Exposants p-adiques et solutions dans les couronnes

*Gilles Christol **

Ce texte présente une famille d'exemples d'équations différentielles (hypergéométriques) p-adiques du second ordre ayant une pathologie due à la présence de nombres de Liouville et montrant la nécessité des conditions "Non-Liouville" introduites dans un certain nombre de théorèmes.

In this text can be found a family of examples of (hypergeometric) second order p-adic differential equations with a pathology due to the presence of Liouville numbers and showing the usefullness of "Non-Liouville" conditions that appear in several theorems.

1 Introduction

La théorie des équations différentielles p-adiques a beaucoup progressé ces dernières années. On dispose en particulier aujourd'hui de l'analogue p-adique des deux grands théorèmes de structure de la théorie complexe, à savoir le théorème de Fuchs [**3**] et le théorème de Turrittin [**11**]. L'analogue p-adique du théorème de Turrittin (appelé aussi "conjecture" de Crew) a d'ailleurs permis récemment de démontrer une conjecture de Fontaine sur les représentations p-adiques (voir [**6**] pour une présentation générale).

Toutefois le travail à fournir pour obtenir des résultats comparables est beaucoup plus important dans le cas p-adique que dans le cas complexe. Ceci vient principalement de la définition des exposants : alors que dans le cas complexe ceux-ci sont les racines d'un polynôme explicite, il ne sont obtenus, dans le cas p-adique, qu'au terme d'un processus analytique compliqué qui rend d'ailleurs leur calcul impossible en général.

Il est donc normal de se demander si les difficultés rencontrées sont intrinsèques ou seulement dues à un artefact introduit par la méthode choisie pour aborder le problème. Cet article présente un exemple, ou plutôt une famille d'exemples, prouvant que les nombres de Liouville p-adiques forment une obstruction incontournable et imposent une condition de "Non-Liouvilité" dans beaucoup d'énoncés. En particulier, on obtient ainsi des exemples de module différentiel $\mathcal{M}$ d'ordre 2 sur l'anneau de Robba $\mathcal{R}$ pour lesquelles la conjecture de Crew est fausse : pour aucune extension finie séparable L de $\mathbb{F}_p(x)$ le module différentiel $\mathcal{M} \otimes calR_L$ ne possède de sous-module de rang un.

Cette condition est pratiquement impossible à vérifier directement et, actuellement, elle impose de se limiter aux équations ayant une "structure de Frobenius forte" ce qui, fort heureusement, est le cas de toutes celles qui "viennent de la géométrie", c'est-à-dire essentiellement de toutes celles qui sont intéressantes.

Le point faible de l'exemple présenté ici est de nécessiter l'introduction d'un nombre de Liouville directement dans les coefficients de l'équation différentielle. On espère toutefois ([**4**] conjecture 7-7, [**2**] conjecture 3-5), sans avoir aucune idée d'une démonstration éventuelle, que l'on ne peut pas trouver d'exemple où la non-Liouvilité est mieux cachée : par exemple, on suppose que, pour une équation différentielle à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$, ni les composantes de l'exposant p-adique ni leurs différences ne sont des nombres de Liouville.

* *Université Paris 6, Boite 247, 175 rue du Chevaleret, 75013 PARIS*
Le 3/1/2010

Considérons une équation différentielle $L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0$, avec $D = d/dx$, dont les coefficients a_i sont des fonctions analytiques sur la couronne $\mathcal{C} = \{x; v(x) \in I\}$ pour un intervalle $I \subset]0, \infty[$.

- On dit que le nombre α est un "exposant naif" de L s'il existe une couronne non vide $\mathcal{C}_\alpha \subset \mathcal{C}$ et une fonction non nulle f_α analytique $\mathcal{C}_\alpha$ telle $L(x^\alpha f_\alpha) = 0$. On supposera que la couronne $\mathcal{C}_\alpha$ a été choisie maximum.
- On dit que L satisfait la condition de Robba sur $\mathcal{C}$ si, pour tout point t de $\mathcal{C}$, toutes les solutions de L au voisinage de t convergent dans le disque $D(t, v(t)) = \{x; v(x-t) > v(t)\}$.

Si L satisfait la condition de Robba, on sait lui associer un "exposant p-adique" (voir [**3**], [**8**]). Celui-ci est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$ définie sur l'ensemble $(\mathbb{Z}_p)^n$ par :

- $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \overset{\mathfrak{E}}{\sim} (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ s'il existe une constante c et une suite de permutations (σ_h) de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ telles que, pour $1 \le i \le n$ et pour tout entier h, on ait $-ch \le \alpha_i^{(h)} - \beta_{\sigma_h(i)}^{(h)} \le ch$ où $\alpha^{(h)}$ désigne l'unique entier de $[\![(1-p^h)/2, (p^h+1)/2[\![$ vérifiant la relation $v(\alpha^{(h)} - \alpha) > h$.

La relation $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$ est plus grossière que la relation "avoir les mêmes composantes modulo $\mathbb{Z}$ à ordre près". Toutefois, si (un représentant de) l'exposant p-adique a des composantes dont les différences ne sont pas des nombres de Liouville (cette propriété est indépendante du représentant choisi), on démontre [**3**] que ses représentants sont les éléments de $\mathbb{Z}_p^n$ congrus modulo $\mathbb{Z}$ à une permutation de l'un d'entre eux. Dans ce cas, on montre aussi que chacune des composantes α_i d'un représentant de l'exposant p-adique de L est un exposant naif de L avec $\mathcal{C}_{\alpha_i} = \mathcal{C}$.
A l'opposé, si l'exposant p-adique a au moins deux composantes dont la différence est un nombre de Liouville, on vérifie facilement qu'il possède une infinité non dénombrable de repésentants. Comparer les exposants naifs et l'exposant p-adique devient alors subtile. En fait, en un point de $\mathcal{C}$, l'équation différentielle L a, au plus, n solutions non nulles de la forme $x^\alpha f_\alpha$ pour des nombres α distincts. Un point de $\mathcal{C}$ est donc contenu dans au plus n couronnes $\mathcal{C}_\alpha$ correspondant à un exposant naif. Il en résulte que les couronnes $\mathcal{C}_\alpha$ sont en nombre au plus dénombrable et qu'il en est de même des exposants naifs. En particulier, la plupart des représentants de l'exposant p-adique ne possèdent pas de composante qui soit un exposant naif. Inversement, il est cependant facile de voir qu'un exposant naif apparaît comme composante dans au moins un représentant de l'exposant.
Les exemples présentés ici montrent que l'on peut effectivement avoir une infinité (dénombrable) d'exposants naifs et donc de couronnes $\mathcal{C}_\alpha$ distinctes. On constatera d'ailleurs dans ces exemples que l'intervalle I est la réunion des adhérences des intervalles I_α définissant les couronnes $\mathcal{C}_\alpha$. Cette propriété semble être toujours vérifiée mais on ne sait pas la démontrer en toute généralité.

Nos exemples reprennent, en l'approfondissant, une situation déjà analysée par Dwork ([**3**] exemples 4-5 et 6-4).

Cet article est divisé en trois parties.

Dans la première, on cherche une estimation fine de la valuation du symbole de Pochhammer pour certains nombres p-adiques et notamment pour les nombres de Liouville. Les résultats exposés ne sont pas réellement nouveaux, mais comme nous avons besoin d'un peu plus de précision que celle que l'on trouve habituellement dans la littérature, nous avons pensé utile de redonner des démonstrations complètes.

Dans la seconde on construit un nombre α de Liouville ayant de "bonnes" propriétés. L'essentiel de cette construction est résumé sous forme d'un tableau. Le nombre α est construit à partir d'une suite croissante (r_k) de nombres réels. On pourrait compliquer encore la situation en considérant une suite non forcément croissante et cela reste une voie prometteuse pour construire des contre-exemples de plus en plus compliqués. Il semble que l'on puisse ainsi obtenir des exemples dans lesquels l'ensemble des extrémités des intervalles I_k possèdent plusieurs, voire une infinité dénombrable de, points d'accumulation. Les difficultés techniques et le manque d'application nous ont fait renoncer à décrire cette situation dans tous ses détails.

Dans la troisième, on étudie l'équation différentielle L_α associée au nombre α. C'est, à une homothétie de rapport q près, l'équation différentielle minimale dont une solution est la fonction hypergéométrique ${}_3F_0(\alpha,1,1;x)$. On montre que l'équation différentielle L_α est de Robba sur la couronne $\mathcal{C}=\{x; v(x)<v(q)-\frac{2}{p-1}\}$ et que ses exposants formels à l'infini $(1-\alpha,0)$ forment, au signe près, un représentant de son exposant p-adique dans cette couronne. Le choix du nombre α fait que, pour chaque indice k, il existe une solution de L_α de la forme $x^{\gamma_k}f_k(x)$ pour une fonction f_k analytique dans la couronne $\mathcal{C}_k=\{x; v(q)-\frac{2}{p-1}-r_{k+1}<v(x)<v(q)-\frac{2}{p-1}-r_k\}$. Naturellement, pour chaque indice k, le nombre γ_k apparaît dans un représentant de l'exposant p-adique de L_α. Plus précisément, le couple $(\gamma_k,\alpha-\gamma_k)$ est un représentant l'exposant p-adique de L_α dans la couronne $\mathcal{C}$.

Les différentes étapes de la construction sont présentées sous forme de lemmes et théorèmes. En contrepoint, nous avons ajouté quelques remarques pour préciser en quoi le cas particulier choisi éclaire la théorie générale. Elles s'adressent en particulier au lecteur qui ne souhaite pas rentrer dans les détails techniques.

2 Valuation du symbole de Pochhammer

On munit $\mathbb{Z}_p$ de la valuation v définie par $v(p)=1$ et on note $[x]$ la partie entière du nombre réel x et $\rrbracket a,b\rrbracket$ l'ensemble des entiers n tels que $a<n\leq b$.

Définition 1. — Soit a un élément de $\mathbb{Z}_p$ et soit n un entier. On pose :

$$\big(a\big)_0=1\ ,\qquad \big(a\big)_n=a\,(a+1)\cdots(a+n-1).$$

et on note $k_{a,n}$ l'unique entier vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} & 0\leq k_{a,n}<n,\\ (\forall k\in\mathbb{N}\,,\ 0\leq k<n) & v(a+k_{a,n})\geq v(a+k),\\ (\forall k\in\mathbb{N}\,,\ 0\leq k<k_{a,n}) & v(a+k_{a,n})>v(a+k)\end{cases}$$

Autrement dit, $k_{a,n}$ réalise la meilleure approximation de $-a$ parmi les entiers strictement inférieurs à n (et est le plus petit des entiers ayant cette propriété). En particulier, on aura $v(a+k_{a,n})\geq[\log_p(n)]$.

Lemme 2. — *Soit a un élément de $\mathbb{Z}_p$ et soit n un entier. On a :*

$$0\leq v(a+k_{a,n})-[\log_p(n)]\leq v\big(\big(a\big)_n\big)-v((n-1)!)\leq v(a+k_{a,n})$$

Preuve : Supposons que $0\leq k<n$. On a $-n<k-k_{a,n}<n$ et donc $v(k-k_{a,n})\leq[\log_p(n)]$. Donc, si $k\neq k_{a,n}$, on a

$$v\big((a+k)-(a+k_{a,n})\big)=v\big(k-k_{a,n}\big)\leq[\log_p(n)]\leq v(a+k_{a,n})$$

Mais on a aussi, par définition, $v(a+k)\leq v(a+k_{a,n})$. Il en résulte que $v(a+k)=v(k-k_{a,n})$.

En appliquant à chaque valeur de $k \neq k_{a,n}$, on obtient :

$$v\big((a)_n\big) = v\big((-1)^{k_{a,n}}\, k_{a,n}!\big) + v(a+k_{a,n}) + v\big((n-k_{a,n}-1)!\big)$$

c'est-à-dire :

$$v\big((a)_n\big) = v(a+k_{a,n}) + v\big((n-1)!\big) - v\Big(\binom{n-1}{k_{a,n}}\Big).$$

Le lemme est alors une conséquence de l'encadrement classique :

$$0 \leq v\Big(\binom{n}{k}\Big) \leq [\log_p(n)] \qquad \square$$

Lemme 3. — *Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et soit ε une application de $\mathbb{N}$ dans $\{\pm 1\}$ (si $p=2$, on suppose en outre que $\varphi(h+1)-\varphi(h) \geq 2$). On pose $a = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon(m)\, p^{\varphi(m)}$ et*

$$a_h = -\textstyle\sum_{m=0}^{h} \varepsilon(m)\, p^{\varphi(m)} \qquad \text{si } \varepsilon(h) = -1,$$

$$a_{h,k} = p^k - \textstyle\sum_{m=0}^{h} \varepsilon(m)\, p^{\varphi(m)}\ , \quad a_h = a_{h,\varphi(h)+1} \qquad \text{si } \varepsilon(h) = +1.$$

Alors $0 < p^{\varphi(h)} - 2p^{\varphi(h-1)} < a_h < p^{\varphi(h)+1}$. Plus précisément, si $\varphi(h)-\varphi(h-1)$ tend vers l'infini avec h, alors, lorsque h tend vers l'infini, si $\varepsilon(h)=-1$, a_h est équivalent à $p^{\varphi(h)}$ et si $\varepsilon(h)=+1$, a_h est équivalent à $(p-1)p^{\varphi(h)}$.

Preuve : On a :

$$\Big|\sum_{m=0}^{h-1} \varepsilon(m)\, p^{\varphi(m)}\Big| \leq \sum_{k=0}^{\varphi(h-1)} p^k = \frac{p^{\varphi(h-1)+1}-1}{p-1} < \frac{p}{p-1} p^{\varphi(h-1)} \leq 2\, p^{\varphi(h-1)} < p^{\varphi(h)}.$$

Pour $\varepsilon(h) = -1$, on a $a_h = p^{\varphi(h)} - \sum_{m=0}^{h-1} \varepsilon(m)\, p^{\varphi(m)}$ et on trouve :

$$0 < p^{\varphi(h)} - 2p^{\varphi(h-1)} < a_h < p^{\varphi(h)} + 2p^{\varphi(h-1)} < p^{\varphi(h)+1}.$$

Pour $\varepsilon(h) = +1$, on a $a_h = p^{\varphi(h)+1} - p^{\varphi(h)} - \sum_{m=0}^{h-1} \varepsilon(m)\, p^{\varphi(m)}$ et on trouve :

$$0 < p^{\varphi(h)}(p-1) - 2p^{\varphi(h-1)} < a_h < p^{\varphi(h)}(p-1) + 2p^{\varphi(h-1)} < p^{\varphi(h)+1}.$$

Les équivalents annoncés résultent immédiatement de ces encadrements. $\square$

Lemme 4. — *On reprend les notations du lemme 3.*
Pour $1 \leq n \leq a_h$, on a $v(a+k_{a,n}) \leq \varphi(h)$. Plus précisément, pour $a_h < n \leq a_{h+1}$,

- *si $\varepsilon(h) = -1$, on a $k_{a,n} = a_h$ et $v(a+k_{a,n}) = \varphi(h+1)$,*
- *si $\varepsilon(h) = +1$, posant $k = [\log_p(n - a_{h,0})]$*
  $\left(\text{de telle sorte que } \varphi(h)+1 \leq k \leq \begin{cases} \varphi(h+1)-1 & \text{si } \varepsilon(h+1) = -1 \\ \varphi(h+1) & \text{si } \varepsilon(h+1) = +1 \end{cases}\right)$,
  on a $k_{a,n} = a_{h,k}$ et $v(a+k_{a,n}) = k$ (resp. $k+1$ si $k = \varphi(h+1)$ et $p=2$) .

Preuve : Pour $\varepsilon = -1$ (resp. $\varepsilon = +1$), on a $a + a_h = \sum_{m=h+1}^{\infty} \varepsilon(m)\, p^{\varphi(m)}$ (resp. $a + a_h = p^{\varphi(h)+1} + \sum_{m=h+1}^{\infty} \varepsilon(m)\, p^{\varphi(m)}$). Dans les deux cas, on a $v(a + a_h) > \varphi(h)$. Or a_h est un entier et, d'après le lemme 3, $0 < a_h < p^{\varphi(h)+1}$. Donc, pour $0 \leq k < a_h$ on a $v(k - a_h) \leq \varphi(h)$ et $v(a+k) \leq \varphi(h)$. En particulier, pour $1 \leq n \leq a_h$, on a $v(a+k_{a,n}) \leq \varphi(h)$.
Pour $\varepsilon(h) = -1$, on constate que $v(a + a_h) = \varphi(h + 1)$ et on en déduit que $k_{a,n} = a_h$ pour $a_h < n \leq a_{h+1}$.
Pour $\varepsilon(h) = +1$, on commence par remarquer que

$$a_{h+1} = \begin{cases} a_{h,\varphi(h+1)} & \text{si } \varepsilon(h+1) = -1 \\ a_{h,\varphi(h+1)+1} - p^{\varphi(h+1)} & \text{si } \varepsilon(h+1) = +1 \end{cases}$$

Par ailleurs, de $0 < a_{h,k} < p^k$ et $a + a_{h,k} = p^k + \sum_{m=h+1}^{\infty} \varepsilon(m)\, p^{\varphi(m)}$ on déduit :

$$v(a + a_{h,k}) = \begin{cases} k & \text{si } k < \varphi(h+1) \\ k & \text{si } k = \varphi(h+1),\ \varepsilon(h+1) = +1 \text{ et } p > 2 \\ k+1 & \text{si } k = \varphi(h+1),\ \varepsilon(h+1) = +1 \text{ et } p = 2. \end{cases}$$

Dans chacun de ces cas on aura $k_{a,n} = a_{h,k}$ pour $a_{h,k} < n \leq a_{h,k+1}$ c'est-à-dire $a_{h,k} \leq n - 1 < a_{h,k+1}$. Pour terminer, il suffit de réécrire cet encadrement sous la forme : $p^k \leq n - a_{h,0} < p^{k+1}$. $\square$

Lemme 5. — *On garde les notations du lemme 3 et on suppose que $\varphi(h+1) - \varphi(h)$ tend vers l'infini avec h. On pose en outre :*

$$\mathbb{N}_a^- = \bigcup_{\varepsilon(h)=-1} \rrbracket a_h, a_{h+1} \rrbracket \qquad \mathbb{N}_a^+ = \bigcup_{\varepsilon(h)=+1} \rrbracket a_h, a_{h+1} \rrbracket$$

Alors $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} v\big((a)_n\big) = \frac{1}{p-1}$ *et*

$$\limsup_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}_a^-}} \frac{1}{n} v\big((a)_n\big) = \frac{1}{p-1} + \limsup_{\substack{h\to\infty \\ \varepsilon(h)=-1}} \frac{\varphi(h+1)}{p^{\varphi(h)}}, \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}_a^+}} \frac{1}{n} v\big((a)_n\big) = \frac{1}{p-1}.$$

Preuve : Comme, pour $0 \leq k < a_h$, on a $v(a+k) \leq \varphi(h)$, le lemme 2 donne pour $1 \leq n \leq a_h$:

$$0 \leq \frac{v\big((a)_n\big) - v((n-1)!)}{n} \qquad \text{et} \qquad \frac{v\big((a)_{a_h}\big) - v((a_h - 1)!)}{a_h} \leq \frac{\varphi(h)}{a_h}.$$

Par ailleurs on sait que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} v((n-1)!) = \frac{1}{p-1}.$$

On trouve donc en utilisant le lemme 3 :

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{v\big((a)_n\big)}{n} - \frac{1}{p-1} \leq \liminf_{h\to\infty} \frac{v\big((a)_{a_h}\big) - v((a_h - 1)!)}{a_h} \leq \lim_{h\to\infty} \frac{\varphi(h)}{a_h} = 0$$

Maintenant, on utilise les lemmes 2 et 4. On trouve :

- pour n dans $\mathbb{N}_a^+$ et donc pour $a_h < n \leq a_{h+1}$ avec $\varepsilon(h) = +1$,
  $[\log_p(n - a_{h,0})] - [\log_p(n)] \leq v\big((a)_n\big) - v((n-1)!) \leq [\log_p(n - a_{h,0})]$

et on en déduit que,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}_a^+}} \frac{1}{n} v(\big(a\big)_n) = \lim \frac{1}{n} v((n-1)!) = \frac{1}{p-1}$$

- pour n dans $\mathbb{N}_a^-$ et donc pour $a_h < n \leq a_{h+1}$ avec $\varepsilon(h) = -1$,
$$\varphi(h+1) - [\log_p(n)] \leq v(\big(a\big)_n) - v((n-1)!) \leq \varphi(h+1).$$

Le maximum de $\frac{1}{n}\varphi(h+1)$ étant atteint pour $n = a_h + 1$, on obtient

$$\limsup_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}_a^-}} \frac{1}{n} v(\big(a\big)_n) = \frac{1}{p-1} + \limsup_{\substack{h\to\infty\\ \varepsilon(h)=-1}} \frac{\varphi(h+1)}{a_h+1}.$$

On conclut en utilisant le lemme 3 d'après lequel $a_h + 1$ est équivalent à $p^{\varphi(h)}$. $\square$

Remarque 6. — On constate que la série $(1+x)^{-a} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!}(-x)^n$ a un rayon de convergence strictement inférieur à 1 si et seulement si $\limsup \frac{1}{n} v(\big(a\big)_n) > \frac{1}{p-1}$, c'est-à-dire si $\limsup_{\varepsilon(h)=-1} \dfrac{\varphi(h+1)}{p^{\varphi(h)}} > 0$. De manière analogue, on trouve que la série $(1+x)^a$ a un rayon de convergence strictement inférieur à 1 si et seulement si $\limsup_{\varepsilon(h)=+1} \dfrac{\varphi(h+1)}{p^{\varphi(h)}} > 0$. On dit que le nombre a est de Liouville si l'une de ces deux propriétés se produit, c'est-à-dire si et seulement si $\limsup \dfrac{\varphi(h+1)}{p^{\varphi(h)}} > 0$. Bien entendu les nombres de Liouville ne sont pas tous du type du nombre a que nous considérons ici mais ce type particulier est tout à fait représentatif du cas général tout au moins pour les phénomènes que nous étudions dans cet article.

Lemme 7. — *Soit φ_a et φ_b deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\lim_{h\to\infty} \varphi_a(h) - \varphi_a(h-1) = \lim_{h\to\infty} \varphi_b(h) - \varphi_b(h-1) = \infty$ et soit ε_a et ε_b deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\{\pm 1\}$. On pose $a = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_a(s)\, p^{\varphi_a(s)}$, $b = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_b(s)\, p^{\varphi_b(s)}$ et on définit les suites a_h et b_h comme dans le lemme 3.*
S'il existe trois suites strictement croissantes h_m, k_m et ℓ_m telles que :

$$\begin{cases} \ell_{2m} = \varphi_a(h_m), & \varepsilon_a(h_m) = -1, \quad \varphi_a(h_m+1) > \ell_{2m+1} \\ \ell_{2m-1} = \varphi_b(k_m), & \varepsilon_b(k_m) = -1, \quad \varphi_b(k_m+1) > \ell_{2m} \end{cases}$$

alors $$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} v(\big(a\big)_n \big(b\big)_n) = \frac{2}{p-1} + \min\Big(\liminf_{m\to\infty} \frac{\varphi_a(h_m+1)}{p^{\ell_{2m+1}}}, \liminf_{m\to\infty} \frac{\varphi_b(k_m+1)}{p^{\ell_{2m}}}\Big).$$

Preuve : Comme les suites h_m et k_m sont strictement croissantes et comme les applications φ_a et φ_b sont croissantes, on trouve :

$$\varphi_b(k_m) = \ell_{2m-1} < \varphi_a(h_{m-1}+1) \leq \varphi_a(h_m) = \ell_{2m} < \varphi_b(k_m+1) \leq \varphi_b(k_{m+1}).$$

Par ailleurs, on a $\varepsilon_a(h_m) = \varepsilon_b(k_m) = -1$ et le lemme 3 montre que a_{h_m} (resp. b_{k_m}) est équivalent à $p^{\varphi_a(h_m)}$ (resp. $p^{\varphi_b(k_m)}$). Pour m assez grand, on trouve donc

$$b_{k_m} < a_{h_{m-1}+1} \leq a_{h_m} < b_{k_m+1} \leq b_{k_{m+1}}.$$

Supposons que $a_{h_m} < n \leq b_{k_{m+1}} < a_{h_m+1} \leq a_{h_{m+1}}$. Le lemme 4 donne $v(a+k_{a,n}) = \varphi_a(h_m+1)$ et $v(b+k_{b,n}) \leq \varphi_b(k_{m+1}) = \ell_{2m+1}$. Le lemme 2 montre alors que :

$$\varphi_a(h_m+1) - [\log_p(n)] \leq v(\left(a\right)_n) - v((n-1)!) \leq \varphi_a(h_m+1)$$

$$0 \leq v(\left(b\right)_n) - v((n-1)!) \leq \ell_{2m+1}.$$

Il en résulte que l'on a pour m assez grand (et donc a_{h_m} grand) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}v(\left(a\right)_n\left(b\right)_n) - \frac{2}{n}v((n-1)!) &\geq \frac{\varphi_a(h_m+1)}{n} - \frac{1}{n}[\log_p(n)] \\ &\geq \frac{\varphi_a(h_m+1)}{b_{k_{m+1}}} - \frac{1}{a_{h_m}}[\log_p(a_{h_m})] \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{\varphi_a(h_m+1)}{p^{\ell_{2m+1}}}\end{aligned}$$

avec, pour $n = b_{k_{m+1}}$,

$$\frac{1}{n}v(\left(a\right)_n\left(b\right)_n) - \frac{2}{n}v((n-1)!) \leq \frac{\varphi_a(h_m+1)+\ell_{2m+1}}{b_{k_{m+1}}} \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{\varphi_a(h_m+1)}{p^{\ell_{2m+1}}}$$

On trouvera de même, pour $b_{k_m} < n \leq a_{h_m} < b_{k_m+1} \leq b_{k_{m+1}}$:

$$\frac{1}{n}v(\left(a\right)_n\left(b\right)_n) - \frac{2}{n}v((n-1)!) \geq \frac{\varphi_b(k_m+1)}{a_{h_m}} - \frac{1}{b_{k_m}}[\log_p(b_{k_m})] \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{\varphi_b(k_m+1)}{p^{\ell_{2m}}}$$

avec, pour $n = a_{h_m}$,

$$\frac{1}{n}v(\left(a\right)_n\left(b\right)_n) - \frac{2}{n}v((n-1)!) \leq \frac{\varphi_b(k_m+1)+\ell_{2m}}{a_{h_m}} \underset{m\to\infty}{\sim} \frac{\varphi_b(k_m+1)}{p^{\ell_{2m}}}. \qquad \square$$

3 Construction d'un nombre de Liouville

On se donne une suite (r_k) strictement croissante de réels telle que $r_0 = 0$ et on définit l'application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence :

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(h+1) = [r_{i_h} p^{\varphi(h)}] + h$$

dans laquelle le nombre i_h est défini par la décomposition unique :

$$(*) \qquad h = \frac{m_h(m_h+1)}{2} - i_h \quad \text{avec } 1 \leq i_h \leq m_h.$$

Remarquons que cette décomposition s'écrit aussi, en utilisant la parité de m_h, sous la forme :

$$(**)\ \ h = m(2m+1) - i_h \quad (1 \leq i_h \leq 2m) \qquad \text{ou} \qquad h = (2m-1)m - i_h \quad (1 \leq i_h \leq 2m-1).$$

On a $\varphi(h) \geq h$ donc $\lim_{h\to\infty} \dfrac{h}{p^{\varphi(h)}} = 0$. L'encadrement

$$r_{i_h} p^{\varphi(h)} + h - 1 < \varphi(h+1) \leq r_{i_h} p^{\varphi(h)} + h$$

montre alors que la suite $\varphi(h)$ satisfait la propriété suivante :

$$\lim_{\substack{h\to\infty \\ i_h=k}} \frac{\varphi(h+1)}{p^{\varphi(h)}} = r_k$$

On considère alors le nombre :

$$\alpha = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{m_h} p^{\varphi(h)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m\geq i/2} p^{\varphi\left(m(2m+1)-i\right)} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m>i/2} p^{\varphi\left((2m-1)m-i\right)}$$

et, pour $k \geq 0$ entier, on pose :

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m\geq i/2} p^{\varphi\left(m(2m+1)-i\right)} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \sum_{m>i/2} p^{\varphi\left((2m-1)m-i\right)}.$$

On a donc :

$$\alpha - \gamma_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} \sum_{m\geq i/2} p^{\varphi\left(m(2m+1)-i\right)} - \sum_{i=1}^{k} \sum_{m>i/2} p^{\varphi\left((2m-1)m-i\right)}.$$

Cette construction, centrale dans le contre-exemple, est résumée dans le tableau suivant. Les colonnes du tableau, sauf la première, sont indexées par les entiers h de l'intervalle $[\![(2n-1)(n-1),(2n+1)(n+2)[\![$. La première (resp. deuxième) ligne contient, dans la h-ème colonne, le nombre m_h (resp. i_h) intervenant dans la décomposition $(*)$ du nombre h. Chacun des nombres (de Liouville) a situés dans la première colonne des cinq lignes suivantes s'écrit sous la forme $a = \sum \varepsilon_a(h)\, p^{\varphi(h)}$. Dans la h-ème colonne, on a mis le signe de $\varepsilon_a(h)$. L'absence de signe signifie que $\varepsilon_a(h) = 0$. Les trois dernières lignes indiquent la définition des suites ℓ_m, h_m et k_m que nous allons introduire dans la démonstration. La présence du nombre m dans la h-ème colonne signifie que $\ell_m = \varphi(h)$ (resp. $\varphi_a(m) = \varphi(h)$, $\varphi_b(m) = \varphi(h)$). Nous laissons au lecteur le soin de faire les petites modifications nécessaires dans le cas où $k = 0$.

m_h	$2m-1$		$2m$		$2m+1$	
i_h	2m-1 $\cdots$ k+1	k $\cdots$ 1	2m $\cdots$ k+1	k $\cdots$ 1	2m+1 $\cdots$ k+1	k $\cdots$ 1
α	$- \cdots -$	$- \cdots -$	$+ \cdots +$	$+ \cdots +$	$- \cdots -$	$- \cdots -$
$\alpha-\gamma_k$		$- \cdots -$	$+ \cdots +$			$- \cdots -$
$-\gamma_k$	$+ \cdots +$			$- \cdots -$	$+ \cdots +$	
$a=\gamma_k-\alpha$		$+ \cdots +$	$- \cdots -$			$+ \cdots +$
$b=\gamma_k$	$- \cdots -$			$+ \cdots +$	$- \cdots -$	
$\ell_? = \varphi(h)$	$2m-1$		$2m$		$2m+1$	
$\varphi_a(?) = \varphi(h)$		$h_{m-1}+1$	h_m			h_m+1
$\varphi_b(?) = \varphi(h)$	k_m			k_m+1	k_{m+1}	

Proposition 8. — *Avec les notations précédentes, on a pour tout $k \geq 0$:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} v\big((\alpha-\gamma_k)_n(-\gamma_k)_n\big) = \frac{2}{p-1}+r_k, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} v\big((\gamma_k-\alpha)_n(\gamma_k)_n\big) = \frac{2}{p-1}+r_{k+1}.$$

Preuve : Pour calculer la limite supérieure, on reprend les notations du lemme 5. Si $k=0$, les fonctions ε associées aux nombres $-\gamma_0$ et $\alpha-\gamma_0$ ne prennent que la valeur $+1$. Donc $\mathbb{N}^+_{-\gamma_0} = \mathbb{N}^+_{\alpha-\gamma_0} = \mathbb{N}$ et le lemme 5 donne immédiatement le résultat annoncé ($r_0 = 0$). Si $k>0$, pour $a = -\gamma_k$, (resp. $a = \alpha - \gamma_k$) on a $\varepsilon_a(h) = -1$ pour les entiers consécutifs $h = m(2m+1) - i$ (resp. $h = (2m-1)m - i$) avec $1 \leq i \leq k$. Dans la construction de l'ensemble $\mathbb{N}^-_a$, on peut donc regrouper les intervalles $⟧a_h, a_{h+1}⟧$ correspondants en un seul intervalle $⟧a_{m(2m+1)-k}, a_{m(2m+1)}⟧$ (resp. $⟧a_{(2m-1)m-k}, a_{(2m-1)m}⟧$). En remplaçant, pour simplifier, les bornes des intervalles par leur équivalent donné par le lemme 3 (il est évident ici que $\varphi_a(h) - \varphi_a(h-1) \to \infty$), on obtient finalement

$$\mathbb{N}^-_{-\gamma_k} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} ⟧p^{\varphi(m(2m+1)-k)}\big(1+\mathrm{o}(m)\big), p^{\varphi((2m+1)m))}\big(p-1+\mathrm{o}(m)\big)⟧,$$

$$\mathbb{N}^-_{\alpha-\gamma_k} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} ⟧p^{\varphi((2m-1)m-k)}\big(1+\mathrm{o}(m)\big), p^{\varphi((2m-1)m)}\big(p-1+\mathrm{o}(m)\big)⟧.$$

On constate alors que ces deux ensembles ont une intersection finie (car vide pour m assez grand). Autrement dit, on a $\mathbb{N}^-_{-\gamma_k} \subset \mathbb{N}^+_{\alpha-\gamma_k}$ et $\mathbb{N}^-_{\alpha-\gamma_k} \subset \mathbb{N}^+_{-\gamma_k}$. Le lemme 5 montre alors que :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} v\big((-\gamma_k)_n(\alpha-\gamma_k)_n\big) = \frac{2}{p-1} + \limsup_{\substack{h\to\infty \\ 1\leq i_h\leq k}} \frac{\varphi(h+1)}{p^{\varphi(h)}} = \frac{2}{p-1} + r_k.$$

Pour le calcul de la limite inférieure, nous appliquons le lemme 7 avec

$$a = \gamma_k - \alpha, \quad b = \gamma_k \quad \text{et} \qquad \ell_m = \varphi\Big(\frac{m(m+1)}{2} - k - 1\Big).$$

On constate sur le tableau, y compris si $k=0$, qu'il existe des nombres h_m et k_m tels que :

$$\varphi_a(h_m) = \ell_{2m}, \quad \varepsilon(h_m) = -1 \qquad \varphi_b(k_m) = \ell_{2m-1}, \quad \varepsilon(k_m) = -1$$

(leur valeur exacte est sans importance) et que l'on a :

$$\varphi_a(h_m+1) = \varphi\big((2m+1)(m+1)-k\big) > \ell_{2m+1}, \qquad \varphi_b(k_m+1) = \varphi\big(m(2m+1)-k\big) > \ell_{2m}.$$

On obtient

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} v\big((\gamma_k-\alpha)_n(\gamma_k)_n\big) = \frac{2}{p-1} + \liminf_{m\to\infty} \frac{\varphi\Big(\frac{m(m+1)}{2} - k\Big)}{p^{\varphi\big(\frac{m(m+1)}{2}-k-1\big)}} = \frac{2}{p-1} + r_{k+1}. \qquad \square$$

4 Equation différentielle avec des solutions dans une infinité de couronnes

Lemme 9. — *Soit* (a_n) *et* (b_n) *des suites de* $\mathbb{Q}_p$*. La série de Laurent* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{-n}$ *converge pour* $-\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} v(a_n) < v(x) < \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} v(b_n)$.

Preuve : La série converge en effet si et seulement si, pour n assez grand, on a :

$$\frac{1}{n} v(a_n) + v(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n} v(b_n) - v(x) > 0. \qquad \square$$

Proposition 10. — *Soit* q *un nombre de* $\mathbb{Q}_p$ *et* α *le nombre (de Liouville) défini dans le paragraphe 3 . L'équation différentielle :*

$$L_\alpha(f) = x^3 f'' + (1-\alpha) x^2 f' - q f = 0$$

a, pour chaque entier k*, une solution de la forme* $x^{\gamma_k} f_k(x)$ *où la fonction* f_k *est définie par*

$$f_k(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\gamma_k - \alpha\big)_n \big(\gamma_k\big)_n}{q^n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{\big(-\gamma_k + \alpha + 1\big)_n \big(-\gamma_k + 1\big)_n} x^{-n}$$

et converge sur la couronne $\mathcal{C}_k = \{x; v(q) - \frac{2}{p-1} - r_{k+1} < v(x) < v(q) - \frac{2}{p-1} - r_k\}$.

Preuve : Le domaine de convergence de la série de Laurent f_k est une conséquence immédiate de la proposition 8 et du lemme 9 car $\big(a+1\big)_n = \frac{1}{a}\big(a\big)_n$.
Par définition des symboles de Pochhammer, pour $n \geq 0$, on a

$$\big(\gamma_k - \alpha\big)_{n+1}\big(\gamma_k\big)_{n+1} = (\gamma_k + n - \alpha)(\gamma_k + n)\ \big(\gamma_k - \alpha\big)_n \big(\gamma_k\big)_n$$

$$\frac{1}{\big(-\gamma_k + \alpha + 1\big)_n \big(-\gamma_k + 1\big)_n} = \frac{(\gamma_k - n - 1 - \alpha)(\gamma_k - n - 1)}{\big(-\gamma_k + \alpha + 1\big)_{n+1} \big(-\gamma_k + 1\big)_{n+1}}.$$

Autrement dit, si on pose $f_k(x) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}\, x^{-n}$, on trouve

$$u_0 = 1, \qquad q\, u_{n+1} = (-\alpha + \gamma_k + n)(\gamma_k + n)\, u_n$$

pour tout n dans $\mathbb{Z}$. Ceci signifie que $L_\alpha(x^{\gamma_k} f(x)) = L_\alpha\Big(\sum_{x\in\mathbb{Z}} u_n\, x^{n+\gamma_k}\Big) = 0.$ $\square$

Remarque 11. — L'équation différentielle L_α a un point singulier irrégulier en 0. Au voisinage de ce point, elle a deux solutions formelles

$$x^{frac2\alpha+14} \exp(\frac{2}{y}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(2\frac{1}{2} + \alpha\big)_n \big(2\frac{1}{2} - \alpha\big)_n}{4^n\, n!}\ y^n \qquad \text{avec} \qquad y = \pm\sqrt{\frac{x}{q}}.$$

Pour $p > 2$, les nombres $\alpha \pm \frac{1}{2}$ ne sont pas de Liouville et la partie analytique converge dans le disque $v(y) > -\frac{1}{p-1}$ c'est-à-dire $v(x) > v(q) - \frac{2}{p-1}$. De même, le nombre $\frac{2\alpha+1}{4}$ n'est pas de Liouville et le facteur $x^{frac2\alpha+14}$ n'aura pas d'incidence sur le rayon de convergence générique. En conclusion, pour $v(t) > v(q) - \frac{2}{p-1}$, les solutions de L_α au voisinage d'un point t convergent dans le même disque que la fonction

$$\exp\left(2\sqrt{\frac{q}{x}} - 2\sqrt{\frac{q}{t}}\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2 \frac{\sqrt{q}(t-x)}{\sqrt{xt}(\sqrt{t} + \sqrt{x})}\right)^n$$

c'est-à-dire pour $v(t-x) > \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2} v(q) + \frac{3}{2} v(t)$ $\big[$car $v(\sqrt{t} + \sqrt{x}) = v(\sqrt{t})\big]$,
autrement dit L_α est de pente $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ sur le disque $\{x; v(q) - \frac{2}{p-1} < v(x)\}$.
Pour $p = 2$, les calculs sont un peu plus délicats mais on vérifie que L_α est de pente $\frac{1}{2}$ sur la couronne $\{x; v(q) - \frac{2}{p-1} < v(x) < v(q) + 2\}$, et de pente 1 sur le disque $\{x; v(q) + 2 < v(x)\}$.

Remarque 12. — L'équation différentielle L_α a un point singulier régulier à l'infini. Au voisinage de ce point, l'espace de ses solutions est engendré par les deux solutions formelles :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(-\alpha+1)_n n!} x^{-n} \qquad \text{et} \qquad x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!(\alpha+1)_n} x^{-n}$$

dont les parties analytiques convergent pour

$$\begin{aligned} v(x) < \liminf_{n\to\infty} \Big(v(q) - \frac{v(n!) + v\big((\alpha+1)_n\big)}{n} \Big) &= v(q) - \frac{2}{p-1} - \limsup_{\substack{h\to\infty \\ m_h = 2m-1}} \frac{\varphi(h+1)}{p^{\varphi(h)}} \\ &= v(q) - \frac{2}{p-1} - \lim_{k\to\infty} r_k. \end{aligned}$$

Bien entendu le théorème de transfert de [**1**] n'est pas applicable dans cette situation car les exposants formels à l'infini $(1-\alpha, 0)$ ont une différence qui est un nombre de Liouville.

Proposition 13. — *L'équation différentielle L_α satisfait la condition de Robba sur la couronne $\mathcal{C} = \{x; v(x) < v(q) - \frac{2}{p-1}\}$.*

Preuve (première méthode) : Pour $v(t) < v(q) - \frac{2}{p-1}$, et sauf si la valuation $v(t)$ est égale à l'un des r_k, le point t est contenu dans l'une des couronnes $\mathcal{C}_k$. La fonction

$$\text{“}x^{\gamma_k}\text{”} := (1 + \frac{x-t}{t})^{\gamma_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma_k}{n} \left(\frac{x-t}{t}\right)^n$$

converge dans le disque $D(t, v(t)) = \{x; v(x-t) > v(t)\}$. L'équation L_α a donc une solution $f(x-t)$ qui est analytique bornée dans ce disque. En particulier, f ne s'y annule pas.
Maintenant, si g est une autre solution de L_α au voisinage de t, le wronskien $w = fg' - gf'$ vérifie la relation $x^3 w' + (1-\alpha)x^2 w = 0$ et vaut, à une constante multiplicative près, $x^{\alpha-1}$. Il est donc aussi analytique (et borné) dans le disque $D(t, v(t))$. Il en résulte que la fonction $(g/f)' = w/f^2$ est analytique (et bornée) dans ce disque et, par suite, il en est de même de la fonction g (mais en général elle ne sera pas bornée). On vient donc de démontrer que, si $v(t)$ n'est pas dans l'ensemble des r_k, toutes les solutions de L_α au voisinage du point t convergent dans le disque $D(t, v(t))$. Le théorème de continuité du rayon de convergence dit alors qu'il en est de même si $v(t) = r_k$.
Preuve (deuxième méthode) : Si a est un nombre de $\mathbb{Z}_p$ non Liouville, l'équation L_a a un point singulier régulier à l'infini avec des exposants formels $(1-a, 0)$ dont la différence est non Liouville. Par ailleurs, les calculs faits dans la remarque 11 et la continuité de la fonction rayon de convergence montrent que L_a est soluble pour $r = v(q) - \frac{2}{p-1}$ (c'est-à-dire que, si $v(t) = v(q) - \frac{2}{p-1}$, les solutions de L_α au voisinage de t sont analytiques dans le disque $D(t, v(t))$). Le théorème de transfert s'applique et montre que L_a satisfait la condition de Robba sur la couronne $\mathcal{C} = \{x; v(x) < v(q) - \frac{2}{p-1}\}$. Si on définit la suite de matrice G_n par :

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_{n+1} = xG_n' + G_n \begin{pmatrix} n & 1 \\ \frac{q}{x} & n+1-a \end{pmatrix},$$

ceci signifie que $\liminf \frac{1}{n} v(G_n(t)) \geq 0$ pour $v(t) < v(q) - \frac{2}{p-1}$. Comme les coefficients de la matrice G_n sont des polynômes de $\mathbb{Q}[a, \frac{1}{x}]$, comme la majoration est valable pour tous les nombres a de $\mathbb{Z}_p$ qui ne sont pas de Liouville et comme ces derniers sont denses dans $\mathbb{Z}_p$, elle est valable pour tous les nombres de $\mathbb{Z}_p$ et en particulier pour α. □

Proposition 14. — *Le couple $(\alpha, 0)$ (resp. $(\alpha-\gamma_k, \gamma_k)$ pour $k \geq 0$) est un représentant de l'exposant p-adique de l'équation différentielle L_α sur la couronne $\mathcal{C} = \{x; v(x) < v(q)+\frac{2}{p-1}\}$.*

Preuve : Pour $0 \leq k \leq \infty$ Notons $\mathcal{A}_k$ l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $\mathcal{C}_k$ (resp. $\mathcal{C}_\infty = \{x; v(x) < v(q) - \frac{2}{p-1} - \lim_{k\to\infty} r_k\}$) à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$.
D'après la proposition 10 (resp. la remarque 12 avec $\gamma_\infty = 0$), on a une suite exacte de $\mathcal{A}_k$-modules différentiels :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{A}_k[D]/\mathcal{A}_k[D].L_\alpha \xrightarrow{\theta} x^{\gamma_k}\, \mathcal{A}_k \longrightarrow 0$$

où la flèche θ est définie par $\theta(\sum a_i(x)\, D^i) = \sum a_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i \left(x^{\gamma_k} f_k(x)\right)$. Comme $\mathbb{Q}_p$ est sphériquement complet car à valuation discrète, bien que $\mathcal{A}_k$ ne soit pas noetherien, la catégorie des $\mathcal{A}_k$-modules différentiels est abélienne et, plus précisémment, le noyau $\mathcal{N}$ de θ est un $\mathcal{A}_k$-module (différentiel) de rang 1 ([**4**] théorème 3.2-5).
Il est facile de vérifier que (γ_k) est un représentant de l'exposant de $x^{\gamma_k}\, \mathcal{A}_k$ sur la couronne $\mathcal{C}_k$ (pour les modules de rang 1, l'exposant a une seule composante et il n'y a pas de problème de différence non. Liouville !). Si (γ) est un représentant de l'exposant de $\mathcal{N}$ sur la couronne $\mathcal{C}_k$, le théorème 5.4-5 de [**3**] affirme que (γ_k, γ) est un repésentant de l'exposant de $\mathcal{A}_k[D]/\mathcal{A}_k[D].L_\alpha$ (c'est-à-dire de L_α) sur la couronne $\mathcal{C}_k$.
Maintenant, une application immédiate de la définition de l'exposant permet de démontrer (ce qui malheureusement n'est pas fait dans [**3**]) que, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}_k$-module différentiel de rang m satisfaisant la condition de Robba sur la couronne $\mathcal{C}_k$ et si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ y est un représentant de son exposant, alors le module différentiel de rang 1 (wronskien) $\det(\mathcal{M}) := M^{\wedge n}$ satisfait la condition de Robba et $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ est un représentant de son exposant sur cette couronne. En appliquant cela au module différentiel $\mathcal{A}_k[D]/\mathcal{A}_k[D].L_\alpha$, on trouve $\gamma_k + \gamma \equiv \alpha \pmod{\mathbb{Z}}$.
Pour terminer la démonstration on utilise le fait que l'exposant de L_α sur la couronne $\mathcal{C}$ est aussi l'exposant de L_α sur n'importe quelle sous-couronne, par exemple sur $\mathcal{C}_k$ ce qui est une conséquence des deux remarques élémentaire suivantes : d'une part la définition de l'exposant sur une couronne implique que c'est aussi l'exposant sur une sous-couronne et, d'autre part, quelle que soit la couronne l'exposant est un élément bien défini de $\mathbb{Z}_p^m / \overset{\mathfrak{E}}{\sim}$. □

Remarque 15. — Dans la démonstration de la proposition 14 nous avons utilisé de manière fondamentale le théorème 5.4-5 de [**3**] reliant l'exposant du terme central d'une suite exacte de modules différentiels à ceux des deux termes extrêmes. La démonstration est relativement naturelle si on utilise la définition de l'exposant donnée dans [**3**] mais il semble difficile de l'obtenir directement à partir de celle qui est utilisée dans [**8**]. On pourra d'ailleurs se convaincre de ce fait en essayant de démontrer la proposition 14 en utilisant cette deuxième définition. La méthode astucieuse de Dwork a bien simplifié la présentation originale de l'exposant pour toutes les autres propriétés mais est moins adaptée sur ce point particulier. Les différences entre les deux définitions, exposées dans la remarque suivante, pourraient expliquer une telle situation.

Remarque 16. — Etant donné un module différentiel $\mathcal{M}$ de rang m satisfaisant la condition de Robba sur une couronne, la première définition de son exposant est donnée dans [**3**]. Elle repose sur la notion de suites d'éléments de $\mathbb{R}^m$ "admissibles pour $\mathcal{M}$" (définition 5.1-2) . Parmi toutes les suites admissibles, celles qui sont "bien ordonnées" (définition 5.1-7) correspondent aux approximations modulo les puissances croissantes de p d'un élément de $\mathbb{Z}_p^m$. On montre alors que les suites admissibles pour $\mathcal{M}$ sont exactement les éléments d'une classe d'équivalence pour une relation d'équivalence qui, par restriction aux suites bien ordonnées, donne l'exposant (définition 5.3-6).

La deuxième définition de l'exposant de $\mathcal{M}$ se trouve dans [**8**]. On montre que l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}_p^m$ auxquels on peut associer une suite de matrices satisfaisant certaines conditions de croissance (4.01,...,4.04) est non vide et contenu dans une classe d'équivalence pour la relation $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$. Il n'est pas du tout clair que l'on obtienne ainsi tous les éléments d'une classe d'équivalence. Par contre, il est facile de voir que chacun d'entre eux correspond à une suite admissible (bien ordonnée). Ceci montre que les deux définitions sont équivalentes.

Définition 17. — Rappelons que l'on note $\mathcal{R}$ l'anneau des séries de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\, x^n$ dont les coefficients u_n sont dans $\mathbb{Q}_p$ et qui convergent dans une couronne $0 < v(x) < \varepsilon$ pour un nombre $\varepsilon > 0$ non fixé.

Proposition 18. — *Si $v(q) > \frac{2}{p-1}$ et si $\lim_{k\to\infty} r_k = v(q) - \frac{2}{p-1}$, le $\mathcal{R}$-module différentiel $\mathcal{R}[D]/\mathcal{R}[D].L_\alpha$ est de pente nulle et cependant L_α n'a aucune solution de la forme $x^\gamma f(x)$ avec f analytique dans une couronne $0 < |x| < \varepsilon\}$.*

Preuve : Comme l'équation différentielle L_α satisfait la condition de Robba sur la couronne $\{x; 0 < v(x) < v(q) - \frac{2}{p-1}$, elle est de pente nulle sur cet intervalle et, par définition, le module différentiel $\mathcal{R}[D]/\mathcal{R}[D].L_\alpha$ est de pente nulle.
Si L_α avait une solution non nulle de la forme $x^\gamma f(x)$ avec f analytique non nulle dans la couronne $0 < |x| < \varepsilon\}$, pour k assez grand, elle aurait deux solutions $x^{\gamma_k} f_k(x)$ et $x^\gamma f(x)$ avec f_k et f analytiques dans la couronne $\mathcal{C}_k$. Par un calcul direct du wronskien, ce qui donne :

$$x^{\gamma_k+\gamma}\Big(\frac{\alpha-\gamma}{x} f(x)f_k(x) + f(x)f_k'(x) - f'(x)f_k(x)\Big) = \lambda\, x^{\alpha-1},$$

ou en utilisant l'application θ de la proposition 14, on constate qu'il n'y aurait que deux possibilités :
• soit $\gamma = \gamma_k + n$, ce qui impliquerait $f(x) = \lambda x^{-n} f_k(x)$ et f ne serait pas analytique dans une couronne strictement plus grande que $\mathcal{C}_k$,
• soit $\gamma = \alpha - \gamma_k + n$, et des calculs analogues à ceux faits dans les paragraphes précédents montrent que f serait analytique dans la couronne $\{x; v(q) - \frac{2}{p-1} < v(x) < v(q) - \frac{2}{p-1} - \lim_{k\to\infty} r_k\}$ qui est vide par construction. □

5 Références

[1] G. CHRISTOL.– Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers. *Astérisque* 119-120 (1984) 151-168.

[2] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II. *Ann. Inst. Fourier* 43 (1993) 1545-1574.

[3] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II. *Annals of Math.* 146 (1997) 345-410.

[4] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III. *Annals of Math.* 151 (2000) 385-457.

[5] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT.– Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques IV. *Invent. math.*, 143, 629-672 (2001)

[6] P. COLMEZ.– *Séminaire Bourbaki*

[7] B. DWORK.– On p-adic differential equation II. *Annals of Math.*, 98 (1973) 366-376.

[8] B. DWORK.– On exponents of p-adic differential modules. *J. reine angew. Math.*, 484 (1997) 85-126.

[9] M. FONTAINE.– Représentations p-adiques des corps locaux. *Grothendieck Feschrift II*, Progress in Math. 87 (1990) 249-309.

[10] Z. MEBKHOUT.– Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière. *Amer. J. Math.*, 119 (1997) 1027-1081.

[11] Z. MEBKHOUT.– Analogue p-adique du thorme de Turrittin et le thorme de la monodromie p-adique, *Invent. Math.* 148, 319-351 (2002)