

## FEUILLE N° 5 STATISTIQUES INFÉRENTIELLES

### Exercice 1

On considère deux dés équilibrés,  $D_1$  possède 5 faces rouges et une face blanche et  $D_2$  1 face rouge et 5 faces blanches. On choisit un dé au hasard et on le lance jusqu'à obtenir une face rouge. On répète la même expérience trois fois, et on obtient les résultats suivants :

Première expérience	Rouge apparaît au	3 <sup>e</sup> lancer
Deuxième expérience	Rouge apparaît au	5 <sup>e</sup> lancer
Troisième expérience	Rouge apparaît au	4 <sup>e</sup> lancer

1. Montrer que, pour le dé  $D_1$ , cela se produit avec probabilité  $5.7424 \cdot 10^{-8}$ .
2. Montrer que, pour le dé  $D_2$ , cela se produit avec probabilité  $8.9725 \cdot 10^{-4}$ .
3. Quel dé choisiriez-vous ?

### Exercice 2

Soit  $x_1, \dots, x_n$  la réalisation d'un échantillon distribué selon une loi normale.

1. Supposons que la loi normale a pour moyenne  $\mu$  et variance 1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\mu$ .
2. Supposons que la loi normale a pour moyenne nulle et variance  $\sigma^2$ . Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\sigma^2$ . Calculer son biais et en déduire un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ .

### Exercice 3

Soit  $x_1, \dots, x_n$  la réalisation d'un échantillon distribué selon une loi dont la densité est donnée par

$$f_\delta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\delta)} & \text{pour } x \geq \delta \\ 0 & \text{pour } x < \delta. \end{cases}$$

Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\delta$ .

### Exercice 4

Soit  $x_1, \dots, x_n$  une réalisation d'un échantillon de loi de Pareto de paramètre  $\alpha$ , c'est-à-dire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} 1 - t^{-\alpha} & \text{pour } x \geq 1 \\ 0 & \text{pour } x < 1. \end{cases}$$

Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $1/\alpha$ .

### Exercice 5

On reprend l'exercice 6 de la Feuille n° 2 avec les types de plantes. On pose

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la feuille observée est de type amidonnée verte} \\ 2 & \text{si la feuille observée est de type sucrée blanche} \\ 3 & \text{si la feuille observée est de type amidonnée blanche} \\ 4 & \text{si la feuille observée est de type sucrée verte.} \end{cases}$$

La distribution de  $X$  est donnée par

---

$a$	1	2	3	4
$p(a)$	$(2 + \theta)/4$	$\theta/2$	$(1 - \theta)/4$	$(1 - \theta)/4$

et  $p(a) = 0$  pour toutes les autres valeurs de  $a$ . On cherche l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .

1. Déterminer la vraisemblance  $L(\theta)$  et la log-vraisemblance  $\ell(\theta)$ .
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .
3. On suppose que l'on a compté  $n$  feuilles :  $n_1$  de type amidonnée verte,  $n_2$  de type sucrée blanche,  $n_3$  de type amidonnée blanche et  $n_4$  de type sucrée verte ( $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ ). Donner la formule générale de l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .