est une *équivalence faible* si :

1) $\pi_0(f) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ est un isomorphisme ;
2) pour tout $n \geq 1$, le carré

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0 & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

est cartésien.

Je dois remarquer que les équivalences ainsi définies possèdent toutes les propriétés que l'on attribue habituellement aux équivalences faibles d'ensembles simpliciaux. Plus précisément, elles ont toutes les propriétés *géométriques* des équivalences faibles d'ensembles simpliciaux. (Une propriété est géométrique si elle équivaut à l'inversibilité d'une certaine flèche construite sur un diagramme par des opérations de limites finies et de colimites.) Les propriétés géométriques sont conservées par image inverse u^* le long d'un morphisme géométrique $u : \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}$ entre topoi ; de plus, si u est surjectif (*i.e.* u^* est fidèle), il suffit, si l'on veut démontrer qu'un diagramme D de $\mathcal{E}$ possède une propriété géométrique P, de démontrer que $u^*(D)$ possède la propriété P. D'autre part, on démontre que tout topos $\mathcal{E}$ peut se recouvrir par un topos $\mathcal{B}$ de faisceaux sur une algèbre de Boole complète [**3**], [**7**]. Toute propriété géométrique des équivalences faibles peut donc se vérifier dans $\mathcal{B}$. Si on utilise le fait que $\mathcal{B}$ est un modèle booléen de la théorie classique des ensembles, on voit que l'affirmation faite plus haut, à propos des équivalences faibles, est juste (je ferai référence à ce principe comme le principe de *localisation booléenne*). Voici maintenant une version asymétrique des axiomes de Quillen (je copie quelques notes en anglais) :

Let $\mathcal{C}$ be a category with two classes of maps called the *cofibrations* and the *weak equivalences.* (Definition: A *trivial cofibration* is one which is a weak equivalence.)

A 0 Finite limits and finite colimits exist in $\mathcal{C}$.

A 1 Let $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ be maps in $\mathcal{C}$. Then if two of the maps f, g and gf are weak equivalences, so is the third. Any isomorphism is a weak equivalence.

A 2 Any map f may be factored $f = pi$, where i is a trivial cofibration and p has the RLP (right lifting property) with respect to trivial cofibrations. Also $f = pi$, where i is a cofibration and p has the RLP with respect to cofibrations.

A 3 Cofibrations are stable under composition, cobase change, and any isomorphism is a cofibration.

A 4 The cobase extension of a map which is a trivial cofibration is a trivial cofibration.

A 5 If a map has the RLP with respect to the cofibrations, it is a weak equivalence.

Definition. A *fibration* is a map having the RLP with respect to the trivial cofibrations.

All the axioms M 0 - M 5 of Quillen are consequences of the axioms A 0 - A 5. For example: let

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & F \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

be a square, where p is a fibration and a weak equivalence, and where i is a cofibration. Consider

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & F \arrow[r, equal] \arrow[d, "l"] & F \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "u"] & C \arrow[r, "v"] & G \end{tikzcd} ,$$

where the first square is a pushout. Factor $C \xrightarrow{v} G$ as $v = qj$, where q has the RLP with respect to the cofibrations and j is a cofibration (A 2). Then jl is a cofibration, since l is (A 3). Moreover, jl is a weak equivalence, since q (by A 5) and p are. Therefore, a dotted arrow t exists by definition (of fibrations),

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, equal] \arrow[d, "l"'] & F \arrow[dd, "p"] \\ C \arrow[d, "j"'] & \\ D \arrow[r, "q"'] \arrow[uur, dotted, "t"] & G \end{tikzcd} .$$

The composite tju is a dotted arrow in the square

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & F \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & G \end{tikzcd} .$$

Theorem 1. *Let $\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$ be the category of simplicial objects of a Grothendieck topos $\mathcal{E}$. Let the weak equivalences be defined as above and the cofibrations be the monomorphisms. These two classes of maps define a model structure on $\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$.*

Démonstration ($1^{\text{ère}}$ PARTIE). Nous vérifierons que les axiomes A 0, A 1, A 3, A 4 et A 5 sont satisfaits :

A 0 Trivial.

A 1 Principe de localisation booléenne.

A 3 Trivial.

A 4 Principe de localisation booléenne.

A 5 Supposons que $X \xrightarrow{f} Y$ ait la RLP relativement aux cofibrations. Considérons le diagramme ($n \geq 0$)

$$\begin{tikzcd}
X^{\mathbf{\Delta}_n} \arrow[r] \arrow[dr] & P \arrow[r] \arrow[d] & X^{\dot{\mathbf{\Delta}}_n} \arrow[d] \\
& Y^{\mathbf{\Delta}_n} \arrow[r] & Y^{\dot{\mathbf{\Delta}}_n}
\end{tikzcd},$$

où le carré est cartésien (et $\dot{\mathbf{\Delta}}_n$ désigne le bord du n-simplexe standard $\mathbf{\Delta}_n$). Il suffit de voir que $X^{\mathbf{\Delta}_n} \longrightarrow P$ est un épimorphisme pour conclure que f est une équivalence faible. En fait, c'est un épimorphisme scindé : pour relever une flèche arbitraire $A \longrightarrow P$, il suffit de compléter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \times \dot{\mathbf{\Delta}}_n \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\
A \times \mathbf{\Delta}_n \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y
\end{tikzcd}.$$

A 2 ($2^{\text{ème}}$ PARTIE). Pour montrer que $A \xrightarrow{f} B$ se factorise $f = pi$, où i est une cofibration et p a la RLP relativement aux cofibrations, il suffit de considérer $A \xrightarrow{f} B$ comme objet de $\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\text{opp}}}/B$ et d'utiliser :

Lemme. *Dans un topos quelconque $\mathcal{E}$, tout objet se plonge dans un objet injectif.*

Preuve. On utilise l'application canonique $A \xrightarrow{\{\ \}} \Omega^A$, où Ω est l'élément de Lawvere (il est injectif).

A 2 ($3^{\text{ème}}$ PARTIE). Il reste à montrer que tout $A \xrightarrow{f} B$ se factorise $f = pi$, où i est une cofibration triviale et où p a la RLP relativement aux cofibrations triviales.

13 avril 1984

Un *système de factorisation* (faible) sur une catégorie $\mathcal{C}$ est un couple (E, M) de sous-catégories de $\mathcal{C}$ tel que

(i) les isomorphismes de $\mathcal{C}$ appartiennent à E et à M ;

(ii) toute flèche de $\mathcal{C}$ se factorise en une flèche de E suivie d'une flèche de M ;

(iii) étant donné un carré

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & F \arrow[d, "p"] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & G
\end{tikzcd},$$

où $i \in E$ et $p \in M$, il existe une flèche pointillée.

Pour toute sous-catégorie $E \subseteq \mathcal{C}$, notons $E^{\perp}$ la sous-catégorie des flèches ayant la RLP relativement à E.

Si $\mathcal{C}$ possède un objet terminal 1, on dira qu'un objet $I \in \mathcal{C}$ est *E-injectif* si le morphisme $I \longrightarrow 1$ appartient à $E^{\perp}$.

Proposition 1. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie cocomplète et $E'' \subseteq E' \subseteq E \subseteq \mathcal{C}$ trois sous-catégories contenant les isomorphismes. Supposons que :*

i) *Tout objet de $\mathcal{C}$ a un rang (autrement dit, est petit*[3]*).*

ii) *E est fermé sous la composition transfinie et pushout (changement de cobase).*

iii) *Tout morphisme de E est une composition transfinie de morphismes de E'.*

iv) *Tout morphisme de E' est un pushout d'un morphisme de E''.*

v) *E'' est essentiellement petite.*

Dans ce cas, on a $(E'')^{\perp} = (E')^{\perp} = E^{\perp}$, et le couple $(E, E^{\perp})$ constitue un système de factorisation de $\mathcal{C}$.

Preuve. La première assertion est évidente. Pour démontrer que tout $f : A \longrightarrow B$ se factorise en une flèche de E suivie d'une flèche de $E^{\perp}$, il suffira de vérifier (en se plaçant dans $\mathcal{C}/B$) que tout objet $A \in \mathcal{C}$ se « plonge » dans un objet E-injectif : $A \xrightarrow{i} I$, avec $i \in E$.

Considérons une famille $(G_k \longrightarrow H_k)_{k\in K}$ de représentants des classes d'isomorphisme des flèches de E''. Considérons le foncteur $U : E \longrightarrow \mathrm{Ens}$, défini comme

$$U(X) \;=\; \sum_{k\in K} \mathcal{C}(G_k, X) \quad ,$$

et aussi le sous-foncteur $D \subseteq U$, image par la transformation naturelle

$$\sum_{k\in K} \mathcal{C}(H_k, -) \;\longrightarrow\; \sum_{k\in K} \mathcal{C}(G_k, -) \quad .$$

Il suffit d'utiliser ensuite le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit E une catégorie close par composition transfinie (*i.e. *par colimites indexées par des ordinaux), et soient $D \subseteq U$ des foncteurs $E \longrightarrow \mathrm{Ens}$. Supposons que*

(i) *pour tout $M \in E$ et $x \in U(M)$, il existe $M \xrightarrow{u} M'$ tel que $U(u)(x) \in D(M')$;*

(ii) *l'application canonique*

$$\varinjlim U \;\longrightarrow\; U(\varinjlim)$$

soit surjective pour toute composition transfinie suffisamment longue.

Sous ces conditions, pour tout $M \in E$, il existe $M \longrightarrow M' \in E$ tel que

$$D(M') \;=\; U(M') \quad .$$

Preuve. On construit d'abord $M \xrightarrow{u_1} M_1$ de sorte que $\operatorname{Im} U(u_1) \subseteq D(M_1)$. Il suffit pour cela d'utiliser transfiniment la condition (i). Ensuite, on itère transfiniment la construction de M_1 :

$$M \xrightarrow{\;u_1\;} M_1 \xrightarrow{\;u_2\;} M_2 \longrightarrow \cdots$$

[3] N. Éd. Présentable, dans la terminologie de [**1**].

en posant

$$M_\alpha \;=\; \varinjlim_{i<\alpha} M_i \ \ ,$$

pour tout ordinal limite α. En vertu de la condition (ii), l'application canonique

$$\varinjlim_{i<\alpha} U(M_i) \;\longrightarrow\; U(M_\alpha)$$

est surjective, dès que la cofinalité de α est assez grande. Par conséquent, pour tout $y \in U(M_\alpha)$, il existe $i < \alpha$ et $y' \in U(M_i)$ tels que $y' \mapsto y$ par le morphisme canonique $v_i : M_i \to M_\alpha$ (c'est à dire $U(v_i)(y') = y$). L'image de y' par le morphisme $u_{i+1} : M_i \to M_{i+1}$ appartient à $D(M_{i+1})$, par construction de M_{i+1}. *A fortiori*, l'image de y' par le morphisme canonique $v_i : M_i \to M_\alpha$ appartient à $D(M_\alpha)$. Nous avons donc montré que $y \in D(M_\alpha)$. C.Q.F.D.

Pour appliquer la proposition à la démonstration du théorème, nous aurons besoin de :

Définition. Un objet $X \in \mathcal{E}$ est *α-petit* si le foncteur représentable $\mathcal{E}(X,-)$ préserve les colimites α-filtrantes (α est un cardinal infini régulier).

Remarque : Une catégorie est α-filtrante si tout diagramme de cardinalité $< \alpha$ est la base d'un cône inductif.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{E}$ un topos (de Grothendieck). Il existe un cardinal régulier infini α tel que*

(i) *tout objet $X \in \mathcal{E}$ est réunion α-filtrante de ses sous-objets α-petits ;*

(ii) *tout sous-objet d'un objet α-petit est α-petit.*

Il suffit de représenter $\mathcal{E}$ comme topos de faisceaux sur un site $\mathcal{A}$ et de choisir un cardinal régulier infini strictement supérieur à $\mathrm{Card}(\mathrm{Fl}\,\mathcal{A})$ et aux cardinalités des familles couvrantes de $\mathcal{A}$.

Remarquons que si $X \in \mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$ est α-petit, alors $X_n \in \mathcal{E}$ est α-petit, pour tout $n \geq 0$.

Définition. Si α satisfait les conditions de la proposition 2, nous dirons que $\mathcal{E}$ est *α-bon.*

Proposition 3. *Soit $X \hookrightarrow Y$ une équivalence faible dans $\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$, et supposons que ce topos soit α-bon. Soit P l'ensemble ordonné des sous-objets α-petits $B \hookrightarrow Y$ tels que l'inclusion $B \cap X \hookrightarrow B$ soit une équivalence faible. L'ensemble P est cofinal dans l'ensemble ordonné des sous-objets α-petits de Y.*

Démonstration. Soit Q l'ensemble des sous-objets α-petits de Y. Par définition, $B \in Q$ appartient à P si et seulement si les flèches

$$i_0 \,:\, \pi_0(B \cap X) \;\longrightarrow\; \pi_0(B) \ \ ,$$

$$(n \geq 1) \qquad\qquad i_n \,:\, \pi_n(B \cap X) \;\longrightarrow\; (B_0 \cap X_0) \underset{B_0}{\times} \pi_n(B)$$

sont inversibles. Or, en général, un morphisme de faisceaux $u : F \longrightarrow G$ est inversible si et seulement si les inclusions

$$\mathrm{Im}(u) \;\hookrightarrow\; G \ \ , \qquad\qquad F \;\hookrightarrow\; F \underset{G}{\times} F$$

sont surjectives. Si on prend des coproduits convenables, on peut traduire les conditions d'inversibilité *simultanées* des i_n $(n \geq 0)$ par la condition d'inversibilité d'*une seule* inclusion

$$D(B) \hookrightarrow U(B) \quad .$$

On aura

$$\begin{aligned} D(X) &= \varinjlim_{B \in Q} D(B) \quad , \\ U(X) &= \varinjlim_{B \in Q} U(B) \quad , \end{aligned}$$

et par hypothèse $D(X) = U(X)$.

Soit $B \in Q$. Comme $U(B)$ est α-petit, il existe $B' \in Q$, $B \leq B'$, et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & D(B') \arrow[r] & D(X) \arrow[d, "\wr", no head] \\ U(B) \arrow[ur, dotted] \arrow[rr] & & U(X) \end{tikzcd} \quad .$$

On peut même supposer (en choisissant au besoin $B'' \geq B'$) que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & D(B') \arrow[d] \\ U(B) \arrow[ur, dotted] \arrow[r] & U(B') \end{tikzcd} \quad .$$

Itérant cette construction, on obtient une suite en zigzag :

$$\begin{tikzcd} & D(B') \arrow[d] & D(B'') \arrow[d] & \cdots \\ U(B) \arrow[ur, dotted] & U(B') \arrow[ur, dotted] & U(B'') \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd} \quad .$$

Posant $B^\omega = \bigcup\limits_{n \geq 0} B^{(n)}$, on aura évidemment $B^\omega \in P$.

Pour compléter la démonstration du théorème, on utilise la proposition 1. On prend

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}} \ , \\ E &= \{\text{cofibrations triviales}\} \ , \\ E'' &= \{\text{cofibrations triviales entre objets } \alpha\text{-petits}\} \ , \\ E' &= \{\text{pushouts des éléments de } E''\} \ . \end{aligned}$$

Il reste à montrer que la condition (*iii*) de cette proposition est vérifiée : soit $F \subsetneq G$ une flèche de E, montrons qu'il existe $F \subsetneq F' \subseteq G$, où $F \subsetneq F'$ est une flèche de E'. Par hypothèse, il existe un objet α-petit $B \subseteq G$ tel que $B \nsubseteq F$. La proposition 3 nous montre que l'on peut même supposer que l'inclusion $B \cap F \subseteq B$ est une équivalence faible. On a alors un pushout

$$\begin{tikzcd} B \cap F \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & F \arrow[d, hook] \\ B \arrow[r, hook] & B \cup F \end{tikzcd} ,$$

et $F \hookrightarrow B \cup F \in E'$ puisque $B \cap F \hookrightarrow B \in E''$.

15 avril 1984

Le théorème 1 possède plusieurs variantes, dont l'une est abélienne :

Théorème 2. *Let $\mathcal{A}$ be any Grothendieck abelian category (with generators), and let $C_\bullet(\mathcal{A})$ be the category of $\mathbf{Z}$-graded chain complexes. Define the weak equivalences as the chain mappings inducing isomorphisms on homology. If the cofibrations are chosen to be the monomorphisms, then these two classes of maps define a model structure on $C_\bullet(\mathcal{A})$. Moreover, the same result is true if we replace $C_\bullet(\mathcal{A})$ by the subcategory of positive chain complexes or by the subcategory of chain complexes bounded below.*(4)

Dans la version abélienne, on peut exiger que les cofibrations satisfassent à des conditions plus fortes (quand le contexte le permet). Par exemple, si A est un faisceau d'anneaux et si $\mathcal{A}$ est la catégorie des faisceaux de A-modules, on peut demander que les cofibrations soient les monomorphismes *purs*(5).

Une autre variante consiste à choisir $\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$ comme topos de base. Plus exactement, soit $C \in \mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$ un objet catégorie de $\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$ (C est une catégorie simpliciale(6)). On peut considérer le topos $(\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}})^{C^{\mathrm{opp}}}$ des préfaisceaux sur C à valeurs dans $\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$. On a un foncteur oubliant l'action de C :

$$(\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}})^{C^{\mathrm{opp}}} \longrightarrow \mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}} ,$$

et un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence faible si f induit une équivalence faible entre X et Y, après oubli de l'action de C sur X et Y. On a ensuite le choix entre deux structures de modèles : la *gauche* et la *droite*. Dans la structure gauche, les fibrations sont les morphismes $f : X \longrightarrow Y$ qui induisent une fibration dans $\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$ après oubli de l'action de C. Dans la structure droite, les cofibrations sont les monomorphismes.

(4) N. Éd. Le cas particulier du théorème 2, où $\mathcal{A}$ est la catégorie des faisceaux des modules sur un espace annelé, a été essentiellement démontré (sans utiliser explicitement le formalisme des catégories de modèles) par N. Spaltenstein [**25**]. Le cas général est resté longtemps un théorème du folklore. Une première preuve a été rédigée par F. Morel [**22**]. La première preuve publiée semble être celle de Hovey [**15**], basée sur la réalisation de toute catégorie abélienne de Grothendieck comme localisation d'une catégorie de modules sur un anneau. La preuve la plus conceptuelle, basée sur un théorème de J. Smith se trouve dans un article de T. Beke [**4**].

(5) N. Éd. On dit qu'un monomorphisme est pur s'il est limite inductive filtrante de monomorphismes scindés

(6) N. Éd. À présent, on réserve le terme de catégorie simpliciale au cas où l'objet des objets est discret.

Une autre variante consiste à remplacer le foncteur oubliant ci-haut par le foncteur « espace total » :

$$(\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}})^{C^{\mathrm{opp}}} \longrightarrow (\mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}} \longrightarrow \mathcal{E}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}} ,$$

il est composé du « nerf » suivi de la diagonale.

16 avril

Comme je t'expliquais au début de cette lettre, j'ai eu peu de temps pour examiner les questions fort intéressantes que tu soulèves dans tes notes (qui, pour moi, s'arrêtent à la section 102) et dans tes lettres. Le problème qui m'occupait récemment est celui de la description « algébrique » des types d'homotopie. Le but étant d'en donner une description qui soit la plus réduite possible. Il faudrait que la structure soit transparente avec exclusion maximale de tout ce qui n'est pas invariant. Un très bel exemple est la théorie de l'homotopie rationnelle de Quillen [**24**], ou encore, la version de Sullivan [**26**]. Le projet est de lever l'hypothèse de rationalité. Un problème étroitement relié est celui de la description correcte et « minimale » des spectres. Je n'arrive pas à digérer ce que les topologues ont fait là-dessus, particulièrement les travaux de P. May. Voici cependant quelques résultats obtenus en collaboration avec Myles Tierney.

1) (Résultat connu). Un 2-type peut se représenter comme un 2-groupoïde.

Pour énoncer le résultat nouveau (du moins en apparence), je dois utiliser un produit tensoriel défini sur la catégorie des 2-groupoïdes. La façon la plus simple de le décrire est de définir un produit tensoriel sur la catégorie des ∞-groupoïdes et de tronquer ensuite en dimension 2. On décrit d'abord, pour chaque entier $n \geq 0$, un cube $\square_n$ ayant une k-cellule génératrice inversible, pour chaque face de dimension k (Ronnie Brown a sûrement fait cela quelque part). On pose ensuite

$$\square_n \otimes \square_n \;=\; \square_{n+m} \quad .$$

On vérifie qu'il y a un seul produit $\otimes$ préservant les $\varinjlim$ en chaque variable et satisfaisant à la formule ci-haut[7]. La catégorie des 2-groupoïdes est une sous-catégorie reflexive de la catégorie des ∞-groupoïdes (opération de troncation). Il est remarquable que ce produit $\otimes$ soit aussi commutatif (*i.e.* symétrique cohérent). Il semble que l'on ait aussi une application d'Eilenberg-Zilber[8]

$$\mathrm{Gr}_\infty(X) \otimes \mathrm{Gr}_\infty(Y) \;\longrightarrow\; \mathrm{Gr}_\infty(X \times Y) \quad ,$$

ayant les propriétés que l'on attend d'une telle application. (Ici $\mathrm{Gr}_\infty(X)$ est le ∞-groupoïde associé à un ensemble semi-simplicial X[9]). En tout cas, je suis sûr du résultat en dimension 2 (et aussi 1) :

$$\mathrm{Gr}_2(X) \otimes \mathrm{Gr}_2(Y) \;\longrightarrow\; \mathrm{Gr}_2(X \times Y)$$

---

(7) N. A. J. Le produit tensoriel de ∞-groupoïdes considéré ici est celui de Brown et Higgins [**6**].

(8) N. Éd. Appelée ainsi par analogie au morphisme du produit tensoriel des complexes de chaînes associés à deux ensembles simpliciaux vers le complexe associé à leur produit cartésien [**9**].

(9) N. A. J. Il s'agit de l'∞-groupoïde défini par Brown et Higgins [**5**], associé à l'ensemble simplicial X, filtré par son squelette.

est une équivalence de 2-groupoïdes[10]. Il nous a fallu utiliser ensuite le résultat suivant qui est une version améliorée (en se débarrassant du point de base) d'un résultat de Kan [**20**] :

Soit Grs la catégorie des groupoïdes *enrichis* sur la catégorie des ensembles simpliciaux (ou encore la catégorie des groupoïdes de $\mathrm{Ens}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{opp}}}$ dont l'objet des objets est discret). Il existe une paire de foncteurs adjoints

$$\mathrm{Ens}^{\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{opp}}} \underset{\overline{W}}{\overset{\mathrm{Gr}}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{Grs}} \quad ,$$

induisant une équivalence entre les catégories localisées correspondantes[11]. (Une équivalence $G_1 \xrightarrow{F} G_2$ de groupoïdes est un foncteur tel que :

(i) pour tout a, $b \in \mathrm{Ob}\, G$, le morphisme

$$G_1(a,b) \longrightarrow G_2(Fa, Fb)$$

soit une équivalence ;

(ii) F soit essentiellement surjectif.)

Soit dit en passant, ce théorème est à la base d'une théorie des espaces classifiant les fibrés en tout genre.

2) (Résultat nouveau). Un 3-type peut se représenter comme un groupoïde enrichi sur la catégorie 2-groupoïdes.

Autrement dit, un 3-type peut se représenter comme :

0) un ensemble de 0-cellules ;

1) la donnée, pour chaque couple a, b de 0-cellules, d'un 2-groupoïde $\mathrm{Hom}(a,b)$;

2) la donnée, pour chaque triplet a, b, c de 0-cellules, d'une loi de composition

$$\mathrm{Hom}(a,b) \otimes \mathrm{Hom}(b,c) \longrightarrow \mathrm{Hom}(a,c) \ ;$$

3) la donnée d'unités

$$1 \xrightarrow{u_a} \mathrm{Hom}(a,a) \quad .$$

Le tout étant *strictement* associatif et unitaire, et de plus définissant un groupoïde ordinaire lorsque l'on se restreint aux 0-squelettes $\mathrm{Hom}_0(a,b)$. (On a la formule $(C \otimes D)_0 = C_0 \times D_0$, pour tout couple de 2-groupoïdes C et D).[12]

Nous ignorons pour le moment comment étendre ce résultat aux types de dimension > 3. Cependant, voici un résultat pour les 2-segments $K(\pi_n, \pi_{n+1})$ (un k-segment est un type d'homotopie dont les groupes d'homotopie sont triviaux en toute dimension, sauf pour k dimensions successives).

---

(10) N. A. J. Le produit tensoriel de 2-groupoïdes considéré ici est symétrique. Son extension aux 2-catégories est souvent confondu avec le produit tensoriel de Gray qui lui n'est pas symétrique [**11**].

(11) N. A. J. L'équivalence entre la théorie homotopique des ensembles simpliciaux et celle des groupoïdes simpliciaux a été démontrée par Dwyer et Kan [**8**].

(12) N. A. J. Cette représentation des 3-types d'homotopie a été redécouverte par Olivier Leroy en 1994 [**21**].

– Il est connu que l'on peut représenter le segment $K(\pi_1,\pi_2)$ par un groupoïde de Picard non commutatif [13]. Plus exactement, par un groupoïde $\mathcal{C}$ muni d'un produit $\otimes$ associatif et unitaire à cohérence près, et tel que pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, il existe $X^* \in \mathcal{C}$ et des isomorphismes

$$X \otimes X^* \;\simeq\; X^* \otimes X \;\simeq\; I \qquad \text{(unité)}\ .$$

On peut même supposer que $\mathcal{C}$ est un groupe dans la catégorie des groupoïdes.

– Pour représenter le segment $K(\pi_2,\pi_3)$, il faut ajouter à la catégorie de Picard $\mathcal{C}$, décrite plus haut, une structure de symétrie fonctorielle

$$\theta_{A,B}\ :\ A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A\ ,$$

satisfaisant à la condition de cohérence de l'hexagone de Mac Lane. Cependant, *on n'exige pas* que

$$\theta_{A,B} \;=\; \theta^{-1}_{B,A} \qquad \mathbf{!}$$

(On demande cependant que θ se comporte bien vis à vis de l'unité I [14].)[15] Je dois ajouter ici que ce qui est décrit par cette structure est le « loop space » du segment $K(\pi_1,\pi_2)$. De plus, on peut supposer $\mathcal{C}$ strictement associatif et unitaire, ce qui fait de $\mathcal{C}$ un groupe que l'on peut supposer *abélien* (sans que $\theta_{A,B}$ soit l'identité de $A\otimes B$). Un exemple intéressant est le 3-type de la sphère S^2. Les groupes d'homotopie sont 0, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$.

$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \mathbf{Z}$

$$\mathrm{Hom}(m,n) \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{si } m \neq n \\ \mathbf{Z} & \text{si } m = n \end{cases}$$

composition

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "a+b"'] & n \arrow[d, "b"] \\ & n \end{tikzcd}$$

produit $\otimes$

$$(n \xrightarrow{a} n) \otimes (m \xrightarrow{b} m) \;=\; (n+m \xrightarrow{a+b} n+m)$$

symétrie

$$\theta_{n,m}\ :\ n+m \xrightarrow{nm} m+n$$ [16]

[13] N. A. J. Cela est implicite dans la thèse de Hoàng Xuân Sính [**14**].

[14] N. Éd. En fait, la compatibilité de θ avec les contraintes d'unité est conséquence des conditions de cohérence des hexagones de Mac Lane.

[15] N. A. J. Ce qui est défini ici est la notion de tressage d'une catégorie monoïdale [**17**].

[16] N. A. J. Le 3-type de la sphère S^2 est algébriquement modélisé par ce groupoïde monoïdal *tressé*.

– Pour représenter le segment $K(\pi_3, \pi_4)$, il faut ajouter la condition supplémentaire de cohérence
$$\theta_{A,B} \;=\; \theta_{B,A}^{-1} \quad .$$
On obtient alors exactement les catégories symétriques monoïdales avec inverses (ou quasi-inverses)[17]. Encore une fois, ces groupoïdes ont des représentants stricts, sauf qu'il est en général impossible de tuer la symétrie θ. Je crois que tu es familier avec l'invariant *signature*
$$\theta_{A,A} \;=\; \mathrm{sgn}(A) \quad ,$$
qui permet de définir une fonction additive d'ordre 2
$$\mathrm{sgn} \;:\; \pi_3 \;\longrightarrow\; \pi_4 \quad .$$

– Le segment $K(\pi_3, \pi_4)$ est *stable*; tous les autres segments $K(\pi_n, \pi_{n+1})$ $(n > 3)$ ont la même description que celui-là. En fait, ce qui est ici décrit est un *spectre* avec exactement deux groupes d'homotopie[18]. Il est amusant de décrire le segment $K(\pi_3, \pi_4)$ de la sphère S^3.

$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \mathbf{Z}$

$$\mathrm{Hom}(m,n) \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{si } m \neq n \\ \{-1,+1\} & \text{si } m = n \end{cases}$$

composition

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\eta\varepsilon"'] & n \arrow[d, "\eta"] \\ & n \end{tikzcd}$$

produit $\otimes$

$$(n \xrightarrow{\eta} n) \otimes (m \xrightarrow{\varepsilon} m) \;=\; (n+m \xrightarrow{\eta\varepsilon} n+m)$$

symétrie

$$\theta_{n,m} \;:\; n+m \xrightarrow{(-1)^{nm}} m+n$$ [19]

Il y a mille et une chose desquelles j'aimerais discuter avec toi. J'ai aussi l'intention de regarder de très près les questions que tu soulèves. J'ai beaucoup d'admiration pour ton imagination créatrice et ta méthode. Cela serait un grand plaisir de correspondre

[17] N. Éd. Autrement dit, dont les flèches admettent des inverses, et les objets des quasi-inverses.

[18] N. A. J. Le fait qu'un segment $K(\pi_n, \pi_{n+1})$ soit stable si $n \geq 3$ est une conséquence du théorème de suspension de Freudenthal [**10**]. Nous observons qu'un segment $K(\pi_1, \pi_2)$ est modélisable algébriquement par un groupoïde monoïdal, qu'un segment $K(\pi_2, \pi_3)$ est modélisable par un groupoïde monoïdal tressé, et qu'un segment $K(\pi_n, \pi_{n+1})$ est modélisable par un groupoïde monoïdal symétrique si $n \geq 3$. Ces observations ont été généralisées par Baez et Dolan [**2**] sous le nom de « tableau périodique ».

[19] N. A. J. Le 4-type de la sphère S^3 est algébriquement modélisé par ce groupoïde monoïdal *symétrique*.

avec toi (si tu me pardonne ma lenteur – j'ai la ferme intention de corriger ce vilain défaut !). Je t'envoie cette lettre demain matin.

Bien cordialement à toi
et à bientôt j'espère

André

P.S. Si Baues veut toujours organiser une rencontre, Tierney et moi aimerions participer.

Références

[1] J. Adámek & J. Rosický – *Locally Presentable and Accessible Categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 189, Cambridge University Press, 1994.

[2] J. C. Baez & J. Dolan – « Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory », *J. Math. Phys.* **36** (1995), no. 11, p. 6073–6105.

[3] M. Barr – « Toposes without points », *J. Pure Appl. Algebra* **5** (1974), p. 265–280.

[4] T. Beke – « Sheafifiable homotopy model categories », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **129** (2000), p. 447–475.

[5] R. Brown & P. J. Higgins – « Colimit theorems for relative homotopy groups », *J. Pure Appl. Algebra* **22 (1)** (1981), p. 11–41.

[6] ______, « Tensor products and homotopies for ω-groupoids and crossed complexes », *J. Pure Appl. Algebra* **47** (1987), p. 1–33.

[7] R. Diaconescu – « Grothendieck toposes have boolean points–a new proof », *Comm. Algebra* **4** (1976), no. 8, p. 723–729.

[8] W. G. Dwyer & D. M. Kan – « Homotopy theory and simplicial groupoids », *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* **46** (1984), p. 379–385.

[9] S. Eilenberg & J. A. Zilber – « On products of complexes », *Amer. J. Math.* **75** (1953), p. 200–204.

[10] H. Freudenthal – « Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. Große Dimensionen », *Compositio Math.* **5** (1938), p. 299–314.

[11] J. W. Gray – *Formal category theory : adjointness for* 2*-categories*, Lect. Notes in Math., vol. 391, Springer-Verlag, 1974.

[12] A. Grothendieck – « Sur quelques points d'algèbre homologique », *Tôhoku Math. J. (2)* **9** (1957), p. 119–221.

[13] A. Heller – « Homotopy theories », *Mem. Amer. Math. Soc.* **71** (1988), no. 383.

[14] Hoàng Xuân Sính – « Gr-catégories », Thèse d'État, Université Paris 7, 1975.

[15] M. Hovey – « Model category structures on chain complexes of sheaves », *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), p. 2441–2457.

[16] L. Illusie – *Complexe cotangent et déformations I, II*, Lect. Notes in Math., Vol. 239 et 283, Springer-Verlag, 1971-1972.

[17] A. Joyal & R. Street – « Braided tensor categories », *Adv. Math.* **102** (1993), p. 20–78.

[18] D. M. Kan – « Abstract homotopy. IV », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **42** (1956), p. 542–544.

[19] ———, « A combinatorial definition of homotopy groups », *Ann. of Math. (2)* **67** (1958), p. 282–312.

[20] ———, « On homotopy theory and c.s.s. groups », *Ann. of Math. (2)* **68** (1958), p. 38–53.

[21] O. Leroy – « Sur une notion de 3-catégorie adaptée à l'homotopie », Prépublication de l'Université Montpellier II, 1994.

[22] F. Morel – « La catégorie dérivée d'une catégorie abélienne de Grothendieck », Manuscrit, 1990.

[23] D. Quillen – *Homotopical algebra*, Lect. Notes in Math., vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[24] ———, « Rational homotopy theory », *Annals of Math.* **90** (1969), p. 205–295.

[25] N. Spaltenstein – « Resolutions of unbounded complexes », *Compositio Math.* **65** (1988), p. 121–154.

[26] D. Sullivan – « Infinitesimal computations in topology », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **47** (1977), p. 269–331.