

FEUILLE N° 5
STATISTIQUES INFÉRENTIELLES

Exercice 1

On considère deux dés équilibrés, D_1 possède 5 faces rouges et une face blanche et D_2 1 face rouge et 5 faces blanches. On choisit un dé au hasard et on le lance jusqu'à obtenir une face rouge. On répète la même expérience trois fois, et on obtient les résultats suivants :

Première expérience	Rouge apparaît au	3 ^e lancer
Deuxième expérience	Rouge apparaît au	5 ^e lancer
Troisième expérience	Rouge apparaît au	4 ^e lancer

1. Montrer que, pour le dé D_1 , cela se produit avec probabilité $5.7424 \cdot 10^{-8}$.
2. Montrer que, pour le dé D_2 , cela se produit avec probabilité $8.9725 \cdot 10^{-4}$.
3. Quel dé choisiriez-vous ?

Exercice 2

Soit x_1, \dots, x_n la réalisation d'un échantillon distribué selon une loi normale.

1. Supposons que la loi normale a pour moyenne μ et variance 1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ .
2. Supposons que la loi normale a pour moyenne nulle et variance σ^2 . Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2 . Calculer son biais et en déduire un estimateur sans biais de σ^2 .

Exercice 3

Soit x_1, \dots, x_n la réalisation d'un échantillon distribué selon une loi dont la densité est donnée par

$$f_\delta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\delta)} & \text{pour } x \geq \delta \\ 0 & \text{pour } x < \delta. \end{cases}$$

Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de δ .

Exercice 4

Soit x_1, \dots, x_n une réalisation d'un échantillon de loi de Pareto de paramètre α , c'est-à-dire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} 1 - t^{-\alpha} & \text{pour } x \geq 1 \\ 0 & \text{pour } x < 1. \end{cases}$$

Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $1/\alpha$.

Exercice 5

On reprend l'exercice 6 de la Feuille n° 2 avec les types de plantes. On pose

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la feuille observée est de type amidonnée verte} \\ 2 & \text{si la feuille observée est de type sucrée blanche} \\ 3 & \text{si la feuille observée est de type amidonnée blanche} \\ 4 & \text{si la feuille observée est de type sucrée verte.} \end{cases}$$

La distribution de X est donnée par

a	1	2	3	4
$p(a)$	$(2 + \theta)/4$	$\theta/2$	$(1 - \theta)/4$	$(1 - \theta)/4$

et $p(a) = 0$ pour toutes les autres valeurs de a . On cherche l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .

1. Déterminer la vraisemblance $L(\theta)$ et la log-vraisemblance $\ell(\theta)$.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .
3. On suppose que l'on a compté n feuilles : n_1 de type amidonnée verte, n_2 de type sucrée blanche, n_3 de type amidonnée blanche et n_4 de type sucrée verte ($n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$). Donner la formule générale de l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ .